Werk

Titel: Mathematische Annalen

Ort: Leipzig

Jahr: 1889

Kollektion: mathematica

Werk Id: PPN235181684_0033

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN235181684_0033 | LOG_0007

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen.

Zweiter Theil*).

Von

WILHELM KILLING in Braunsberg.

Der vorliegende Theil meiner Untersuchungen über die Zusammensetzung der Transformationsgruppen behandelt die wichtige Frage nach der Bildung der einfachen Gruppen, d. h. derjenigen, welche keine invarianten Untergruppen besitzen. Nach dieser Richtung hin kommt der vorliegende Theil, wie ich glaube, zu einem vollständigen Abschluss, und schon aus diesem Grunde, vor Allem aber bei der hohen Bedeutung der einfachen Gruppen für die ganze Theorie, glaubte ich die folgenden Untersuchungen gesondert veröffentlichen zu dürfen. Andererseits habe ich bereits in § 12 ein allgemeineres Problem aufgestellt und dessen Lösung in etwas vorbereitet. Es wird also die nächste Aufgabe sein, in einer folgenden Mittheilung dieses Problem in engem Anschluss an die hier gefundenen Resultate vollständig zu lösen.

Den Grundgedanken, auf dem die in diesem Theile durchgeführten Untersuchungen ruhen, habe ich bereits in den Vorbemerkungen zu meiner ersten Mittheilung angegeben. Ich möchte aber die vorliegende Untersuchung auch denen leicht verständlich machen, welche den ersten Theil nicht gelesen haben. Daher habe ich die Beweise von den früher gefundenen Resultaten im Ganzen unabhängig gemacht. Nur einmal in § 10 benutze ich einen in § 9 bewiesenen Lehrsatz und in § 16 verweise ich auf Betrachtungen, welche in § 8 durchgeführt sind; hierdurch wird aber das Verständniss selbst nicht beeinträchtigt. Um dasselbe noch mehr zu erleichtern, mögen einige weitere Bemerkungen gestattet sein.

*) Vergl. den unter gleichem Titel erschienenen Aufsatz in Bd. 31 dieser Annalen, p. 252 ff.

Wir bestimmen die Gruppe durch r infinitesimale Transformationen, welche symbolisch mit $X_1 f \dots X_r f$ bezeichnet werden. Bildet man nach bekannter Vorschrift (X, X_x) , so muss sein:

$$(X, X_x) = \sum_{\varrho} c_{x\varrho} X_{\varrho} f,$$

und es müssen die Jacobi'schen Relationen bestehen:

$$\sum_{\varrho} \{c_{x\lambda\varrho}(X_{\varrho} X_{\lambda}) + c_{\lambda\varrho x}(X_{\varrho} X_x) + c_{x\varrho\lambda}(X_{\varrho} X_{\lambda})\} = 0,$$

von denen die vorstehende kurz mit $(\iota \kappa \lambda)$ bezeichnet werden soll.

Wenn bei Beschränkung von ι, κ auf die ersten $m (< r)$ Marken $1 \dots m$ sich die $\frac{m(m-1)}{2}$ Ausdrücke (X, X_x) durch $X_1 f \dots X_m f$ darstellen lassen, so bestimmen $X_1 f \dots X_m f$ eine Untergruppe der gegebenen r -gliedrigen Gruppe. Diese ist *invariant*, wenn für $\iota = 1 \dots m, \varrho = 1 \dots r$ sich auch alle (X, X_{ϱ}) durch $X_1 f \dots X_m f$ darstellen lassen. Wie diese Begriffe allgemein definiert werden, braucht wohl nicht erwähnt zu werden.

Meine Untersuchungen über die Zusammensetzung der Gruppen gehen von dem Problem aus, die zweigliedrigen Untergruppen zu finden, denen eine beliebig gewählte eingliedrige Untergruppe $\Sigma \eta_i X_i f$ angehört. Sollen die Transformationen dieser Untergruppe nicht mit einander vertauschbar sein, so müssen sich $r + 1$ Grössen $\omega, \xi_1 \dots \xi_r$ so bestimmen lassen, dass ist:

$$\left(\sum \eta_i X_i, \sum \xi_x X_x \right) = \sum_{\iota \neq \varrho} \eta_{\iota} \xi_x c_{\iota x \varrho} X_{\varrho} f = \omega \sum_{\varrho} \xi_{\varrho} X_{\varrho} f.$$

Um daher alle zweigliedrigen Untergruppen zu finden, denen $\Sigma \eta_i X_i f$ angehört, hat man zunächst ω mittelst der Gleichung

$$\begin{vmatrix} \sum \eta_i c_{i11} - \omega & \sum \eta_i c_{i21} & \dots & \sum \eta_i c_{ir1} \\ \sum \eta_i c_{i12} & \sum \eta_i c_{i22} - \omega & \dots & \sum \eta_i c_{ir2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum \eta_i c_{i1r} & \sum \eta_i c_{i2r} & \dots & \sum \eta_i c_{irr} - \omega \end{vmatrix} \\ = \omega^r - \omega^{r-1} \psi_1(\eta) + \omega^{r-2} \psi_2(\eta) - \dots \pm \omega \psi_{r-1}(\eta) = 0$$

zu berechnen und alsdann die zu jedem ω gehörigen Verhältnisse $\xi_1 : \xi_2 : \dots : \xi_r$ in bekannter Weise zu bestimmen. Die Functionen $\psi_1(\eta), \psi_2(\eta) \dots \psi_{r-1}(\eta)$ sind im Allgemeinen nicht von einander unabhängig; die kleinste Zahl derjenigen Functionen, durch welche sich alle darstellen lassen, bezeichne ich mit l und nenne diese Zahl den *Rang* der Gruppe. Der vorstehenden Gleichung selbst lege ich den Namen: charakteristische Gleichung bei.

Die vorliegende Arbeit geht von den Bedingungen aus, welche erfüllt sein müssen, wenn die letzten k Coefficienten dieser Gleichung, also $\psi_{r-1}(\eta) \dots \psi_{r-k+1}(\eta)$ gleich Null sind, ohne dass $\psi_{r-k}(\eta)$ verschwindet. Durch eine etwas umständliche Betrachtung gelange ich zu dem Resultate, dass wenn $\psi_{r-1}(\eta) \dots \psi_{r-k+1}(\eta)$ identisch verschwinden und zugleich keine Transformation der Gruppe mit allen andern Transformationen vertauschbar ist (die Gruppe also, um einen Ausdruck des Herrn Lie zu benutzen, keine ausgezeichnete Untergruppe besitzt), auch immer alle Unterdeterminanten $(r - k + 1)^{\text{ten}}$ Grades von $|\gamma_{i,x}| = \left| \sum_{\rho} c_{\rho i,x} \eta_{\rho} \right|$ identisch verschwinden.

Indem wir den Fall einer ausgezeichneten Untergruppe ausschliessen und die weitere Annahme hinzufügen, dass die nicht verschwindenden Wurzeln für eine ganz allgemeine Transformation sämtlich von einander verschieden sind, wird der Rang l der Gruppe $= k$ und alle Wurzeln der Gleichung lassen sich durch l unter ihnen homogen und linear ausdrücken, wo die Coefficienten rationale Zahlen sind. Für je zwei derjenigen Wurzeln, durch welche sich alle ausdrücken lassen, etwa ω_i und ω_x , giebt es zwei ganze Zahlen $a_{i,x}$ und $a_{x,i}$, welche einen gewissen Zusammenhang zwischen jenen Wurzeln bestimmen. Wir erwähnen hier nur, dass mit ω_i und ω_x auch $\omega_i + a_{i,x} \omega_x$ und $\omega_x + a_{x,i} \omega_i$, sowie für jedes ganzzahlige, zwischen 0 und $a_{i,x}$ gelegene α auch $\omega_i + \alpha \omega_x$ eine Wurzel sein muss. Die Coefficienten $a_{i,x}$ sind sämtlich gleich -2 ; die übrigen können aber keineswegs beliebig gewählt werden; vielmehr müssen für dieselben recht viele Bedingungengleichungen bestehen. Eine Reihe von diesen ergibt sich aus den Bedingungen dafür, dass eine mit den Coefficienten $a_{i,x}$ gegebene homogene lineare Transformation durch eine endliche Zahl von Wiederholungen in die identische Transformation übergeht. Jedes System dieser Coefficienten ist entweder einfach oder zerfällt in einfache Systeme. Diese beiden Fälle werden in folgender Weise unterschieden: man geht von einer beliebigen Marke i aus, nimmt alle Marken x hinzu, für welche $a_{i,x}$ nicht verschwindet, fügt hierzu alle Marken λ , für welche ein $a_{x,\lambda}$ nicht verschwindet, und fährt damit so lange fort, als man auf diesem Wege noch zu neuen Marken gelangt; dann heisst das System einfach, wenn diese Operation zu allen Marken $1 \dots l$ führt. Es ist nicht schwer, die einfachen Systeme zu bestimmen. Diejenigen Wurzeln, welche durch ein einfaches System gefordert werden, führen auf eine einfache Gruppe, und umgekehrt lassen sich alle Wurzeln bei einer einfachen Gruppe als durch ein einfaches System bestimmt ansehen. Man gelangt also auf dem angedeuteten Wege zu den einfachen Gruppen. Für jedes l ergeben sich vier Formen, zu denen für $l = 2, 4, 6, 7, 8$ noch spezielle einfache Gruppen treten.

Von diesen speciellen Gruppen habe ich mehrere nicht in vollständig entwickelter Form angegeben; ich hoffe, dass es mir später möglich sein wird, diese Gruppen in einfacherer Weise darzustellen, und deshalb mochte ich die bis jetzt gefundenen Darstellungen nicht mittheilen.

§ 10.

Die charakteristische Gleichung hat mehrere verschwindende Wurzeln.

Die in den letzten drei Paragraphen zu Grunde gelegten Voraussetzungen konnten deshalb unbedenklich zur Grundlage einer Untersuchung gemacht werden, weil sie sich in allbekannten Gruppen verwirklicht finden. Auch trug sowohl die Voraussetzung, dass die Gleichung

$$(1) \quad \omega^r - \omega^{r-1} \psi_1(\eta) + \omega^{r-2} \psi_2(\eta) + \dots \pm \omega \psi_{r-1}(\eta) = 0$$

nur eine einzige verschwindende Wurzel besitzt, wie die Annahme, dass alle ihre Wurzeln verschwinden, durch ihre Einfachheit den Charakter der Erlaubtheit offenbar an sich. Wir wollen jetzt die Annahme machen, dass die Gleichung eine k -fache verschwindende Wurzel besitzt, und haben dabei, ehe wir diese Annahme weiter verfolgen, die Frage zu beantworten, ob in diesem Falle auch die Unterdeterminanten von $\left| \sum_e \eta_e c_{e,ix} \right|$ oder $|\gamma_{ix}|$ bis zu einem gewissen Grade verschwinden oder nicht.

Zu dem Ende beweisen wir einen Satz noch einmal, den wir bereits in § 5 hergeleitet haben, nämlich den Satz:

Wenn eine inf. Transformation die eingliedrige Hauptuntergruppe einer der Gruppe angehörigen zweigliedrigen Untergruppe ist, so hat für dieselbe die charakteristische Gleichung nur verschwindende Wurzeln.

Diese Transformation sei $X_r f$ und die zweigliedrige Untergruppe, deren Haupttransformation sie ist, sei $\eta_r X_r f + \eta_{r-1} X_{r-1} f$, so dass ist:

$$(X_r X_{r-1}) = \varepsilon X_r f,$$

wo ε nicht verschwinden darf. Wir wollen also jetzt beweisen, dass die Gleichung (1) für $\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_{r-1} = 0$, $\eta_r = 1$ nur verschwindende Wurzeln hat. Angenommen zunächst, die Gleichung hätte eine einfache nicht verschwindende Wurzel ω . Dann kann man $X_1 \dots X_{r-2}$ so wählen, dass

$$(X_r X_1) = \omega X_1 f$$

wird und dass in den Ausdrücken für $(X_r X_2) \dots (X_r X_{r-2})$ die $X_1 f$ nicht vorkommt. Bestimmt man nun in der Jacobi'schen Relation für $(1, r, r-1)$ den Coefficienten von $X_1 f$, so folgt $\omega \varepsilon = 0$, was unserer Annahme widerstreitet.

Auf dieselbe Weise ergibt sich, dass (X_{r-i}, X_{r-i-1}) durch $X_r, X_{r-1} \dots X_{r-i-1}, X_{r-i-2}$ ausgedrückt werden kann. Nun seien $r-i-v$ und $r-i-\rho$ zwei Nummern aus der Reihe $r-i \dots r-k+1$, und es sei bewiesen, dass die Ausdrücke für $(X_\sigma X_\tau)$ nur $X_r \dots X_{r-k+1}$ enthalten, wofern wenigstens eine der Marken σ und τ grösser ist als die grössere der Marken $r-i-v$ und $r-i-\rho$ und die andere nicht kleiner ist als die kleinere. Dann folgt aus $(r, r-i-v, r-i-\rho)$ oder aus der Gleichung:

$$\begin{aligned} & (X_r(X_{r-i-v} X_{r-i-\rho})) \\ &= (X_{r-i-v} [X_r \dots X_{r-i-\rho+1}]) - (X_{r-i-\rho} [X_r \dots X_{r-i-v+1}]), \end{aligned}$$

dass sich $(X_{r-i-v} X_{r-i-\rho})$ durch $X_r \dots X_{r-k+1}$ darstellen lässt, oder dass bei Benutzung der eingeführten Abkürzung ist:

$$(6) \quad (X_{r-i-v} X_{r-i-\rho}) = [X_r \dots X_{r-k+1}].$$

Somit bestimmen die inf. Transformationen $X_r f, X_{r-1} f \dots X_{r-k+1} f$ eine k -gliedrige Untergruppe, und es folgt der Satz:

Hat für das System $(\eta_1 \dots \eta_r)$ die charakteristische Gleichung eine k -fache Wurzel gleich Null, so gehört die Transformation $\Sigma \eta_i X_i f$ einer k -gliedrigen Untergruppe an, in welcher ihr eine k -fache verschwindende Wurzel der charakteristischen Gleichung entspricht.

Wenn wir die so eben getroffene Wahl von $X_1 f \dots X_r f$ beibehalten, ist es nicht möglich, von Null verschiedene Coefficienten $\nu_1 \dots \nu_{r-k}$ so zu bestimmen, dass $(X_r, \nu_1 X_1 + \dots + \nu_{r-k} X_{r-k}) = 0$ ist. Lassen wir daher die Verhältnisse $\frac{\mu_1}{\mu_0}, \frac{\mu_2}{\mu_0} \dots \frac{\mu_{r-1}}{\mu_0}$ je eine ge-

in den obigen Ausdrücken für $(X_r X_{r-i-1}) \dots (X_r X_{r-k+1})$ das mit der nächst höhern Marke versehene X auch wirklich vorkomme, also in $[X_r X_{r-1} \dots X_{r-i+1}, X_{r-i}]$ das X_{r-i} , ... in $[X_r X_{r-1} \dots X_{r-k+2}]$ das X_{r-k+2} ; indessen genüge es für den vorliegenden Zweck, die linken Seiten von (4) und (5) durch $[X_r X_{r-1} \dots X_{r-k+1}]$ zu ersetzen, und hierfür ergebe sich der Beweis unmittelbar. Beide Bemerkungen sind richtig; gleichwohl möchte ich die Formeln (4) und (5) nicht ganz entbehren, da sie in manchen Fällen gebraucht werden können. Zu dem Ende bringe ich folgende Correctur an: Es sei X_r mit $X_{r-1} \dots X_{r-i+1}$ vertauschbar, dann lassen sich $X_{r-i} \dots X_{r-k+1}$ so wählen, dass erstens $(X_r X_{r-i}) \dots (X_r X_{r-i'})$ unabhängige lineare Functionen von $X_r \dots X_{r-i+1}$ werden, dass zweitens $(X_r X_{r-i-1}) \dots (X_r X_{r-i''})$ nur die $X_r \dots X_{r-i+1}, X_{r-i} \dots X_{r-i'}$ enthalten und insbesondere unabhängige Functionen von $X_{r-i} \dots X_{r-i'}$ sind, dass drittens $(X_r X_{r-i-1}) \dots (X_r X_{r-i''})$ nur die $X_r \dots X_{r-i} \dots X_{r-i''}$ enthalten und unabhängige Functionen von $X_{r-i-1} \dots X_{r-i''}$ sind u. s. w. Dann enthält wie die vorstehende Betrachtung zeigt jedes $(X_{r-2} X_{r-i}) \dots (X_{r-2} X_{r-i'})$ nur die $X_r X_{r-1} \dots X_{r-i} \dots X_{r-i'}$, ebenso $(X_{r-2} X_{r-i-1}) \dots (X_{r-2} X_{r-i''})$ ausser $X_r \dots X_{r-i''}$ nur noch $X_{r-i-1} \dots X_{r-i''}$ u. s. w.

wisse Grenze nicht überschreiten, so giebt es nur einzelne Werthsysteme dieser Verhältnisse, für welche die $\nu_1 \dots \nu_{r-k}$ so bestimmt werden können, dass

$(\mu_0 X_r + \mu_1 X_{r-1} + \dots + \mu_{k-1} X_{r-k+1}, \nu_1 X_1 + \nu_2 X_2 + \dots + \nu_{r-k} X_{r-k}) = 0$
ist. Schliessen wir diese Verhältnisse aus, so wird die Gl. (1) für

$$\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_{r-k} = 0, \quad \eta_{r-k+1} = \mu_{k-1} \dots \eta_r = \mu_0$$

höchstens soviel verschwindende Wurzeln besitzen, als dieselbe Gleichung, für die angegebene k -gliedrige Untergruppe gebildet, Wurzeln gleich Null hat. Wenn daher die Gl. (1) für die r -gliedrige Gruppe stets mindestens k verschwindende Wurzeln hat, so muss die im vorigen Lehrsatz angegebene Untergruppe lauter verschwindende Wurzeln haben, oder:

Verschwinden für eine r -gliedrige Gruppe die Functionen $\psi_{r-1}(\eta) \dots \psi_{r-k+1}(\eta)$ identisch, so gehört jede Transformation einer k -gliedrigen Untergruppe vom Range Null an.

