Werk

Titel: Mathematische Annalen
Ort: Leipzig
Jahr: 1889
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN235181684_0034
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0034

LOG Id: LOG_0009
LOG Titel: Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen. Dritter Theil
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684

Terms and Conditions

Contact

Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen.

Von

Wilhelm Killing in Braunsberg, Ostpr.

Dritter Theil.

Der vorliegende Theil meiner Untersuchungen über die Zusammensetzung der Transformationsgruppen stellt sich die Aufgabe, die Zusammensetzung aller derjenigen Gruppen zu finden, welche ihre eigenen Hauptuntergruppen sind, oder für welche die durch die $(X_\iota X_\varkappa)$ bestimmte Gruppe mit der durch die $X_\iota f$ bestimmten identisch ist; derselbe schliesst sich eng an die vorangehenden Theile an und stützt sich wesentlich auf die darin gewonnenen Resultate, setzt aber auch die Ergebnisse derselben und in mancher Beziehung ihre Beweismethoden voraus. Das Ergebniss meiner Untersuchungen ist ein überraschend einfaches, indem sich zeigt, wie alle zusammengesetzten Gruppen, welche der genannten Forderung genügen, sich ganz zwanglos und natürlich auf einfache Gruppen zurückführen. Um das Resultat recht einfach aussprechen zu können, hat man die Gruppen einzutheilen in zerfallende und nicht zerfallende; enthält nämlich eine Gruppe G die Untergruppen $G_1 \ldots G_\iota \ldots G_\varkappa \ldots G_m$, gehört jede Transformation von G einer und mit Ausnahme der identischen nur einer dieser Untergruppen an, und ist dann jede Transformation von G_ι mit jeder von $G_\varkappa$ vertauschbar, so sage ich, G zerfalle in $G_1 \ldots G_m$. Wenn nun eine r-gliedrige Gruppe ihre eigene Hauptuntergruppe ist, ohne zu zerfallen, so kann man die sie bestimmenden r inf. Transformationen $X_1 \ldots X_r$ so wählen, dass die ersten r_1 Transformationen $X_1 \ldots X_{r_1}$ eine einfache Gruppe bestimmen, während die Transformationen $X_{r_1+1} \ldots X_r$ eine Gruppe vom Range null ergeben, welche für die r-gliedrige Gruppe eine invariante Untergruppe ist; zudem gelingt es, die Coefficienten c wenigstens zum grössten Theile ohne jede Rechnung hinzuschreiben, so dass für die explicite Darstellung nur wenig mehr hinzuzufügen ist. Wofern aber eine solche Gruppe zerfällt, hat man erst die Zerfällung vorzunehmen, und dann kommt jeder Theilgruppe die genannte Eigenschaft zu.

Dem Beweise liegen dieselben Betrachtungen zu Grunde, aus denen sich die Resultate in den beiden ersten Theilen ergeben haben. Die Herleitung würde sehr einfach sein, wenn man annehmen könnte, dass die nicht verschwindenden Wurzeln der charakteristischen Gleichung sämmtlich einfache Wurzeln wären. Aber während man bei vielen Untersuchungen, wo es sich um die Wurzeln einer Gleichung handelt, nur einfache Wurzeln zu betrachten braucht und dann durch stetige Uebergänge den Fall gleicher Wurzeln abmachen kann, ist das für die charakteristische Gleichung der Gruppen deshalb nicht möglich, weil immer ganz bestimmte Relationen zwischen den Wurzeln bestehen. Es kann aber nicht geleugnet werden, dass die Betrachtung der mehrfachen Wurzeln manches Lästige mit sich führt, da es nothwendig wird, verschiedene Fälle zu untersuchen, welche sich nicht leicht auf einen einheitlichen Typus zurückführen lassen. Bei der Nothwendigkeit, stets mehrere Fälle zu unterscheiden, liegt die Befürchtung ausserordentlich nahe, dass ich eine Möglichkeit könnte übersehen haben. Schon aus diesem Grunde verhehle ich mir nicht, dass es wünschenswerth wäre, die von mir gewonnenen Ergebnisse auf einem directeren oder, vielleicht besser gesagt, einem einheitlicheren Wege zu erweisen. Ein solcher dürfte sich in der Betrachtung der Determinante

$$\begin{vmatrix} \sum \eta_\varrho c_{\varrho 11} & \cdots & \sum \eta_\varrho c_{\varrho r 1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum \eta_\varrho c_{\varrho 1 r} & \cdots & \sum \eta_\varrho c_{\varrho r r} \end{vmatrix}$$

darbieten, und zwar scheint es angemessen, die Werthe der Unterdeterminante zunächst zu berechnen, wenn die $c_{\iota\varkappa\sigma}$ nur der Bedingung unterliegen $c_{\iota\varkappa\sigma} + c_{\varkappa\iota\sigma} = 0$, und dann erst die aus der Jacobi'schen Identität*) fliessenden Beziehungen hinzuzunehmen. Meine hierauf

*) Das Bestreben, mich den Bezeichnungen des Herrn Lie, sobald ich mit dessen Arbeiten bekannt geworden war, vollständig anzuschliessen, hat mich mehreremals zu kleinen Irrthümern verleitet; konnte doch die erste Durchsicht seiner Arbeiten nur eine oberflächliche sein, da mein Streben hauptsächlich darauf gerichtet war, zu erkennen, wo mir Herr Lie in seinen Entdeckungen zuvorgekommen war. Hierbei habe ich z. B. Jacobi'sche Identität mit Jacobi'scher Relation verwechselt und geglaubt, Herr Lie habe eine für die Gruppentheorie wichtige Gleichung mit letzterem Namen belegt (wozu er als erster Entdecker ein Recht hatte), um ihre Beziehung zu Jacobi's bekannter Entdeckung hervorzuheben; da ich jetzt sehe, dass Herr Lie den Namen Jacobi'sche Identität vorzieht, habe ich keinen Grund, den andern Namen beizubehalten. Auch zeigt mir sein Werk, dass mehrere Bezeichnungen und Zuordnungen Herrn Lie allein gehören, während ich bei Abfassung des ersten Theiles der vorliegenden Unter-

bezüglichen Untersuchungen sind bis jetzt nicht zu einem genügenden Abschluss gelangt.

Ein zweiter Mangel der Arbeit liegt darin, dass die Zahl derjenigen von einander unabhängigen Transformationen, welche mit einer ganz allgemeinen Transformation vertauschbar sind, jedesmal den Ausgangspunkt der Untersuchung bildet. Dass diese Zahl (in der Arbeit mit k bezeichnet) für die Gruppe sehr wichtig ist, zeigen viele Sätze, welche sich leicht ergeben, ohne im Folgenden mitgetheilt zu sein; aber weit wichtiger ist die Zahl l, welche angiebt, wie viele unter den Coefficienten der charakteristischen Gleichung von einander unabhängig sind. Es würde aber ein wesentlicher Fortschritt sein, wenn man die letztere Zahl direct der Untersuchung zu Grunde legen könnte.

§ 19.

Weitere Untersuchungen über verschwindende Wurzeln.

Wenn in der charakteristischen Gleichung

$$\omega^r - \omega^{r-1}\varphi_1(\eta) + \omega^{r-2}\varphi_2(\eta) - \cdots = 0$$

die letzten k Coefficienten $\varphi_r(\eta)$, $\varphi_{r-1}(\eta) \ldots \varphi_{r-k+1}(\eta)$ identisch verschwinden, so muss jede beliebige Transformation, wie wir in § 10 gesehen haben, einer k-gliedrigen Untergruppe vom Range null angehören. Indem also $X_r f$ in der r-gliedrigen Gruppe als ganz allgemeine inf. Transformation vorausgesetzt wird, können $k-1$ weitere inf. Transformationen $X_{r-1}f, X_{r-2}f \ldots X_{r-k+1}f$ nach § 9 so gewählt werden, dass ist:

$$(1)\quad (X_r X_{r-1}) = a_1 X_{r-2},\ (X_r X_{r-2}) = a_2 X_{r-3} \cdots (X_r X_{r-k+2}) = a_{k-2} X_{r-k+1},$$
$$(X_r X_{r-k+1}) = 0,$$

wo alle Coefficienten $a_1 \ldots a_{k-2}$ gleich eins oder gleich null vorausgesetzt werden dürfen. Die inf. Transformation X_{r-1} kann in der k-gliedrigen Untergruppe ganz beliebig, nur mit Ausschluss besonderer Lagen, gewählt werden; dann bestimmen die Gleichungen (1) die $X_{r-2} \ldots X_{r-k'+1}$ vollständig, wofern $a_{k'-1}$ der erste verschwindende

suchungen nicht wusste, ob nicht Herr Engel daran mitbetheiligt sei und deshalb von der Bezeichnung (u. dgl.) der Herren Lie und Engel sprach. Ebenso dürfte die in der Einleitung zum ersten Theile (Bd. 31, S. 255 u. 256) angegebene Bemerkung über die Gruppen, in denen keine Kegelschnittsgruppen vorkommen, dem Verdienst des Herrn Lie nicht völlig gerecht werden und das des Herrn Engel zu sehr hervorheben. Auch einige andere derartige Notizen in jener Arbeit sind, wie ich aus seinem Werke über Transformationsgruppen sehe, nicht ganz genau, gleichwie ich an einer andern Stelle den ganzen Inhalt der §§ 3 u. 4 meiner Abhandlung: „Erweiterung des Raumbegriffs“, Herrn Lie zuschrieb, obwohl einige darin enthaltene kleinere Einzelheiten zuerst von mir angegeben sind.

Coefficient ist. $X_{r-k'}$ ist wiederum willkürlich bis auf eine lineare Function von $X_{r-1} \dots X_{r-k'+1}$ u. s. w.

Um die Entwicklung recht übersichtlich zu gestalten und denjenigen Fall zunächst zu erörtern, wo alle Formeln sich vollständig hineinschreiben lassen, machen wir vorläufig die beiden Voraussetzungen:

a) die Coefficienten $a_1 \dots a_{k-2}$ in (1) sollen sämmtlich gleich eins sein;

b) für jede nicht verschwindende Wurzel ω_α, welche die charakteristische Gleichung bei $\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_{r-1} = 0$, $\eta_r = 1$ hat, sollen nicht die sämmtlichen Unterdeterminanten $r-1^{\text{ten}}$ Grades der Determinante $|c_{r\iota\varkappa} - \delta_{\iota\varkappa}\omega_\alpha|$ verschwinden.

Dann gehören zu jeder $(\lambda+1)$-fachen Wurzel ω_α gerade $\lambda+1$ inf. Transformationen $X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1} \dots X_{\alpha_\lambda}$, so dass ist:

$$(2)\qquad \begin{aligned} &(X_r X_{\alpha_0}) = \omega_\alpha X_{\alpha_0}, \quad (X_r X_{\alpha_1}) = \omega_\alpha X_{\alpha_1} + c_{r\alpha_1\alpha_0} X_{\alpha_0}, \dots \\ &(X_r X_{\alpha_\lambda}) = \omega_\alpha X_{\alpha_\lambda} + c_{r\alpha_\lambda\alpha_{\lambda-1}} X_{\alpha_{\lambda-1}} + \dots + c_{r\alpha_\lambda\alpha_0} X_{\alpha_0}, \end{aligned}$$

wo $c_{r\alpha_1\alpha_0}, c_{r\alpha_2\alpha_1} \dots c_{r\alpha_\lambda\alpha_{\lambda-1}}$ von null verschieden sind.

Aus $(r, r-k+1, \alpha_i)$ folgt zunächst, dass im Ausdruck für $(X_{r-k+1} X_{\alpha_i})$ nur $X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1} \dots X_{\alpha_i}$, aber nicht $X_{\alpha_{i+1}} \dots X_{\alpha_\lambda}$ vorkommen können, und zugleich ergiebt sich:

$$c_{(r-k+1)\alpha_i\alpha_i} = c_{(r-k+1)\alpha_{i-1}\alpha_{i-1}} = \omega_\alpha^{(k-1)}.$$

Nun bildet man die Relationen $(r, r-k+2, \alpha_0)$, $(r, r-k+2, \alpha_1) \dots$ und zeigt zunächst, dass $(X_{r-k+2} X_{\alpha_i})$ ausser $X_{\alpha_0} \dots X_{\alpha_i}$ nur noch $X_{\alpha_{i+1}}$ enthalten kann. Der Coefficient von X_{α_i} liefert dann die Gleichungen:

$$\begin{aligned} &\omega_\alpha^{(k-1)} = c_{r\alpha_1\alpha_0} c_{(r-k+2)\alpha_0\alpha_1}, \\ &\omega_\alpha^{(k-1)} = c_{r\alpha_2\alpha_1} c_{(r-k+2)\alpha_1\alpha_2} - c_{r\alpha_1\alpha_0} c_{(r-k+2)\alpha_0\alpha_1}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

durch deren Addition sich ergiebt:

$$\omega_\alpha^{(k-1)} = 0, \quad c_{(r-k+2)\alpha_0\alpha_1} = c_{(r-k+2)\alpha_1\alpha_2} = \dots = 0.$$

Jetzt kann man dieselbe Untersuchung für $X_{r-k+2}, X_{r-k+3} \dots$ anstellen und daraus die entsprechenden Gesetze für $(X_{r-k+2} X_{\alpha_i}) \dots (X_{r-2} X_{\alpha_i})$ herleiten. Für $(X_{r-1} X_{\alpha_i})$ ergeben sich aus $(r, r-1, \alpha_0) \dots (r, r-2, \alpha_\lambda)$ natürlich andere Ausdrücke, aber wie in früheren Fällen muss auch hier die charakteristische Gleichung für X_{r-1} dieselbe Zahl mehrfacher Wurzeln haben, wie für X_r. Indem wir diess berücksichtigen, erhalten wir folgende Formeln:

$$(3)\quad \begin{cases} (X_{r-2}X_{\alpha_0}) = 0 \quad \dots\dots\dots \quad (X_{r-k+1}X_{\alpha_0}) = 0, \\ (X_{r-2}X_{\alpha_1}) = 0 \quad \dots\dots\dots \quad (X_{r-k+1}X_{\alpha_1}) = 0, \\ (X_{r-2}X_{\alpha_2}) = c_{(r-2)\alpha_2\alpha_0}X_{\alpha_0}, \quad (X_{r-3}X_{\alpha_2}) = \dots = (X_{r-k+1}X_{\alpha_2}) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (X_{r-\nu}X_{\alpha_{\nu+\mu}}) = [\alpha_\mu, \alpha_{\mu-1} \dots \alpha_0], \\ (X_{r-\nu}X_{\alpha_\nu}) \quad = c_{(r-\nu)\alpha_\nu\alpha_0}X_{\alpha_0}, \quad (X_{r-\nu}X_{\alpha_{\nu-\varrho}}) = 0 \end{cases}$$

für positive Werthe von μ, ν, ϱ, $\nu - \varrho$, wobei die eckige Klammer eine homogene lineare Function der mit den entsprechenden Marken versehenen $X_{\alpha_\mu} \dots$ bezeichnet.

Wie in § 8 zeigt sich auch hier unter Anwendung von $(r, \alpha_0, \beta_0) \dots$, dass die Operation $(X_{\alpha_i} X_{\beta_k})$ nur dann zu den inf. Transformationen $X_r \dots X_{r-k+1}$ führt, wenn die zugehörigen Wurzeln ω_α und ω_β entgegengesetzt gleich sind. Indem wir wieder annehmen, dass zu den Marken α und α' entgegengesetzt gleiche Wurzeln ω_α und $-\omega_\alpha$ gehören, folgt unter Bildung von (r, α_0, α_0') aus dem Umstande, dass X_r nur mit X_{r-k+1} vertauschbar ist, die Gleichung:

$$(4)\qquad (X_{\alpha_0} X_{\alpha_0'}) = c_{\alpha_0\alpha_0'(r-k+1)} X_{r-k+1}.$$

Wir verfolgen jetzt die Voraussetzung, dass der Coefficient $c_{\alpha\alpha_0'(r-k+1)}$ nicht verschwindet, und bilden die Relationen $(r, \alpha_0, \alpha_\nu')$. Indem wir in denselben nur den Coefficienten des mit der höchsten Marke versehenen $X_{r-\varrho}$ berücksichtigen, und die Abkürzungen einführen:

$$(5)\qquad \begin{matrix} c_{r\alpha_\nu \cdots \alpha_\mu} = c_{r\alpha_\nu\alpha_{\nu-1}} c_{r\alpha_{\nu-1}\alpha_{\nu-2}} \dots c_{r\alpha_{\mu+1}\alpha_\mu} \\ c_{r\alpha_\nu' \cdots \alpha_\mu'} = c_{r\alpha_\nu'\alpha_{\nu-1}'} c_{r\alpha_{\nu-1}'\alpha_{\nu-2}'} \dots c_{r\alpha_{\mu+1}'\alpha_\mu'} \end{matrix} \quad (\text{für } \nu > \mu),$$

erhalten wir:

$$(6)\qquad \begin{matrix} c_{\alpha_0\alpha_\nu'(r-k+\nu+1)} = c_{r\alpha_\nu' \cdots \alpha_0'} c_{\alpha_0\alpha_0'(r-k+1)}, \\ c_{\alpha_\nu\alpha_0'(r-k+\nu+1)} = c_{r\alpha_\nu \cdots \alpha_0} c_{\alpha_0\alpha_0'(r-k+1)}. \end{matrix}$$

Diese beiden Gleichungen gelten auch für $\nu = k - 2$; dagegen folgt für $\nu = k - 1$:

$$c_{r\alpha_{k-1}\alpha_{k-2}} = 0, \quad c_{r\alpha_{k-1}'\alpha_{k-2}'} = 0,$$

oder ω_α und $-\omega_\alpha$ können unter den gemachten Voraussetzungen keine k-fachen Wurzeln sein.

Wir gehen jetzt über zu den Relationen $(\alpha_1, \alpha_\nu', r)$ und $(\alpha_\nu, \alpha_1', r)$, welche in entsprechender Weise liefern:

$$(7)\qquad \begin{matrix} c_{\alpha_\nu\alpha_1'(r-k+\nu+2)} = (\nu + 1)\, c_{r\alpha_\nu \cdots \alpha_0} c_{r\alpha_1'\alpha_0'} c_{\alpha_0\alpha_0'(r-k+1)}, \\ c_{\alpha_1\alpha_\nu'(r-k+\nu+2)} = (\nu + 1)\, c_{r\alpha_1\alpha_0} c_{r\alpha_\nu' \cdots \alpha_0'} c_{\alpha_0\alpha_0'(r-k+1)}. \end{matrix}$$

Diese Gleichungen behalten ihre Gültigkeit für $\nu = k - 3$; aber die Relation $(r, \alpha_1, \alpha_{k-2}')$ liefert:

$$c_{r\alpha_1\alpha_0}\,c_{\alpha_0\alpha'_{k-2}(r-1)} + c_{r\alpha'_{k-2}\alpha'_{k-3}}\,c_{\alpha_1\alpha'_{k-3}(r-1)} = 0$$

oder

$$(k-1)\,c_{r\alpha_1\alpha_0}\,c_{r\alpha'_{k-2}\cdots\alpha'_0}\,c_{\alpha_0\alpha'_0(r-k+1)} = 0,$$

so dass $c_{r\alpha'_{k-2}\alpha'_{k-3}}$ gleich null sein muss, und $-\omega_\alpha$ keine $(k-1)$-fache Wurzel sein kann, und ebensowenig ω_α.

Indem wir in entsprechender Weise weitergehen, kommen wir zu der Gleichung:

$$c_{\alpha_\mu\alpha'_\nu(r-k+\mu+\nu+1)} = \binom{\mu+\nu}{\mu}\,c_{r\alpha_\mu\cdots\alpha_0}\,c_{r\alpha'_\nu\cdots\alpha'_0}\,c_{\alpha_0\alpha'_0(r-k+1)}, \tag{8}$$

welche noch für $\mu = k-\nu-2$ gilt. Suchen wir aber den Coefficienten von X_{r-1} in $(r, \alpha_{k-\nu-1}, \alpha'_\nu)$, so folgt:

$$\binom{k-1}{\nu}\,c_{r\alpha_{k-\nu-1}\cdots\alpha_0}\,c_{r\alpha'_\nu\cdots\alpha'_0}\,c_{\alpha_0\alpha'_0(r-k+1)} = 0.$$

Kommt also eine $(\nu+1)$-fache Wurzel $-\omega_\alpha$ vor, so darf keine $(k-\nu)$-fache Wurzel ω_α vorkommen, und umgekehrt. Demnach können X_r und X_{r-1} für jedes Paar entgegengesetzt gleicher Wurzeln höchstens einmal vorkommen; entweder nämlich in dem Ausdruck für $(X_{\alpha_{k-2}}X_{\alpha'_0})$, wobei $-\omega_\alpha$ keine mehrfache Wurzel ist, oder in dem Ausdruck für $(X_{\alpha_{k-3}}X_{\alpha'_1})$, wobei $-\omega_\alpha$ keine dreifache Wurzel sein kann u. s. w. Dabei ergeben sich gewisse Beziehungen zwischen den Coefficienten $c_{r\alpha_\mu\alpha_{\mu-1}}$, $c_{(r-1)\alpha_\mu\alpha_{\mu-1}}$ und den $c_{(r-1)(r-\varrho)(r-\varrho-1)}$, auf welche wir aufmerksam machen wollen, um das Material zur expliciten Darstellung der in Frage kommenden Gruppen möglichst vollständig zu bieten.

Aus $(r-1, \alpha_\nu, \alpha'_0)$ folgt für $\nu < k-2$, unter Einsetzung der Werthe (6):

$$c_{(r-1)\alpha_\nu\alpha_{\nu-1}} = c_{r\alpha_\nu\alpha_{\nu-1}}\,c_{(r-1)(r-k+\nu+1)(r-k+\nu)}, \tag{9}$$

ebenso aus $(r-1, \alpha_\nu, \alpha'_1)$ für $\nu < k-3$:

$$(\nu+1)\,c_{(r-1)(r-k+\nu+2)}\,c_{(r-k+\nu+1)} = \nu\,c_{(r-1)(r-k+\nu+1)(r-k+\nu)} + c_{(r-1)(r-k+2)(r-k+1)}$$

und hieraus:

$$c_{(r-1)(r-k+\nu+1)(r-k+\nu)} = c_{(r-1)(r-k+2)(r-k+1)} \qquad (\nu < k-3). \tag{10}$$

Dann wird auch jede Gleichung erfüllt, welche man aus $(r-1, \alpha_\mu, \alpha'_\nu)$ durch Einsetzung der aus (8) folgenden Werthe erhält. In vielen Fällen wird man bereits hieraus schliessen können, dass, wenn X_r und X_{r-1} für mehrere Paare entgegengesetzt gleicher Wurzeln erhalten werden, das Verhältnis der Coefficienten $c_{\iota\varkappa r}$ und $c_{\iota\varkappa(r-1)}$ jedesmal dasselbe ist.

Um dies ganz allgemein zu erkennen, berücksichtige man die in § 8 betreffs der Gleichungen (19) und (20) angestellte Untersuchung, aus welcher sich ergiebt, das $(X_{\alpha_\iota} X_{\beta_\varkappa})$ nur durch solche X_{γ_ϱ} dargestellt wird, für welche $\omega_\alpha + \omega_\beta = \omega_\gamma$ ist. Nun seien in

$$(X_{\alpha_\mu} X_{\alpha'_\nu}) = \sum^{\varrho} c_{\alpha_\mu \alpha'_\nu (r-\varrho)} X_{r-\varrho}$$

die $c_{\alpha_\mu \alpha'_\nu r}$ und $c_{\alpha_\mu \alpha'_\nu (r-1)}$ nicht beide gleich null. Wenn $\mu \geqq \nu$ und infolge dessen $\mu > 0$ ist, so bilde man die Jacobi'schen Identitäten $(\alpha_\mu, \alpha'_\nu, \alpha_0)$, $\big(\alpha_\mu, \alpha'_\nu, (2\alpha)_0\big)$ .... Da $\mu + \nu = k - 2$ ist, so ist

$$\big((X_{\alpha'_\nu} X_{\alpha_0}) X_{\alpha_\mu}\big) = 0,$$

und so ergiebt sich durch Addition der erhaltenen Gleichungen:

$$c_{\alpha_\mu \alpha'_\nu r}\, \omega_\alpha + c_{\alpha_\mu \alpha'_\nu (r-1)}\, \omega'_\alpha = 0.$$

Jetzt sei ω_β irgend eine andere Wurzel und $X_{\beta_0}, X_{\beta_1} \dots$ die zugehörigen inf. Transformationen. Man bilde die Jacobi'schen Identitäten $(\alpha_\mu, \alpha'_\nu, \beta_0)$, $(\alpha_\mu, \alpha'_\nu, \beta_1) \dots$ sowie diejenigen Gleichungen, welche man hieraus erhält, indem man ω_β durch $\omega_\beta \pm \omega_\alpha$ ersetzt. Die Addition derselben liefert

$$c_{\alpha_\mu \alpha'_\nu r}\, \omega_\beta + c_{\alpha_\mu \alpha'_\nu (r-1)}\, \omega'_\beta = 0. \tag{11}$$

Ist nun

$$(X_{\beta_\varrho} X_{\beta'_\sigma}) = \sum^{\tau} c_{\beta_\varrho \beta'_\sigma (r-\tau)} X_{r-\tau},$$

so muss auch die Gleichung

$$c_{\beta_\varrho \beta'_\sigma r}\, \omega_\beta + c_{\beta_\varrho \beta'_\sigma (r-1)}\, \omega'_\beta = 0$$

bestehen, so dass sich

$$c_{\beta_\varrho \beta'_\sigma r} X_r + c_{\beta_\varrho \beta'_\sigma (r-1)} X_{r-1} \quad \text{und} \quad c_{\alpha_\mu \alpha'_\nu r} X_r + c_{\alpha_\mu \alpha'_\nu (r-1)} X_{r-1}$$

nur durch einen constanten Factor unterscheiden.

Wir machen jetzt die Annahme, $(X_{\alpha_0} X_{\alpha'_0}) \dots$ und alle $(X_{\alpha_\varrho} X_{\alpha'_\sigma})$ seien Null, für welche $\varrho + \sigma < i$ ist, dagegen gebe es einen nicht verschwindenden Ausdruck $(X_{\alpha_\varrho} X_{\alpha'_{i-\varrho}})$. Dann wird derselbe durch X_{r-k+1} allein dargestellt, und für $\varrho = 0 \dots i$ werden alle $(X_{\alpha_\varrho} X_{\alpha'_{i-\varrho}})$, wofern X_{α_ϱ} und $X_{\alpha'_{i-\varrho}}$ beide vorkommen, sich nur durch einen constanten Factor unterscheiden. Man hat jetzt wiederum, wie bei der Herleitung der Gleichungen (6) — (8) die Identitäten $(r, \alpha_\iota, \alpha'_\varkappa)$ zu bilden und in jeder den Coefficienten des höchsten $X_{r-k+\varrho}$ zu suchen. Dies liefert folgende Gleichungen:

$$(13)\quad \begin{cases} c_{\alpha_0 \alpha'_{i+\nu} (r-k+\nu+1)} = c_{r \alpha'_{i+\nu} \cdots \alpha'_i}\, c_{\alpha_0 \alpha'_i (r-k+1)}, \\ c_{\alpha_1 \alpha'_{i+\nu} (r-k+\nu+2)} = \binom{\nu+1}{1} c_{r \alpha_1 \alpha_0}\, c_{r \alpha'_{i+\nu} \cdots \alpha'_i}\, c_{\alpha_0 \alpha'_i (r-k+1)} + c_{r \alpha'_{i+\nu} \cdots \alpha'_{i-1}} \\ \qquad\qquad \cdot\, c_{\alpha_1 \alpha'_{i-1} (r-k+1)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{\alpha_\mu \alpha'_\nu (r-k+\mu+\nu-i+1)} = \binom{\mu+\nu-i}{\mu} c_{r \alpha_\mu \cdots \alpha_0}\, c_{r \alpha'_\nu \cdots \alpha'_i}\, c_{\alpha_0 \alpha'_i (r-k+1)} + \\ \qquad + \binom{\mu+\nu-i}{\mu-1} c_{r \alpha_\mu \cdots \alpha_1}\, c_{r \alpha'_\nu \cdots \alpha'_{i-1}}\, c_{\alpha_1 \alpha'_{i-1} (r-k+1)} + \cdots \end{cases}$$

Hiernach ergiebt sich, wie im vorigen Falle:

$$c_{r\alpha'_{i+k-2}\cdots\alpha'_i}\left[(k-1)\,c_{r\alpha_1\alpha_0}\,c_{\alpha_0\alpha'_i(r-k+1)} + c_{r\alpha'_i\alpha'_{i-1}}\,c_{\alpha_1\alpha'_{i-1}(r-k+1)}\right] = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\binom{k-1}{\mu}c_{r\alpha_\mu\cdots\alpha_0}\,c_{r\alpha'_{k+i-\mu-1}\cdots\alpha'_i}\,c_{\alpha_0\alpha'_i(r-k+1)}$$
$$+\binom{k-1}{\mu-1}c_{r\alpha_\mu\cdots\alpha_1}\,c_{r\alpha'_{k+i-\mu-1}\cdots\alpha'_{i-1}}\,c_{\alpha_1\alpha'_{i-1}(r-k+1)}$$
$$+\binom{k-1}{\mu-2}c_{r\alpha_\mu\cdots\alpha_2}\,c_{r\alpha'_{k+i-\mu-1}\cdots\alpha'_{i-2}}\,c_{\alpha_2\alpha'_{i-2}(r-k+1)} + \cdots = 0.$$

Daraus erkennt man, dass die Zahl der Transformationen, welche zu ω_α und $-\omega_\alpha$ gehören, nicht beliebig gross sein kann. Sollte das nämlich der Fall sein, so müssten die sämmtlichen Determinanten verschwinden, welche durch irgend $i+1$ auf einander folgende Verticalreihen der Matrix gebildet werden:

$$\begin{vmatrix}
\binom{k-1}{1} & \binom{k-1}{2} & \binom{k-1}{3} \cdot & \binom{k-1}{i} & \binom{k-1}{i+1} \cdot \\
\binom{k-1}{0} & \binom{k-1}{1} & \binom{k-1}{2} \cdot & \binom{k-1}{i-1} & \binom{k-1}{i} \cdot \\
 & \binom{k-1}{0} & \binom{k-1}{1} \cdot & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & \binom{k-1}{0} & \binom{k-1}{1} \cdot
\end{vmatrix}$$

Von diesen Determinanten kann aber keine einzige verschwinden; denn wenn man mit der ν^{ten} Verticalreihe beginnt und diese mit den folgenden i zu einer Determinante vereinigt, so ist deren Werth gleich:

$$\frac{(k+i-1)!\,(k+i-2)!\cdots(k+i-\nu)!}{(k-2)!\,(k-3)!\cdots(k-\nu-1)!}\times\frac{0!\,1!\cdots(\nu-1)!}{(i+1)!\,(i+2)!\cdots(i+\nu)!}.$$

Somit können auch hier X_r und X_{r-1} nur in einem einzigen Ausdruck $(X_{\alpha_\mu}X_{\alpha'_\nu})$ für jedes Paar entgegengesetzt gleicher Wurzeln vorkommen. Die weitere Entwicklung unterscheidet sich nicht von der vorhin durchgeführten; in (9) und (10) ändern sich nur die Grenzen für ν, und (11) bleibt bestehen, somit auch die daraus gezogene Folgerung, dass das Verhältniss $c_{\alpha_\mu\alpha'_\nu r}$ zu $c_{\alpha_\mu\alpha'_\nu(r-1)}$ immer dasselbe ist.

Sehen wir jetzt von der Voraussetzung ab, welche wir betreffs der Wurzeln gemacht haben, so erleidet die Herleitung der Formeln (3) eine kleine Aenderung, wenn zu einer Wurzel ω_α noch eine zweite, dritte ... Reihe $\overline{X}_{\alpha_0}$, $\overline{X}_{\alpha_1}$ ... $\overline{\overline{X}}_{\alpha_0}$, $\overline{\overline{X}}_{\alpha_1}$... gehört. Aber der Umstand, dass $X_r f$ als ganz allgemeine inf. Transformation vorausgesetzt wurde, sowie die Hinzunahme der Identitäten $(r, r-\varrho, \bar{\bar{\alpha_i}})$, $(r, r-\varrho, \bar{\bar{\bar{\alpha_i}}})$ ... für $\varrho = k-1 \ldots 1$ lässt leicht erkennen, dass das Ergebniss ungeändert bleibt. Die Herleitung der weiteren Formeln ändert sich fast gar nicht.