Wir nehmen wieder an, die Functionen $\psi_{r-1}(\eta) \dots \psi_{r-k+1}(\eta)$ verschwänden identisch; wir wählen $X_r f$ wieder ganz beliebig, $X_1 f \dots X_{r-k} f$ wieder in der oben angegebenen Weise, aber $X_{r-1} \dots X_{r-k+1}$ in der k -gliedrigen Untergruppe nach den Festsetzungen des vorigen Paragraphen derartig, dass ist:

$$(X_r X_{r-1}) = a_1 X_{r-2} f, \quad (X_r X_{r-2}) = a_2 X_{r-3} f \dots \\ (X_r X_{r-k+2}) = a_{k-2} X_{r-k+1}, \quad (X_r X_{r-k+1}) = 0.$$

Hier können die $a_1 \dots a_{k-2}$ alle oder zum Theil verschwinden; zugleich ist $X_{r-k+1} f$ mit allen Transformationen der Untergruppe vertauschbar. Wir wollen zeigen, dass wofern nicht alle Transformationen dieser Untergruppe mit einander vertauschbar sind, sicherlich derselben eine Transformation angehört, welche mit allen Transformationen der r -gliedrigen Gruppe vertauschbar ist. Man kann diesen Beweis unter Zugrundelegung der obigen Gleichungen

$$(X_r X_\alpha) = \sum_{\beta} e_{\alpha\beta} X_\beta f$$

und mit Benutzung der Gleichung (3) liefern. Einfacher ist es, die im § 8 angegebene specielle Form der Gleichungen für $(X_r X_\alpha)$ zu benutzen. Es genüge, den Beweis unter der Annahme durchzuführen, dass die $r-k$ nicht verschwindenden Wurzeln sämmtlich ungleich sind. Diese seien $\omega_1 \dots \omega_{r-k}$; dann kann man setzen:

$$(X_r X_1) = \omega_1 X_1 f \dots (X_r X_{r-k}) = \omega_{r-k} X_{r-k} f.$$

Eine unmittelbare Folge aus (3) ist dann:

$$(X_{r-k+1} X_\alpha) = \omega_{r-k}^{(k-1)} X_\alpha f.$$

Die Jacobi'sche Relation für $(r, r - k + 2, \alpha)$ liefert:

$$\sum_{\beta} c_{r-k+2, \alpha, \beta} \omega_{\beta} X_{\beta} - \omega_{\alpha} \sum_{\beta} c_{r-k+2, \alpha, \beta} X_{\beta} - a_{k+2} \omega_{\alpha}^{(k-1)} X_{\alpha} = 0,$$

woraus sich die Folgerungen ergeben:

$$a_{k-2} \omega_{\alpha}^{(k-1)} = 0 \quad \text{und} \quad c_{r-k+2, \alpha, \beta} = 0 \quad \text{für} \quad \alpha \geq \beta.$$

Wäre $a_{k-2} = 0$, so könnte man auf dieselbe Weise folgern:

$$a_{k-3} \omega_{\alpha}^{(k-2)} = 0$$

und so fort.

Somit erhalten wir folgenden Satz:

Wenn die Coefficienten $\psi_{r-1}(\eta), \psi_{r-2}(\eta) \dots \psi_{r-k+1}(\eta)$ identisch verschwinden und wenn dann keine Transformation der Gruppe mit allen ihren Transformationen vertauschbar ist, so müssen auch die sämtlichen Unterdeterminanten $r - k + 1^{\text{ten}}$ Grades der Determinante $|\gamma_{ix}|$ identisch verschwinden. Jede Transformation gehört also einer k -gliedrigen Untergruppe an, deren Transformationen mit einander vertauschbar sind.

§ 11.

Systeme von Gleichungen.

Wir nehmen jetzt an, die Functionen $\psi_{r-1}(\eta) \dots \psi_{r-k+1}(\eta)$ verschwänden identisch, aber $\psi_{r-k}(\eta)$ sei nicht für jeden Werth der η gleich Null. Ausserdem sehen wir von denjenigen Gruppen ab, in denen mindestens eine Transformation mit allen andern vertauschbar ist. Dann wissen wir, dass auch alle Unterdeterminanten $r - k + 1^{\text{ten}}$ Grades, aber nicht die vom $r - k^{\text{ten}}$ Grade, der aus den $\gamma_{ix} = \sum_{\eta} \eta_{\rho} c_{\rho ix}$ gebildeten Determinante identisch verschwinden. Jetzt soll $X_r f$ eine inf. Transformation ganz allgemeiner Art sein. Dann hat die charakteristische Gleichung für $(00 \dots 01) k$ verschwindende und $r - k$ nichtverschwindende Wurzeln. Wir können also $X_{r-1} f, \dots, X_{r-k+1} f$ so wählen, dass dieselben mit $X_r f$ vertauschbar sind. Bezeichnet man mit $\alpha_0 \dots \alpha_x, \beta_0 \dots \beta_2 \dots$ die Nummern $1 \dots r - k$, so lassen sich die Ausdrücke für $(X_r X_1), (X_r X_2) \dots (X_r X_{r-k})$ in folgender Weise darstellen:

$$\begin{aligned} (X_r X_{\alpha_0}) &= \omega_{\alpha} X_{\alpha_0}, \quad (X_r X_{\alpha_1}) = \omega_{\alpha} X_{\alpha_1} + e_{\alpha, \alpha_0} X_{\alpha_0}, \dots \\ (X_r X_{\alpha_x}) &= \omega_{\alpha} X_{\alpha_x} + e_{\alpha_x, \alpha_{x-1}} X_{\alpha_{x-1}} + \dots + e_{\alpha, \alpha_0} X_{\alpha_0}. \end{aligned}$$

Bilden wir die Jacobi'sche Relation für $(r, \rho, \alpha_0), (r, \rho, \alpha_1) \dots (r, \rho, \alpha_x)$, wo ρ eine der Nummern $r - 1, \dots, r - k + 1$ ist, und nehmen wir zunächst an, dass keine Wurzel ω_{β} gleich ω_{α} sei, so folgt, dass sich $(X_{\rho} X_1) \dots (X_{\rho} X_{r-k})$ in der durch die vorstehenden Gleichungen be-

zeichneten Art darstellen lassen, wofern nur die ω und $e_{\lambda\mu}$ geändert werden. Es ist dann:

$$\begin{aligned}(X_{\rho} X_{\alpha_0}) &= \omega'_\alpha X_{\alpha_0}, & (X_{\rho} X_{\alpha_1}) &= \omega'_\alpha X_{\alpha_1} + e'_{\alpha_1 \alpha_0} X_{\alpha_0}, \dots \\(X_{\rho} X_{\alpha_x}) &= \omega'_\alpha X_{\alpha_x} + e'_{\alpha_x \alpha_{x-1}} X_{\alpha_{x-1}} + \dots + e'_{\alpha_x \alpha_0} X_{\alpha_0} f.\end{aligned}$$

Somit gehört die Transformation $X_{\alpha_0} f$ einer ebenen k -fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit an, in deren Bildraum alle durch den Bildpunkt dieser Transformation gehenden Geraden zweigliedrige Untergruppen abbilden, und für alle diese zweigliedrigen Untergruppen, wofern ihre Transformationen nicht vertauschbar sind, ist $X_{\alpha_0} f$ das Hauptelement. Beachten wir, dass der Rang l der Gruppe höchstens gleich k ist und dass $X_{\alpha_0} f$ mit Transformationen der Reihe $X_1 f \dots X_{r-k} f$ vertauschbar sein kann, so gelangen wir zu dem Satze:

Jede Transformation, welche für eine zweigliedrige Untergruppe die Haupttransformation darstellt, besitzt dieselbe Eigenschaft mindestens für eine $(l-1)$ -fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit von zweigliedrigen Untergruppen.

Der beim Beweise ausgeschlossene Fall, dass ω_α weiteren Wurzeln ω_β gleich ist, ändert am Resultate nichts, wenn wir $X_{\rho} f$, wie geschehen, als ganz allgemeine Transformation voraussetzen. Ist dann z. B. $\omega_\alpha = \omega_\beta = \omega_\gamma$, so sollen für $\omega = \omega_\alpha$ alle Unterdeterminanten $r - 2^{\text{ten}}$ Grades von $|\gamma_{ix} - \delta_{ix} \omega| = |c_{rix} - \delta_{ix} \omega|$ verschwinden; es muss also auch für $X_{\rho} f$ eine Wurzel existiren, für welche alle Unterdeterminanten $r - 2^{\text{ten}}$ Grades verschwinden. Nun müsste wegen der Jacobi'schen Relation ($r \rho \alpha_0$) sein:

$$\begin{aligned}(X_{\rho} X_{\alpha_0}) &= a_\alpha X_{\alpha_0} + a_\beta X_{\beta_0} + a_\gamma X_{\gamma_0}, \\(X_{\rho} X_{\beta_0}) &= b_\alpha X_{\alpha_0} + b_\beta X_{\beta_0} + b_\gamma X_{\gamma_0}, \\(X_{\rho} X_{\gamma_0}) &= c_\alpha X_{\alpha_0} + c_\beta X_{\beta_0} + c_\gamma X_{\gamma_0}.\end{aligned}$$

Soll aber jetzt für $X_{\rho} f$ die verlangte Bedingung erfüllt sein, so ist nothwendig:

$$(X_{\rho} X_{\alpha_0}) = \omega'_\alpha X_{\alpha_0}, \quad (X_{\rho} X_{\beta_0}) = \omega'_\beta X_{\beta_0}, \quad (X_{\rho} X_{\gamma_0}) = \omega'_\gamma X_{\gamma_0} \dots$$

Entsprechendes gilt für die $(X_{\rho} X_{\alpha_1})$ u. s. w.

Da offenbar die Transformationen $X_{r-1} \dots X_{r-k+1}$ mit einander vertauschbar sind, so können wir einen Satz des § 4 in folgender Weise erweitern:

In einer Gruppe vom Range l gehört jede Transformation einer $(l-1)$ -fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit an, deren Transformationen sämmtlich mit einander vertauschbar sind, wofern nicht eine Transformation der Gruppe mit allen ihren Transformationen vertauschbar ist.

Beiläufig machen wir noch auf folgenden Satz aufmerksam:

Wenn eine Transformation das Hauptelement einer zweigliedrigen Untergruppe ist, so gehört sie einer aus mindestens $l + 1$ Gliedern ge-

$$\omega^r - \omega^{r-1} \psi_1(\eta') + \omega^{r-2} \psi_2(\eta') + \dots = 0,$$

$$\omega^r - \omega^{r-1} \psi_1(\eta'') + \omega^{r-2} \psi_2(\eta'') + \dots = 0,$$

$$\omega^r - \omega^{r-1} \psi_1(\eta^{(l-1)}) + \omega^{r-2} \psi_2(\eta^{(l-1)}) + \dots = 0$$

zu verbinden. Nun lehren die Gleichungen (2), dass das System dieser Gleichungen in sich abgeschlossen ist: geht man z. B. von (η') aus, so darf man damit (η) , (η'') . . . $(\eta^{(k-1)})$ in derselben Weise verbinden, wie man (η') , (η'') . . . $(\eta^{(k-1)})$ mit (η) verbunden hat.

Die späteren Entwicklungen werden die Beziehung der Wurzeln dieser Gleichungen aufs deutlichste hervortreten lassen. Hier genüge es, auf einige Einzelheiten aufmerksam zu machen. Zunächst entspricht jeder Wurzel der einen Gleichung eine ganz bestimmte Wurzel in jeder andern. Es gehört eben zu jeder von Null verschiedenen Wurzel ω der ersten Gleichung nach (1) ein System (ξ) ; dies in (4) eingesetzt, liefert die entsprechenden Wurzeln $\omega' \dots \omega^{(l-1)}$.

Ist ω_α eine $\alpha + 1$ -fache Wurzel der ersten Gleichung, und verschwinden nicht alle Unterdeterminanten $r - 1^{\text{ten}}$ Grades von $|\gamma_{i,\alpha} - \delta_{i,\alpha} \omega_\alpha|$, so muss auch jede der entsprechenden Wurzeln mindestens eine $\alpha + 1$ -fache Wurzel ihrer Gleichung sein. Schliesst man für (η) , (η') . . . besondere Lagen aus, so gilt der Satz ganz allgemein.

Bilden $\omega_\alpha, \omega'_\alpha \dots \omega_\alpha^{(l-1)}$ eine Reihe entsprechender Wurzeln der l Gleichungen:

$$\omega^r - \omega^{r-1} \psi_1(\eta) + \dots = 0,$$

$$\omega^r - \omega^{r-1} \psi_1(\eta') + \dots = 0,$$

$$\omega^r - \omega^{r-1} \psi_1(\eta^{(l-1)}) + \dots = 0,$$

so bilde man $(\bar{\eta})$ als homogene lineare Function der (η) , (η') . . . $(\eta^{(l-1)})$, indem man setzt:

$$\bar{\eta}_i = p_0 \eta_i + p_1 \eta'_i + \dots + p_{l-1} \eta_i^{(l-1)}.$$

Bezeichnet man nun mit $\bar{\omega}_\alpha$ die ω_α entsprechende Wurzel der Gleichung

$$\omega^r - \omega^{r-1} \psi_1(\bar{\eta}) + \dots = 0,$$

so ist dieselbe aus den $\omega_\alpha, \omega'_\alpha \dots \omega_\alpha^{(l-1)}$ in derselben Weise gebildet, wie $\bar{\eta}_i$ aus $\eta_i, \eta'_i \dots \eta_i^{(l-1)}$, so dass ist:

$$\bar{\omega}_\alpha = p_0 \omega_\alpha + p_1 \omega'_\alpha + \dots + p_{l-1} \omega_\alpha^{(l-1)}.$$

Es folgt dies unmittelbar daraus, dass mit den Gleichungen:

$(X_r X_\alpha) = \omega_\alpha X_\alpha f$, $(X_{r-1} X_\alpha) = \omega'_\alpha X_\alpha f \dots (X_{r-l+1} X_\alpha) = \omega_\alpha^{(l-1)} X_\alpha f$
auch die Gleichung:

$$\begin{aligned} & (p_0 X_r + p_1 X_{r-1} + \dots + p_{l-1} X_{r-l+1}, X_\alpha) \\ &= (p_0 \omega_\alpha + p_1 \omega'_\alpha + \dots + p_{l-1} \omega_\alpha^{(l-1)}) X_\alpha f \end{aligned}$$

verbunden ist.

Endlich beachte man, dass die Verhältnisse der $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$, welche der Gleichung (1) genügen, sich rational vermitteltst $\eta_1 \dots \eta_r$ und ω ausdrücken lassen. Man erhält (abgesehen von speciellen Lagen) Verhältnisse von Functionen $r - 1^{\text{ten}}$ Grades von ω , in denen die Coefficienten der einzelnen Potenzen homogene Functionen der $\eta_1 \dots \eta_r$ sind. Diese Verhältnisse ändern sich aber nicht, wenn man z. B. ω mit ω' und zugleich (η) mit (η') vertauscht.

Im folgenden wird es sich bald mehr empfehlen, die l einzelnen Gleichungen

$$\begin{aligned} \omega^r - \omega^{r-1} \psi_1(\eta) &+ \dots = 0, \\ \omega^r - \omega^{r-1} \psi_1(\eta') &+ \dots = 0, \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \omega^r - \omega^{r-1} \psi_1(\eta^{(l-1)}) &+ \dots = 0 \end{aligned}$$

zu Grunde zu legen, bald nur die eine Gleichung

$$\omega^r - \omega^{r-1} \psi_1(\bar{\eta}) + \dots = 0$$

mit den unbestimmten Coefficienten $p_0, p_1, \dots, p_{l-1}$ zu untersuchen.

§ 12.

Ansdrückung aller Wurzeln durch l unter ihnen.

Wir suchen jetzt diejenigen Gruppen zu bestimmen, welche folgenden Bedingungen genügen:

a) es sollen alle Unterdeterminanten $r - l + 1^{\text{ten}}$ Grades, aber nicht die $r - l^{\text{ten}}$ Grades von $|\gamma_{i,x}|$ identisch verschwinden;

b) für ein System $\eta_1 \dots \eta_r$ allgemeiner Lage soll die charakteristische Gleichung $r - l$ unter einander (und von Null) verschiedene Wurzeln haben;

c) es soll die Zahl p gleich der Zahl r der Glieder sein.

Es wird sich zeigen, dass die so definirte Zahl l gleich dem Range der Gruppe ist.

Indem wir von den Gruppen absehen, in denen gewisse Transformationen mit allen Transformationen der Gruppe vertauschbar sind, können wir die beiden ersten Forderungen kürzer in folgender Form aussprechen: die Gleichung $\omega^r - \omega^{r-1} \psi_1 + \omega^{r-2} \psi_2 - \dots = 0$ hat mindestens l verschwindende Wurzeln; sie besitzt aber für gewisse Werthe der Constanten gerade $r - l$ von Null und unter einander verschiedene Wurzeln. Wir wählen jetzt $X_r f$ als eine ganz allgemeine Transformation; $X_{r-1} f \dots X_{r-l+1} f$ sollen mit ihr vertauschbar sein. Dann wissen wir, dass auch die letzteren unter einander vertauschbar sind. Ferner können wir die $X_1 f, X_2 f \dots X_{r-l} f$ so wählen, dass für $\alpha = 1 \dots r - l$ ist:

$$(1) \quad (X_r X_\alpha) = \omega_\alpha X_\alpha f.$$

Wie im vorigen Paragraphen bewiesen, ist dann auch:

$$(1) \quad (X_{r-1} X_\alpha) = \omega_\alpha' X_\alpha f, \dots (X_{r-l+1} X_\alpha) = \omega_\alpha^{(l-1)} X_\alpha f.$$

Um die verschiedenen Beziehungen, in denen die Wurzeln der charakteristischen Gleichung hier auftreten, recht scharf aus einander zu halten, wollen wir die sämmtlichen Wurzeln, welche dieselbe für feste Werthe von $\eta_1 \dots \eta_r$ besitzt, als ein Wurzelsystem bezeichnen; dagegen sollen solche Wurzeln, welche nach passender Wahl von (η) , (η') ... $(\eta^{(l-1)})$ zu denselben Werthen von $\xi_1 : \xi_2 : \dots : \xi_r$ führen, als eine Reihe entsprechender Wurzeln oder auch als Wurzelreihe bezeichnet werden; wo kein Missverständniss zu befürchten ist, soll im letzteren Falle auch nur von einer Wurzel gesprochen werden.

Nun bilde man die Jacobi'sche Relation für (r, α, β) , $(r-1, \alpha, \beta)$... und erhält die Gleichungen:

$$(2) \quad c_{\alpha\beta\gamma}(\omega_\alpha + \omega_\beta - \omega_\gamma) = 0, \quad c_{\alpha\beta\gamma}(\omega_\alpha' + \omega_\beta' - \omega_\gamma') = 0 \dots,$$

$$(3) \quad c_{\alpha\beta\varrho}(\omega_\alpha + \omega_\beta) = 0, \quad c_{\alpha\beta\varrho}(\omega_\alpha' + \omega_\beta') = 0 \dots$$

Hier bedeuten $\alpha, \beta, \gamma \dots$ Nummern der Reihe $1 \dots r-l$ und ϱ, σ Nummern der Reihe $r-l+1 \dots r$. Dies liefert den Satz:

Sind α und β irgend zwei unter den Nummern $1 \dots r-l$, so wird unter den angegebenen Bedingungen jedes $(X_\alpha X_\beta)$, welches nicht verschwindet, entweder durch eine einzige der $X_1 f \dots X_{r-l} f$ oder durch einige der $X_{r-l+1} f \dots X_r f$ dargestellt; soll die erstere Darstellung möglich sein, so muss die Summe je zweier entsprechender zu $X_\alpha f$ und $X_\beta f$ gehörender Wurzeln eine neue Wurzel liefern; die zweite Darstellung ist nur möglich, wenn jede zu $X_\alpha f$ gehörige Wurzel entgegengesetzt gleich ist der entsprechenden zu $X_\beta f$ gehörigen Wurzel.

Da alle $(X_r X_\alpha) \dots (X_{r-l+1} X_\alpha)$ durch $X_1 f \dots X_{r-l} f$ ausgedrückt werden, müssen sich, damit $p = r$ ist, mindestens l Ausdrücke $(X_\alpha X_\beta)$ für $\alpha, \beta = 1 \dots r-l$ durch $X_{r-l+1} f \dots X_r f$ darstellen lassen und die aus den zugehörigen l^2 Coefficienten $c_{\alpha\beta\varrho}$ gebildete Determinante muss von Null verschieden sein. Diese Ausdrücke seien

$$(X_1 X_{l+1}), (X_2 X_{l+2}) \dots (X_l X_{2l}).$$

Dann ist:

$$\omega_1 + \omega_{l+1} = 0, \quad \omega_2 + \omega_{l+2} = 0 \dots \omega_l + \omega_{2l} = 0.$$

Indem wir die bisherige Bezeichnung für die Marken beibehalten, wonach $\alpha, \beta, \gamma \dots$ Nummern der Reihe $1 \dots r-l$, ϱ, σ solche der Reihe $r-l+1 \dots r$ sind, setzen wir jetzt fest, dass $\iota, \kappa, \lambda \dots \iota', \kappa', \lambda' \dots$ Nummern der Reihe $1 \dots 2l$ bezeichnen sollen, und zwar soll die Wahl stets so getroffen werden, dass $(X_\iota X_{\kappa'})$ sich durch $X_{r-l+1} f \dots X_r f$ darstellt, also auch $\omega_\iota + \omega_{\kappa'} = 0$ ist. Endlich soll ν eine der Marken $0 \dots l-1$ bezeichnen.

Dann muss sein:

$$(4) \quad (X_i X_i') = e_i X_r + e_i' X_{r-1} + \dots + e_i^{(i-1)} X_{r-i+1} f;$$

und es ist offenbar:

$$(5) \quad e_i^{(r)} + e_i'^{(r)} = 0.$$

Die aus den Coefficienten $e_i^{(r)}$ gebildete Determinante muss von Null verschieden sein.

Indem wir diese Bezeichnung benutzen, bilden wir die Jacobi'sche Relation für (i, i', α) und erhalten:

$$(6) \quad e_i \omega_\alpha + e_i' \omega_\alpha' + \dots + e_i^{(i-1)} \omega_\alpha^{(i-1)} = - \sum (c_{i\alpha} c_{i'\alpha} - c_{i'\alpha} c_{i\alpha}).$$

Wenn die linke Seite dieser Gleichung nicht verschwindet, so muss zum mindesten eines der $2(r-l)$ Producte

$$c_{i\alpha} c_{i'\alpha}, c_{i\alpha} c_{i'2\alpha}, \dots, c_{i'\alpha} c_{i\alpha}, c_{i'\alpha} c_{i'2\alpha} \dots$$

von Null verschieden sein. Somit muss in diesem Falle entweder $\omega_\alpha^{(r)} + \omega_i^{(r)}$ oder $\omega_\alpha^{(r)} - \omega_i^{(r)}$ eine Wurzel sein oder sowohl $\omega_\alpha^{(r)} + \omega_i^{(r)}$ als $\omega_\alpha^{(r)} - \omega_i^{(r)}$. Das giebt den Satz:

Ist α eine von i und i' verschiedene Zahl der Reihe $1 \dots r-l$, und $e_i \omega_\alpha + \dots + e_i^{(i-1)} \omega_\alpha^{(i-1)}$ von Null verschieden, so erhält man durch Addition oder Subtraction von $\omega_i^{(r)}$ zu $\omega_\alpha^{(r)}$ oder durch beide Operationen eine neue Reihe entsprechender Wurzeln.

Wir gehen jetzt von einer Wurzelreihe aus, für welche die linke Seite von (6) nicht verschwindet und suchen alle weiteren Wurzeln, zu denen man durch Addition und Subtraction von $\omega_i^{(r)}$ gelangt. Die entsprechenden Marken bezeichnen wir mit $\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_x$ und ordnen dieselben in der Weise, dass ist:

$$\omega_{\alpha_1}^v = \omega_{\alpha_0}^v + \omega_i^v, \quad \omega_{\alpha_2}^v = \omega_{\alpha_0}^v + 2\omega_i^v \dots \omega_{\alpha_x}^v = \omega_{\alpha_0}^v + x\omega_i^v.$$

Bilden wir jetzt die Gleichung (6) für α_0 , so wird nur das erste Product vorkommen, und zwar für $\varepsilon = \alpha_1$; dieselbe Gleichung für α_1 angewandt erfordert, dass im ersten Product $\varepsilon = \alpha_2$, im zweiten $\varepsilon = \alpha_0$ gesetzt wird u. s. w. Wird endlich α_x für α gesetzt, so hat man im zweiten Product $\varepsilon = \alpha_{x-1}$ zu setzen. Addirt man alle diese Gleichungen, so verschwindet die rechte Seite und es ergibt sich das Resultat:

$$e_i (2\omega_{\alpha_0} + x\omega_i) + e_{i_2} (2\omega_{\alpha_0} + x\omega_i) + \dots + e_i^{(i-1)} (2\omega_{\alpha_0}^{(i-1)} + x\omega_i^{(i-1)}) = 0,$$

wo x eine ganze positive Zahl ist. Hierin kann man α_0 durch $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_x$ ersetzen, wenn man nur x durch $x-2, x-4, \dots, -x$ ersetzt. Somit schliessen wir:

Ist

$$(X_i X_i') = e_i X_r f + e_i' X_{r-1} f + \dots + e_i^{(i-1)} X_{r-i+1} f,$$

Wenn jetzt die Determinante $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ll} \end{vmatrix}$ nicht verschwindet,

so lassen sich rationale Zahlen $h_{\alpha 1} \dots h_{\alpha l}$ so finden, dass ist

$$a_{\alpha x} = h_{\alpha 1} a_{1x} + h_{\alpha 2} a_{2x} + \dots + h_{\alpha l} a_{lx} \quad \text{für } x = 1 \dots l.$$

Dann ergibt sich aus den Gleichungen (10) und (10'):

$$(11) \quad \begin{cases} \omega_{\alpha} = h_{\alpha 1} \omega_1 + h_{\alpha 2} \omega_2 + \dots + h_{\alpha l} \omega_l, \\ \omega'_{\alpha} = h_{\alpha 1} \omega'_1 + h_{\alpha 2} \omega'_2 + \dots + h_{\alpha l} \omega'_l, \\ \dots \\ \omega_{\alpha}^{l-1} = h_{\alpha 1} \omega_1^{l-1} + h_{\alpha 2} \omega_2^{l-1} + \dots + h_{\alpha l} \omega_l^{l-1}. \end{cases}$$

Diese Entwicklung führt auf den für die Zusammensetzung der Gruppen fundamentalen Satz:

Unter den angegebenen Bedingungen, dass $p = r$ ist und dass die charakteristische Gleichung l verschwindende und $r - l$ von einander und von Null verschiedene Wurzeln hat, lassen sich die sämtlichen $r - l$ nicht verschwindenden Wurzeln als lineare homogene Functionen von l unter ihnen darstellen; die Coefficienten sind rationale Zahlen und ändern sich nicht, wenn man zu irgend einem andern Wurzelsystem übergeht.

Beiläufig folgt aus diesem Satze, dass l wirklich den Rang der Gruppe darstellt, wofern nur die aus den l^2 Wurzeln $\omega_i^{(\nu)}$ gebildete Determinante nicht verschwindet. Da nämlich alle Wurzeln durch l ausgedrückt werden und durch keine geringere Zahl, so gilt dasselbe von den Functionen $\psi_1(\eta), \psi_2(\eta) \dots \psi_{r-l}(\eta)$. Das Verschwinden der genannten Determinante verlangt aber, dass die Gruppe eine ausgezeichnete Untergruppe besitzt, welcher Fall ausgeschlossen ist.

Beim Beweise ist der Fall ausgeschlossen, dass die aus den a_{ix} für $i, x = 1 \dots l$ gebildete Determinante gleich Null ist. Der folgende Paragraph wird uns aber zeigen, dass die im früheren Lehrsatz (Gl. (7)) für a_{ix} gefundenen Beziehungen diesen Fall nicht gestatten.

Hätten wir noch den Fall ausschliessen wollen, dass die aus den Wurzeln $\omega_i^{(\nu)}$ für $i = 1 \dots l, \nu = 0 \dots l - 1$ gebildete Determinante gleich Null ist, so hätten wir den Beweis des vorangehenden Lehrsatzes einfacher gestalten können. Wir hielten es aber für wichtig, einen Beweis mitzuthemen, welcher diesen Fall mitumfasst.

§ 13.

Eigenschaften des aus den a_{α} gebildeten Systems.

Wir sehen in den zunächst folgenden Paragraphen von dem Schlussresultat des vorigen Paragraphen ganz ab und berücksichtigen nur die Gleichung (7)

$$(1) \quad 2(e_i \omega_\alpha + e_i' \omega_\alpha' + \dots + e_i^{(l-1)} \omega_\alpha^{(l-1)}) \\ + a_{\alpha i} (e_i \omega_i + e_i' \omega_i' + \dots + e_i^{(l-1)} \omega_i^{(l-1)}) = 0$$

wenn auch die Marke α nur auf die Nummern $1 \dots l$ beschränkt wird. Hier tritt ein System von l Coefficienten $a_{i\alpha}$ auf, wenn die Marken i, α die Reihe $1 \dots l$ durchlaufen. Dabei ist $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{ll} = -2$. Die übrigen können keineswegs beliebig gewählt werden, da der der Formel (7) § 12 beigegebene Lehrsatz auf Wurzeln

$$m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + \dots + m_l \omega_l$$

führt und deren Zahl unendlich gross wird, wenn nicht zwischen den $a_{i\alpha}$ bestimmte Beziehungen bestehen. Wir wollen nur diejenigen Wurzeln berücksichtigen, welche nach diesem Lehrsatz aus einer vorliegenden auf einem ganz bestimmten Wege erhalten werden.

Es sei also $m_1 \omega_1 + \dots + m_l \omega_l$ eine beliebige Wurzel, wo die $m_1 \dots m_l$ ganze Zahlen mit Einschluss von Null sind. Man setze diese Wurzel statt ω_α in die Gleichung (7) § 12 ein und nehme ω_i statt ω_α . An Stelle der Zahl $a_{\alpha\alpha}$ gelangt man dann zu der Zahl:

$$-2m_1 + m_2 a_{21} + \dots + m_l a_{l1}.$$

Somit muss mit $\Sigma m_i \omega_i$ mindestens die Wurzel $\Sigma m_i' \omega_i$ vorhanden sein, wo

$$m_2' = m_2, m_3' = m_3, \dots, m_l' = m_l, m_1' = -m_1 + m_2 a_{21} + \dots + m_l a_{l1}$$

ist. Auf diese Wurzel wendet man dieselbe Betrachtung an für ω_2 , wobei die Zahl $a_{\alpha\alpha}$ ist $= \Sigma m_i' a_{i2}$, und daher kommt noch mindestens die Wurzel vor: $\Sigma m_i'' \omega_i$, wo ist

$$m_1'' = m_1', m_3'' = m_3', \dots, m_l'' = m_l', \\ m_2'' = m_1' a_{12} - m_2' + m_3' a_{32} + \dots + m_l' a_{l2}.$$

Für die gefundene Wurzel suche man die Zahl $a_{\alpha\alpha}$ in Bezug auf ω_3 und schliesse auf das Vorhandensein einer Wurzel $\Sigma m_i''' \omega_i$, u. s. w. Nachdem man so auf eine Wurzel $\Sigma m_i^{(l-1)} \omega_i$ gekommen ist, sucht man für sie die dem $a_{\alpha\alpha}$ entsprechende Zahl in Bezug auf ω_l und schliesst dann auf das Vorhandensein der Wurzel $\Sigma m_i^{(l)} \omega_i$, wo ist:

$$m_1^{(l)} = m_1^{(l-1)}, m_2^{(l)} = m_2^{(l-1)} \dots m_{l-1}^{(l-1)} = m_{l-1}^{(l-1)}, \\ m_i^{(l)} = m_i^{(l-1)} a_{i1} + m_2^{(l-1)} a_{2i} + \dots + m_{l-1}^{(l-1)} a_{l-1,i} - m_i^{(l-1)}.$$

Indem man nur diese letzte Wurzel berücksichtigt, gelangt man zu dem Satze:

Sobald die charakteristische Gleichung eine Wurzel $\Sigma m_x \omega_x$ hat, besitzt sie zum mindesten noch eine weitere Wurzel $\Sigma b_{ix} m_i \omega_x$, wo sich die Coefficienten b_{ix} nach folgenden Regeln berechnen lassen:

$$(2) \quad \begin{aligned} \text{für } i = x \text{ ist } b_{ix} &= \sum_1^{x-1} b_{iq} a_{qx} - 1, \\ \text{für } i > x \text{ ist } b_{ix} &= \sum_1^{x-1} b_{iq} a_{qx} + a_{ix}, \\ \text{für } i < x \text{ ist } b_{ix} &= \sum_1^{x-1} b_{iq} a_{qx}. \end{aligned}$$

Somit erkennen wir, dass alle diejenigen Systeme von Grössen $\bar{m}_x, \overline{\bar{m}}_x$ u. s. w. welche man durch wiederholte Anwendung der Substitution:

$$\bar{m}_x = \sum_i m_i b_{ix}, \quad \overline{\bar{m}}_x = \sum_i \bar{m}_i b_{ix} \dots$$

erhält, eine neue Wurzel der charakteristischen Gleichung bestimmen. Die Substitution b_{ix} muss also, beliebig oft wiederholt, nur eine endliche Zahl von Systemen m_x liefern, oder da die Determinante der b_{ix} , wie man leicht sieht und unten noch besonders gezeigt werden soll, gleich $(-1)^t$ ist, so muss diese Substitution nach einer gewissen Zahl von Wiederholungen die identische Substitution erzeugen. Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen hierfür hat Herr Lipschitz, gestützt auf Arbeiten anderer Mathematiker, im 10. Bande der Acta mathematica (S. 137 ff.) in folgender einfacher Weise zusammengefasst:

Soll die Substitution b_{ix} nach μ -facher Wiederholung in die identische Substitution übergehen, so muss die Determinante:

$$(3) \quad \begin{vmatrix} b_{11} - s & b_{12} & \dots & b_{1\mu} \\ b_{21} & b_{22} - s & \dots & b_{2\mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{\mu 1} & b_{\mu 2} & \dots & b_{\mu\mu} - s \end{vmatrix}$$

nur für solche Werthe von s , welche μ^{te} Wurzeln der Einheit sind, verschwinden, und zugleich müssen ihre sämtlichen Elementartheiler von der ersten Ordnung sein, wo die letztere Bedingung darauf hinauskommt, dass der gemeinschaftliche Theiler der sämtlichen partialen Determinanten der $(l-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, durch die Determinante dividirt, gleich einem Bruch wird, dessen Zähler constant und dessen Nenner

gleich einem Product aus linearen Functionen von s ist, die alle unter einander verschieden sind.

Gleichwie die durch die Coefficienten $b_{\iota\kappa}$ für $\iota, \kappa = 1 \dots l$ bestimmte Transformation durch eine endliche Zahl von Wiederholungen auf die identische Substitution führt, muss auch jede Transformation, für welche die Marken ι, κ auf die $l - \lambda$ ersten Zahlen $1 \dots l - \lambda$ beschränkt wird, bei einer gewissen Zahl von Wiederholungen auf die ursprüngliche Wurzel zurückführen. Endlich darf man natürlich auch die Marken $1 \dots l$ beliebig vertauschen. Demnach können wir jetzt folgenden Satz aussprechen:

Um Bedingungen dafür zu erhalten, dass das System der Coefficienten $a_{\iota\kappa}$ zu einer Gruppe führt, bilde man nach der Vorschrift (2) die l^2 Grössen $b_{\iota\kappa}$ und aus diesen und einer beliebig veränderlichen Grösse s die Determinante (3); dann muss zunächst diese Determinante nur Elementartheiler der ersten Ordnung besitzen und diese müssen die

Form $s - e^{\frac{2k\pi i}{\mu}}$ haben, wo k und μ ganze Zahlen sind; ferner muss jede Determinante, welche aus (3) durch Weglassung der letzten λ (für $\lambda = 1 \dots l - 2$) Verticalreihen erhalten wird, denselben beiden Bedingungen genügen. Sobald hieraus eine Beziehung zwischen den Coefficienten $a_{\iota\kappa}$ hergeleitet ist, müssen auch diejenigen Relationen bestehen, welche man aus der ersten durch beliebige Permutation der Nummern $1 \dots l$ erhält.

Subtrahirt man in der Determinante $|b_{\iota\kappa} - \delta_{\iota\kappa}s|$ von der l^{ten} , $(l-1)^{\text{ten}} \dots 2^{\text{ten}}$ Horizontalreihe die mit gewissen Factoren multiplicirten vorangehenden Reihen und berücksichtigt die Relationen (2), so erhalten wir folgende Form der Determinante:

$$(4) \quad \begin{vmatrix} -s-1 & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{l1} \\ a_{12}s & -s-1 & a_{32} & \dots & a_{l2} \\ a_{13}s & a_{23}s & -s-1 & \dots & a_{l3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1l}s & a_{2l}s & a_{3l}s & \dots & -s-1 \end{vmatrix}.$$

Ersetzt man in dieser Determinante s durch $\frac{1}{s}$ und multiplicirt mit s^l , so werden die Glieder der Diagonale ungeändert bleiben; dagegen werden in jeder Horizontalreihe die Glieder links von der Diagonale den Factor s verlieren und die Glieder rechts von derselben diesen Factor erhalten. Beiläufig ergibt sich daraus, dass die Determinante $|b_{\iota\kappa}|$ den Werth $(-1)^l$ hat. Schreibt man die Determinante (3) oder (4) in der Form:

$$(5) \quad (-1)^l \{s^l + M_1 s^{l-1} + M_2 s^{l-2} + \dots + M_{l-1} s + 1\},$$

so wird jeder Coefficient M_{l-k} aus M_k dadurch erhalten, dass man

Die Determinante (3) oder (4) kann nicht für $s = 1$ verschwinden.

Für $s = 1$ geht die genannte Determinante in $|a_{ix}|$ über. Folglich darf auch die letztere nicht verschwinden, was man auch leicht direct aus der Forderung herleiten kann, dass die Zahl der Wurzeln ω eine endliche sein muss. Hierauf wollen wir jedoch nicht näher eingehen, vielmehr die vorstehenden Entwicklungen dazu benutzen, um bestimmte Grenzen für die Determinante $|a_{ix}|$ anzugeben. Da die Function $s^l + M_1 s^{l-1} + \dots + 1$ nur für Wurzeln der Einheit verschwindet, so muss ihr Werth für $s = 1$ zwischen 0 und 2^l eingeschlossen sein. Somit ist auch die Determinante der a_{ix} zwischen den Werthen Null und $(-2)^l$ eingeschlossen; der Werth Null muss, wie bemerkt ausgeschlossen werden. Das liefert die Sätze:

Die Determinante aus den Coefficienten a_{ix} liegt zwischen $(-2)^l$ und Null, und zwar kann sie den ersteren Werth erhalten, den letzteren aber nicht.

Wählt man aus den Nummern $1 \dots l$ irgend $\rho (< l)$ Nummern $\iota_1 \dots \iota_\rho$ beliebig aus und bildet die Determinante der ρ^2 Grössen $a_{x\lambda}$, wo x, λ die ρ Nummern $\iota_1 \dots \iota_\rho$ annehmen können, so liegt die aus diesen Nummern gebildete Determinante zwischen $(-2)^\rho$ und Null, wobei der letztere Werth ausgeschlossen ist.

Speciell ergibt sich hieraus für $\rho = 2$, wenn man noch berücksichtigt, dass für gleiche Wurzeln die Unterdeterminanten verschwinden müssen:

Das Product $a_{ix} a_{xi}$ kann nur die Werthe 0, 1, 2, 3 erhalten, und den Werth Null nur, wenn sowohl a_{ix} als a_{xi} verschwindet.