Wir haben demnach folgenden Satz bewiesen:

Wenn in der charakteristischen Gleichung:

$$\omega^r - \omega^{r-1}\varphi_1(\eta) + \omega^{r-2}\varphi_2(\eta) - \cdots = 0$$

die letzten k (> 2) Coefficienten $\varphi_r(\eta)$, $\varphi_{r-1}(\eta) \ldots \varphi_{r-k+1}(\eta)$ identisch verschwinden, ohne dass alle Unterdeterminanten $r-2^{\text{ten}}$ Grades der Determinante $\left|\sum^\varrho \eta_\varrho c_{\varrho\iota\varkappa}\right|$ identisch gleich Null sind, so gehört jede allgemeine Transformation der Gruppe einer k-gliedrigen Untergruppe vom Range Null an, und die diese Untergruppe bestimmenden inf. Transformationen X_r, $X_{r-1} \ldots X_{r-k+1}$ können so gewählt werden, dass ist:

$$(X_r X_{r-1}) = X_{r-2} \cdots (X_r X_{r-k+2}) = X_{r-k+1}, \quad (X_r X_{r-k+1}) = 0.$$

Soll die Haupt-Untergruppe mehr als $r-2$ Glieder haben, so muss die charakteristische Gleichung entgegengesetzt gleiche Wurzeln besitzen und die zu ihnen gehörigen Transformationen dürfen nicht sämmtlich vertauschbar sein. Aber auch in diesem Falle hat die Haupt-Untergruppe höchstens $r-1$ Glieder, und zugleich enthält die Gruppe stets eine ausgezeichnete Untergruppe, d. h. eine solche, welche mit allen Transformationen der Gruppe vertauschbar ist.

Für die weitere Zusammensetzung der Gruppe dienen die Gleichungen (3) — (13).

Es erübrigt noch, die Aenderungen anzugeben, welche eintreten, wenn in der k-gliedrigen Untergruppe nicht eine eingliedrige, sondern eine mehrgliedrige ausgezeichnete Untergruppe enthalten ist. Die durch die Gleichungen (1) bezeichnete Operation führe (bei nicht specieller Annahme von X^r und X_{r-1}) zum ersten Male für X_{r-k_1+1} zu der Relation: $(X_r X_{r-k_1+1}) = 0$; dann sei X_{r-k_1} nach den Festsetzungen des § 9 gewählt, und man gelange wieder für X_{r-k_2+1} zu $(X_r X_{r-k_2+1}) = 0$, u. s. w. Lässt man dann in den Formeln (3) die Marke ν kleiner als k_1 sein, so bleiben dieselben ungeändert; bei der Uebertragung derselben auf ein zwischen k_1 und k_2 gelegenes ν hat man zu berücksichtigen, welche lineare Function von $X_{r-1} \ldots X_{r-k_1+1}$ bei der Wahl von X_{r-k_1} hinzugenommen ist. Unter Anwendung der eckigen Klammern zur Bezeichnung einer linearen Function der mit den entsprechenden Marken versehenen X ergiebt sich:

$$(X_{\alpha_0} X_{\alpha_0'}) = [r-k_1+1, \; r-k_2+1 \cdots r-k+1].$$

Wendet man dann wieder $(r, \alpha_0, \alpha_\nu') \ldots (r, \alpha_\mu, \alpha_\nu')$ an, so gelten den

Formeln (5) — (8) entsprechende Formeln, so lange man für kein $k_{\varrho+1}$ auf k_ϱ gelangt; sobald das geschieht, ist wieder die bei der Bildung von X_{r-k_ϱ} benutzte lineare Function in Betracht zu ziehen. So können im Ausdruck für $c_{\alpha_\mu \alpha'_\nu (r-k_\varrho+\mu+\nu+1)}$, wenn $\mu+\nu-k_\varrho < k_{\varrho-1}$ ist, die $c_{\alpha_0\alpha_0'(r-k_{\varrho+1}+1)}$, $c_{\alpha_0\alpha_0'(r-k_\varrho+1)} \dots$ vorkommen. Indessen bleibt das Wesen des Beweises ungeändert, wonach zunächst Beziehungen zwischen den $c_{r\alpha_\mu \alpha_{\mu-1}}$, $c_{r\alpha'_\nu \alpha'_{\nu-1}}$ und den $c_{\alpha_0\alpha_0'(r-k_\varrho+1)}$ bestehen; diese Beziehungen gestatten nicht, dass mehrere Ausdrücke $(X_{\alpha_\mu} X_{\alpha'_\nu})$ für dasselbe Paar entgegengesetzt gleicher Wurzeln die X_r, X_{r-1}, X_{r-k_1}, $X_{r-k_2} \dots$ enthalten. Ganz entsprechend zeigt sich aber für irgend zusammengehörige Wurzeln ω_β, ω'_β, $\omega_\beta^{(k_1)} \dots$, dass ist:

$$c_{\alpha_\mu \alpha'_\nu r}\, \omega_\beta + c_{\alpha_\mu \alpha'_\nu (r-1)}\, \omega_\beta + c_{\alpha_\mu \alpha'_\nu (r-k_1)}\, \omega_\beta^{(k_1)} + \dots = 0.$$

Wenngleich wir demnach hier auf einen expliciten Ausdruck verzichten müssen, sind wir doch zu folgendem Resultate gelangt:

Wenn für eine r-gliedrige Gruppe die k letzten Coefficienten $\varphi_r(\eta)$, $\varphi_{r-1}(\eta) \dots \varphi_{r-k+1}(\eta)$ *der charakteristischen Gleichung identisch verschwinden, ohne dass die sämmtlichen Unterdeterminanten* $r-k+1^{\text{ten}}$ *Grades der Determinante* $\left|\sum^\varrho \eta_\varrho c_{\varrho\iota\varkappa}\right|$ *identisch gleich Null sind, so ist die Gliederzahl der Haupt-Untergruppe kleiner als r und die Gruppe selbst enthält eine ausgezeichnete Untergruppe.*

Die Umkehrung lässt sich in folgender Weise aussprechen:

Soll eine r-gliedrige Gruppe, in deren charakteristischer Gleichung die letzten k Coefficienten identisch verschwinden, ihre eigene Haupt-Untergruppe sein, so müssen auch alle Unterdeterminanten $r-k+1^{\text{ten}}$ *Grades von* $\left|\sum^\varrho \eta_\varrho c_{\varrho\iota\varkappa}\right|$ *identisch verschwinden; jede Transformation gehört also einer k-gliedrigen Untergruppe an, deren Transformationen sämmtlich mit einander vertauschbar sind.*

§ 20.

Verallgemeinerung einiger früher gewonnenen Resultate.

Da das Ergebniss des vorigen Paragraphen über das des § 10 hinausgeht, so bedürfen einige Bemerkungen der §§ 11 u. 12 einer kleinen Veränderung. Namentlich ist es nicht nöthig, neben die Forderung, dass die Gruppe ihre eigene Haupt-Untergruppe sei, noch die weitere Forderung zu stellen, dass in derselben keine ausgezeichnete Untergruppe enthalten sei; denn die letztere Forderung hat an der bezeichneten Stelle nur den Zweck, zu erreichen, dass mit dem Verschwinden von $\varphi_r(\eta) \dots \varphi_{r-k+1}(\eta)$ auch alle Unterdeterminanten

$(r-k+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, was nach dem vorigen Paragraphen schon eine Folge der ersten Forderung ist.

Andererseits haben wir in den §§ 11 und 12 betreffs der nicht verschwindenden Wurzeln einige besondere Voraussetzungen gemacht, und es dürfte nothwendig sein, unsere Untersuchung von diesen Beschränkungen zu befreien.

Wir setzen wiederum $X_r f$ als ganz allgemeine inf. Transformation voraus und suchen die nicht verschwindenden Wurzeln der Gleichung $|c_{r\iota\varkappa} - \omega\delta_{\iota\varkappa}| = 0$. Wenn ω_α eine einfache Wurzel dieser Gleichung ist, so lässt sich eine und nur eine inf. Transformation $X_\alpha f$ so bestimmen, dass $(X_r X_\alpha) = \omega_\alpha X_\alpha f$ ist. Wenn aber ω_α eine $(\lambda+1)$-fache Wurzel ist, ohne dass alle Unterdeterminanten $r - 1^{\text{ten}}$ Grades von $|c_{r\iota\varkappa} - \omega_\alpha\delta_{\iota\varkappa}|$ verschwinden, so giebt es $\lambda + 1$ inf. Transformationen $X_{\alpha_\lambda} \cdots X_{\alpha_1}, X_{\alpha_0}$, so dass ist:

$$(X_r X_{\alpha_0}) = \omega_\alpha X_{\alpha_0},\ (X_r X_{\alpha_1}) = \omega_\alpha X_{\alpha_1} + c_{r\alpha_1\alpha_0} X_{\alpha_0} \cdots$$
$$(X_r X_{\alpha_\lambda}) = \omega_\alpha X_{\alpha_\lambda} + c_{r\alpha_\lambda\alpha_{\lambda-1}} X_{\alpha_{\lambda-1}} + \cdots,$$

wo keiner der Coefficienten $c_{r\alpha_1\alpha_0}, c_{r\alpha_2\alpha_1} \cdots c_{r\alpha_\lambda\alpha_{\lambda-1}}$ verschwindet.

Um den Zusammenhang der Wurzeln mit gewissen inf. Transformationen ganz allgemein zu übersehen, wenden wir für die Determinante $|c_{r\iota\varkappa} - \delta_{\iota\varkappa}\omega|$ den Weierstrass'schen Begriff des Elementartheilers an. Wir denken uns nämlich diese Determinante in Factoren $\omega - \omega_\alpha$ zerlegt. Wenn ein Factor $\omega - \omega_\alpha$ in der Determinante s-mal, in allen Unterdeterminanten $r - 1^{\text{ten}}$ Grades mindestens s'-mal, in denen $(r-2)^{\text{ten}}$ Grades mindestens s''-mal vorkommt u. s. w., so sind $(\omega-\omega_\alpha)^{s-s'}, (\omega-\omega_\alpha)^{s'-s''} \cdots$ die Elementartheiler der Determinante. Ist nun eine der Zahlen $s^{(\varrho)} - s^{(\varrho+1)} = \lambda + 1$, so können wir dem Elementartheiler $(\omega - \omega_\alpha)^{\lambda+1}$ gerade $\lambda + 1$ inf. Transformationen $X_{\alpha_0} \cdots X_{\alpha_\lambda}$ in der Weise zuordnen, dass ist:

$$(1)\quad (X_r X_{\alpha_\lambda}) = \omega_\alpha X_{\alpha_\lambda} + X_{\alpha_{\lambda-1}},\ (X_r X_{\alpha_{\lambda-1}}) = \omega_\alpha X_{\alpha_{\lambda-1}} + X_{\alpha_{\lambda-2}} \cdots$$
$$\cdots (X_r X_{\alpha_1}) = \omega_\alpha X_{\alpha_1} + X_{\alpha_0},\qquad (X_r X_{\alpha_0}) = \omega_\alpha X_{\alpha_0}.$$

Wenn ein zweiter Elementartheiler die $\mu + 1^{\text{te}}$ Potenz desselben linearen Factors $\omega - \omega_\alpha$ ist, so gelten für $\mu + 1$ weitere inf. Transformationen die Gleichungen:

$$(1\text{a})\ (X_r \overline{X}_{\alpha_\mu}) = \omega_\alpha \overline{X}_{\alpha_\mu} + \overline{X}_{\alpha_{\mu-1}},\ (X_r \overline{X}_{\alpha_{\mu-1}}) = \omega_\alpha \overline{X}_{\alpha_{\mu-1}} + \overline{X}_{\alpha_{\mu-2}} \cdots$$

Wenn die vorstehenden Gleichungen bestehen, so sollen $X_{\alpha_0}, \overline{X}_{\alpha_0} \ldots$ als *erste zur Wurzel* ω_α *gehörige* Transformationen oder als solche erster Ordnung bezeichnet werden, ebenso $X_{\alpha_1}, \overline{X}_{\alpha_1} \ldots$ als *zweite zugehörige* $\ldots X_{\alpha_\lambda}, \overline{X}_{\alpha_\lambda} \ldots$ als $(\lambda+1)^{\text{te}}$ *zugehörige* Transformationen. Die durch die Gleichungen (1) resp. (1a) gegebene Definition kann auch durch die folgende ersetzt werden. Wenn X_{α_0}, $\overline{X}_{\alpha_0}\dots$ durch die Definition

(2) $(X_r X_{\alpha_0}) = \omega_\alpha X_{\alpha_0}$, $(X_r \overline{X}_{\alpha_0}) = \omega_\alpha \overline{X}_{\alpha_0}$, $(X_r \overline{\overline{X}}_{\alpha_0}) = \omega_\alpha \overline{\overline{X}}_{\alpha_0}\dots$

als erste zugehörige Transformationen bestimmt sind, so werden X_{α_1}, $\overline{X}_{\alpha_1}\dots$ zugehörige Transformationen zweiter Ordnung sein, wofern die Gleichungen bestehen:

$$(3)\qquad \begin{aligned}(X_r X_{\alpha_1}) &= \omega_\alpha X_{\alpha_1} + [\alpha_0, \overline{\alpha}_0, \overline{\overline{\alpha}}_0 \dots],\\ (X_r \overline{X}_{\alpha_1}) &= \omega_\alpha \overline{X}_{\alpha_1} + [\alpha_0, \overline{\alpha}_0, \overline{\overline{\alpha}}_0 \dots]\dots,\end{aligned}$$

wo keine der linearen Functionen $[\alpha_0, \overline{\alpha}_0, \overline{\overline{\alpha}}_0\dots]$ identisch verschwindet. Wie schon früher bemerkt, braucht der Coefficient von X_{α_0} im Ausdruck für $(X_r X_{\alpha_1})$ nicht gleich dem von X_{α_0} in $(X_r \overline{X}_{\alpha_1})$ zu sein.

Ebenso werden die dritten zugehörigen Transformationen X_{α_2}, $\overline{X}_{\alpha_2}\dots$ durch die Gleichungen definirt:

$$(4)\qquad \begin{aligned}(X_r X_{\alpha_2}) &= \omega_\alpha X_{\alpha_2} + [\alpha_1, \alpha_0, \overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_0 \dots],\\ (X_r \overline{X}_{\alpha_2}) &= \omega_\alpha \overline{X}_{\alpha_2} + [a_1, a_0, \overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_0, \dots]\dots,\end{aligned}$$

wo die Coefficienten von X_{α_1}, $\overline{X}_{\alpha_1}\dots$ in keinem $[\dots]$ sämmtlich verschwinden dürfen.

Dieser Weg führt zur Definition auch der zugehörigen Wurzeln höherer Ordnung.

So angemessen die Darstellung (1) ist, wofern man es nur mit einem X_r zu thun hat, wird man doch die den Gleichungen (2)—(4) entsprechende Darstellung nicht entbehren können, sobald man zu X_r eine weitere inf. Transformation hinzunimmt und hierfür eine ähnliche Darstellung sucht. Wenn alle Unterdeterminanten $(r-k+1)^{\text{ter}}$ Ordnung von $\left|\sum_\varrho \eta_\varrho c_{\varrho\iota\varkappa}\right|$ identisch verschwinden, so giebt es $k-1$ weitere Transformationen $X_{r-1}\dots X_{r-k+1}$, welche mit X_r und unter einander vertauschbar sind. Wird X_{r-1} in der k-gliedrigen Untergruppe als allgemein vorausgesetzt, so hat jeder Elementartheiler der für X_{r-1} gebildeten Determinante $|c_{(r-1)\iota\varkappa} - \omega\delta_{\iota\varkappa}|$ denselben Grad wie für X_r, und beidemal werden entsprechende Elementartheiler Potenzen gleicher linearer Ausdrücke sein. Wendet man jetzt die Jacobi'schen Identitäten $(r, r-1, \alpha_0)$, $(r, r-1, \overline{\alpha}_0)\dots(r, r-1, \alpha_1)\dots$ an und verbindet damit einfache Stetigkeitsbetrachtungen, so bleibt die Darstellung (2)—(4) im wesentlichen ungeändert, so dass ist:

$$(X_{r-1} X_{\alpha_0}) = \omega_\alpha' X_{\alpha_0},\quad (X_{r-1} X_{\alpha_1}) = \omega_\alpha' X_{\alpha_1} + [\alpha_0 \overline{\alpha}_0 \dots],$$
$$(X_{r-1} X_{\alpha_2}) = \omega_\alpha' X_{\alpha_2} + [\alpha_1\ \alpha_0\ \overline{\alpha}_1\ \overline{\alpha}_0 \dots].$$

Man kann auch wieder die Darstellung (1) benutzen, aber dann gelangt man zu einer andern Reihe $X_{\alpha_{\lambda-1}}\dots$; so ist:

$(X_{r-1}X_{\alpha_2}) = \omega_\alpha' X_{\alpha_2} + X'_{\alpha_2-1}, \quad (X_{r-1}X'_{\alpha_2-1}) = \omega_\alpha' X'_{\alpha_2-1} + X'_{\alpha_2-2}, \ldots,$
aber im Ausdruck für X'_{α_2-1} können nicht bloss die durch (1) definirten $X_{\alpha_2-1} \ldots X_{\alpha_0}$, sondern auch $\overline{X}_{\alpha_\mu} \ldots \overline{X}_{\alpha_0}$ u. s. w. vorkommen.

Sind ω_α, ω_β und $\omega_\alpha + \omega_\beta$ Wurzeln der charakteristischen Gleichung für $X_r f$, so mögen die zu $\omega_\alpha + \omega_\beta$ gehörigen inf. Transformationen die Marke $\alpha + \beta$ erhalten, und zwar entsprechend der Gleichung (2) die Marken: $(\alpha+\beta)_0$, $(\overline{\alpha+\beta})_0 \ldots$, und wenn die Gleichung (3) besteht, die Marken $(\alpha+\beta)_1$, $(\overline{\alpha+\beta})_1 \ldots$; ebenso bei Geltung der Gleichung (4): $(\alpha+\beta)_2$, $(\overline{\alpha+\beta})_2 \ldots$ u. s. w. Die Entwicklungen des § 8 lehren in diesem Falle:

$$(5)\quad \begin{cases} (X_{\alpha_0}X_{\beta_0}) = [(\alpha+\beta)_0, (\overline{\alpha+\beta})_0, (\overline{\overline{\alpha+\beta}})_0 \ldots], \\ (X_{\alpha_0}X_{\beta_1}) = [(\alpha+\beta)_1, (\overline{\alpha+\beta})_1 \ldots (\alpha+\beta)_0, (\overline{\alpha+\beta})_0 \ldots], \\ (X_{\alpha_0}X_{\beta_2}) = [(\alpha+\beta)_2, (\overline{\alpha+\beta})_2 \ldots (\alpha+\beta)_1, (\overline{\alpha+\beta})_1 \ldots \\ \qquad\qquad \ldots (\alpha+\beta)_0, (\overline{\alpha+\beta})_0 \ldots]. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Hierzu treten noch, wenn $2\omega_\alpha$ eine Wurzel ist und zu ihr die Transformationen $X_{(2\alpha)_0}$, $\overline{X}_{(2\alpha)_0} \ldots X_{(2\alpha)_1}$, $\overline{X}_{(2\alpha)_1} \ldots$ gehören, folgende Gleichungen:

$$(6)\quad \begin{cases} (X_{\alpha_0}X_{\alpha_0}) = [(2\alpha)_0, (\overline{2\alpha})_0 \cdots], \\ (X_{\alpha_0}X_{\alpha_1}) = [(2\alpha)_0, (\overline{2\alpha})_0 \cdots], \\ (X_{\alpha_0}X_{\alpha_2}) = [(2\alpha)_1, (\overline{2\alpha})_1 \cdots (2\alpha)_0, (\overline{2\alpha})_0 \cdots]. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Nach diesen Festsetzungen übersieht man unmittelbar, wie sich die am Schluss von § 11 zusammengestellten Resultate auf den allgemeinen Fall übertragen.

Jetzt seien ω_ι und $\omega_{\iota'}$ zwei entgegengesetzt gleiche Wurzeln, und zu ihnen mögen die Transformationen $X_{\iota_0}f$ und $X_{\iota_0'}f$ gehören, so dass ist: $(X_r X_{\iota_0}) = \omega_\iota X_{\iota_0} f$, $(X_r X_{\iota_0'}) = -\omega_\iota X_{\iota_0'} f$. Zugleich sei

$$(X_{\iota_0}X_{\iota_0'}) = \sum_0^{k-1} e_\iota^{(\nu)} X_{r-\nu} f,$$

wo die Coefficienten e_ι^ν nicht sämmtlich verschwinden. Dann bleiben die Entwicklungen des § 12 im wesentlichen ungeändert. Namentlich bestehen die Gleichungen:

$$(7)\qquad \sum e_\iota^{(\nu)} \omega_\alpha^{(\nu)} = \sum\nolimits^\delta (c_{\iota\alpha_0\delta}\, c_{\delta\iota'\alpha_0} - c_{\iota'\alpha_0\delta}\, c_{\delta\iota\alpha_0}),$$

$$(8) \qquad \sum^{\nu} e_\iota^{(\nu)} (2\,\omega_\alpha^{(\nu)} + a_{\alpha\iota}\,\omega_\iota^{(\nu)}) = 0,$$

wo $a_{\alpha\iota}$ eine ganze Zahl ist.

Um die Formel (8) herzuleiten, müssen wir alle diejenigen Jacobi'schen Identitäten

$$(\iota_0, \iota_0', \alpha_0),\ (\iota_0, \iota_0', \bar{\alpha}_0),\ (\iota_0, \iota_0', \bar{\bar{\alpha}}_0) \cdots \big(\iota_0, \iota_0', (\alpha+\iota)_0\big),\ \big(\iota_0, \iota_0', (\overline{\alpha+\iota})_0\big) \cdots$$

benutzen, für welche sich aus einer Wurzel ω_α durch Addition oder Subtraction von ω_ι eine neue Wurzel ergiebt. Indem wir dann an $\iota_0, \iota_0', \alpha_0 \cdots$ die Marke Null weglassen, wird das erste Glied der rechten Seite von (7) für $(\iota_0, \iota_0', \alpha_0)$:

$$c_{\iota\alpha(\alpha+\iota)}\, c_{(\alpha+\iota)\iota'\alpha} + c_{\iota\alpha(\overline{\alpha+\iota})}\, c_{(\overline{\alpha+\iota})\iota'\alpha} + \cdots$$

und entsprechend für $(\iota_0, \iota_0', \bar{\alpha}_0)$:

$$c_{\iota\bar{\alpha}(\alpha+\iota)}\, c_{(\alpha+\iota)\iota'\bar{\alpha}} + c_{\iota\bar{\alpha}(\overline{\alpha+\iota})}\, c_{(\overline{\alpha+\iota})\iota'\bar{\alpha}} + \cdots,$$

woraus dasselbe für $(\iota_0, \iota_0', \bar{\bar{\alpha}}_0)$ unmittelbar ersichtlich ist. Das zweite Glied der rechten Seite von (7) für $\big(\iota_0, \iota_0', (\alpha+\iota)_0\big)$ wird:

$$-\, c_{\iota'(\alpha+\iota)\alpha}\, c_{\alpha\iota(\alpha+\iota)} - c_{\iota'(\alpha+\iota)\bar{\alpha}}\, c_{\bar{\alpha}\iota(\alpha+\iota)}$$

und für $\big(\iota_0, \iota_0', (\overline{\alpha+\iota})_0\big)$:

$$-\, c_{\iota'(\overline{\alpha+\iota})\alpha}\, c_{\alpha\iota(\overline{\alpha+\iota})} - c_{\iota'(\overline{\alpha+\iota})\bar{\alpha}}\, c_{\bar{\alpha}\iota(\overline{\alpha+\iota})} - \cdots$$

Sobald also alle entsprechenden Gleichungen gebildet werden, hebt sich die Summe der ersten Glieder gegen die Summe der zweiten Glieder weg, so dass der in § 12 geführte Beweis keiner weiteren Veränderung bedarf.

Gehört zu einer Wurzel ω_α eine Transformation $X_{\alpha\lambda}$ als $(\lambda+1)^{\text{te}}$ in dem durch die Gleichungen (1)—(4) bezeichneten Sinne, so besteht die Gleichung:

$$\sum^{\nu} e_\iota^{(\nu)}\,\omega_\alpha^{(\nu)} = \sum^{\delta} \big(c_{\iota_0\alpha_\lambda\delta}\; c_{\delta\iota_0\alpha_\lambda} - c_{\iota_0'\alpha_\lambda\delta}\; c_{\delta\iota_0\alpha_\lambda}\big)\,.$$

Damit aber einer der Ausdrücke $(X_\delta X_{\iota_0'})$ und $(X_\delta X_{\iota_0})$ die $X_{\alpha_\lambda} f$ enthält, muss $X_\delta f$ eine $(\lambda+1)^{\text{te}}$ Transformation sein, welche zu der Wurzel $\omega_\alpha + \omega_\iota$ resp. $\omega_\alpha - \omega_\iota$ gehört. Demnach muss für zusammengehörige Wurzeln auch der Grad der Zugehörigkeit von Transformationen auf dieselbe Zahl steigen.

Wie im vorigen Theile sollen auch im vorliegenden nur solche Gruppen untersucht werden, für welche $p = r$ ist. Wenn dann $X_r f$ eine ganz allgemeine Transformation ist und wenn mit ihr die $k-1$ Transformationen $X_{r-1} f \cdots X_{r-k+1} f$ vertauschbar sind, so sollen auch die übrigen $r-k$ inf. Transformationen, welche die Gruppe bestimmen, so gewählt werden, dass sie zu den $r-k$ nicht verschwindenden Wurzeln der charakteristischen Gleichung für $X_r f$ gehören. Damit nun $p = r$ wird, müssen mindestens k Paare der letzten $r - k$ Transformationen, durch die bekannte Operation $(X_\iota X_\varkappa)$ zusammengesetzt, zu Ausdrücken führen, welche $X_r \cdots X_{r-k+1}$ enthalten. Es liegt jetzt zunächst die Annahme nahe, dass alle diese als *erste* Transformationen zu den betreffenden Wurzeln gehören, dass also k Tripel von Gleichungen bestehen:

$$(9) \qquad (X_r X_{\iota_0}) = \omega_\iota X_{\iota_0} f, \quad (X_r X_{\iota_0'}) = -\omega_\iota X_{\iota_0'} f,$$
$$(X_{\iota_0} X_{\iota_0'}) = \sum e_{\iota_0}^{(\nu)} X_{r-\nu} f.$$

Damit sollen zwei weitere Voraussetzungen verbunden werden, nämlich

1) dass $\sum e_\iota^{(\nu)} \omega_\iota^{(\nu)} \neq 0$,

und 2) dass die Determinante $|\omega_\iota^{(\nu)}|$, wenn ι die k den Gleichungen (9) entsprechenden Werthe und ν die Werthe $0, 1 \ldots k - 1$ annimmt, nicht verschwindet.

Wir wissen, dass der Rang l der Gruppe höchstens gleich k ist; bei den hier gemachten Annahmen erreicht l diesen Werth, wie sogleich gezeigt werden soll. Dagegen wird eine spätere Untersuchung lehren, dass nur die gemachten Voraussetzungen $k = l$ sein lassen, so dass bei jeder anderen Annahme alle Unterdeterminanten $(r - l)^{\text{ten}}$ Grades von $\left| \sum_\varrho \eta_\varrho c_{\varrho \iota \varkappa} \right|$ identisch verschwinden. Indem wir dies Resultat hier bereits als richtig voraussetzen, können wir die Bedingungen, denen die zunächst zu untersuchenden Gruppen genügen sollen, in folgender Weise aussprechen:

1) *die Gruppe soll ihre eigene Hauptuntergruppe sein*,

2) *wenn der Rang der Gruppe gleich l ist, so soll der Coefficient $\psi_{r-l}(\eta)$ von ω^l in der charakteristischen Gleichung nicht identisch verschwinden.*

Hier möge darauf aufmerksam gemacht werden, dass jedes ω_ι, wie es den Gleichungen (9) entspricht, eine einfache Wurzel ist. Denn gehört zu ω_ι noch eine weitere inf. Transformation $\overline{X}_\iota f$ als erste, so würden die Gleichungen (7) und (8) die Folgerung nach sich ziehen, dass mehr als l Wurzeln gleich Null sind. Gehörte aber $X_{\iota_1} f$ als Transformation zweiter Ordnung zu ω_ι, so müsste $c_{r \iota_1 \iota_0} \neq 0$ sein, was mit der Relation (r, ι_1, ι_0') oder der Gleichung

$$c_{r \iota_1 \iota_0} (X_{\iota_0} X_{\iota_0'}) = 0$$

nicht vereinbar ist.

Nun ist durch die vorangehenden Entwicklungen bereits der Weg vollständig angegeben, welcher die Uebertragung des Schlussresultates von § 12 auf diesen allgemeineren Fall liefert. Es genüge also, das Resultat hinzuschreiben.

Unter den beiden angegebenen Bedingungen lassen sich alle $r-l$ nicht verschwindenden Wurzeln der für ein allgemeines System (η) genommenen charakteristischen Gleichung durch l unter ihnen homogen linear darstellen; die Coefficienten sind rationale Zahlen und von der Wahl der $\eta_1 \dots \eta_r$ ganz unabhängig.

Jedes ω_ι, für welches die drei Gleichungen (9) bestehen, ist eine einfache Wurzel. Ist ω_α irgend eine andere Wurzel und gehören zu ihr in Folge des durch die Gleichung (8) definirten Coefficienten $a_{\alpha\iota}$ weitere Wurzeln $\omega_\iota + \mathfrak{a}\omega_\alpha$ hinzu, so steigt die Ordnung, in welcher zu jeder von ihnen in dem durch die Gleichungen (1)—(4) definirten Sinne inf. Transformationen gehören, für alle diese auf dieselbe Zahl.

§ 21.

Die einfachen und die halbeinfachen Gruppen.

Indem wir l Marken $\iota, \varkappa \dots$, für welche die Gleichungen (9) des vorigen Paragraphen bestehen, mit $1 \dots l$ bezeichnen, erhalten wir vermittelst der Gleichung (8) § 20 l^2 ganzzahlige Coefficienten $a_{\iota\varkappa}$ für $\iota, \varkappa = 1 \cdots l$, wo $a_{\iota\iota} = -2$ ist. Diese Systeme sind in den §§ 13—15 vollständig untersucht, so dass es möglich ist, bei gegebenem l alle endlichen Systeme unmittelbar hinzuschreiben.

Jedes von Null verschiedene $a_{\iota\varkappa}$ verlangt, dass ausser den Wurzeln ω_ι und $\omega_\varkappa$ noch mindestens eine weitere Wurzel vorkommt, und die nächstliegende Annahme besteht darin, dass ausser den $2l$ Wurzeln $\omega_1, -\omega_1, \omega_2, -\omega_2, \dots \omega_l, -\omega_l$ nur diejenigen vorkommen sollen, welche durch die $a_{\iota\varkappa}$ gefordert sind. Dann sind alle nicht verschwindenden Wurzeln ungleich, und wir können daher die Untermarke Null an jedem ι_0 weglassen.

Zunächst soll das System der Coefficienten $a_{\iota\varkappa}$ selbst einfach sein. Dann ist, wie bereits in § 16 hervorgehoben wurde, die Gruppe selbst einfach, d. h. sie besitzt keine invariante Untergruppe. Es ist vielleicht gut, nochmals auf den Beweis einzugehen und einen Punkt näher zu erläutern. Zunächst ersieht man unmittelbar, dass die Transformation $\eta_r X_r + \eta_{r-1} X_{r-1} + \cdots + \eta_{r-l+1} X_{r-l+1}$ keiner invarianten Untergruppe angehören kann. Ebenso ist sofort klar, dass wenn $\sum_1^r {}_\varrho\, \eta_\varrho X_\varrho f$ einer invarianten Untergruppe angehört, derselben auch eine Transformation $\sum_1^{r-l} {}_\varrho\, \eta'_\varrho X_\varrho f$ angehören muss, wo die Summation sich nur auf die Zahlen $1 \cdots r-l$ erstreckt. Kommt aber die Transformation $\eta_\alpha X_\alpha + \eta_\beta X_\beta + \cdots + \eta_\varepsilon X_\varepsilon$ vor, wo $\alpha, \beta, \dots \varepsilon$ m Nummern aus der Reihe $1 \cdots r-l$ sind, so muss dieselbe invariante Untergruppe auch die Transformation

$(X_r, \eta_\alpha X_\alpha + \eta_\beta X_\beta + \cdots + \eta_\nu X_\nu) = (\eta_\alpha \omega_\alpha X_\alpha + \eta_\beta \omega_\beta X_\beta + \cdots + \eta_\nu \omega_\nu X_\nu) f$ enthalten. Eine Gruppe aber, welche sowohl $\eta_\alpha X_\alpha + \eta_\beta X_\beta + \cdots + \eta_\nu X_\nu$ als $\eta_\alpha \omega_\alpha X_\alpha + \eta_\beta \omega_\beta X_\beta + \cdots + \eta_\nu \omega_\nu X_\nu$ enthält, hat nothwendig auch (wegen der Ungleichheit von $\omega_\alpha, \omega_\beta \cdots$) eine Transformation

$$\eta_\beta' X_\beta + \cdots + \eta_\nu' X_\nu .$$

Man kann daher die Zahl m immer kleiner werden lassen. Somit müsste jede etwa vorkommende invariante Untergruppe eine inf. Transformation $X_i f$ enthalten, was wegen der Einfachheit des Systems der $a_{\iota\varkappa}$ nicht möglich ist.