Für ein ungerades l kann man (5) auch in der Form schreiben:

$$-\left\{ (s^l + 1) + M_1 (s^{l-1} + s) + \dots + \frac{M_{l-1}}{2} \left(s^{\frac{l+1}{2}} + s^{\frac{l-1}{2}} \right) \right\};$$

demnach ist diese Form für $s = 1$ nothwendig gleich einer geraden Zahl. Somit folgt:

Nimmt man aus den Zahlen $1 \dots l$ eine ungerade Zahl ρ von Marken $\iota_1 \dots \iota_\rho$ heraus, und bildet die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{\iota_1 \iota_1} & a_{\iota_1 \iota_2} & \dots & a_{\iota_1 \iota_\rho} \\ a_{\iota_2 \iota_1} & a_{\iota_2 \iota_2} & \dots & a_{\iota_2 \iota_\rho} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\iota_\rho \iota_1} & a_{\iota_\rho \iota_2} & \dots & a_{\iota_\rho \iota_\rho} \end{vmatrix},$$

so ist deren Werth eine gerade Zahl.

Gehen wir von einer beliebigen Wurzel $\sum m_i \omega_i$ aus und wenden darauf die Transformation b_{ix} an, so erhalten wir μ verschiedene Wurzeln, wenn die sämtlichen Wurzeln der Gleichung $|b_{ix} - \delta_{ix} s| = 0$

μ^e , aber nicht niedrigere Wurzeln der Einheit sind. Eine beliebige hierin nicht enthaltene Wurzel führt durch dieselbe Operation wieder auf μ weitere Wurzeln u. s. w. Daher folgt der Satz:

Die Zahl der Wurzeln der charakteristischen Gleichung ist ein Vielfaches der kleinsten Zahl μ , welche der Bedingung genügt, dass die Determinante (3) oder (4) ein Factor von $s^e - 1$ ist.

§ 14.

Einteilung der aus den a_{ix} gebildeten Systeme.

Ehe wir weiter gehen, müssen wir einige Definitionen aufstellen. Wählen wir aus den l Nummern $1 \dots l$ eine kleinere Zahl ρ aus: $t_1, t_2 \dots t_\rho$, und lassen die beiden Marken κ und λ von $a_{\kappa\lambda}$ sich nur über $t_1, t_2 \dots t_\rho$ erstrecken, so heisst das durch diese ρ^2 Coefficienten gebildete System ein Untersystem ρ^{ter} Ordnung. Jedes solche Untersystem führt, wenn nicht alle seine ausserhalb der Diagonale stehenden Coefficienten Null sind, von den Wurzeln $\pm \omega_1, \dots, \pm \omega_\rho$ zu weiteren Wurzeln; diese werden als abhängig von den ρ genannten Wurzeln bezeichnet. Dagegen sind alle andern Wurzeln, welche aus $\omega_1 \dots \omega_\rho$ mittelst des Systems ρ^{ter} Ordnung hergeleitet werden, unabhängig von jenen 2ρ und den durch das Untersystem abgeleiteten Wurzeln.

Wenn $a_{ix} = 0$ ist, so wissen wir, dass auch $a_{xi} = 0$ ist. Nun ist es ganz gut möglich, dass mehrere Grössen a_{ix} gleich Null werden, ohne dass der Charakter des Systems irgend geändert wird. Um zu einem durchgreifenden Unterschiede zu gelangen, stellen wir folgende Betrachtung an. Wir gehen von einer beliebigen Marke i aus und suchen alle diejenigen von i verschiedenen Marken $t_1, t_2, t_3 \dots$, für welche $a_{it_1}, a_{it_2}, a_{it_3} \dots$ von Null verschieden sind. Wenn $t_1, t_2, t_3 \dots$ noch nicht alle l Marken $1 \dots l$ sind, so suche man jetzt alle von $t_1, t_2, t_3 \dots$ verschiedenen Marken $t_{11}, t_{12} \dots$ für welche $a_{t_1 t_{11}}, a_{t_1 t_{12}} \dots$ nicht verschwinden; ebenso alle noch nicht gefundenen Marken $t_{21}, t_{22} \dots$, für welche $a_{t_2 t_{21}}, a_{t_2 t_{22}} \dots$ von Null verschieden sind u. s. f. Jetzt sind zwei Fälle möglich: entweder gelangt man durch Fortsetzung dieser Betrachtung zu allen l Marken oder man bleibt innerhalb einer (durch die zuerst gewählte Marke i bestimmten) kleineren Anzahl. Ist das erstere der Fall, so wird man durch diese Operation stets zu allen Marken gelangen, von welcher Marke man auch ausgeht. Demnach ist hierdurch ein wesentlicher Unterschied der Systeme begründet: ein solches heisst *einfach*, wenn die Operation zu allen Marken führt; im anderen Falle heisst es *zusammengesetzt*. So ist das System fünfter Ordnung zusammengesetzt, wenn

$$a_{41} = a_{42} = a_{43} = a_{51} = a_{52} = a_{53} = 0$$

ist; ebenso ist ein System l^{ter} Ordnung zusammengesetzt, wenn die $a_1, a_2, \dots, a_{l-1}$ sämmtlich verschwinden. Es genügt, die einfachen Systeme aufzusuchen, und diese Aufgabe wird durch folgenden Lehrsatz wesentlich erleichtert, dessen Beweis keiner Ausführung bedarf:

Ist ein System l^{ter} Ordnung einfach, so ist unter dessen l Untersystemen $(l-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mindestens eins ebenfalls einfach.

Die angegebene Eintheilung der aus den a_{ix} gebildeten Systeme begründet eine gleiche für die zugehörigen Wurzeln. Wir gehen von einer Wurzel ω_i aus, suchen alle Wurzeln $m_1\omega_1 + \dots + m_l\omega_l$, für welche m_i von Null verschieden ist, und merken uns diejenigen Wurzeln $\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots$, für welche bei nicht verschwindendem m_i auch $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots$ von Null verschieden sind. Dieselbe Betrachtung stellen wir jetzt für $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots$ an und fahren damit fort, bis wir auf diesem Wege nicht mehr zu neuen Marken gelangen. Jenachdem das System der a einfach oder zusammengesetzt ist, kommen wir hierdurch zu allen l Marken oder bleiben innerhalb einer kleineren Anzahl.

Zu einer weiteren Eintheilung gelangt man durch folgende Betrachtung. Es wird sich im folgenden zeigen, dass die charakteristischen Eigenschaften der $2l$ Wurzeln $\omega_1, -\omega_1, \dots, \omega_l, -\omega_l$ auch jeder Wurzel $m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \dots + m_l\omega_l$ zukommen, wofern die letztere durch das zwischen den ersten Wurzeln bestehende System a_{ix} gefordert ist. Sobald aber das System der a_{ix} für die ersten $2l$ Wurzeln gegeben ist und alle durch dasselbe geforderten weiteren Wurzeln bestimmt sind, kann man unmittelbar für irgend zwei Wurzeln ω_{α_1} und ω_{α_2} die Coefficienten $a_{\alpha_1\alpha_2}$ und $a_{\alpha_2\alpha_1}$ bestimmen. Wählt man nun irgend l von einander unabhängige aus den Wurzeln aus und sucht das zugehörige System der a_{ix} , so sind bei den getroffenen Festsetzungen nur zwei Fälle möglich: a) die Gesammtheit der Wurzeln fällt in beiden Fällen zusammen, b) der zweite Fall liefert nur einen Theil der im ersten Falle erhaltenen Wurzeln. Der erste Fall erfordert keineswegs, dass die Systeme a_{ix} und a_{ix}' identisch werden. So liefert die Voraussetzung, dass für $l=3$ bei ungleichen i, x jedes $a_{ix} = -1$ ist, die Wurzeln:

$$\pm \omega_1, \pm \omega_2, \pm \omega_3, \pm (\omega_1 - \omega_2), \pm (\omega_2 - \omega_3), \pm (\omega_3 - \omega_1).$$

Setzt man aber

$$\omega_1' = \omega_1, \omega_2' = \omega_2, \omega_3' = \omega_2 - \omega_3,$$

so wird

$$a_{12}' = a_{21}' = a_{23}' = a_{32}' = -1, \quad a_{13}' = a_{31}' = 0;$$

und das zweite System führt zu den Wurzeln:

$$\pm \omega_1', \pm \omega_2', \pm \omega_3', \pm (\omega_1' - \omega_2'), \pm (\omega_2' - \omega_3') \pm (\omega_1' - \omega_2' + \omega_3'),$$

welche den früher angegebenen gleich sind. In diesem und in ähnlichen

Fällen, wo die beiden Systeme zu denselben Wurzeln führen, heißen sie *äquivalent*.

Man kann dasselbe auch auf folgende Weise ausdrücken. Für das System a_{ix} gehe man von den Wurzeln $\omega_1 \dots \omega_i$ aus, für a'_{ix} von $\omega'_1 \dots \omega'_i$. Wenn es nun möglich ist, durch eine homogene lineare Transformation, welche $\omega_1 \dots \omega_i$ in $\omega'_1 \dots \omega'_i$ umwandelt, alle Wurzeln des einen Systems in die des andern umzuwandeln, so heißen die Wurzelsysteme und damit die Systeme a_{ix} und a'_{ix} äquivalent.

§ 15.

Angabe aller einfachen, nicht äquivalenten Systeme.

Da die zusammengesetzten Systeme von selbst in einfache zerfallen, so genügt es, nur die einfachen Systeme anzugeben. Auch werden wir äquivalente Systeme als identisch betrachten und demnach die vielleicht nicht unwichtige Frage nach der Umgestaltung eines Systems in ein äquivalentes nicht untersuchen. Zwar würde ein tieferes Eingehen auf die im § 13 kurz entwickelte Theorie ohne Zweifel die folgende Untersuchung wesentlich erleichtern; aber da die folgenden Entwicklungen, abgesehen von der zunächst vorliegenden Frage, auch für einige Sätze der §§ 17 und 18 nicht entbehrt werden können, so wollen wir uns mit den aufgefundenen Resultaten begnügen und untersuchen, ob dieselben uns zu allen Systemen hinführen.

Für $l = 2$ muss, damit das System einfach ist, das Product $a_{12} a_{21}$ einen der Werthe 1, 2, 3 haben. Diese drei Fälle sind auch sämmtlich möglich, so dass wir den Satz erhalten:

Für $l = 2$ gibt es drei Systeme der Coefficienten a_{ix} , welche wir als II A), II B), II C) unterscheiden wollen. Für II A) können wir $a_{12} = a_{21} = -1$ setzen, so dass wir die Wurzeln erhalten:

$$\pm \omega_1, \pm \omega_2, \pm (\omega_1 - \omega_2).$$

Für II B) ist: $a_{12} = -1$, $a_{21} = -2$, und die Wurzeln sind:

$$\pm \omega_1, \pm \omega_2, \pm (\omega_1 - \omega_2), \pm (2\omega_1 - \omega_2).$$

Für II C) ist $a_{12} = -1$, $a_{21} = -3$, so dass die Wurzeln vorkommen:

$$\pm \omega_1, \pm \omega_2, \pm (\omega_1 - \omega_2), \pm (2\omega_1 - \omega_2), \pm (3\omega_1 - \omega_2), \pm (3\omega_1 - 2\omega_2).$$

Die Determinante (3) oder (4) § 13 liefert ausgerechnet im Falle A): $s^2 + s + 1$, im Falle B): $s^2 + 1$, und im Falle C): $s^2 - s + 1$; dieselbe verschwindet bei A) für dritte, bei B) für vierte und bei C) für sechste Wurzeln der Einheit.

Um die einfachen Systeme dritter Ordnung zu erhalten, gehen wir von einem der drei einfachen Systeme zweiter Ordnung aus und bestimmen die Coefficienten $a_{13}, a_{31}, a_{23}, a_{32}$ so, dass sie den Forderungen

des § 13 genügen. Diese Herleitung lässt sich aber im wesentlichen in derselben Weise für ein beliebiges l durchführen. Wir nehmen also jetzt an, wir wären, entsprechend dem Falle II A), für die Zahl $l - 1$ zu einem Systeme gelangt, in welchem für $\iota, \kappa = 1 \dots l - 1$ und $\iota \geq \kappa$ jedesmal $a_{\iota\kappa} = -1$ ist, und wollen untersuchen, welche Werthe wir den $a_{\iota\kappa}$ und $a_{\kappa\iota}$ noch beilegen können. Dann gelten in Folge der Gleichungen (6) § 13 die Beziehungen:

$$(1) \quad a_{\iota\kappa} a_{\lambda\iota} = a_{\kappa\iota} a_{\iota\lambda}$$

für irgend zwei Marken κ, λ . Unter den $l - 1$ Producten $a_{\kappa\iota} a_{\iota\kappa}$ mögen α gleich Null sein, und wir erinnern daran, dass in jedem solchen Producte beide Factoren gleich Null sind. Alle nicht verschwindenden Producte haben in Folge von (1) denselben Werth, welcher mit m bezeichnet werden soll. Zugleich ist $a_{\iota\kappa} = a_{\kappa\iota}$ und $a_{\kappa\lambda} = a_{\lambda\kappa}$, wofern keiner dieser Coefficienten verschwindet. Bezeichne ich die Determinante der l^2 Coefficienten a mit Δ , so ist:

$$\begin{aligned} (-1)^l \Delta &= 2l - (l-1) \sum_{\kappa} a_{\iota\kappa} a_{\kappa\iota} + \sum_{\kappa \lambda} a_{\iota\kappa} a_{\lambda\iota} \\ &= 2l - (l-1)(l-1-\alpha)m + (l-\alpha-1)(l-\alpha-2)m \\ &= 2l - (l-\alpha-1)(\alpha+1)m. \end{aligned}$$

Bei constanten Werthen von l und m wird die linke Seite abnehmen, wenn α von 0 bis $\frac{l-2}{2}$ zunimmt, und dann bei wachsendem α wieder zunehmen. Soll daher die rechte Seite positiv bleiben, so muss für $l > 8$ die Zahl α einen der vier Werthe 0, 1, $l-3$, $l-2$ annehmen; für $l < 6$ sind damit alle für α möglichen Werthe angegeben; für $l = 6, 7, 8$ kommen noch die Werthe $\alpha = 2, l = 3$ hinzu. Ausserdem sieht man, dass für $\alpha = 0$ oder $= l - 2$ für m die beiden Werthe 1 und 2, für die andern Werthe von α nur der Werth 1 zulässig ist.

Wir sehen zu, ob den so gefundenen Coefficienten jedesmal ein geschlossenes System von Wurzeln entspricht, und ob einige dieser Systeme äquivalent sind.

Nehmen wir zunächst $\alpha = 0, m = 1$, so können auch die hinzukommenden $a_{\kappa\iota}$ und $a_{\iota\kappa}$ gleich -1 genommen werden. Die Wurzeln sind $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_l, \omega_1 - \omega_2, \dots, \omega_l - \omega_1, \dots, \omega_{l-1} - \omega_l$ (wo die entgegengesetzt gleichen Wurzeln, wie auch im Folgenden nicht mit aufgeführt sind). Ersetzen wir ω_i durch $\omega_\kappa - \omega_i$, so wird $a_{\kappa\iota} = a_{\iota\kappa} = -1$, aber für $\kappa \geq \lambda$ immer: $a_{\lambda\iota} = a_{\iota\lambda} = 0$. Die Annahme: $\alpha = l - 2, m = 1$ liefert also ein mit dem vorigen äquivalentes System.

Wir untersuchen jetzt $\alpha = 0, m = 2$, und zwar zunächst den Fall, dass jedes $a_{\iota\kappa} = -1, a_{\kappa\iota} = -2$ ist. Zu den Wurzeln

$\omega_1 \dots \omega_l, \omega_x - \omega_1$ kommen dann noch hinzu: $\omega_l - \omega_x, 2\omega_l - \omega_x, 2\omega_l - \omega_x - \omega_1$. Die Ersetzung von ω_l durch $2\omega_l - \omega_x$ oder $2\omega_l - \omega_x - \omega_1$ ändert die a_{lx} und a_{xl} nicht; wenn man aber statt ω_l die Wurzel $-\omega_l + \omega_x$ wählt, so wird $a_{xl}' = -2, a_{lx}' = -1, a_{li}' = a_{li} = 0$; somit führt die Annahme $\alpha = l - 2$ wieder auf dieselben Wurzeln.

Wenn für $\alpha = 0, m = 2$ jedes $a_{lx} = -2, a_{xl} = -1$ ist, so müssen ausser $\omega_1 \dots \omega_l$ und $\omega_x - \omega_1$ noch die Wurzeln vorhanden sein: $\omega_x - \omega_l, 2\omega_x - \omega_l, \omega_x + \omega_2 - \omega_l$. Vertauscht man hier ω_l durch $2\omega_x - \omega_l$, so wird $a_{xl}' = -1, a_{lx}' = -2$, dagegen für $x \geq l: a_{li}' = 0$.

Endlich gehen wir zu der Annahme über, dass $\alpha = 1$ und damit $m = 1$ ist. Es sei $a_{11} a_{11} = \dots = a_{l-2, l-1} a_{l-1, l-2} = 1, a_{l, l-1} = a_{l-1, l} = 0$. Zu den durch das Untersystem $(l-1)$ ter Ordnung bestimmten Wurzeln: $\omega_1 \dots \omega_l, \omega_l - \omega_x$ kommen dann noch folgende hinzu:

$$\omega_\mu - \omega_l, \omega_\mu - \omega_{l-1} - \omega_l, \omega_\mu + \omega_\nu - \omega_{l-1} - \omega_l,$$

wo μ und ν zwei Nummern der Reihe $1 \dots l-2$ bezeichnen. Ersetzt man ω_l durch $\omega_\nu - \omega_l$, so wird $a_{l\nu}' = a_{\nu l}' = -1, a_{l, l-1}' = a_{l-1, l}' = -1$, dagegen $a_{i\mu}' = 0$. Daher führt die Annahme $\alpha = l - 3$ zu einem äquivalenten System.

Somit sind wir zu dem Satze gelangt:

Für jedes $l > 3$ gibt es mindestens vier wesentlich verschiedene einfache Systeme der Coefficienten a_{ix} . Dieselben können in folgender Weise charakterisirt werden:

Im System A) ist jedes ausserhalb der Diagonale stehende a_{ix} gleich -1 ; für $\mu, \nu = 1 \dots l$ sind die Wurzeln $\pm \omega_\mu, \pm (\omega_\mu - \omega_\nu)$.

Für das System B) setze man, wenn μ und ν ungleiche Nummern der Reihe $1 \dots l-1$ sind:

$$a_{\mu\nu} = -1, a_{l\mu} = -1, a_{\mu l} = -2.$$

Dann sind die vorkommenden Wurzeln:

$$\pm \omega_1 \dots \pm \omega_l, \pm (\omega_\mu - \omega_\nu), \pm (\omega_\mu - \omega_l), \pm (2\omega_l - \omega_\mu), \\ \pm (2\omega_l - \omega_\mu - \omega_\nu).$$

Für das System C) setze man $a_{\mu\nu} = -1, a_{l\mu} = -2, a_{\mu l} = -1$, wenn wieder μ, ν verschiedene Nummern der Reihe $1 \dots l-1$ bezeichnen. Dann sind die Wurzeln

$$\pm \omega_1 \dots \pm \omega_l, \pm (\omega_\mu - \omega_\nu), \pm (\omega_\mu - \omega_l), \pm (2\omega_\mu - \omega_l), \\ \pm (\omega_\mu + \omega_\nu - \omega_l).$$

Für das System D) sollen μ, ν verschiedene Nummern der Reihe $1 \dots l-2$ sein, und

$$a_{\mu\nu} = -1, a_{\mu, l-1} = a_{l-1, \mu} = -1, a_{\mu l} = a_{l\mu} = -1, a_{l-1, l} = a_{l, l-1} = 0.$$

Das System führt zu den Wurzeln:

$$\pm \omega_1 \dots \pm \omega_l, \pm (\omega_\mu - \omega_\nu), \pm (\omega_\mu - \omega_{l-1}), \pm (\omega_\mu - \omega_l), \\ \pm (\omega_\mu - \omega_{l-1} - \omega_l), \pm (\omega_\mu + \omega_\nu - \omega_{l-1} - \omega_l).$$

Unter den Untersystemen $(l-1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist mindestens eins entsprechend der Form A) gebildet.