An zweiter Stelle soll das System $a_{\iota\varkappa}$ zusammengesetzt sein und es sollen nur die durch das System geforderten Wurzeln vorkommen, so dass auch eine andere Wahl der l ersten Wurzeln kein einfaches System liefert. Indem wir die Marken passend ordnen, soll das System $a_{\iota\varkappa}$ für $\iota, \varkappa = 1 \cdots l_1$ einfach sein; ebenso je das System der $a_{\iota\varkappa}$ für $(l_1+1, l_1+2 \cdots l_2), (l_2+1, l_2+2 \cdots l_3) \cdots (l_\nu+1, l_\nu+2 \cdots l)$. Dabei ist der Fall nicht auszuschliessen, dass z. B. $l_1 = 1$ oder $l_2 = l_1 + 1$ ist. Zu den Wurzeln $\omega_1 \cdots \omega_{l_1}$ nehmen wir die entgegengesetzt gleichen nebst allen denjenigen hinzu, welche durch das einfache System der $a_{\iota\varkappa}$ für $\iota, \varkappa = 1, \cdots l_1$ gefordert werden. Die Ausdrücke $(X_1 X_{1'})$, $(X_2 X_{2'}) \cdots (X_\iota X_{\iota'})$ werden dargestellt durch l_1 von einander unabhängige lineare Functionen von $X_r f \cdots X_{r-l+1} f$. Die Jacobi'sche Identität $\big(\iota, \varkappa, (\iota+\varkappa)'\big)$, nämlich die Gleichung:

$$c_{\iota\varkappa(\iota+\varkappa)} X_{(\iota+\varkappa)} X_{(\iota+\varkappa)'}) + c_{\varkappa(\iota+\varkappa)'\iota'} (X_{\iota'} X_\iota) + c_{(\iota+\varkappa)'\iota\varkappa'} (X_{\varkappa'} X_\varkappa) = 0$$

lehrt, dass wenn mit $\omega_\iota, \omega_\varkappa$ auch $\omega_\iota + \omega_\varkappa$ eine Wurzel ist, der Ausdruck für $(X_{(\iota+\varkappa)} X_{(\iota+\varkappa)'})$ sich linear homogen durch $(X_\iota X_{\iota'})$ und $(X_\varkappa X_{\varkappa'})$ darstellt. Wenn daher irgend eine Wurzel ω_α sich vermittelst $\omega_1 \cdots \omega_{l_1}$ linear darstellen lässt und eine Folge des zwischen diesen bestehenden Constantensystems ist, so ist auch $(X_\alpha X_{\alpha'})$ nothwendig von Null verschieden und eine homogene lineare Function von

$$(X_1 X_{1'}), (X_2 X_{2'}) \ldots (X_{l_1} X_{l_1'}).$$

Die l_1 Ausdrücke $\sum e_i^{(\nu)} X_{r-\nu} f$ für $i = 1 \cdots l_1$ bestimmen also mit $X_1 \cdots X_{l_1}, X_{1'} \cdots X_{l_1'}$ und den weiteren hierdurch geforderten $X_\alpha f$ eine einfache Gruppe des Ranges l_1, welche eine Untergruppe der gegebenen Gruppe ist.

Ebenso bestimmen die $l_2 - l_1$ Ausdrücke für

$$(X_{l_1+1} X_{(l_1+1)'}) \cdots (X_{l_2} X_{l_2'}) \quad \text{nebst} \quad X_{l_1+1} \cdots X_{l_2}, X_{(l_1+1)'} \cdots X_{l_2'},$$

und denjenigen inf. Transformationen, welche zu den durch die $\omega_{l_1+1} \cdots \omega_{l_2}$ nach dem Systeme der $a_{\iota\varkappa}$ für $\iota, \varkappa = l_1 + 1 \cdots l_2$ geforderten weiteren Wurzeln gehören, eine einfache Gruppe des Ranges $l_2 - l_1$ u. s. w.

Wenn nun ω_α zu den Wurzeln $\omega_1 \cdots \omega_{l_1}$ oder zu den durch sie geforderten Wurzeln gehört, und ω_β entsprechend durch $\omega_{l_1+1} \cdots \omega_{l_2}$ darstellbar ist, so ist offenbar $(X_\alpha X_\beta) = 0$. Zugleich ist auch

$$\left(\sum e_\alpha^{(\nu)} X_{r-\nu},\ X_\beta\right) = 0,$$

da

$$\sum e_\alpha^{(\nu)} \omega_\beta^{(\nu)} = 0$$

ist. Demnach ist jede Transformation der ersten Gruppe mit jeder der zweiten vertauschbar. Dasselbe gilt umgekehrt, sowie überhaupt von je zwei Transformationen der bezeichneten Untergruppen. Somit ist jede eine invariante Untergruppe, und zwar eine solche, deren Transformationen nicht mit einander vertauschbar sind, sondern geradezu eine einfache Gruppe bilden.

Die Zusammensetzung der vorliegenden Gruppe können wir also in folgender Weise charakterisiren: wir stellen mehrere einfache Gruppen, welche ausser der identischen keine Transformation gemeinschaftlich haben, neben einander, und setzen fest, dass je zwei Transformationen aus verschiedenen Gruppen mit einander vertauschbar sein sollen. Eine jede auf diese Weise gebildete Gruppe hat manche Eigenschaften mit den einfachen Gruppen gemeinschaftlich. Solange ein besserer Name fehlt, möge es gestattet sein, eine solche als eine *halbeinfache* zu bezeichnen. Wir stellen folgende Definitionen zusammen:

Sind G_ϱ und G_σ zwei Gruppen und ist jede Transformation von G_ϱ mit jeder von G_σ vertauschbar, so heissen die beiden Gruppen selbst mit einander vertauschbar.

Wir sagen von einer Gruppe, dass sie in die Gruppen $G_1, G_2 \cdots G_m$ zerfällt, wenn

1) *jede Transformation der Gruppe einer und (mit Ausschluss der identischen Transformation) nur einer der Gruppen $G_1 \cdots G_m$ angehört, und*

2) *je zwei der Gruppen $G_1, G_2 \cdots G_m$ mit einander vertauschbar sind.*

In diesem Falle werden wir zuweilen auch den Ausdruck gebrauchen, die Hauptgruppe sei durch *Nebeneinanderstellung* der Untergruppen gebildet.

Eine Gruppe heisst halbeinfach, wenn sie in lauter einfache Gruppen zerfällt.

Eine halbeinfache Gruppe ist die Gruppe der starren Bewegungen eines dreidimensionalen Riemann'schen Raumes, oder was für die

Zusammensetzung keinen Unterschied macht, die Gruppe der allgemeinen Transformationen einer Ebene, welche Kreise in Kreise verwandeln. Dieser Charakter tritt am deutlichsten bei der Darstellung hervor, welche Herr Lie von derselben gegeben hat;*) dann sieht man, dass die Gruppe in zwei Kegelschnittsgruppen zerfällt. Ganz entsprechend lasse man $X_1 f \cdots X_8 f$ nach Art der allgemeinen projectiven Gruppe der zweidimensionalen Ebene, und lasse $X_9 f$, $X_{10} f$, $X_{11} f$ eine Kegelschnittsgruppe bestimmen, deren Transformationen mit denen der ersten vertauschbar sind.

Es möge darauf aufmerksam gemacht werden, dass man die Eigenschaft einer Gruppe, zu zerfallen, nicht bei jeder Darstellung derselben unmittelbar übersieht. So kann man die so eben angeführte sechsgliedrige Gruppe auch in folgender Weise darstellen. Man wähle für $\iota, \varkappa = 1 \cdots 4$ sechs inf. Transformationen $X_{\iota\varkappa} f$, indem man festsetzt, dass $X_{\iota\varkappa} + X_{\varkappa\iota} = 0$, $(X_{\iota\varkappa}, X_{\iota\lambda}) = X_{\varkappa\lambda} f$, $(X_{\iota\varkappa}, X_{\lambda\mu}) = 0$ sein soll. Hier scheint die Gruppe gleichgebildet mit einfachen Gruppen; denn wenn die Zahl der Marken gleich 3 oder grösser als 4 angenommen wird, gelangt man bei dieser Bildung immer auf einfache Gruppen. Die Zerfällbarkeit tritt zu Tage, wenn man

$$X_{12} + X_{34} = Y_1 \cdots, \quad X_{12} - X_{34} = Y_4 \cdots$$

setzt.

Das Ergebniss der vorangehenden Untersuchung lässt sich in folgender Weise zusammenfassen:

Wenn für eine Gruppe vom Range l die charakteristische Gleichung im allgemeinen l verschwindende und $r - l$ nicht verschwindende Wurzeln besitzt, und wenn dann die sämmtlichen nicht verschwindenden Wurzeln sich ergeben als eine Folge des zwischen l Wurzeln bestehenden Systems von Coefficienten $a_{\iota\varkappa}$, so ist die Gruppe entweder einfach oder halbeinfach; ersteres, wenn das System der $a_{\iota\varkappa}$ selbst einfach, letzteres, wenn dasselbe zusammengesetzt ist.

Was die charakteristische Gleichung anbetrifft, so versteht es sich von selbst, dass, wenigstens für $p = r$, zu einer irreducibeln Gleichung nothwendig eine einfache Gruppe gehört; dagegen ist die charakteristische Gleichung nicht für jede einfache Gruppe irreducibel. Zerfällt aber die Gleichung für eine einfache Gruppe, so sind die Coefficienten von ω in dem einen Factor durch die des andern Factors darstellbar. Für eine halbeinfache Gruppe zerfällt die charakteristische Gleichung nothwendig, und die Zahl der von einander unabhängigen Factoren ist gleich der Zahl der in der Gruppe enthaltenen einfachen invarianten Untergruppen.

---

*) Diese Annalen Bd. XVI, S. 624, drittletzte Gruppe unter C).

§ 22.

Bestimmung aller Gruppen, welche den beiden aufgestellten Bedingungen genügen.

Die charakteristische Gleichung muss für eine Gruppe vom Range l, welche ihre eigene Hauptuntergruppe ist, unter Zugrundelegung einer allgemeinen Transformation, mindestens $2l$ nicht verschwindende Wurzeln haben; zudem müssen alle diejenigen Wurzeln vorkommen, welche durch das System der $a_{\iota\varkappa}$ gefordert sind. Alle diese Wurzeln sollen als die *Hauptwurzeln* der Gleichung bezeichnet werden. Jede weitere Wurzel ist nicht mehr willkürlich, sondern durch ein System von l ganzen Zahlen in der Weise bestimmt, welche am Ende von § 12 angegeben ist. Sobald aber irgend eine weitere Wurzel angenommen ist, müssen noch weitere Wurzeln vorkommen. Sollten zwei solche Wurzeln entgegengesetzt gleich sein und gehörten zu diesen als erste Transformationen die $X_\alpha f$ und $X_{\alpha'} f$, so muss nothwendig $(X_\alpha X_{\alpha'}) = 0$ sein. Denn entweder wird dies durch die Jacobi'schen Relationen gefordert, oder man kann die Wurzeln $\omega_1 \cdots \omega_l$ und die zwischen ihnen bestehenden Coefficienten $a_{\iota\varkappa}$ so wählen, dass auch die neue Wurzel zu den Hauptwurzeln gehört. Alle weiteren Wurzeln der charakteristischen Gleichung sollen als *Nebenwurzeln* bezeichnet werden. Es wird sich zeigen, dass keine Nebenwurzel einer Hauptwurzel gleich werden darf, wenn die Gruppe den beiden am Schluss von § 20 aufgestellten Bedingungen genügen soll. Ebenso gestatten diese Bedingungen nicht, dass die Summe zweier Nebenwurzeln einer dritten Nebenwurzel gleich werde.

Die Frage nach der Zusammengehörigkeit der Nebenwurzeln soll uns an einer spätern Stelle genauer beschäftigen. Hier erinnern wir nur an eines: für jede Wurzel ω_α müssen ganze Zahlen $a_{\alpha 1}, a_{\alpha 2} \cdots a_{\alpha l}$ existiren, so dass die Gleichung (8) § 20 erfüllt ist; und dann müssen auch $\omega_\alpha + a_{\alpha 1}\omega_1$, $\omega_\alpha + a_{\alpha 2}\omega_2 \cdots$ neue Wurzeln sein, und wenn hier $a_{\alpha\iota}$ von Null und Eins verschieden ist, so muss für ein zwischen Null und $a_{\alpha\iota}$ gelegenes $\mathfrak{a}$ auch $\omega_\alpha + \mathfrak{a}\,\omega_\iota$ eine Wurzel sein. So sahen wir in § 8, dass wenn für eine Gruppe vom Range Eins die Hauptwurzeln ± 2 sind, eine Nebenwurzel für ein ganzes positives m gleich $2m+1$ gewählt werden kann; dann müssen auch $2m-1$, $2m-3 \cdots 3, 1$ und die entgegengesetzt gleichen Zahlen Wurzeln sein.

Zuvörderst machen wir die Voraussetzung, dass das die Hauptwurzeln bestimmende System der $a_{\iota\varkappa}$ einfach ist und dass auch alle Nebenwurzeln einfach sind und durch eine einzige bestimmt werden. Wir bezeichnen die Hauptwurzeln mit ω_ι, $\omega_\varkappa \cdots$, die Nebenwurzeln mit ω_α, ω_β, $\omega_\gamma \cdots$ und durch entsprechende Marken die zugehörigen inf. Transformationen. Gehen wir von einer beliebig gewählten ω_a aus und bilden die Summe $\omega_a + \omega_\iota$, indem wir ω_ι der Reihe nach gleich allen Hauptwurzeln setzen, so müssen wir mindestens zu einer weiteren Nebenwurzel ω_β gelangen (ohne aber zu einer Wurzel ω_κ gelangen zu können). Zu jedem so erlangten ω_β addiren wir alle Hauptwurzeln und behalten nur diejenigen Summen, welche Wurzeln der charakteristischen Gleichung sind. Indem wir so fortfahren, gelangen wir zu allen Nebenwurzeln. Zugleich lehrt die Gleichung (7) § 20, dass, wenn $\omega_\alpha + \omega_\iota = \omega_\beta$ ist, $(X_\alpha X_\iota)$ nicht verschwinden kann. Bringt man also ein beliebiges $X_\alpha f$ mit allen $X_\iota f$ durch die Operation $(X_\alpha X_\iota)$ zusammen und fährt damit betreffs der erlangten X_β u. s. w. fort, so gelangt man zu allen einer Nebenwurzel zugeordneten inf. Transformationen.

Ferner ist jedes $(X_\alpha X_\beta) = 0$. Denn zunächst kann $\omega_\alpha + \omega_\beta$ nicht gleich ω_γ sein. Ist aber $\omega_\alpha + \omega_\beta = 0$, so kann $(X_\alpha X_\beta)$ nicht durch $X_r f \cdots X_{r-l+1} f$ dargestellt werden, weil sonst ω_α zu den Hauptwurzeln gehören würde. Wenn aber $\omega_\alpha + \omega_\beta = \omega_\iota$ ist, so müsste $(X_\alpha X_\beta) = c_{\alpha\beta\iota} X_\iota f$ sein; hier verlangt aber die Jacobi'sche Identität für $(\alpha\beta\iota')$, dass $c_{\alpha\beta\iota} = 0$ ist.

Somit bilden die zu den Nebenwurzeln gehörigen inf. Transformationen $X_\alpha f$, $X_\beta f$, $X_\gamma f \cdots$ eine invariante Untergruppe, deren Transformationen mit einander vertauschbar sind. Zugleich ist dies die einzige invariante Untergruppe, welche in der Gruppe vorkommt. Denn wie im vorangehenden Paragraphen zeigen wir, dass jede invariante Untergruppe eine einzige der inf. Transformationen $X_1 f \cdots X_{r-l} f$ enthalten muss. Diese zerfallen aber in die $X_\iota f$ und die $X_\alpha f$. Durch Verbindung einer beliebigen $X_\iota f$ mit allen Transformationen der Gruppe gelangt man aber allmählich zu allen Transformationen, so dass eine solche keiner invarianten Untergruppe angehört; dagegen bilden die sämmtlichen $X_\iota f$ mit $X_r f \cdots X_{r-l+1} f$ eine einfache Gruppe desselben Ranges.