Für $l=3$ wird das System D) äquivalent zu A).

Die Determinante (3) § 13 giebt für A) ausgerechnet:

$$s^l + s^{l-1} + s^{l-2} + \dots + s + 1,$$

für B) und C): $s^l + 1$, für D): $(s+1)(s^{l-1}+1)$; sie verschwindet also bei A) für $(l+1)^{\text{te}}$, bei B) und C) für $2l^{\text{te}}$, bei D) für $(2l-2)^{\text{te}}$ Wurzeln der Einheit.

Indem wir für $l=6, 7, 8$ die Voraussetzung $\alpha=2$ machen und die dadurch bedingten Wurzeln aufsuchen, erkennen wir, dass die Annahme $\alpha=l-4$ zu einem äquivalenten Systeme führt. Somit erhalten wir folgenden Satz:

Für $l=6$ giebt es ausser den Systemen A), B), C), D) noch ein System VI E), welches in folgender Weise gebildet ist; für $\iota, \kappa \dots = 1, 2, 3$ ist $a_{\iota\kappa} = -1$, $a_{14} = a_{15} = a_{16} = a_{41} = a_{51} = a_{61} = -1$, $a_{45} = a_{51} = -1$, $a_{46} = a_{64} = a_{56} = a_{65} = 0$. Dasselbe führt zu folgenden Wurzeln (und den entgegengesetzt gleichen):

$$\omega_1, \dots, \omega_6, \omega_\iota - \omega_\kappa, \omega_\iota - \omega_4, \omega_\iota - \omega_5, \omega_\iota - \omega_6, \omega_\iota - \omega_5, \\ -\omega_\iota + \omega_4 + \omega_6, -\omega_\iota + \omega_5 + \omega_6, -\omega_\iota - \omega_\kappa + \omega_4 + \omega_6, \\ -\omega_\iota - \omega_\kappa + \omega_5 + \omega_6, -\omega_\iota - \omega_\kappa + \omega_4 + \omega_5 + \omega_6, \\ -\omega_1 - \omega_2 - \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 + \omega_6, -\omega_1 - \omega_2 - \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 + 2\omega_6.$$

Für $l=7$ ist ein System VII E) für $\iota, \kappa \dots = 1 \dots 4$ in folgender Weise gebildet: $a_{\iota\kappa} = -1$, $a_{15} = a_{16} = a_{17} = a_{51} = a_{61} = a_{71} = -1$, $a_{56} = a_{65} = -1$, $a_{57} = a_{67} = a_{75} = a_{76} = 0$. Dann müssen die Wurzeln vorkommen:

$$\omega_1 \dots \omega_7, \omega_\iota - \omega_\kappa, \omega_\iota - \omega_5, \omega_\iota - \omega_6, \omega_5 - \omega_6, \omega_\iota - \omega_7, \\ -\omega_\iota + \omega_5 + \omega_7, -\omega_\iota + \omega_6 + \omega_7, -\omega_\iota - \omega_\kappa + \omega_5 + \omega_7, \\ -\omega_\iota - \omega_\kappa + \omega_6 + \omega_7, -\omega_\iota - \omega_\kappa + \omega_5 + \omega_6 + \omega_7, \\ -\omega_\iota - \omega_\kappa - \omega_2 + \omega_5 + \omega_6 + \omega_7, -\omega_\iota - \omega_\kappa - \omega_2 + \omega_5 + \omega_6 + 2\omega_7, \\ \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 - \omega_5 - \omega_6 - 2\omega_7, \omega_1 + \dots + \omega_4 - 2\omega_5 - \omega_6 - 2\omega_7, \\ \omega_1 + \dots + \omega_4 - \omega_5 - 2\omega_6 - 2\omega_7.$$

Für $l=8$ bildet man ein System VIII E) für $\iota, \kappa \dots = 1 \dots 5$ durch die Festsetzungen:

$$a_{\iota\kappa} = -1, a_{16} = a_{17} = a_{18} = a_{61} = a_{71} = a_{81} = -1, a_{67} = a_{76} = -1, \\ a_{68} = a_{86} = a_{78} = a_{87} = 0.$$

Hier kommen folgende Wurzeln vor:

$$\begin{aligned} &\omega_1 \dots \omega_5, \omega_1 - \omega_x, \omega_1 - \omega_6, \omega_6 - \omega_7, \omega_1 - \omega_7, \omega_1 - \omega_8, \omega_1 - \omega_6 - \omega_8, \\ &\omega_1 - \omega_7 - \omega_8, \omega_1 + \omega_x - \omega_6 - \omega_8, \omega_1 + \omega_x - \omega_7 - \omega_8, \\ &\omega_1 + \omega_x - \omega_6 - \omega_7 - \omega_8, \omega_1 + \omega_x + \omega_2 - \omega_6 - \omega_7 - \omega_8, \\ &\omega_1 + \omega_x + \omega_2 - \omega_6 - \omega_7 - 2\omega_8, \omega_1 + \omega_x + \omega_2 + \omega_\mu - \omega_6 - \omega_7 - 2\omega_8, \\ &\omega_1 + \omega_x + \omega_2 + \omega_\mu - 2\omega_6 - \omega_7 - 2\omega_8, \\ &\omega_1 + \omega_x + \omega_2 + \omega_\mu - \omega_6 - 2\omega_7 - 2\omega_8, \\ &\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 - 2\omega_6 - \omega_7 - 2\omega_8, \\ &\omega_1 + \dots + \omega_5 - \omega_6 - 2\omega_7 - 2\omega_8, \\ &\omega_1 + \dots + \omega_5 - 2\omega_6 - 2\omega_7 - 2\omega_8, \\ &\omega_1 + \dots + \omega_5 - \omega_6 - 2\omega_7 - 3\omega_8, \\ &\omega_1 + \dots + \omega_5 - 2\omega_6 - \omega_7 - 3\omega_8, \\ &\omega_1 + \dots + \omega_5 - 2\omega_6 - 2\omega_7 - 3\omega_8, \\ &\omega_1 + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 - 2\omega_6 - 2\omega_7 - 3\omega_8. \end{aligned}$$

Die Determinante (3) § 13 liefert den Werth für VI E):

$$s^6 + s^5 - s^3 + s + 1,$$

für VII E):

$$(s+1)(s^6 - s^3 + 1),$$

für VIII E):

$$s^8 + s^7 - s^5 - s^4 - s^3 + s + 1;$$

dieselbe verschwindet im ersten Falle für zwölfte, im zweiten für achtzehnte und im letzten für dreissigste Wurzeln der Einheit.

Wir wollen jetzt annehmen, aus $(l-1)^2$ Coefficienten a_{ix} sei ein System in der durch (B) bezeichneten Weise gebildet, und untersuchen, welche Werthe wir den Coefficienten a_{xi} und a_{ix} dann beilegen können. Wenn dann x, λ ungleiche Nummern der Reihe $1 \dots l-2$ bezeichnen, so müssen nach (6) § 13 die Gleichungen bestehen:

$$a_{xi} a_{i\lambda} = a_{\lambda i} a_{ix}, \quad a_{i, l-1} a_{xi} = 2 a_{i, l-1} a_{ix},$$

Ein nicht verschwindendes Product $a_{xi} a_{ix}$ sei gleich m ; dann hat jedes nicht verschwindende Product denselben Werth. Ferner ist dann

$$a_{i, l-1} a_{i, l-1} = \frac{2}{m} \text{ oder } = 0, \text{ und zugleich } a_{i, l-1} = -1 \text{ oder } = 0.$$

Bezeichnen wir wieder die Determinante der a mit Δ , so ist:

$$\begin{aligned} (-1)^l \Delta = & 4 - 2a_{11}a_{11} - 2a_{22}a_{22} - \dots - 2a_{i, l-2} a_{i, l-2} - (l-1)a_{i, l-1} a_{i, l-1} \\ & + 4a_{i, l-1}(a_{11} + \dots + a_{i, l-2}). \end{aligned}$$

Wenn α angiebt, wie viele der Coefficienten $a_{11} \dots a_{i, l-2}$ verschwinden, so hat die linke Seite der vorstehenden Gleichung bei nicht-verschwindendem $a_{i, l-1}$ für $m=1$ den Werth $2-2\alpha$, für $m=2$ den Werth $5-l$, endlich bei verschwindendem $a_{i, l-1}$ den Werth $4-2m(l-2-\alpha)$. Das erste ist nur möglich für $\alpha=0$ und führt

auf B); der dritte Fall wird hiermit identisch (denn nachdem man in B) zunächst l mit $l-1$ vertauscht hat, kann man ω_i durch $\omega_i - 2\omega_{i-1}$ ersetzen). Der zweite Fall kann nur für $l=4$ einen positiven Werth für die rechte Seite ergeben und liefert dann:

$$a_{14} = a_{24} = -2, \quad a_{41} = a_{42} = a_{34} = a_{43} = -1.$$

Ebenso liefert die Annahme, dass ein aus $(l-1)^2$ Coefficienten bestehendes nach der Form C) gebildetes System einem Systeme l^{ter} Ordnung angehören soll, nur für $l=4$ ein neues System

$$a_{41} = a_{42} = -2, \quad a_{14} = a_{24} = a_{34} = a_{43} = -1.$$

Wir betrachten jetzt den Fall, dass das aus den ersten $(l-1)^2$ Coefficienten gebildete Untersystem $l-1^{\text{ter}}$ Ordnung die Form D) hat. Wenn also für $i, x < l$ jedes $a_{ix} = -1$ ist mit Ausnahme von

$$a_{l-1, l-2} = a_{l-2, l-1} = 0,$$

so muss sein:

$$a_{ii} a_{ix} = a_{ix} a_{xi}.$$

Für die Determinante Δ ergibt sich der Werth:

$$\begin{aligned} (-1)^l \Delta = & 8 - 4a_{11} a_{11} - \dots - 4a_{l-3, l-3} a_{l-3, l-3} - (l-1)a_{l-1, l-2} a_{l-2, l-1} \\ & - (l-1)a_{l-1, l-1} a_{l-1, l-1} + 4(a_{l-1, l-2} + a_{l-1, l-1})(a_{11} + \dots + a_{l-3, l-3}) \\ & - 2(l-3)a_{l-1, l-2} a_{l-1, l-1}. \end{aligned}$$

Wieder soll α angeben, wie viele der Coefficienten $a_{11} \dots a_{l-3, l-3}$ verschwinden und m soll den Werth eines nicht-verschwindenden Productes $a_{xi} a_{ix}$ bezeichnen. Wenn $a_{l-1, l-1}$ und $a_{l-1, l-2}$ beide von Null verschieden sind, so ist der Werth der rechten Seite $8 - 4m - 4\alpha m$, so dass $\alpha = 0$, $m = 1$ sein muss; ist $a_{l-1, l-1}$ oder $a_{l-1, l-2}$ gleich Null, so ist der Werth $8 - (l-1)m$; für $a_{l-1, l-1} = a_{l-1, l-2} = 0$ ist er $8 - 4(l-3-\alpha)m$. Von diesen Fällen ist der erste bereits angegeben; der dritte ist damit äquivalent. Der zweite Fall kann nur für $l=6, 7, 8$ eintreten; wenn dabei $\alpha = 0$ ist, so kommen wir zu den Formen VI E, VII E und VIII E. Ein anderer Werth von α führt aber zu keinem neuen System; ersetzt man z. B. in VI E die ω_5 durch $\omega_4 - \omega_5$, so wird $a_{51}' = a_{52}' = a_{53}' = 0$; nimmt man $-\omega_1 + \omega_5 + \omega_6$ als ω_5' , so wird $a_{51}' = 0$, $a_{52}' = a_{53}' = -1$; für $-\omega_1 - \omega_2 + \omega_4 + \omega_5 + \omega_6$ wird $a_{51}' = a_{52}' = 0$, $a_{53}' = -1$, woraus die Aequivalenz leicht ersehen wird. Somit erhalten wir folgende Sätze:

Für $l=4$ giebt es ausser den vier angegebenen Systemen noch die beiden folgenden:

IV E): $a_{ii} = -2$, $a_{ix} = -1$ mit Ausnahme von

$$a_{14} = a_{24} = a_{13} = a_{23} = -2.$$

Dazu gehören die Wurzeln:

$$\begin{aligned} \omega_1 \dots \omega_4, \quad \omega_1 - \omega_2, \quad \omega_1 - \omega_3, \quad \omega_1 - 2\omega_3, \quad \omega_1 - \omega_4, \quad \omega_1 - 2\omega_4, \\ \omega_2 - \omega_3, \quad \omega_2 - 2\omega_3, \quad \omega_2 - \omega_4, \quad \omega_2 - 2\omega_4, \quad \omega_3 - \omega_4, \quad \omega_1 - \omega_3 - \omega_4, \end{aligned}$$

$\omega_2 - \omega_3 - \omega_4, \omega_1 + \omega_2 - 2\omega_3, \omega_1 + \omega_2 - 2\omega_4, \omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4,$
 $\omega_1 + \omega_2 - 2\omega_3 - \omega_4, \omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - 2\omega_4, 2\omega_1 + \omega_2 - 2\omega_3 - 2\omega_4,$
 $\omega_1 + 2\omega_2 - 2\omega_3 - 2\omega_4.$

Für IV F) sollen $a_{xx} = -2, a_{xx} = -1$ sein mit Ausnahme von $a_{31} = a_{41} = a_{32} = a_{42} = -2$. Dann bekommt man die Wurzeln:

$\omega_1 \dots \omega_4, \omega_1 - \omega_2, \omega_1 - \omega_3, 2\omega_1 - \omega_3, \omega_1 - \omega_4, 2\omega_1 - \omega_4,$
 $\omega_2 - \omega_3, 2\omega_2 - \omega_3, \omega_2 - \omega_4, 2\omega_2 - \omega_4, \omega_3 - \omega_4, \omega_1 + \omega_2 - \omega_3,$
 $\omega_1 + \omega_2 - \omega_4, 2\omega_1 - \omega_3 - \omega_4, 2\omega_2 - \omega_3 - \omega_4, \omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4,$
 $2\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4, \omega_1 + 2\omega_2 - \omega_3 - \omega_4, 2\omega_1 + 2\omega_2 - \omega_3 - \omega_4,$
 $2\omega_1 + 2\omega_2 - 2\omega_3 - \omega_4, 2\omega_1 + 2\omega_2 - \omega_3 - 2\omega_4.$

Die Determinante (3) § 13 liefert ausgerechnet: $s^4 - s^2 + 1$ und verschwindet für zwölfte Wurzeln der Einheit.

Mit Ausnahme der Systeme IV E) und IV F) hat jedes System l -ter Ordnung, wofern es ein Untersystem $l-1$ -ter Ordnung von der Form B), C), D) hat, nothwendig auch ein solches von der Form A).

Die vorangehende Untersuchung zeigt, dass für $l=3$ ausser den Systemen A), B), C) kein weiteres einfaches vorkommen kann, wenn nicht dessen sämtliche Producte $a_{xx} a_{xx}$ gleich 0 oder 3 sind; man übersieht aber unmittelbar, dass das für ein einfaches System nicht angeht. Somit giebt es auch für $l=4$ nur die sechs einfachen Systeme A) bis F), und da die Systeme IV E) und IV F) in keinem einfachen Systeme fünfter Ordnung vorkommen können, so giebt es für $l=5$ nur die vier einfachen Systeme A), B), C), D), zu denen für $l=6$ nur noch VI E) hinzutritt. Auch zeigt die Untersuchung unmittelbar, dass für $l=7$ zu den aufgestellten nur dann weitere Systeme hinzukommen können, wenn deren einfache Untersysteme sechster Ordnung sämtlich mit VI E) äquivalent sind. Dass das nicht möglich ist, kann auf mannigfaltige Weise gezeigt werden. Wir theilen einen Beweis mit, welcher sich unmittelbar auf die Fälle $l=8$ und $l=9$ überträgt.

Zu dem Ende vertauschen wir zunächst in VI E) die Marke 1 mit 7; dann ist $a_{27} = a_{37} = a_{47} = a_{57} = a_{67} = -1$. Wir wählen statt ω_7 eine von $\omega_2 \dots \omega_6$ unabhängige, in ω_4 und ω_6 symmetrische Wurzel; für $\omega_2 - \omega_7$ wird

$$a_{27} = -1, a_{37} = \dots = a_{67} = 0;$$

für $\omega_6 - \omega_7$ wird

$$a_{27} = a_{37} = 0, a_{47} = a_{57} = 1, a_{67} = -1;$$

für $-\omega_7 - \omega_2 + \omega_4 + \omega_5 + \omega_6$ wird

$$a_{27} = 0, a_{37} = a_{47} = a_{57} = -1, a_{67} = 0;$$

für $\omega_7 + \omega_2 + \omega_3 - \omega_4 - \omega_5 - \omega_6$ wird

$$a_{27} = a_{37} = -1, a_{47} = a_{57} = 0, a_{67} = -1;$$

endlich für $-\omega_7 - \omega_2 - \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 + 2\omega_6$ wird

$$a_{27} = a_{37} = a_{47} = a_{57} = 0, a_{67} = -1.$$

Nun legen wir für das aus den sechs ersten Marken gebildete Untersystem genau die Form VI E) zu Grunde und suchen die $a_{17}, a_{71} \dots$ so zu bestimmen, dass jedes weitere Untersystem sechster Ordnung entweder zusammengesetzt oder mit VI E) äquivalent ist. Lassen wir die Marke 6 weg, so erkennen wir, dass von den fünf Producten $a_{17}a_{71}, \dots, a_{57}a_{75}$ entweder zwei oder alle verschwinden müssen. Indem wir aber eine der Marken 5 oder 4 weglassen, erkennen wir aus der mit der Form D) angestellten Untersuchung, dass 1) $a_{76}a_{67}$ oder $a_{75}a_{57}$ und 2) $a_{76}a_{67}$ oder $a_{74}a_{47}$ verschwinden muss. Endlich zeigt die soeben vorgenommene Vertauschung von 1 mit 7 und von ω_7 mit andern Wurzeln, welche Formen nach Weglassung der Marke 1 (und entsprechend der Marke 2 und 3) noch vorkommen können. Wählt man $a_{67} = a_{76} = -1$, so muss $a_{57} = a_{47} = 0$ sein, und zugleich $a_{17} = a_{27} = a_{37}$ entweder $= 0$ oder $= -1$ sein; beide Fälle sind aber auszuschließen, da die Determinante aus allen a_{ix} alsdann verschwindet. Wählt man aber $a_{67} = 0, a_{47} = a_{57} = -1$, so müssen erstens zwei der Coefficienten a_{17}, a_{27}, a_{37} gleich Null sein und zweitens muss von je zweien dieser Coefficienten jedesmal einer verschwinden, was nicht möglich ist. Es giebt also für $l=7$ nur die aufgestellten Systeme.

In gleicher Weise kann der entsprechende Satz für $l=8$ bewiesen werden. Wir legen für das durch die sieben ersten Marken gegebene Untersystem die Form VII E) zu Grunde. Um zu erkennen, welche Formen für das durch Auslassung der Marke 1 bestimmte Untersystem noch möglich sind, vertauschen wir in VII E) die Marke 1 mit 8 und wählen dann für ω_8 alle diejenigen Wurzeln, welche unter Beibehaltung der $\omega_2 \dots \omega_7$ noch möglich sind und in denen ω_5 und ω_6 symmetrisch vorkommen. Für ω_8 selbst wird $a_{28} = \dots = a_{78} = -1$, für $\omega_2 - \omega_8$ wird $a_{28} = -1, a_{38} = \dots = a_{78} = 0$, für $\omega_7 - \omega_8$ wird

$$a_{28} = a_{38} = a_{48} = 0, a_{58} = a_{68} = 1, a_{78} = -1,$$

für $-\omega_8 - \omega_2 + \omega_5 + \omega_6 + \omega_7$ wird

$$a_{28} = 0, a_{38} = a_{48} = a_{58} = a_{68} = -1, a_{78} = 0,$$

für $\omega_8 + \omega_2 + \omega_3 - \omega_5 - \omega_6 - \omega_7$ wird

$$a_{28} = a_{38} = -1, a_{48} = a_{58} = a_{68} = 0, a_{78} = -1,$$

für $-\omega_8 - \omega_2 - \omega_3 + \omega_5 + \omega_6 + 2\omega_7$ wird

$$a_{28} = a_{38} = 0, a_{48} = -1, a_{58} = a_{68} = 0, a_{78} = -1,$$

und für $\omega_8 + \omega_2 + \omega_3 - \omega_4 - \omega_5 - \omega_6 - 2\omega_7$:

$$a_{28} = a_{38} = a_{48} = -1, a_{58} = a_{68} = -1, a_{78} = 0.$$

Wählt man entsprechend der einen durch Weglassung je einer der Marken 5 und 6 erkannten Möglichkeit $a_{75} = -1$, $a_{58} = a_{68} = 0$, so verlangt die durchgeführte Aufstellung, dass, nachdem aus den vier Coefficienten a_{15} , a_{25} , a_{35} , a_{45} irgend drei ausgewählt sind, jedesmal zwei oder einer verschwinden müssen; das ist aber mit der durch Weglassung der Marke 7 sich ergebenden Forderung unvereinbar, dass entweder diese vier Grössen oder nur höchstens eine von ihnen gleich Null sein muss. Für $a_{75} = 0$, $a_{58} = a_{68} = -1$ müssen zwei oder drei der Grössen a_{15} , a_{25} , a_{35} , a_{45} verschwinden, was für die durch Weglassung je einer der Marken 1, 2, 3, 4 sich ergebenden Möglichkeiten sicherlich mindestens einmal ein nicht geeignetes Untersystem liefert.

Genau dieselbe Betrachtung gilt für $l = 9$ und demnach ergeben sich folgende Sätze:

Für $l = 3$ sind nur die drei einfachen Systeme A), B), C) und ihre äquivalenten möglich; für $l = 5$ und $l > 8$ tritt nur die Form D) hinzu. Dagegen kommen alle einfachen Systeme vierter Ordnung auf eine der sechs Formen A) bis F) und die 6^{ter}, 7^{ter} und 8^{ter} Ordnung auf die fünf Formen A) bis E) hinaus.

Jedes einfache System mit Ausnahme von IV E) und IV F) hat mindestens ein Untersystem $(l-1)$ ^{ter} Ordnung, welches der Form A) äquivalent ist.

Die Formen IIC), IV E), IV F) und VIII E) kommen als Untersysteme in keinem einfachen Systeme vor.

§ 16.

Die einfachen Systeme der Coefficienten a und die einfachen Gruppen.

Wir gehen jetzt wieder auf § 12 zurück, allerdings ohne den letzten Lehrsatz zu berücksichtigen. Die Formel (2) desselben

$$(1) \quad c_{\alpha\beta\gamma}(\omega_\alpha + \omega_\beta - \omega_\gamma) = 0, \quad c_{\alpha\beta\varrho}(\omega_\alpha + \omega_\beta) = 0,$$

wo α, β, γ Nummern der Reihe $1 \dots r - 2l$, ϱ eine der Reihe $r \dots r - l + 1$ darstellt, giebt eine Relation zwischen den Wurzeln an, welche erfüllt sein muss, wenn $(X_\alpha X_\beta)$ von Null verschieden ist, ohne festzusetzen, dass $(X_\alpha X_\beta)$ wirklich, wofern die Bedingung erfüllt wird, von Null verschieden ist. Um dies zu erkennen, müssen wir die Gleichung (6) § 12 hinzunehmen:

$$(2) \quad \sum_0^{l-1} e_i^{(\nu)} \omega_\alpha^{(\nu)} = \sum_i (c_{i,\alpha} c_{i,\alpha} - c_{i,\alpha} c_{i,\alpha}).$$

Unter Anwendung der Abkürzung (8) § 12:

$$(3) \quad \sum_i e_i^{(\nu)} \omega_i^{(\nu)} = -2 E_i$$

kann man diese Gleichung auch in der Form schreiben:

$$(2') \quad a_{\alpha_i} E_i = \sum_{\alpha'} (c_{i\alpha\alpha'} c_{i'\alpha'} - c_{i\alpha'\alpha} c_{i'\alpha}).$$

Hier sind $i, \alpha, i', \alpha', \dots$ Nummern der Reihe $1 \dots 2l$ und $\omega_i + \omega_{i'} = 0$, $(X_i X_{i'})$ von Null verschieden

$$= \sum_{\nu}^{i-1} e_i^{(\nu)} X_{r-\nu} f.$$

Jetzt nehmen wir an, wir fügten zu den $\pm \omega_1 \dots \pm \omega_l$ nur diejenigen Wurzeln hinzu, welche damit wegen der $a_{i\alpha}$ nothwendig verbunden sind. Dann wollen wir beweisen, dass sobald für jedes ν die Summe $\omega_{\alpha}^{(\nu)} + \omega_{\beta}^{(\nu)}$ eine neue Wurzel darstellt, $(X_{\alpha} X_{\beta})$ von Null verschieden ist, und dass speciell für $\omega_{\alpha}^{(\nu)} + \omega_{\beta}^{(\nu)} = 0$ die Marke α statt einer der früher gewählten in die Reihe der $i, \alpha \dots$ eingereiht werden kann.

Um diesen Nachweis zu führen, nehmen wir zunächst an, $a_{i\alpha}$ sei negativ. Dann müssen mit $\pm \omega_i, \pm \omega_{\alpha}$ auch die Wurzeln

$$\pm (\omega_i - \omega_{\alpha}), \dots \pm (\omega_i + a_{i\alpha} \omega_{\alpha})$$

vorkommen. Wir bezeichnen $\omega_i - \omega_{\alpha}$ mit $\omega_{\alpha'}$, $-\omega_i + \omega_{\alpha}$ mit $\omega_{\alpha''}$. Dann sind nach (2) die $c_{i\alpha'\alpha}, c_{i'\alpha'\alpha'}, c_{i\alpha''\alpha}, c_{\alpha\alpha''i}$ von Null verschieden. Bilden wir die Jacobi'sche Relation für α, α', i , so folgt auch, dass $(X_{\alpha} X_{\alpha'})$ von Null verschieden ist und durch $X_r \dots X_{r-l+1}$ ausgedrückt werden kann. In gleicher Weise schliesst man für

$$\omega_i - 2\omega_{\alpha} \dots \omega_i + a_{i\alpha} \omega_{\alpha}$$

Man kann aber den Beweis auch dadurch führen, dass man eine der $X_1 \dots X_{2l}$ durch eine derjenigen $X_{\beta} f$ ersetzt, für welche $\omega_{\beta} = \omega_i - \omega_{\alpha}$ und dann $= \omega_i - 2\omega_{\alpha} \dots$ ist. Nun erhält man aber alle aus $\omega_i, \omega_{\alpha}$ gebildeten Wurzeln, welche durch das System $a_{i\alpha}$ gefordert werden, indem man für jede Wurzel $\omega_i - \omega_{\alpha} \dots \omega_i + a_{i\alpha} \omega_{\alpha}$ die Coefficienten a in Bezug auf ω_i und ω_{α} bestimmt, also je eine der Wurzeln ω_i und ω_{α} durch die Wurzeln $\omega_i - \omega_{\alpha} \dots \omega_i + a_{i\alpha} \omega_{\alpha}$ ersetzt. Auch die weiteren Wurzeln, in deren Ausdruck drei der ursprünglich gegebenen Wurzeln $\omega_1 \dots \omega_l$ vorkommen, erhält man auf entsprechende Weise aus denjenigen Wurzeln, in deren Ausdruck nur ω_i und ω_{α} vorkommen. So kann man fortfahren. Auch ist die Annahme, dass $a_{i\alpha}$ negativ sei, nicht nothwendig, so dass wir zu dem Resultate gelangen:

Soll in einer Gruppe $p = r$ sein und sollen für eine Transformation allgemeiner Lage l Wurzeln der charakteristischen Gleichung von einander unabhängig und die übrigen durch das zwischen denselben bestehende System $a_{i\alpha}$ gefordert sein, so kommt zu jeder Wurzel die ent-

gegengesetzt gleiche vor; der Rang der Gruppe ist gleich 1, und jede Transformation gehört einer 1-gliedrigen Untergruppe an, deren Transformationen mit einander vertauschbar sind. Wählt man $X_r f$ ganz allgemein, $X_{r-1} f \dots X_{r-l+1} f$ damit vertauschbar, so können die übrigen $X_1 f \dots X_{r-l} f$ so bestimmt werden, dass für $\alpha = 1 \dots r-l$ jedesmal $(X_r X_\alpha) = \omega_\alpha X_\alpha f \dots (X_{r-l+1} X_\alpha) = \omega_\alpha^{(l-1)} X_\alpha f$ ist; sobald für jedes ν die Beziehung besteht: $\omega_\alpha^\nu + \omega_\beta^\nu = \omega_\gamma^\nu$, ist $(X_\alpha X_\beta)$ von Null verschieden; wenn speciell $\omega_\alpha^\nu + \omega_\alpha^\nu = 0$ ist, kann $(X_\alpha X_\alpha)$ durch $X_r \dots X_{r-l+1}$ so dargestellt werden, dass wenigstens einer der Coefficienten von Null verschieden ist.

Jetzt setzen wir fest, dass das System der $a_{i\alpha}$ einfach sein soll. Gehen wir dann von irgend einer Marke ι aus und suchen alle Marken ι_1 , für welche $a_{\iota_1 \iota}$ von Null verschieden ist, und dann zu ι_1 die Marken ι_{11} , für welche $a_{\iota_{11} \iota_1}$ von Null verschieden ist, so kommen wir durch Fortsetzung dieses Verfahrens zu allen Marken $1 \dots l$. Nun wissen wir, dass jede Marke α auch an Stelle eines ι genommen werden kann. Suchen wir aber alle Wurzeln ω_α , welche zu beliebig gewählten ω_α addirt eine neue Wurzel ergeben und fahren damit fort, so gelangen wir nicht nur zu allen Marken $1 \dots l$, sondern auch zu allen Wurzeln. Wegen der im letzten Lehrsätze angegebenen Eigenschaft können wir jetzt auch von einem beliebigen X_α ausgehen und diejenigen $X_\alpha f$ suchen, für welche $(X_\alpha X_\alpha) \neq 0$ ist, dann zu den gefundenen $X_\alpha f$ die $X_{\alpha_1} f$ suchen, für welche dieselbe Forderung erfüllt ist und damit fortfahren; dann gelangen wir nicht nur zu allen $X_1 f \dots X_{r-l} f$, sondern auch zu mehr als l linearen Functionen von $X_r f \dots X_{r-l+1} f$, von denen l unter einander unabhängig sind. Daraus folgt, dass die Gruppe keine invariante Untergruppe besitzt. Alle inf. Transformationen der Gruppe zerfallen nämlich in drei Classen: a) ganz allgemeine Transformationen, b) die Haupttransformationen von zweigliedrigen Untergruppen, denen ganz allgemeine Transformationen angehören; c) solche, welche eine Mittelstellung einnehmen. Als Repräsentanten einer der ersteren können wir $X_r f$ wählen; soll diese in einer invarianten Untergruppe vorkommen, so hat die vorstehende Betrachtung ergeben, dass derselben alle Transformationen der Gruppe angehören müssen. Ebensowenig kann eine Transformation der zweiten Classe, als deren Repräsentanten wir eine $X_\alpha f$ wählen können, einer invarianten Untergruppe angehören. Stellen wir aber eine inf. Transformation der dritten Art mit allen r Transformationen $X_1 f \dots X_r f$ durch die Operation $(X_\rho X_\sigma)$ zusammen, so gelangen wir zunächst sicher zu solchen von einfacherem Ausdruck, bis wir durch Fortsetzung zu einer $X_1 f \dots X_{r-l} f$ gelangen, so dass auch dieser Fall nicht möglich ist. Somit ergibt sich folgender Satz:

Wenn in der charakteristischen Gleichung l Wurzeln beliebig sind und alle anderen eine Folge der zwischen jenen bestehenden Coefficienten $a_{i,x}$ sind, und wenn dann das System dieser Coefficienten einfach ist, so ist auch die zugehörige Gruppe selbst nothwendig einfach.

Beiläufig erwähnen wir noch folgendes Resultat, auf welches wir erst im folgenden Theile näher eingehen werden:

Wenn man für eine Gruppe nur diejenigen Wurzeln zulässt, welche durch ein zusammengesetztes System von Coefficienten $a_{i,x}$ gefordert werden, so besteht die Gruppe aus mehreren invarianten Untergruppen; aber die Transformationen, von denen je eine Untergruppe gebildet wird, sind nicht vertauschbar, sondern gehören einer einfachen Gruppe an.

Wenn umgekehrt eine Gruppe einfach ist, so kann man unter den Wurzeln der zugehörigen charakteristischen Gleichung immer l so wählen, dass das zugehörige System der $a_{i,x}$ einfach ist. Wenn nämlich das System zusammengesetzt ist und durch die Marken $\iota_1 \dots \iota_\rho$ ein darin enthaltenes einfaches Theilsystem bestimmt wird, wo ρ auch gleich 1 sein kann, so bestimmen die 2ρ Marken $\iota_1 \dots \iota_\rho, \iota'_1 \dots \iota'_\rho$ unter der Bedingung $\omega_{\iota_1} + \omega_{\iota'_1} = 0 \dots \omega_{\iota_\rho} + \omega_{\iota'_\rho} = 0$ eine Untergruppe. Diese wird invariant sein, wenn nicht mindestens eine in dieser Untergruppe enthaltene inf. Transformation $X_\alpha f$ mit einer derselben nicht angehörigen Transformation $X_\beta f$ durch die Operation $(X_\alpha X_\beta)$ verbunden, zu einem von Null verschiedenen Ausdruck führt. Dann wird $\omega_\alpha^\nu + \omega_\beta^\nu$ für jedes ν zu einer neuen Wurzel führen. Demnach kann der entsprechende Coefficient $a_{\alpha\beta}$ nur dann gleich Null sein, wenn die Wurzeln $\omega_\alpha^\nu + \alpha\omega_\beta^\nu$ und $\omega_\alpha^\nu - \alpha\omega_\beta^\nu$ für ein ganzzahliges α vorkommen. Ersetzt man dann ω_β durch $\omega_\alpha + \alpha\omega_\beta$, so wird der zugehörige Coefficient $a_{\alpha\beta}$ von Null verschieden sein. Sollte nun die Marke α nicht zu den Marken $\iota_1 \dots \iota_\rho$ gehören, so kann man nach den Untersuchungen des vorigen Paragraphen die Marke α mit $\rho - 1$ andern dem Systeme $(\iota_1 \dots \iota_\rho)$ angehörigen Marken so verbinden, dass das neue System einfach bleibt. Fügt man die auf die angegebene Weise bestimmte Marke β hinzu, so ist das Untersystem ρ^{ter} Ordnung durch ein einfaches System ersetzt, dessen Ordnung mindestens $\rho + 1$ beträgt. Auf diesem Wege muss man zu einer Wahl der l Wurzeln gelangen, für welche das System der $a_{i,x}$ einfach ist.

Wenn es aber nicht möglich ist, durch passende Wahl der l ersten Wurzeln alle andern als Folge der zwischen jenen bestehenden Coefficienten $a_{i,x}$ zu erweisen, so muss die Gruppe eine invariante Untergruppe besitzen. Werden nämlich mit $\iota, \kappa \dots$ Marken bezeichnet, welche dem einfachen Systeme angehören, während $\alpha, \beta \dots$ demselben nicht angehören, so führt, wie die Gl. (2) lehrt, jedes $(X_\iota X_\alpha)$, wofern es von Null verschieden ist, auf eine ausserhalb des Systems vor-

handene Marke. Diese letzteren (nämlich die Marken $\alpha, \beta \dots$) werden also eine invariante Untergruppe bestimmen, wenn nicht ein $(X_\alpha X_\beta)$ auf ein $X_i f$ führt. Sobald aber ein Coefficient $c_{\alpha\beta i}$ von Null verschieden ist, bilde man die Jacobi'sche Relation für $(\alpha\beta i)$, und aus dieser folgt, dass entweder $(X_\alpha X_{\alpha'})$ oder $(X_\beta X_{\beta'})$ von Null verschieden ist. Somit muss mindestens eine der Marken α oder β dem System der $i, \alpha \dots$ angehören.

Dass mehrfache Wurzeln am Beweise nichts ändern, zeigen Untersuchungen, wie sie ähnlich in § 8 für $l = 1$ angestellt sind. Wollte man nämlich annehmen, dass die ersten, den mehrfachen entgegengesetzt gleichen Wurzeln entsprechenden Transformationen durch $X_r f \dots X_{r-l+1} f$ ausgedrückt werden, so zeigt man auf dem dort vorgezeichneten Wege, dass die weiteren zu diesen Wurzeln gehörigen Transformationen zu einer invarianten Untergruppe führen. Der Fall aber, dass die ersten zu entgegengesetzt gleichen Wurzeln gehörigen Transformationen vertauschbar sind, die spätern aber nicht, wird in derselben Weise wie am Schlusse von § 8 erledigt. *)

Daraus folgt der Satz:

Aus den Wurzeln, welche die charakteristische Gleichung für eine einfache Gruppe hat, wofern man eine allgemeine Transformation zu Grunde legt, lassen sich immer l von einander unabhängige Wurzeln so auswählen, dass das System der zugehörigen Coefficienten $a_{i\alpha}$ einfach ist und dass alle andern Wurzeln durch diese Coefficienten gefordert werden.

§ 17.

Die einfachen Systeme von allgemeinem Charakter.