Um jetzt eine weitere Möglichkeit zu übersehen, setzen wir wiederum das System $a_{\iota\kappa}$ als einfach voraus, nehmen aber ausser den Hauptwurzeln noch zwei verschiedene Nebenwurzeln an, mit deren jeder weitere Wurzeln nothwendig verbunden sind. Zunächst können nicht nur die gegebenen Wurzeln, sondern auch alle damit verbundenen ungleich sein. (Um ein Beispiel anzuführen, mögen für $l = 2$ die $\pm\omega_1$, $\pm\omega_2$, $\pm(\omega_1 - \omega_2)$ Hauptwurzeln sein; damit kann man einmal $-\frac{1}{3}(\omega_1 + \omega_2)$, $\frac{1}{3}(2\omega_1 - \omega_2)$, $\frac{1}{3}(-\omega_1 + 2\omega_2)$, und ferner $\frac{1}{3}(\omega_1 + \omega_2)$, $-\frac{1}{3}(2\omega_1 - \omega_2)$, $-\frac{1}{3}(-\omega_1 + 2\omega_2)$ als Nebenwurzeln verbinden). Wir unterscheiden die Wurzeln dadurch, dass wir der einen Reihe die Marken $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$, der andern die Marken $\beta, \beta_1, \beta_2 \cdots$

geben; ebenso sollen die zugehörigen inf. Transformationen bezeichnet werden. Dann ist jede Transformation X_α, X_{α_1}, $X_{\alpha_2}\cdots$ mit jeder Transformation X_β, X_{β_1}, $X_{\beta_2}\cdots$ vertauschbar. Denn sollte die Summe $\omega_\alpha+\omega_\beta$ entweder Null oder eine neue Wurzel ω_ι ergeben, welche in diesem Falle zu den Hauptwurzeln gehören müsste, so würde, wie bereits nachgewiesen, im ersten Falle $c_{\alpha\beta r}$, $c_{\alpha\beta(r-1)}\cdots$, im letzten $c_{\alpha\beta\iota}$ gleich Null sein. Somit bilden sowohl die X_α, X_{α_1}, $X_{\alpha_2}\ldots$, wie die X_β, X_{β_1}, $X_{\beta_2}\ldots$ je eine invariante Untergruppe. Es ist selbstverständlich, dass auch die Gesammtheit beider eine invariante Untergruppe bildet; aber eine weitere existirt nicht, wie man im Anschluss an die im vorigen Paragraphen durchgeführte Betrachtung ersieht.

Ferner kann die zweite Wurzel durch die erste mitbestimmt sein, ohne dass dies auch umgekehrt gilt. Soll dann nicht der schon betrachtete Fall eintreten, dass alle Nebenwurzeln durch eine einzige bestimmt sind, so haben wir vorauszusetzen, dass alle mit der zweiten verbundene Wurzeln Doppelwurzeln sind. Zum Beispiel seien für $l=1$, $r=13$ die Hauptwurzeln ± 2, daneben sollen $+5$ und -5 einfache, $+3$, $+1$, -1, -3 je doppelte Wurzeln sein; für $l=2$, $r=17$ seien $\pm\omega_1$, $\pm\omega_2$, $\pm(\omega_1-\omega_2)$ die Hauptwurzeln,

$$\frac{2}{3}(\omega_1+\omega_2),\quad \frac{2}{3}(-2\omega_1+\omega_2),\quad \frac{2}{3}(\omega_1-2\omega_2)$$

seien einfache,

$$-\frac{1}{3}(\omega_1+\omega_2),\quad \frac{1}{3}(2\omega_1-\omega_2),\quad \frac{1}{3}(-\omega_1+2\omega_2)$$

seien Doppelwurzeln. Wir bezeichnen die einfachen Wurzeln mit ω_α, ω_β, $\omega_\gamma\ldots$, die Doppelwurzeln mit $\overline{\omega}_\varepsilon,\ldots$ Für jedes $\overline{\omega}_\varepsilon$ müssen dann die Unterdeterminanten $r-1^{\text{ten}}$ Grades von $|c_{\varrho\iota\varkappa}-\delta_{\iota\varkappa}\overline{\omega}|$ verschwinden. Somit wird durch die Gleichung $(X_r X_\alpha)=\omega_\alpha X_\alpha f$ das $X_\alpha f$ eindeutig bestimmt, aber es besteht für unbestimmte η_ε und $\overline{\eta}_\varepsilon$ die Gleichung $(X_r,\eta_\varepsilon X_\varepsilon+\overline{\eta}_\varepsilon X_\varepsilon)=\overline{\omega}_\varepsilon(\eta_\varepsilon X_\varepsilon+\overline{\eta}_\varepsilon X_\varepsilon)f$.

Um nun X_ε und $\overline{X}_\varepsilon$ passend zu wählen, nehmen wir ω_α als eine solche einfache Wurzel an, für welche man durch Addition von ω_ι zu einer Doppelwurzel gelangt; durch weitere Addition von ω_ι gelange man zunächst ebenfalls zu Doppelwurzeln $\omega_\alpha+2\omega_\iota\cdots\omega_\alpha+\mathfrak{a}\omega_\iota$; dann muss $\omega_\alpha+(\mathfrak{a}+1)\omega_\iota$ wiederum eine einfache Wurzel sein. Dann setze man $(X_\alpha X_\iota)$ bis auf einen constanten Factor gleich $X_{(\alpha+\iota)}f$, ebenso $(X_\iota X_{(\alpha+\iota)}=c_{\iota(\alpha+\iota)(\alpha+2\iota)}X_{(\alpha+2\iota)}f$ u. s. w. Dann lehrt die Jacobi'sche Identität für $(\iota,\iota'\,\alpha+\iota)$, dass $c_{\iota(\alpha+\iota)(\alpha+2\iota)}\,c_{(\alpha+2\iota)\iota'\overline{(\alpha+\iota)}}=0$ ist; entsprechendes gilt für $(\iota,\iota',\alpha+2\iota)\cdots$. Man kann also den sämmtlichen Doppelwurzeln $\overline{\omega}_\varepsilon$ je eine Transformation $X_\varepsilon f$ so zuordnen, dass die Zusammenstellung mit ganz bestimmten $X_\iota f$ und $X_{\iota'}f$ in der gewählten Reihe bleibt, zu welcher die sämmtlichen $X_\alpha f$ gehören.

Kann man aber zu $\overline{\omega}_\epsilon$ einmal durch Addition einer Hauptwurzel ω_ι zu ω_α und dann durch Addition einer andern Hauptwurzel $\omega_\varkappa$ zu ω_β gelangen, ist also $\omega_\iota + \omega_\alpha = \overline{\omega}_\epsilon$ und $\omega_\varkappa + \omega_\beta = \overline{\omega}_\epsilon$, so zeigt die Jacobi'sche Identität für $(\varkappa, \beta, \iota')$ und $(\iota, \alpha, \varkappa')$, dass man beidemal zu derselben Transformation $X_\epsilon f$ gelangt.

Um jetzt die zweiten Transformationen, welche zu den $\overline{\omega}_\epsilon \cdots$ gehören, passend zu bestimmen, setzen wir fest, dass sein soll

$$(X_\iota, \overline{X}_{\alpha+\alpha\iota}) = 0, \quad (X_\iota, \overline{X}_{\alpha+(\alpha-1)\iota}) = \overline{X}_{\alpha+\alpha\iota} f \cdots.$$

Dieselben Jacobi'schen Identitäten, welche soeben durchgeführt wurden, lassen sich dann wiederum anwenden, und zeigen, dass auch die $\overline{X}_\epsilon f$ eine invariante Untergruppe bestimmen. In dem betrachteten Falle gehören also der Gruppe zwei invariante Untergruppen an.

Wir betrachten jetzt den Fall, dass sämmtliche Nebenwurzeln Doppelwurzeln sind, und zwar untersuchen wir die Gruppe zunächst unter der Bedingung, dass für eine Wurzel ω_α (und damit für jede) alle Unterdeterminanten $r - 1^{\text{ten}}$ Grades von $|c_{r\iota\varkappa} - \delta_{\iota\varkappa}\omega_\alpha|$ verschwinden. Dann gehören zu jeder Wurzel ω_α zwei Transformationen $X_\alpha f$ und $\overline{X}_\alpha f$, so dass ist:

$$(X_r X_\alpha) = \omega_\alpha X_\alpha f, \quad (X_r \overline{X}_\alpha) = \omega_\alpha \overline{X}_\alpha f.$$

Nimmt man hier $X_\alpha f$ willkürlich, so kann man für $\omega_\alpha + \omega_\iota = \omega_\beta$ das $X_\beta f$ dadurch bestimmen, dass $(X_\iota X_\alpha)$ nur durch $X_\beta f$ dargestellt wird. Ebenso wähle man $\overline{X}_\alpha f$ willkürlich und leite hieraus die $\overline{X}_\beta f$ in derselben Weise her, wie $X_\beta f$ sich aus $X_\alpha f$ ergab. Man hat also wieder dieselbe Betrachtung anzustellen wie vorher und gelangt zu dem Satze, dass sowohl die $X_\alpha f, X_\beta f \cdots$ wie die $\overline{X}_\alpha f, \overline{X}_\beta f \cdots$ eine invariante Untergruppe bestimmen. Nun ergeben sich die $c_{\alpha\iota(\alpha+\iota)}$ und $c_{\overline{\alpha}\iota(\overline{\alpha+\iota})}$ je aus denselben Gleichungen.

Man kann also die Coefficienten in beiden Fällen gleich wählen, und somit bilden auch $\eta X_\alpha + \overline{\eta} \overline{X}_\alpha$, $\eta X_\beta + \overline{\eta} \overline{X}_\beta \cdots$ eine invariante Untergruppe. Die Gruppe hat also eine einfach unendliche Schaar von invarianten Untergruppen.

Wir wollen jetzt nachweisen, dass alle überhaupt möglichen Fälle auf einen der aufgezählten hinauskommen, dass also Elementartheiler höherer Ordnung nicht vorkommen können. Angenommen, die charakteristische Gleichung besitze einen Elementartheiler $\lambda + 1^{\text{ter}}$ Ordnung und zu ω_α gehören die inf. Transformationen $X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1} \cdots X_{\alpha_\lambda}$ in der durch die Gleichungen

$$(1) \qquad (X_r X_{\alpha_\lambda}) = \omega_\alpha X_{\alpha_\lambda} + c_{r\alpha_\lambda\alpha_{\lambda-1}} X_{\alpha_{\lambda-1}} + \cdots,$$
$$\cdots (X_r X_{\alpha_1}) = \omega_\alpha X_{\alpha_1} + c_{r\alpha_1\alpha_0} X_{\alpha_0}, \; (X_r X_{\alpha_0}) = \omega_\alpha X_{\alpha_0}$$

bestimmten Weise, so ist bereits in § 8 (B. 31, S. 282) bewiesen, dass alle Wurzeln ω_β, welche mit ω_α nothwendig verbunden sind, auch zu gleich hohen Elementartheilern gehören. Ist nun ω_ι irgend eine Hauptwurzel, so muss, wofern weder $\omega_\alpha + \omega_\iota$ noch $\omega_\alpha - \omega_\iota$ eine Wurzel ist, sein:

$$\sum c_{\iota\iota'(r-\nu)} (X_{r-\nu}\, X_{\alpha_\lambda}) = 0,$$

also speciell

$$\sum c_{\iota\iota'(r-\nu)}\, c_{(r-\nu)\alpha_\lambda \alpha_{\lambda-1}} = 0.$$

Wenn aber diese Bedingung nicht erfüllt ist, so bilden wir alle diejenigen Wurzeln, welche aus ω_α durch wiederholte Addition und Subtraction von ω_ι erhalten werden. Betrachten wir etwa diejenige ω_α, für welche $\omega_\alpha + \omega_\iota$ keine Wurzel ist, wohl aber $\omega_\alpha - \omega_\iota$. Indem wir die $X_{\alpha_{\mu-1}}$ mit passenden Factoren multipliciren, können wir bewirken, dass ist:

$$(2) \qquad c_{\iota'\alpha_\lambda(\alpha-\iota)_\lambda} = c_{\iota'\alpha_{\lambda-1}(\alpha-\iota)_{\lambda-1}}, \quad c_{\iota(\alpha-\iota)_\lambda \alpha_\lambda} = c_{\iota(\alpha-\iota)_{\lambda-1}\alpha_{\lambda-1}} \quad \text{u. s. w.}$$

Aus der Jacobi'schen Identität für (r, ι', α_μ) folgt:

$$(3) \qquad c_{r(\alpha-\iota)_\mu(\alpha-\iota)_{\mu-1}} = c_{r\alpha_\mu\alpha_{\mu-1}},$$

und der Coefficient von $X_{\alpha_{\mu-1}}$ in $(\iota, \iota', \alpha_\mu)$ liefert:

$$\sum c_{\iota\iota'(r-\nu)}\, c_{(r-\nu)\alpha_\lambda\alpha_{\lambda-1}} = - c_{\iota'\alpha_\lambda(\alpha-\iota)_\lambda}\, c_{(\alpha-\iota)_\lambda\iota\alpha_{\lambda-1}} - \\ - c_{\iota'\alpha_\lambda(\alpha-\iota)_{\lambda-1}}\, c_{(\alpha-1)\iota\alpha_{\lambda-1}},$$

während entsprechend aus $(\iota, \iota', (\alpha-\iota)_\mu)$ folgt:

$$\sum c_{\iota\iota'(r-\nu)}\, c_{(r-\nu)(\alpha-\iota)_\lambda(\alpha-\iota)_{\lambda-1}} = c_{\iota(\alpha-\iota)_\lambda\alpha_\lambda}\, c_{\alpha_\lambda\iota'(\alpha-\iota)_{\lambda-1}} + \\ + c_{\iota(\alpha-\iota)_\lambda\alpha_{\lambda-1}}\, c_{\alpha_{\lambda-1}\iota'(\alpha-\iota)_{\lambda-1}}.$$

Da aber infolge von (3) die linken Seiten gleich und infolge von (2) die rechten entgegengesetzt gleich sind, so ergiebt sich:

$$(4) \qquad \sum c_{\iota\iota'(r-\nu)}\, c_{(r-\nu)\alpha_\lambda\alpha_{\lambda-1}} = 0.$$

Diese Gleichung ist allerdings nur unter den Voraussetzungen bewiesen, dass 1) $\omega_\alpha + \omega_\iota$ keine Wurzel sei, und dass 2) nicht noch mehrere gleiche Elementartheiler vorhanden sind. Die Unabhängigkeit des Resultats von der ersten Annahme folgt aus der Gleichung (3), und dass die zweite Annahme keinen Einfluss auf das Resultat hat, lässt sich leicht zeigen. Betrachtet man also $c_{r\alpha_\lambda\alpha_{\lambda-1}} \cdots c_{(r-l+1)\alpha_\lambda\alpha_{\lambda-1}}$ als Unbekannte, so gilt für dieselben ganz allgemein das System der l Gleichungen:

$$\sum c_{\iota\iota'(r-\nu)}\, c_{(r-\nu)\alpha_\lambda\alpha_{\lambda-1}} = 0,$$
$$\sum c_{\varkappa\varkappa'(r-\nu)}\, c_{(r-\nu)\alpha_\lambda\alpha_{\lambda-1}} = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

wo die aus den Coefficienten gebildete Determinante nicht verschwindet. Folglich müssen alle $c_{(r-\nu)\alpha_\lambda \alpha_{\lambda-1}}$ verschwinden und ω_α kann nur einem Elementartheiler erster Ordnung angehören. Somit folgt der Satz:

Wenn für eine Gruppe, welche ihre eigene Hauptuntergruppe ist, die Zahl der identisch verschwindenden Coefficienten $\psi_r(\eta) \cdots \psi_{r-l+1}(\eta)$ nicht grösser ist als der Rang l der Gruppe, so hat die Determinante

$$\left|\sum_\varrho \eta_\varrho c_{\varrho\iota\varkappa} - \delta_{\iota\varkappa}\omega\right| \quad (\iota, \varkappa = 1 \cdots r)$$

nur Elementartheiler ersten Grades. Sobald also in diesem Falle ω_α eine i-fache Wurzel der charakteristischen Gleichung ist, müssen auch alle Determinanten verschwinden, welche man aus $\left|\sum \eta_\varrho c_{\varrho\iota\varkappa} - \delta_{\iota\varkappa}\omega_\alpha\right|$ durch Weglassung von $i-1$ Horizontal- und ebensovielen Verticalreihen erhält.

Bei diesem Ausspruch ist vorausgesetzt, dass ein am Schluss von § 20 angegebener Satz bereits bewiesen sei. Die Voraussetzungen, aus denen der Satz unmittelbar hergeleitet ist, sind:

a) für l Paare von Transformationen X_ι und $X_{\iota'}$, welche je als erste zu zwei entgegengesetzt gleichen Wurzeln ω_ι und $-\omega_\iota$ gehören, bestehen die Gleichungen:

$$(X_\iota X_{\iota'}) = \sum_\nu e_\iota^{(\nu)} X_{(r-\nu)};$$

b) die l auf der rechten Seite stehenden inf. Transformationen sind von einander unabhängig;

c) es ist

$$\sum_\iota e_\iota^{(\nu)} \omega_\iota^{(\nu)} \neq 0,$$

d) die Determinante der $\omega_\iota^{(\nu)}$ verschwindet nicht.

Diese Voraussetzungen haben wir also zunächst dem vorangehenden Satze zu Grunde zu legen. Wir können aber auch, gestützt auf die durchgeführten Untersuchungen, die Zusammensetzung aller Gruppen charakterisiren, welche den angegebenen Bedingungen genügen und demnach folgenden Satz aussprechen:

Wenn man in allgemeinster Weise eine Gruppe des Ranges l bestimmen soll, welche den soeben angegebenen Bedingungen genügt, so kann man folgenden Weg einschlagen:

Man setze fest, dass die $X_r f$ eine ganz allgemeine inf. Transformation sein soll und dass dann $X_{r-1}f \cdots X_{r-l+1}f$ mit ihr vertauschbar sind. Die charakteristische Gleichung für $X_r f$ hat dann l verschwindende und $r-l$ nicht verschwindende Wurzeln. Von letzteren wähle man l willkürlich, setze zwischen ihnen ein System von $a_{\iota\varkappa}$ fest und bestimme mittelst desselben alle Hauptwurzeln der charakteristischen Gleichung.

Jeder Hauptwurzel ω_ι ordne man eine inf. Transformation $X_\iota f$ zu nach der Gleichung:

$$(X_r X_\iota) = \omega_\iota X_\iota f.$$

Man wähle jetzt eine Nebenwurzel ω_α, welche mit den Hauptwurzeln nach dem Schlusssatz von § 12 vereinbar ist, und suche alle weiteren Wurzeln, welche mit derselben nothwendig verbunden sind. Die Wahl ist so zu treffen, dass man hierbei zu keiner verschwindenden Wurzel gelangt. Jeder dieser Wurzeln ordne man eine Transformation X_α zu, vermittelst der Gleichung:

$$(X_r X_\alpha) = \omega_\alpha X_\alpha f.$$

Soll die Gruppe mehr Glieder enthalten als hierdurch bestimmt sind, so wähle man in entsprechender Weise eine Nebenwurzel ω_β, suche alle mit ihr verbundenen Wurzeln und ordne jeder nach der gegebenen Gleichung eine inf. Transformation zu.

In gleicher Weise fahre man beliebig fort.

Für die so bestimmte Gruppe ist die aus den $X_r \cdots X_{r-l+1}$ nebst den sämmtlichen $X_\iota f$ gebildete Gruppe eine (einfache oder halbeinfache) Untergruppe desselben Ranges. Alle diejenigen Transformationen, welche zu den Nebenwurzeln gehören, bilden eine invariante Untergruppe, deren Transformationen mit einander vertauschbar sind. Die Gruppe ist also zusammengesetzt aus einer einfachen oder halbeinfachen Gruppe mit einer invarianten Untergruppe, deren Transformationen mit einander vertauschbar sind.

Die angegebene invariante Untergruppe wird nur dann nicht in mehrere invariante Untergruppen zerfallen, wenn alle Nebenwurzeln sich aus einer einzigen vermittelst der entwickelten Beziehungen ergeben. Die Gruppe kann sogar eine unendliche Schaar von invarianten Untergruppen besitzen. Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn die Gesammtheit der Wurzeln ω_α mit der Gesammtheit der Wurzeln ω_β identisch ist.

Da $X_r f$ eine ganz beliebige Transformation ist, bei der nur specielle Lagen ausgeschlossen sind, so folgt:

Jede allgemeine Transformation einer Gruppe der angegebenen Art gehört einer, und zwar einer einzigen, einfachen oder halbeinfachen Untergruppe desselben Ranges an, durch deren Zusammensetzung mit der invarianten Untergruppe die gegebene Gruppe erzeugt wird. Besteht die gegebene Gruppe aus r, diejenige einfache oder halbeinfache Untergruppe, aus der sie gebildet ist, aus r' Gliedern, so enthält sie eine $(r-r')$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit solcher Untergruppen. Bestimmt man für eine allgemeine Transformation die hindurchgehenden zweigliedrigen Untergruppen ohne vertauschbare Elemente, so wird von deren Hauptelementen stets dieselbe Zahl der invarianten Untergruppe angehören; die übrigen Hauptelemente liegen mit der gegebenen Transformation in derselben einfachen oder halbeinfachen Untergruppe.

Die in § 12 gestellte Aufgabe, eine Gruppe zu bestimmen, für welche die $r - l$ nicht verschwindenden Wurzeln sämmtlich ungleich sind, kann als eine naturgemässe Aufgabe nicht bezeichnet werden, da ihre Lösungen keinen charakteristischen Unterschied von denen verwandter Aufgaben zeigen. Eine Gruppe, welche dieser Bedingung genügt, kann zerfallen, und sie kann mehrere invariante Untergruppen mit vertauschbaren Elementen enthalten; die Zahl der letzteren kann, soweit sie von einander unabhängig sind, höchstens l betragen, und niemals zu einer unendlichen Schaar solcher Untergruppen führen.

Jede Gruppe, welche den beiden aufgestellten Bedingungen genügt, muss, wenn sie nicht einfach ist, invariante Untergruppen enthalten; soll sie nur eine einzige invariante Untergruppe besitzen, so müssen alle Hauptwurzeln der charakteristischen Gleichung vermittelst eines einfachen Systems $a_{\iota\varkappa}$ zusammenhängen, und alle Nebenwurzeln müssen sich aus einer einzigen unter ihnen herleiten lassen.

Um zu übersehen, welche Schritte zur expliciten Darstellung der gesuchten Gruppen jetzt noch zu thun sind, beachten wir zuvörderst den Fall, dass das System der $a_{\iota\varkappa}$ zusammengesetzt ist. Dieser Fall führt sich sofort auf den Fall eines einfachen Systems zurück, da offenbar der Satz gilt:

Wenn für eine Gruppe, welche den gestellten Bedingungen genügt, das System $a_{\iota\varkappa}$ zusammengesetzt ist, so zerfällt die Gruppe nothwendig in Bestandtheile, deren jeder nach den angegebenen Regeln zu bilden ist.

Lassen wir aber das System $a_{\iota\varkappa}$ einfach sein, so ist die Aufgabe, die entsprechende einfache Gruppe zu finden, in den §§ 17 und 18 gelöst. Dadurch wird die Beziehung zwischen den $X_r \cdots X_{r-l+1}$, X_ι, $X_\varkappa \cdots$ angegeben. Die gestellte Aufgabe ist also auf folgende zwei Aufgaben zurückgeführt:

I. Nachdem eine einfache Gruppe gegeben ist, diejenigen Wurzeln zu bestimmen, welche mit den Wurzeln der einfachen Gruppe als Nebenwurzeln vereinbar sind, und welche aus einer einzigen sich herleiten lassen.

II. Wenn $X_r \cdots X_{r-l+1}$ mit X_ι, $X_\varkappa \cdots$ eine gegebene einfache Gruppe bestimmen, ω_α, $\omega_\beta \cdots$ weitere damit vereinbare Wurzeln sind, welche sich aus einer einzigen ergeben und auf keine verschwindende Wurzeln führen, und wenn dann jeder der letzteren Wurzeln eine inf. Transformation zugeordnet ist, durch die Gleichung:

$$(X_r X_\alpha) = \omega_\alpha X_\alpha,$$

so sollen für die durch diese inf. Transformationen gegebenen Gruppen die Coefficienten $c_{\iota\alpha(\alpha+\iota)}$ bestimmt werden.

Unter Zugrundelegung der wichtigsten einfachen Gruppen soll uns die erstere Aufgabe in § 25, die zweite in § 26 beschäftigen. Für $l = 1$ sind beide Aufgaben bereits in § 7 gelöst. Die in § 8 (Bd. 31, S. 282) angegebene Bildung ist dahin abzuändern, dass die Zahlen λ, $\lambda' \ldots$ jedesmal gleich Null zu setzen sind.

Die bisherige Untersuchung beruhte auf den Voraussetzungen, dass die charakteristische Gleichung im allgemeinen k verschwindende Wurzeln hat, und dass, wenn zu den entgegengesetzt gleichen Wurzeln ω_ι und $-\omega_\iota$ die inf. Transformationen nach der Formel

$$(X_r X_\iota) = \omega_\iota X_\iota, \quad (X_r X_{\iota'}) = -\omega_\iota X_{\iota'}$$

gehören, k von Null verschiedene und unter einander unabhängige Ausdrücke $(X_\iota X_{\iota'})$ vorkommen. Bisher sind, nach der am Schluss von § 20 getroffenen Festsetzung, noch die beiden Fälle ausgeschlossen, dass

a) $$\sum c_{\iota\iota'(r-\nu)}\, \omega_\iota^{(\nu)} = 0$$

ist, und dass

b) die Determinante

$$\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_1' & \cdots & \omega_1^{(l-1)} \\ \omega_2 & \omega_2' & \cdots & \omega_2^{(l-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_l & \omega_l' & \cdots & \omega_l^{(l-1)} \end{vmatrix} = 0$$

ist.

Wir wollen diese beiden Fälle jetzt ebenfalls behandeln und zunächst zeigen, dass sie auf dasselbe hinauskommen. Wenn also etwa der zweite Fall eintritt, so giebt es gewisse Constanten $\mu_1 \cdots \mu_l$, so dass für jedes ν ist:

$$\mu_1 \omega_1^{(\nu)} + \mu_2 \omega_2^{(\nu)} + \cdots + \mu_l \omega_l^{(\nu)} = 0.$$

Bilden wir nun die Gleichungen:

$$\sum c_{11'(r-\nu)} (2\omega_2^{(\nu)} + a_{21}\omega_1^{(\nu)}) = 0,$$

$$\sum c_{11'(r-\nu)} (2\omega_3^{(\nu)} + a_{31}\omega_1^{(\nu)}) = 0 \cdots,$$

multipliciren die erste mit μ_2, die zweite mit $\mu_3 \cdots$ und addiren, so folgt:

$$\sum c_{11'(r-\nu)}\, \omega_1^{(\nu)} = 0,$$

wenn nicht speciell die Gleichung besteht:

$$-2\mu_1 + a_{21}\mu_2 + a_{31}\mu_3 + \cdots + a_{l_1}\mu_l = 0.$$

Allgemein wird entweder

$$\sum c_{\iota\iota'(r-\nu)}\, \omega_\iota^{(\nu)} = 0$$

oder

$$\sum \mu_\nu a_{\nu\iota} = 0$$

sein müssen. Damit die letztere Gleichung für $\iota = 1 \cdots l$ besteht, muss die Determinante der $a_{\iota\varkappa}$ gleich Null sein. Nun sind die Untersuchungen des § 13 unabhängig von der über die Determinante $|\omega_\iota^{(\nu)}|$ gemachten Voraussetzung; der dort bewiesene Satz, dass die Determinante $|a_{\iota\varkappa}| \neq 0$ sein muss, gilt also auch in unserem Falle. Daher muss im Falle des Verschwindens von $|\omega_\iota^{(\nu)}|$ mindestens ein Ausdruck $\sum c_{\iota\iota'(r-\nu)}\,\omega_\iota^{(\nu)}$ gleich Null sein.

Umgekehrt muss aber mit

$$\sum c_{\iota\iota'(r-\nu)}\,\omega_\iota^{(\nu)} = 0,$$

auch für jedes andere $\varkappa$ sein:

$$\sum c_{\iota\iota'(r-\nu)}\,\omega_\varkappa^{(\nu)} = 0,$$

und daraus folgt das Verschwinden der Determinante $|\omega_\iota^{(\nu)}|$.

Die Voraussetzung

$$\sum c_{\iota\iota'(r-\nu)}\,\omega_\iota^{(\nu)} = 0$$

kann offenbar nicht für jedes ν gemacht werden, weil sonst die Gruppe ihre eigene Hauptuntergruppe nicht sein kann. Es seien also

$$(X_\iota X_{\iota'}),\ (X_\varkappa X_{\varkappa'}) \cdots$$

l Paare, durch welche l von einander unabhängige Ausdrücke

$$\sum c_{\iota\iota'(r-\nu)}\,X_{(r-\nu)}$$

geliefert werden, und wo ist:

$$\sum c_{\iota\iota'(r-\nu)}\,\omega_\iota^{(\nu)} \neq 0, \qquad \sum c_{\varkappa\varkappa'(r-\nu)}\,\omega_\varkappa^{(\nu)} \neq 0 \cdots.$$

Hierzu mögen $k-l$ von einander unabhängige Paare

$$(X_\alpha X_{\alpha'}),\ (X_\beta X_{\beta'}) \cdots$$

treten, für welche in

$$\sum c_{\alpha\alpha'(r-\nu)}\,X_{r-\nu}$$

die $c_{\alpha\alpha' r},\ c_{\alpha\alpha'(r-1)} \cdots c_{\alpha\alpha'(r-k+1)}$ nicht sämmtlich verschwinden und zugleich ist:

$$\sum c_{\alpha\alpha'(r-\nu)}\,\omega_\alpha^{(\nu)} = 0, \qquad \sum c_{\beta\beta'(r-\nu)}\,\omega_\beta^{(\nu)} = 0 \cdots.$$

Hierbei bleibt es, wie früher, unentschieden, ob noch weitere Paare der ersten und der zweiten Art vorkommen.

Wir setzen etwa:

$$(X_\alpha X_{\alpha'}) = X_{r-k+1}, \quad (X_\beta X_{\beta'}) = X_{r-k+2} \cdots$$

Dann folgt für jede Wurzel ω_δ:

$$\omega_\delta^{(k-1)} = \omega_\delta^{(k-2)} = \cdots = \omega_\delta^{(l)} = 0.$$

Ebenso mögen der Einfachheit wegen die $(X_\iota X_{\iota'})$, $(X_\varkappa X_{\varkappa'}) \dots$ nur durch X_r, $X_{r-1} \cdots X_{r-l+1}$ ausgedrückt werden. Zwischen je zwei Wurzeln ω_ι und $\omega_\varkappa$ müssen, entsprechend den frühern Sätzen, Coefficienten $a_{\iota\varkappa}$ bestehen, und demnach sind mit ω_ι, $\omega_\varkappa \cdots$ noch weitere Wurzeln hinzuzunehmen, wenn nicht alle Coefficienten $a_{\iota\varkappa}$ für $\iota \lesseqgtr \varkappa$ verschwinden. Somit ist durch $X_r \cdots X_{r-l+1}$ und die sämmtlichen $X_\iota \cdots$ eine einfache oder halbeinfache Gruppe bestimmt.

Aus der Jacobi'schen Identität (ι, ι', δ) folgt, dass alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung sich durch die ω_ι, $\omega_\varkappa \cdots$ linear homogen vermittelst rationaler Coefficienten darstellen lassen. Hierher gehören auch die ω_α, $\omega_\beta \cdots$, welche in Bezug auf die ω_ι, $\omega_\varkappa \cdots$ den Charakter von Nebenwurzeln haben. Auch muss die Wahl der betreffenden ganzen Zahlen so geschehen, dass man durch Addition einer Haupt- und einer Nebenwurzel nicht zu einer Hauptwurzel gelangt. Demnach bleibt auch die Bestimmung der weiteren Coefficienten $c_{\iota\alpha(\iota+\alpha)}$, $c_{\iota\delta(\iota+\delta)}$ ungeändert; dagegen wird $c_{\alpha(\alpha+\iota)'\iota'} = 0$ und überhaupt, wenn ω_δ und ω_ε irgend zwei Nebenwurzeln sind, so muss $(X_\delta X_\varepsilon) = 0$ sein mit Ausnahme der $(X_\alpha X_{\alpha'})$, $(X_\beta X_{\beta'}) \cdots$.