Der vorige Paragraph hat gezeigt, dass wir, um zu allen einfachen Gruppen zu gelangen, von den einfachen Systemen der Coefficienten a ausgehen müssen, und dass, wenn zu einem solchen System eine Gruppe gehört, dieselbe nothwendig einfach ist. Es erübrigt also nur der Nachweis, dass zu jedem einfachen System eine Gruppe gehört. Dieser Nachweis ist nicht schwer zu führen: nachdem das System der a aufgestellt ist, bildet man die sämmtlichen Jacobi'schen Relationen, welche nicht identisch verschwinden, und leitet daraus die

*) Dabei muss ich jedoch bemerken, dass sich an der betreffenden Stelle (diese Annalen Bd. 31, S. 284) ein Versehen eingeschlichen hat, indem statt X_{r-1} stehen muss X_{α_0} . Wenn dann $2\omega_\alpha$ keine Wurzel ist, so genügt die hingeschriebene Relation; im andern Falle bilde man für $\omega_\gamma = 2\omega_\alpha$ noch die Jacobi'sche Relation $(\alpha_1 \beta_0 \gamma_0)$.

Coefficienten $c_{i,x}$ her. Im Ausdruck derselben kommen noch einige willkürliche Factoren vor, wie auch in der Natur der Sache begründet ist. Denn einmal können die Transformationen $X_r f \dots X_{r-l+1} f$ durch l beliebige andere, von einander unabhängige Transformationen dieser l -gliedrigen Untergruppe ersetzt werden; ferner kann man die $r-l$ Transformationen $X_1 f \dots X_{r-l} f$ je mit einem beliebigen Factor $m_1 \dots m_{r-l}$ multipliciren, ohne dass die ω_α sich ändern. Umgekehrt kann diese Willkür dazu benutzt werden, um den Coefficienten möglichst einfache Werthe zu verschaffen.

Um die Aufzählung recht kurz zu machen, wollen wir, wenn es angeht, von bekannten Gruppen ausgehen und zeigen, dass sie zu Systemen gehören, wie sie im § 15 gefunden sind.

Die allgemeine projective Gruppe des l -dimensionalen Raumes ist an einer früheren Stelle (§ 6) in folgender Weise angegeben: indem wir $\iota, \kappa, \lambda \dots$ Marken der Reihe $1 \dots l$ sein lassen, verstehen wir unter $X_{0,\iota} f, X_{\iota,0} f, X_{\iota,\iota} f, X_{\iota,\kappa} f$ infinitesimale Transformationen; zwischen denselben sollen die Relationen bestehen:

$$\begin{aligned} (X_{\iota,\kappa} X_{\kappa,\lambda}) &= -X_{\iota,\lambda} + \delta_{\iota,\kappa} X_{\kappa,\lambda}, & (X_{x,0} X_{0,\lambda}) &= -X_{x,\lambda} - \delta_{x,\lambda} \sum X_{\mu,\mu}, \\ (X_{0,x} X_{x,\lambda}) &= -X_{0,\lambda}, & (X_{\iota,\kappa} X_{x,0}) &= -X_{\iota,0}. \end{aligned}$$

Gehen wir von der Transformation $\sum \eta_i X_{i,i} f$ aus, so bilden $X_{\iota,0}, X_{0,\iota}, X_{\iota,\kappa}$ die Hauptelemente der die gegebene Transformation enthaltenden zweigliedrigen Untergruppen. Die charakteristische Gleichung hat also in der That die Wurzeln $\pm \omega_\iota, \pm(\omega_\iota - \omega_\kappa)$ und gehört somit zu dem System A). Um aber zu zeigen, dass zu diesem System keine andere Gruppe gehört, führen wir statt der in § 12–16 benutzten Bezeichnung eine andere ein. Wir setzen

$$X_r f = \sum \eta_i X_{i,i} f, \quad X_{r-l} f = \sum \eta'_i X_{i,i} f \text{ u. s. w.}$$

und bezeichnen die zu ω_ι gehörige Transformation mit $X_{0,\iota}$, die zu $-\omega_\iota$ gehörige mit $m_\iota X_{\iota,0}$. Dann lassen sich die Coefficienten $\eta_i, \eta'_i \dots m_\iota$ so wählen, dass jedes $(X_{0,\iota}, X_{\iota,0})$ den oben angegebenen Werth erhält, $\omega_\iota' = -1, \omega_\nu' = 0$ für $\nu \geq \iota$ wird. Indem man dann noch zu $\omega_\iota - \omega_\kappa$ die Transformation $m_{\iota,\kappa} X_{\iota,\kappa}$ gehören lässt, lassen sich die $m_{\iota,\kappa}, m_{\kappa,\iota}$ eindeutig so bestimmen, dass alle Gl. (1) erfüllt sind.

Wir gehen jetzt zu der Form D) über und setzen für

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 \dots l - 2 : \omega_\alpha = \pi_\alpha + \pi_l \\ \omega_{l-1} &= \pi_{l-1} + \pi_l, \quad \omega_l = -\pi_{l+1} + \pi_l. \end{aligned}$$

Dann lassen sich alle $l(2l-2)$ Wurzeln in der Form $\pm \pi_\iota \pm \pi_\kappa$ darstellen. Nun haben wir bereits früher für $\iota, \kappa = 1 \dots 2l$ aus $l(2l-1)$ Transformationen $X_{\iota,\kappa} f (= -X_{\kappa,\iota} f)$ eine Gruppe gebildet,

für welche die Relationen $(X_{\alpha} X_{\beta}) = X_{\alpha\beta} f$, $(X_{\alpha} X_{\beta}) = 0$ bestehen. Gehen wir hier von der Transformation

$$\eta_{12} X_{12} + \eta_{34} X_{34} + \dots + \eta_{2l-1, 2l} X_{2l-1, 2l}$$

aus, so erscheinen alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung in der Form $\pm \alpha_i \pm \alpha_x$. Diese Gruppe gehört also zu dem System D), und zwar, wie man ebenfalls leicht sieht, gehört keine andere Gruppe zu diesem System.

Für das System B) ersetze man $\omega_1 \dots \omega_l$ durch die l Wurzeln: $\omega_1 - \omega_1, \omega_1 - \omega_2 \dots \omega_1 - \omega_{l-1}, \omega_l$. Alsdann lassen sich alle Wurzeln in der Form darstellen: $\pm \omega_i, \pm \omega_i, \pm \omega_x$. Diese $2l^2$ Wurzeln finden sich aber in folgender Gruppe: wir setzen für $\alpha, \beta = 1 \dots 2l + 1$ die $l(2l + 1)$ inf. Transformationen $X_{\alpha\beta} (= -X_{\beta\alpha})$ voraus, so dass für ungleiche Werthe von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Relationen bestehen:

$$(X_{\alpha\beta} X_{\gamma\delta}) = X_{\beta\gamma} f, \quad (X_{\alpha\beta} X_{\gamma\delta}) = 0.$$

Für die Transformation

$$\eta_{12} X_{12} + \eta_{34} X_{34} + \dots + \eta_{2l-1, 2l} X_{2l-1, 2l} f$$

hat dann die charakteristische Gleichung die oben angegebenen Wurzeln. Somit gehört diese Gruppe zu dem System B) und zwar, wie man leicht beweist, als einzige Gruppe.

Eine Gruppe, deren Wurzeln das System C) befriedigen, war bisher nicht bekannt. Zwar kann man für diese Gruppen auch eine Form angeben, welche der für B) aufgestellten Form entspricht; aber ich hoffe, dieselbe noch wesentlich vereinfachen zu können, und deshalb möchte ich dieselbe noch nicht mittheilen. Ich begnüge mich also damit, aus den Jacobi'schen Relationen eine Darstellung dieser Gruppen herzuleiten, obwohl dieselbe noch etwas an Uebersichtlichkeit zu wünschen lässt.

Wir ersetzen die $\omega_1 \dots \omega_l$ durch $2\omega_1 - \omega_1, 2\omega_2 - \omega_1 \dots 2\omega_{l-1} - \omega_1, \omega_l$ und können dann alle Wurzeln in der Form $\pm \omega_i, \frac{\pm \omega_i \pm \omega_x}{2}$ darstellen. Diesen $r - l$ Wurzeln entsprechend, bezeichnen wir auch die $2l^2$ ersten Transformationen durch

$$X_1 \dots X_l, X_{-1} \dots X_{-l}, X_{\frac{i+x}{2}}, X_{\frac{i-x}{2}}, X_{\frac{-i+x}{2}}, X_{\frac{-i-x}{2}}.$$

Wir setzen:

$$\begin{aligned} \sum e_i^\nu \omega_i^\nu &= - \sum e_{-i}^\nu \omega_i^\nu = -2E_i = -2E_{-i} = -2g_i^2, \\ (2) \sum e_{\frac{i+x}{2}}^\nu \omega_{\frac{i+x}{2}}^\nu &= \frac{1}{2} \sum e_{\frac{i+x}{2}}^\nu (\omega_i^\nu + \omega_x^\nu) = - \sum e_{\frac{-i-x}{2}}^\nu (\omega_i^\nu + \omega_x^\nu) \\ &= -2E_{\frac{i+x}{2}} = -2E_{\frac{-i-x}{2}} = -2g_{\frac{i+x}{2}}^2 \end{aligned}$$

und entsprechend für $\frac{i-x}{2}$.

Dazu treten die Gleichungen:

$$(3) \quad \sum_{\nu} e_i^{\nu} \omega_x^{\nu} = 0, \quad \sum_{\nu} e_{\frac{i+x}{2}}^{\nu} \omega_{\frac{i-x}{2}}^{\nu} = 0, \quad \sum_{\nu} e_{\frac{i+x}{2}}^{\nu} \omega_i^{\nu} = 0,$$

wenn i, x, ν als ungleich vorausgesetzt werden. Somit lassen sich aus den $E_i, E_{\frac{i+x}{2}}, \omega_i^{\nu}$ die $e_i^{\nu}, e_{\frac{i+x}{2}}^{\nu}$ einfach berechnen. Speziell erhalten wir:

$$(4) \quad \frac{e_{\frac{i+x}{2}}^{\nu}}{E_{\frac{i+x}{2}}} = \frac{e_i^{\nu}}{E_i} + \frac{e_x^{\nu}}{E_x}, \quad \frac{e_{\frac{i-x}{2}}^{\nu}}{E_{\frac{i-x}{2}}} = \frac{e_i^{\nu}}{E_i} - \frac{e_x^{\nu}}{E_x}.$$

Die Jacobi'schen Relationen

$$\begin{aligned} & (i, -i, \frac{-i+x}{2}), \quad (i, -i, \frac{i-x}{2}), \quad (\frac{-i+x}{2}, \frac{i-x}{2}, i), \\ & (\frac{-i+x}{2}, \frac{i-x}{2}, -i), \quad (\frac{i+x}{2}, \frac{-i-x}{2}, i), \quad (\frac{i+x}{2}, \frac{-i-x}{2}, -i) \end{aligned}$$

liefern folgende sechs Gleichungen, von denen eine eine Folge der andern ist:

$$\begin{aligned} c_{i \frac{-i+x}{2} \frac{i+x}{2}} c_{\frac{i+x}{2} -i \frac{-i+x}{2}} &= c_{-i \frac{i-x}{2} \frac{-i-x}{2}} c_{\frac{i-x}{2} i \frac{i-x}{2}} = g_i^2, \\ c_{\frac{-i+x}{2} i \frac{i+x}{2}} c_{\frac{i+x}{2} \frac{i-x}{2} i} &= c_{\frac{i-x}{2} -i \frac{-i-x}{2}} c_{\frac{-i-x}{2} \frac{-i+x}{2} -i} = 2g_{\frac{i-x}{2}}^2, \\ c_{\frac{i+x}{2} -i \frac{-i+x}{2}} c_{\frac{-i+x}{2} \frac{-i-x}{2} -i} &= c_{\frac{-i-x}{2} i \frac{i-x}{2}} c_{\frac{i-x}{2} \frac{i+x}{2} i} = 2g_{\frac{i+x}{2}}^2. \end{aligned}$$

Indem wir eine Grösse p_{ix} willkürlich wählen, folgt:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} c_{i \frac{-i+x}{2} \frac{i+x}{2}} &= p_{ix} \frac{g_i g_{\frac{i-x}{2}}}{g_{\frac{i+x}{2}}}, & c_{-i \frac{i-x}{2} \frac{-i-x}{2}} &= \frac{1}{p_{ix}} \frac{g_i g_{\frac{i-x}{2}}}{g_{\frac{i+x}{2}}}, \\ c_{\frac{-i-x}{2} \frac{i-x}{2}} &= -p_{ix} \frac{g_i g_{\frac{i+x}{2}}}{g_{\frac{i-x}{2}}}, & c_{-i \frac{i+x}{2} \frac{-i+x}{2}} &= -\frac{1}{p_{ix}} \frac{g_i g_{\frac{i+x}{2}}}{g_{\frac{i-x}{2}}}, \\ c_{\frac{i+x}{2} \frac{-i-x}{2} i} &= -\frac{2}{p_{ix}} \frac{g_{\frac{i+x}{2}} g_{\frac{i-x}{2}}}{g_i}, & c_{\frac{-i-x}{2} \frac{-i+x}{2} -i} &= -2p_{ix} \frac{g_{\frac{i+x}{2}} g_{\frac{i-x}{2}}}{g_i}. \end{aligned} \right.$$

Die Jacobi'sche Relation für $(\frac{i+x}{2}, \frac{-i-x}{2}, \frac{-i+l}{2})$ liefert:

$$(6) \quad \frac{c_{\frac{i+x}{2} \frac{-i+l}{2} \frac{x+l}{2}}}{\frac{2}{2}} \frac{c_{x+l \frac{-i-x}{2} \frac{-i+l}{2}}}{\frac{2}{2}} = g_{\frac{i+x}{2}}^2.$$

Die übrigen Jacobi'schen Relationen, in denen nicht sämtliche c verschwinden, können einmal dadurch gebildet werden, dass man drei Marken nimmt, deren Summe verschwindet, z. B. $(\iota, \frac{-\iota+\kappa}{2}, \frac{-\iota-\kappa}{2})$ oder $(\frac{\iota+\kappa}{2}, \frac{-\iota+\lambda}{2}, \frac{-\kappa-\lambda}{2})$. Diese werden durch die vorstehenden Relationen von selbst befriedigt. Ausserdem können wir zur Bildung einer Jacobi'schen Relation drei Marken wählen, für welche die Summe der entsprechenden Wurzeln eine neue Wurzel liefert, während auch schon die Summe zweier zu einer neuen Wurzel führt. Von diesen liefert auch jede Relation $(\iota, \kappa, \frac{-\iota-\kappa}{2})$ keine neue Beziehung zwischen den Coefficienten. Dagegen folgt aus $(\iota, \frac{-\iota+\kappa}{2}, \frac{-\iota+\lambda}{2})$:

$$(7) \quad c_{\iota \frac{-\iota+\kappa}{2} \frac{\iota+\kappa}{2}} c_{\frac{\iota+\kappa}{2} \frac{-\iota+\lambda}{2} \frac{\kappa+\lambda}{2}} = c_{\iota \frac{-\iota+\lambda}{2} \frac{\iota+\lambda}{2}} c_{\frac{\iota+\lambda}{2} \frac{-\iota+\kappa}{2} \frac{\kappa+\lambda}{2}}$$

aus $(\iota, \frac{-\iota+\kappa}{2}, \frac{-\kappa+\lambda}{2})$:

$$(8) \quad c_{\iota \frac{-\iota+\kappa}{2} \frac{\iota+\kappa}{2}} c_{\frac{\iota+\kappa}{2} \frac{-\kappa+\lambda}{2} \frac{\iota+\lambda}{2}} = c_{\iota \frac{-\iota+\lambda}{2} \frac{\iota+\lambda}{2}} c_{\frac{-\iota+\kappa}{2} \frac{-\kappa+\lambda}{2} \frac{-\iota+\lambda}{2}}$$

und aus $(\frac{\iota+\kappa}{2}, \frac{\iota+\lambda}{2}, \frac{-\kappa-\lambda}{2})$:

$$(9) \quad c_{\frac{\iota+\lambda}{2} \frac{-\kappa+\lambda}{2} \frac{\iota-\kappa}{2}} c_{\frac{\iota-\kappa}{2} \frac{\iota+\kappa}{2} \iota} = c_{\frac{\iota+\kappa}{2} \frac{-\kappa-\lambda}{2} \frac{\iota-\lambda}{2}} c_{\frac{\iota-\lambda}{2} \frac{\iota+\lambda}{2} \iota}$$

Endlich liefert die Relation $(\frac{\iota+\kappa}{2}, \frac{-\iota+\lambda}{2}, \frac{-\kappa+\mu}{2})$ die Gleichung:

$$(10) \quad c_{\frac{\iota+\kappa}{2} \frac{-\iota+\lambda}{2} \frac{\kappa+\lambda}{2}} c_{\frac{\kappa+\lambda}{2} \frac{-\kappa+\mu}{2} \frac{\lambda+\mu}{2}} + c_{\frac{-\kappa+\mu}{2} \frac{\iota+\kappa}{2} \frac{\iota+\mu}{2}} c_{\frac{\iota+\mu}{2} \frac{-\iota+\lambda}{2} \frac{\lambda+\mu}{2}} = 0.$$

In den Gl. (6)–(10) darf man nicht nur die einzelnen Marken vertauschen, sondern auch die Vorzeichen der Marken beliebig ändern.

Aus (6)–(9) folgt:

$$(11) \quad c_{\frac{\iota+\kappa}{2} \frac{-\iota+\lambda}{2} \frac{\kappa+\lambda}{2}} = \sqrt{\frac{p_{\kappa\lambda} p_{\lambda\kappa} p_{\iota\lambda}}{p_{\iota\kappa} p_{\kappa\iota} p_{\lambda\iota}}} \frac{g_{\iota+\kappa} g_{\iota-\lambda}}{g_{\kappa+\lambda}}.$$

Um alle weiteren Coefficienten c in gleicher Weise darstellen zu können und um hierbei namentlich das Vorzeichen richtig zu bestimmen, zerlegen wir in (11) die Wurzel rechts in sechs Wurzeln, und setzen dann:

$$(12) \quad \sqrt{p_{\iota-\kappa}} = i\sqrt{p_{\iota\kappa}}, \quad \sqrt{p_{-\iota,\kappa}} = \frac{-i}{\sqrt{p_{\iota\kappa}}}, \quad \sqrt{p_{-\iota,-\kappa}} = \frac{1}{\sqrt{p_{\iota\kappa}}}.$$

Diese Festsetzung steht in Uebereinstimmung mit den Gleichungen (5). Ausserdem werden jetzt alle Gleichungen (6)–(10) befriedigt, so dass die Existenz der Gruppen bewiesen und ein Ausdruck für dieselben angegeben ist. Dieser kann durch passende Wahl der $X_r f \dots X_{r-l+1} f$ und durch Multiplication von X_{-l} , $X_{\frac{+l+x}{2}} f$ mit passenden Factoren noch etwas vereinfacht werden. So kann man bewirken, dass ist $\omega_i^{(i-1)} = -2$, $\omega_i^{(v-1)} = 0$ für $i \geq v$, und dass $g_i = 1$, $g_{\frac{i+x}{2}} = 1$, und jedes p_{ix} für positive Werthe i, x gleich eins ist. Die hierdurch eingeführten Vereinfachungen brauchen wir nicht hinzuschreiben.

Die vorgehenden Entwicklungen haben uns folgenden Lehrsatz geliefert:

Zu jedem der (allgemeinen) einfachen Systeme A), B), C), D) gehört eine und zwar eine einzige einfache Gruppe, welche jedesmal mit demselben Buchstaben bezeichnet werden soll.

Die Gruppe A) ist $l(l+2)$ -gliedrig und identisch mit der Gruppe der allgemeinen projectiven Transformationen des l -dimensionalen Raumes; um sie recht einfach niederzuschreiben, wähle man für $i, x = 1 \dots l$ die inf. Transformationen X_{0i}, X_{i0}, X_{ix} und setze fest:

$$\begin{aligned} (X_{ix} X_{x\lambda}) &= -X_{i\lambda} + \varepsilon_{i\lambda} X_{xx}, \\ (X_{x0} X_{0\lambda}) &= -X_{x\lambda} - \varepsilon_{x\lambda} \sum X_{\mu\mu}, \\ (X_{0x} X_{x\lambda}) &= -X_{0\lambda}, \quad (X_{ix} X_{x0}) = -X_{i0} \end{aligned}$$

und $(X_{ix} X_{\lambda\mu}) = 0$, wenn weder $i = \mu$, noch $x = \lambda$ ist.

Die Gruppe D) ist identisch mit der Gruppe der Bewegungen in einem $(2l-1)$ -dimensionalen Riemann'schen Raume; man wähle für $i, x = 1 \dots 2l$ die $l(2l-1)$ inf. Transformationen $X_{ix} f (= -X_{xi} f)$ und setze fest: $(X_{ix} X_{i\lambda}) = X_{x\lambda} f$, $(X_{ix} X_{\lambda\mu}) = 0$ für ungleiche Werthe von i, x, λ, μ .

Die Gruppe B) ist identisch mit der Gruppe der Bewegungen in einem $2l$ -dimensionalen Riemann'schen Raume; um sie darzustellen, wähle man für $i, x = 1 \dots 2l+1$ die inf. Transformationen $X_{ix} (= -X_{xi})$ und lasse sein:

$$(X_{ix} X_{i\lambda}) = X_{x\lambda} f, \quad (X_{ix} X_{\lambda\mu}) = 0.$$

Die Gruppe C) ist ebenfalls $l(2l+1)$ -gliedrig; man wähle zur Bestimmung der Gruppe die inf. Transformationen:

$$X_r f, X_{r-1} f \dots X_{r-l+1} f, X_i f, X_{-i} f, X_{\frac{i+x}{2}} f, X_{\frac{i-x}{2}} f, X_{\frac{-i-x}{2}} f.$$

Dann bestehen folgende Relationen:

$\omega_\alpha, \omega_\beta \dots$ die Wurzeln für die Untergruppe sind, so müssen diese sämtlich in der Hauptgruppe vorkommen, und zugleich müssen die Coefficienten $a_{\alpha\beta}$ für je zwei Wurzeln in der Gruppe und ihrer Untergruppe identisch sein. Daraus folgt, dass nur die Gruppe B) eine einfache Untergruppe gleichen Ranges besitzt, nämlich die Gruppe D).

Um nun eine einfache Untergruppe vom Range $l - 1$ zu finden, hat man zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich ob die gegebene Gruppe aus der Untergruppe durch Hinzufügung einer l^{ten} Wurzel gebildet werden kann oder nicht. Der erste Fall ist in § 15 erledigt, der andere ergibt sich daraus von selbst. Das liefert den Satz:

Unter den vier Formen A), B), C), D) ist die Gruppe B) die einzige, welche eine einfache Gruppe gleichen Ranges zur Untergruppe hat, und zwar hat letztere die Form D). Dagegen hat jede einfache Gruppe von einer dieser vier Formen Untergruppen $l - 1^{\text{ten}}$ Ranges, welche nach der Form A) gebildet sind; alle einfachen Untergruppen dieses Ranges haben für eine Gruppe A) vom Range l wieder dieselbe Form; jede einfache Untergruppe $(l - 1)^{\text{ten}}$ Ranges für eine Gruppe C) vom l^{ten} Range hat die Form A) oder C), für eine Gruppe D) die Form A) oder D); eine einfache Gruppe B) vom Range l hat einfache Untergruppen des Ranges $l - 1$ von der Form A), B) und D).

§ 18.

Die zu den einfachen Systemen speciellen Charakters gehörigen Gruppen.

Zu dem System II C), wo $a_{12} = -1$, $a_{21} = -3$ ist, gehören die Wurzeln

$$\pm \omega_1, \pm \omega_2, \pm(\omega_1 - \omega_2), \pm(2\omega_1 - \omega_2), \pm(3\omega_1 - \omega_2), \pm(3\omega_1 - 2\omega_2).$$

Ersetzt man hier ω_1 durch $-\omega_1 + \omega_2$, so lassen sich die Wurzeln in folgender Weise ausdrücken:

$$\omega_1, \omega_2, \omega_1 - \omega_2, \omega_1 + \omega_2, 2\omega_1 - \omega_2, \omega_1 - 2\omega_2,$$

nebst den entgegengesetzt gleichen. Diese zuletzt hingeschriebenen Wurzeln sollen der Reihe nach durch $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ und die entgegengesetzt gleichen durch $\omega_1', \omega_2', \dots, \omega_6'$ bezeichnet werden. Ebenso mögen die zugehörigen $X_i f$ dargestellt werden und statt $X_r f, X_{r-1} f$ resp. $X_7 f$ und $X_8 f$ geschrieben werden. Ausserdem soll gesetzt werden:

$$\begin{aligned} e_1 \omega_1 + e_1' \omega_1' &= -2E_1, & e_2 \omega_1 + e_2' \omega_1' &= -E_2, & e_3 \omega_1 + e_3' \omega_1' &= -E_3, \\ e_1 \omega_2 + e_1' \omega_2' &= -E_1, & e_2 \omega_2 + e_2' \omega_2' &= -2E_2, & e_3 \omega_2 + e_3' \omega_2' &= E_3, \\ e_4 \omega_1 + e_4' \omega_1' &= -E_4, & e_5 \omega_1 + e_5' \omega_1' &= -E_5, & e_6 \omega_1 + e_6' \omega_1' &= 0, \\ e_4 \omega_2 + e_4' \omega_2' &= -E_4, & e_5 \omega_2 + e_5' \omega_2' &= 0, & e_6 \omega_2 + e_6' \omega_2' &= E_6. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich:

$$\frac{e_3}{E_3} = \frac{e_1}{E_1} - \frac{e_2}{E_2}, \quad \frac{e_4}{E_4} = \frac{1}{3} \left(\frac{e_1}{E_1} + \frac{e_2}{E_2} \right), \quad \frac{e_5}{E_5} = \frac{1}{3} \left(\frac{2e_1}{E_1} - \frac{e_2}{E_2} \right),$$

$$\frac{e_6}{E_6} = \frac{1}{3} \left(\frac{e_1}{E_1} - 2 \frac{e_2}{E_2} \right)$$

und entsprechend für $e_3' \dots e_6'$.

Die Jacobi'schen Relationen (ι, ι', κ) liefern für $g_i^2 = E_i$ folgende Gleichungen:

$$c_{124} = 3p_1 \frac{g_1 g_2}{g_4}, \quad c_{1'2'4'} = \frac{3}{p_1} \frac{g_1 g_2}{g_4}, \quad c_{241'} = p_1 \frac{g_2 g_4}{g_1}, \quad c_{2'41} = \frac{1}{p_1} \frac{g_2 g_4}{g_1},$$

$$c_{41'2} = \frac{1}{p_1} \frac{g_1 g_4}{g_2}, \quad c_{4'12'} = p_1 \frac{g_1 g_4}{g_2}, \quad c_{135} = 3p_2 \frac{g_1 g_3}{g_5}, \quad c_{1'3'5'} = \frac{3}{p_2} \frac{g_1 g_3}{g_5},$$

$$c_{513'} = p_2 \frac{g_1 g_3}{g_5}, \quad c_{5'1'3} = \frac{1}{p_2} \frac{g_1 g_3}{g_5}, \quad c_{5'51} = \frac{1}{p_2} \frac{g_2 g_5}{g_1}, \quad c_{5'5'1'} = p_2 \frac{g_2 g_5}{g_1},$$

$$c_{231} = 2p_3 \frac{g_2 g_3}{g_1}, \quad c_{2'3'1'} = \frac{2}{p_3} \frac{g_2 g_3}{g_1}, \quad c_{1'2'3} = \frac{2}{p_3} \frac{g_1 g_2}{g_3}, \quad c_{1'2'3'} = 2p_3 \frac{g_1 g_2}{g_3},$$

$$c_{5'12} = \frac{2}{p_3} \frac{g_1 g_3}{g_2}, \quad c_{3'1'2'} = 2p_3 \frac{g_1 g_3}{g_2}, \quad c_{263} = p_4 \frac{g_2 g_6}{g_3}, \quad c_{2'6'3'} = \frac{1}{p_4} \frac{g_2 g_6}{g_3},$$

$$c_{3'26} = 3p_4 \frac{g_2 g_3}{g_6}, \quad c_{3'2'6'} = \frac{3}{p_4} \frac{g_2 g_3}{g_6}, \quad c_{6'3'2'} = p_4 \frac{g_3 g_6}{g_2}, \quad c_{6'3'2} = \frac{1}{p_4} \frac{g_3 g_6}{g_2},$$

$$c_{465} = p_5 \frac{g_4 g_6}{g_5}, \quad c_{4'6'5'} = \frac{1}{p_5} \frac{g_4 g_6}{g_5}, \quad c_{5'4'6} = \frac{1}{p_5} \frac{g_5 g_4}{g_6}, \quad c_{5'4'6'} = p_5 \frac{g_5 g_4}{g_6},$$

$$c_{6'5'4'} = p_5 \frac{g_6 g_5}{g_4}, \quad c_{6'5'4} = \frac{1}{p_5} \frac{g_6 g_5}{g_4}.$$

Von den weiteren Jacobi'schen Relationen berücksichtige man noch (1 2 6), welche die Forderung enthält:

$$p_1 p_5 = p_2 p_4.$$

Als dann sind alle Jacobi'schen Relationen erfüllt.

Durch passende Wahl von X_7 und X_8 in ihrer zweigliedrigen Untergruppe und durch Multiplication von X_1 und X_2 mit einem passenden Factor kann man bewirken, dass ist:

$$(X_1 X_1) = 2 X_7 f + X_8 f, \quad (X_2 X_2) = X_7 f + 2 X_8 f;$$

$$\omega_1 = -1, \quad \omega_1' = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_2' = -1, \quad E_1 = E_2 = 1.$$

Ebenso kann man $X_3, X_3' \dots$ mit gewissen Factoren multipliciren und diese so wählen, dass ist:

$$E_3 = E_4 = E_5 = E_6 = 1, \quad p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 1.$$

Dann ist zugleich $p_5 = 1$.

Somit erhalten wir folgende Ausdrücke:

$$(X_7 X_1) = -X_1 f, \quad (X_7 X_1') = X_1' f, \quad (X_8 X_1) = 0, \quad (X_8 X_1') = 0,$$

$$(X_7 X_2) = 0, \quad (X_7 X_2') = 0, \quad (X_8 X_2) = -X_2 f, \quad (X_8 X_2') = X_2' f.$$

Da man unmittelbar übersieht, welche Werthe jetzt $\omega_1, -\omega_2$ u. s. w., sowie c_{124} und die weiteren c annehmen, wird es nicht nöthig sein, diese Ausdrücke hinzuschreiben.

Die Wurzeln des Systems IV E) können in folgender Weise geschrieben werden:

$$\pm \omega_1, \quad \pm \omega_1 \pm \omega_2, \quad \frac{\pm \omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3 \pm \omega_4}{2}.$$

Wir wollen demnach die unendlich kleinen Transformationen, durch welche die Gruppe bestimmt wird, mit

$$X_r, X_{r-1}, X_{r-2}, X_{r-3}; X_{\pm 1}, X_{\pm 1 \pm 2}, X_{\frac{\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4}{2}},$$

bezeichnen. In entsprechender Weise werden auch die e_i^r, g_i^2 u. s. w. eingeführt. Dann gelten die Gleichungen:

$$(1) \quad \begin{aligned} c_{-1 \frac{1+2+3+4}{2} \frac{-1+2+3+4}{2}} c_{\frac{-1+2+3+4}{1} 1 \frac{1+2+3+4}{2}} &= g_1^2, \\ c_{\frac{-1-2-3-4}{2} 1 \frac{1-2-3-4}{2}} c_{\frac{1-2-3-4}{2} 1 \frac{1+2+3+4}{2} 1} &= g_{\frac{1+2+3+4}{2}}^2 \end{aligned}$$

nebst denjenigen, welche hieraus durch Vertauschung der Nummern und deren Vorzeichen erhalten werden. Um diese Gleichungen zu befriedigen, kann man

$$(a) \quad \begin{aligned} c_{-1 \frac{1+2+3+4}{2} \frac{-1+2+3+4}{2}}, \quad c_{-1 \frac{1-2+3+4}{2} \frac{-1-2+3+4}{2}}, \quad c_{-1 \frac{1+2-3+4}{2} \frac{-1+2-3+4}{2}}, \\ c_{-1 \frac{1+2+3-4}{2} \frac{-1+2+3-4}{2}} \end{aligned}$$

und diejenigen zwölf Coefficienten, welche hieraus durch cyklische Vertauschung der Marken hervorgehen, willkürlich wählen und dann die sämtlichen c berechnen, unter deren Marken eine Marke ± 1 vorkommt.

Bildet man aber die Relationen

$$(1, -1 + 2, \frac{1-2+3+4}{2}) \text{ und } (1, -1 + 2, \frac{-1-2+3+4}{2}),$$

nämlich

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} &c_{1,-1+2,2} c_{\frac{1-2+3+4}{2} 1 \frac{1+2+3+4}{2}} \\ &+ c_{-1+2, \frac{1-2+3+4}{2} \frac{-1+2+3+4}{2}} c_{\frac{-1+2+3+4}{2} 1 \frac{1+2+3+4}{2}} = 0, \\ &c_{1,-1+2,2} c_{\frac{-1-2+3+4}{2} \frac{-1+2+3+4}{2}} \\ &+ c_{\frac{-1-2+3+4}{2} 1 \frac{1-2+3+4}{2}} c_{\frac{1-2+3+4}{2}, -1+2, \frac{-1+2+3+4}{2}} = 0, \end{aligned} \right.$$

so folgt daraus:

$$(3) \quad c_1 \frac{-1+2+3+4}{2} \frac{1+2+3+4}{2} c_2 \frac{-1-2+3+4}{2} \frac{-1+2+3+4}{2} \\ + c_1 \frac{-1-2+3+4}{2} \frac{1-2+3+4}{2} c_2 \frac{1-2+3+4}{2} \frac{1+2+3+4}{2} = 0.$$

Diese Gleichung und die entsprechenden lehren, dass man ausser den vier oben hingeschriebenen Coefficienten (a) etwa nur noch

$$c_{-2} \frac{1+2+3+4}{2} \frac{1-2+3+4}{2}, \quad c_{-2} \frac{1+2-3+4}{2} \frac{1-2-3+4}{2}, \quad c_{-2} \frac{1+2+3+4}{2} \frac{1+2-3+4}{2}, \\ c_{-4} \frac{1+2+3+4}{2} \frac{1+2+3-4}{2}$$

willkürlich annehmen darf. Endlich kann man aus den Gleichungen (2) und den Relationen

$$\left(\frac{1+2+3+4}{2}, \quad \frac{-1-2-3-4}{2}, \quad 1+2 \right)$$

alle weiteren Coefficienten c berechnen.

Die Wurzeln des Systems IV F) können in folgender Weise geschrieben werden:

$$\pm \omega_1, \quad \pm \omega_1 \pm \omega_2, \quad \pm \omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3 \pm \omega_4.$$

Die Jacobi'schen Relationen

$$\left(1, -1, \frac{-1+2+3+4}{2} \right), \quad \left(\frac{1+2+3+4}{2}, \frac{-1-2-3-4}{2}, 1 \right), \\ \left(1, 2, \frac{-1-2+3+4}{2} \right)$$

führen zu Gleichungen, welche mit den Gl. (1) und (3) identisch sind. Daher lassen sich die sämtlichen Coefficienten, welche aus

$$c_{-1} \frac{1+2+3+4}{2} \frac{-1+2+3+4}{2}$$

durch Vertauschung der Marken und ihrer Zeichen hervorgehen, in derselben Weise durch acht willkürlich gewählte Grössen darstellen, wie bei IV E). Zur Bestimmung der übrigen findet man quadratische Gleichungen, wie bei der Form C).

Was die Form VI E) betrifft, so vertausche man bei den in § 15 aufgezählten Wurzeln zunächst die Marken 5 und 6 und stelle dann die mit den neuen Marken 1...5 versehenen Wurzeln in der Form $\pm \pi_i \pm \pi_x$ dar, wo i, x ungleiche Marken der Reihe 1...5 sind. Hierzu kommen:

$$\omega_6, \quad \pi_i + \pi_x - \omega_6, \quad \pi_i + \pi_x + \pi_\mu + \pi_\nu - \omega_6$$

nebst den entgegengesetzt gleichen. Ebenso vertausche man in den oben aufgezählten Wurzeln des Systems VII E) die Marken 6 und 7 und man kann dann alle Wurzeln bis auf ihre entgegengesetzt gleichen in der Form angeben:

$$\pi_i + \pi_x, \pi_i - \pi_x, \omega_7, \pi_i + \pi_x - \omega_7, \pi_i + \pi_x + \pi_2 + \pi_\mu - \omega_7, \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 - \omega_7, \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 - 2\omega_7.$$

Genau so ist es mit VIII E), wo wir die Wurzeln erhalten:

$$\pi_i + \pi_x, \pi_i - \pi_x, \omega_8, \pi_i + \pi_x - \omega_8, \pi_i + \pi_x + \pi_2 + \pi_\mu - \omega_8, \\ \pi_{i_1} + \dots + \pi_{i_4} - \omega_8, \pi_{i_1} + \dots + \pi_{i_4} - 2\omega_8, \\ 2\pi_{i_1} + \pi_{i_2} + \pi_{i_3} + \pi_{i_4} + \pi_{i_5} + \pi_{i_6} + \pi_{i_7} - 2\omega_8,$$

wo $i, x \dots$ ungleiche Marken der Reihe 1 ... 7 sind. Die Berechnung aller Coefficienten c bietet keine Besonderheit.

Dass die auf dem angedeuteten Wege gefundenen Coefficienten c wirklich sämtlichen Jacobi'schen Relationen genügen, dafür spricht auch der folgende Umstand. Multiplicirt man sämtliche $X_i f$ mit beliebigen Factoren, so ändern sich die Ausdrücke für $(X_i X_x)$, aber jedesmal nur so, dass alle Jacobi'schen Relationen gültig bleiben. Auch ist die Zahl der willkürlichen Constanten, welche durch diese Relationen noch gelassen werden, so gross, dass sie durch bestimmte Wahl jener Factoren vorgeschriebene Werthe erhalten können.

Somit erhalten wir folgenden Satz:

Für $l = 2$ entspricht dem allgemeinen System D) keine einfache Gruppe und diejenigen beiden Gruppen werden identisch, welche den Formen B) und C) entsprechen. Ausserdem giebt es noch eine vierzehngliedrige einfache Gruppe vom Range zwei.

Für $l = 4$ kommen zu den allgemeinen Formen A), B), C), D) noch zwei einfache Gruppen von 52 Gliedern hinzu. Die eine von diesen hat die Gruppe IV B) zur Untergruppe.

Auch für $l = 6, 7, 8$ giebt es ausser den allgemeinen Formen noch je eine specielle einfache Gruppe; dieselbe hat 78 Glieder für $l = 6$, 133 für $l = 7$ und 248 für $l = 8$.

Braunsberg, 2. Februar 1888.