Aber auch die Annahme der letzteren ist nicht ganz willkürlich, wie die Relation $\big(\iota, \alpha, (\iota+\alpha)'\big)$ unter der Annahme, dass $\omega_\iota + \omega_\alpha$ eine neue Wurzel ist, unmittelbar zeigt. Diese Relation, welche die Gestalt annimmt:

$$c_{\iota\alpha(\iota+\alpha)}(X_{(\iota+\alpha)} X_{(\iota+\alpha)'}) = c_{\iota(\iota+\alpha)'\alpha'}(X_{\alpha'} X_\alpha),$$

lehrt, dass wenn $(X_\alpha X_{\alpha'})$ von Null verschieden ist, dasselbe auch für jedes $(X_{(\iota+\alpha)} X_{(\iota+\alpha)'})$ der Fall sein muss, und dass diese sich nur durch einen constanten Factor unterscheiden. Sollen also die Ausdrücke $(X_\alpha X_{\alpha'})$ und $(X_\beta X_{\beta'})$ von einander unabhängig sein, so müssen die Wurzeln ω_α und ω_β ebenfalls in dem oben bezeichneten Sinne von einander unabhängig sein, so dass weder ω_α durch ω_β noch ω_β durch ω_α gefordert wird; der Fall der Gleichheit ist natürlich nicht ausgeschlossen.

Somit ergiebt sich:

Den beiden Voraussetzungen, dass

1) *die charakteristische Gleichung im allgemeinen k verschwindende Wurzeln hat, und*

2) *k Paare von Transformationen, welche je als Transformationen erster Ordnung zu entgegengesetzt gleichen Wurzeln gehören, durch ihre Combination k von einander unabhängige Ausdrücke liefern, genügt man ausser durch die oben gebildeten Gruppen noch auf folgende Weise:*

Man gehe von einer einfachen oder halbeinfachen Gruppe des Ranges l aus, stelle für dieselbe die charakteristische Gleichung auf und wähle eine weitere Wurzel so, dass sie a) mit den gegebenen Wurzeln vereinbar *ist, und b) keine Hauptwurzel nach sich zieht. Dieser Wurzel füge man alle weiteren Wurzeln bei, welche durch dieselbe gefordert werden. Wenn nicht die entgegengesetzt gleiche hierunter vorkommt, so ist diese (sammt den weiter geforderten) hinzuzunehmen. Jeder solchen Wurzel ordne man eine inf. Transformation als solche erster Ordnung bei. Wenn hiernach die Transformationen* X_α, $X_{\alpha+\iota}\cdots$ *hinzugefügt werden, so gehorcht die Combination dieser mit jeder Transformation der ursprünglich gegebenen Gruppe ganz den früheren Gesetzen; man wähle jetzt noch* $(X_\alpha X_{\alpha'})$ *als neue, von den frühern unabhängige inf. Transformation, und setze fest, dass sie mit allen Transformationen der Gruppe vertauschbar sein soll.*

Jetzt kann man eine weitere Nebenwurzel ω_β *und alle dadurch geforderten (nebst entgegengesetzt gleichen) hinzufügen, ihnen weitere Transformationen* X_β, $X_{\beta'}\cdots$ *zuordnen und* $(X_\beta X_{\beta'})$ *als neue Transformation festsetzen. U. s. w.*

Weitere Nebenwurzeln können ganz wie vorhin hinzugefügt werden.

Unter den nach dieser Vorschrift gebildeten Gruppen erwähne ich die beiden von Herrn Lie gefundenen Gruppen für drei Variabele:

$$r,\ xr+\beta p,\ yr-\beta p,\ xq,\ xp-yq,\ yp$$

und

$$r,\ p,\ q,\ xr,\ yr,\ xq,\ xp-yq,\ yp.$$

§ 23.

Bestimmung weiterer Gruppen, welche ihre eigenen Hauptuntergruppen sind.

Dass die in den beiden vorangehenden Paragraphen angegebenen Bildungen von Gruppen, welche ihre eignen Hauptuntergruppen sind, nicht alle derartigen Gruppen erschöpfen, hat sich für $l=1$ bereits in den §§ 7 und 8 gezeigt und kann für ein grösseres l leicht erkannt werden. Um die allgemeine Lösung vorzubereiten, dürfte es sich empfehlen zunächst eine Annahme zu verfolgen, welche sich nach Ausschluss der bisher zu Grunde liegenden, als die einfachste darstellt.

Wir gehen also wieder von einer ganz allgemeinen inf. Transformation $X_r f$ aus und stellen für dieselbe die charakteristische Gleichung auf. Wenn dieselbe k verschwindende Wurzeln hat, so lehrt § 19, dass der Gruppe noch $k-1$ von X_r und von einander unabhängige Transformationen $X_{r-1}\cdots X_{r-k+1}$ angehören, welche mit X_r und unter einander vertauscht werden können. Weitere $r-k$ von den $X_r\cdots X_{r-k+1}$ und von einander unabhängige inf. Transformationen werden dann durch die nicht verschwindenden Wurzeln bestimmt und mögen durch Doppelmarken ι_ϱ, $\varkappa_\sigma\cdots$ bezeichnet werden. Jetzt müssen k von einander unabhängige Ausdrücke $(X_{\iota_\varrho} X_{\varkappa_\sigma})$

die $X_r \ldots X_{r-k+1}$ enthalten. Das ist nur möglich, wenn die zugehörigen Wurzeln ω_ι und $\omega_\varkappa$ entgegengesetzt gleich sind. Indem wir zu $-\omega_\iota$ die $X_{\iota_0'}$ zuordnen, haben wir bisher angenommen, dass gerade k Ausdrücke $(X_{\iota_0} X_{\iota_0'})$ [von Null verschieden und] von einander unabhängig sind. Wir verfolgen jetzt die Annahme, dass $(X_{\iota_0} X_{\iota_0'}) = 0$, aber $(X_{\iota_0} X_{\iota_1'})$ von Null verschieden ist. Dann folgt aus (r, ι_0, ι_2'), nämlich aus der Gleichung:

$$c_{r\,\iota_2'\,\iota_1'}(X_{\iota_1} X_{\iota_0}) = 0,$$

dass $(\omega - \omega_\iota)^3$ kein Elementartheiler ist.

Es sei also

$$(1) \qquad (X_{\iota_0} X_{\iota_0'}) = 0, \quad (X_{\iota_0} X_{\iota_1'}) = \sum_0^{k-1}{}^{\nu}\, c_{\iota_0 \iota_1' (r-\nu)} X_{r-\nu} f,$$

wo die Coefficienten $c_{\iota_0 \iota_1' (r-\nu)}$ nicht sämmtlich verschwinden dürfen.

Unter den Vielfachen von $-\omega_\iota$ mögen als Wurzeln der charakteristischen Gleichung vorkommen: $-\omega_\iota, -2\omega_\iota \cdots - \mathfrak{m}\omega_\iota$. Wir setzen der Kürze wegen

$$\sum{}^{\nu} c_{\iota_0 \iota_1' (r-\nu)} \omega_\iota^{(\nu)} = M,$$

und wollen zunächst annehmen, jede der angegebenen Wurzeln gehöre nur zu einem einzigen Elementartheiler der Determinante. Ist nun $\mathfrak{a}$ irgend eine der Zahlen $1 \ldots m$, so bilde man die Jacobi'sche Identität für $\left(\iota_0, \iota_1', (\mathfrak{a}\iota)_0'\right)$, welche zu den beiden Gleichungen führt:

$$(2) \qquad \mathfrak{a} M = c_{\iota_1' (\mathfrak{a}\iota)_0' (\mathfrak{a}\iota+\iota)_0'}\, c_{(\mathfrak{a}\iota+\iota)_0' \iota_0 (\mathfrak{a}\iota)_0'} + \\ + c_{\iota_1' (\mathfrak{a}\iota)_0' (\mathfrak{a}\iota+\iota)_1'}\, c_{(\mathfrak{a}\iota+\iota)_1' \iota_0 (\mathfrak{a}\iota)_0'} - c_{\iota_0 (\mathfrak{a}\iota)_0' (\mathfrak{a}\iota-\iota)_0'}\, c_{(\mathfrak{a}\iota-\iota)_0' \iota_1' (\mathfrak{a}\iota)_0'},$$

$$(2^*) \qquad 0 = c_{\iota_1' (\mathfrak{a}\iota)_0' (\mathfrak{a}\iota+\iota)_1'}\, c_{(\mathfrak{a}\iota+\iota)_1' \iota_0' (\mathfrak{a}\iota)_1'} - c_{\iota_0 (\mathfrak{a}\iota)_0' (\mathfrak{a}\iota-\iota)_0'}\, c_{(\mathfrak{a}\iota-\iota)_0' \iota_1' (\mathfrak{a}\iota)_1'}.$$

Setzen wir in dieser Gleichung zunächst $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}$, so wird M nur dann nicht verschwinden, wenn $c_{(\mathfrak{m}\iota-\iota)_0' \iota_1' (\mathfrak{m}\iota)_1'} = 0$ ist. Berücksichtigen wir dies und wählen dann $\mathfrak{a}$ der Reihe nach gleich $\mathfrak{m}-1, \mathfrak{m}-2 \ldots$, so verlangt die Bedingung $M \neq 0$, dass allgemein $c_{(\mathfrak{a}\iota-\iota)_0' \iota_1' (\mathfrak{a}\iota)_1'} = 0$ ist. Addiren wir jetzt die Gleichungen (2) für $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}, \mathfrak{m}-1 \ldots 1$, so folgt $M = 0$.

Wenn mehrere Elementartheiler der Determinante gleich $\omega + \mathfrak{a}\omega_\iota$ sind, wenn also die Wurzel $-\mathfrak{a}\omega_\iota$ zu mehreren Reihen von inf. Transformationen führt, so ändern sich die rechten Seiten von (2) und (2*), aber das Resultat bleibt ungeändert, wofern man auch die Relationen $\left(\iota_0, \iota_1', (\overline{\mathfrak{a}\iota})_1'\right) \ldots$ bildet. Somit folgt aus den gemachten Voraussetzungen die Gleichung:

$$(3) \qquad \sum{}^{\nu} c_{\iota_0 \iota_1' (r-\nu)}\, \omega_\iota^{(\nu)} = 0.$$

In gleicher Weise setzen wir jetzt für den Augenblick der Kürze wegen

$$\sum^{\nu} c_{\iota_0 \iota_1'(r-\nu)}\, \omega_{\alpha}^{(\nu)} = N,$$

wo ω_α eine beliebige Wurzel der charakteristischen Gleichung für $X_r f$ und $\omega_\alpha^{(\nu)}$ die entsprechende Wurzel für $X_{r-\nu} f$ ist. Die Jacobi'sche Identität $(\iota_0, \iota_1', \alpha_0)$ liefert, wofern zu jeder Wurzel nur eine Reihe von Transformationen gehört, die beiden Gleichungen:

$$(4) \qquad N = c_{\iota_1 \alpha_0 (\alpha+\iota)_0}\, c_{(\alpha+\iota)_0 \iota_1' \alpha_0} - c_{\iota_1' \alpha_0 (\alpha-\iota)_0}\, c_{(\alpha-\iota)_0 \iota_0 \alpha_0} - c_{\iota_1' \alpha_0 (\alpha-\iota)_1}\, c_{(\alpha-\iota)_1 \iota_0 \alpha_0},$$

$$(4^*) \qquad 0 = c_{\iota_0 \alpha_0 (\alpha+\iota)_0}\, c_{(\alpha+\iota)_0 \iota_1' \alpha_1} - c_{\iota_1' \alpha_0 (\alpha-\iota)_1}\, c_{(\alpha-\iota)_1 \iota_0 \alpha_1}.$$

Man suche alle Wurzeln, welche aus ω_α durch Addition und Subtraction eines Vielfachen von ω_ι gewonnen werden. Unter diesen giebt es eine, für welche man durch Addition, aber nicht durch Subtraction von ω_ι eine neue Wurzel erhält. Giebt man ω_α gerade diesen Werth, so muss, damit N nicht verschwindet, $c_{(\iota+\alpha)_0 \iota_1' \alpha_1} = 0$ sein. Jetzt ersetzen wir in (4) und (4*) ω_α durch $\omega_\alpha + \omega_\iota$, wobei die linke Seite von (4) ungeändert bleibt, und finden: $c_{(\alpha+2\iota)_0 \iota_1' (\alpha+\iota)_1} = 0$, wofern N nicht verschwindet. In derselben Weise fahren wir fort und addiren schliesslich die so erhaltenen Gleichungen (4), woraus sich ergiebt: $N = 0$.

Es dürfte gut sein, die sämmtlichen Voraussetzungen, auf denen das gewonnene Resultat beruht, in folgenden Lehrsatz zusammenzufassen:

In einer Gruppe sei X_r eine allgemeine inf. Transformation, $X_{r-1} \ldots X_{r\ k+1}$ seien mit X_r und mit einander vertauschbar; die charakteristische Gleichung habe unter anderen die Wurzeln ω_ι, $-\omega_\iota$, ω_α, denen für $X_{r-\nu}$ die Wurzeln $\omega_\iota^{(\nu)}$, $-\omega_\iota^{(\nu)}$, $\omega_\alpha^{(\nu)}$ entsprechen. Ferner soll sein:

$$(X_r X_{\iota_0}) = \omega_\iota X_{\iota_0}, \quad (X_r X_{\iota_0'}) = -\omega_\iota X_{\iota_0'}, \quad (X_r X_{\iota_1'}) = -\omega_\iota X_{\iota_1'} + c_{r \iota_1' \iota_0'} X_{\iota_0'},$$

$$(X_{\iota_0} X_{\iota_0'}) = 0, \quad (X_{\iota_0} X_{\iota_1'}) = \sum^{\nu} c_{\iota_0 \iota_1 (r-\nu)}\, X_{r-\nu};$$

dann besteht die Gleichung:

$$(5) \qquad \sum c_{\iota_0 \iota_1' (r-\nu)}\, \omega_\alpha^{(\nu)} = 0.$$

Diese Gleichung bleibt auch gültig, wenn man $\omega_\alpha^{(\nu)}$ durch $\omega_\iota^{(\nu)}$ ersetzt.

Die Gleichung (5) ist an sich bemerkenswerth, sie wird aber besonders wichtig durch mehrere Folgerungen, welche sich unmittelbar aus derselben ergeben. Verbinden wir nämlich mit (2) die Gleichung $(X_{\varkappa_0} X_{\varkappa_0'}) \neq 0$, wo $(X_r X_{\varkappa_0}) = \omega_\varkappa X_\varkappa$, $(X_r X_{\varkappa_0'}) = -\omega_\varkappa X_{\varkappa'}$ ist, so zeigt die Gl. (5) unmittelbar, dass die Gruppe zerfällt. Wollen wir also zu einer nicht zerfallenden Gruppe gelangen, so dürfen wir mit der Voraussetzung $(X_{\iota_0} X_{\iota_0'}) = 0$, $(X_{\iota_0} X_{\iota_1'}) \neq 0$ nicht $(X_{\varkappa_0} X_{\varkappa_0'}) \neq 0$ verbinden. Auf dieselbe Weise zeigt sich, dass für eine nicht zerfallende Gruppe mit $(X_{\iota_0} X_{\iota_0'}) = 0$, $(X_{\iota_0} X_{\iota_1'}) \neq 0$ nicht zugleich die Beziehungen $(X_{\varkappa_0} X_{\varkappa_0'}) = 0$, $(X_{\varkappa_0} X_{\varkappa_1'}) = 0$, $(X_{\varkappa_0} X_{\varkappa_2'}) \neq 0$ bestehen können. Ebensowenig genügt es, wenn $p = r$ sein soll, weitere $(X_{\varkappa_0} X_{\varkappa_1'})$ als von Null verschieden vorauszusetzen. Zunächst müssen wir, wie wir hier $-\omega_\iota$ als mehrfache Wurzel vorausgesetzt haben, auch die entgegengesetzt gleiche Wurzel ω_ι als zweifache Wurzel annehmen. Dann ist, wie bereits bemerkt:

$$(6) \qquad \frac{c_{r\iota_1'\iota_0'}}{c_{r\iota_1\iota_0}} = \frac{c_{(r-\nu)\iota_1'\iota_0'}}{c_{(r-\nu)\iota_1\iota_0}} = \frac{(X_{\iota_0} X_{\iota_1'})}{(X_{\iota_1} X_{\iota_0'})}.$$

Zugleich muss $(X_{\iota_1} X_{\iota_1'})$ als von Null verschieden und von sämmtlichen $(X_{\varkappa_0} X_{\varkappa_1'})$ unabhängig angenommen werden. Endlich ergiebt sich, dass nicht nur kein X_{ι_2}, $X_{\varkappa_2} \ldots$, sondern auch kein $X_{(\iota+\varkappa)_2}$ vorkommen kann; man hat nur $\left(r, (\iota+\varkappa)_1, (\iota+\varkappa)_1'\right)$ zu bilden.

In der Jacobi'schen Identität $(r, \iota_1, \varkappa_1)$

$$(7) \quad c_{r\iota_1\iota_0}(X_{\iota_0} X_{\varkappa_1}) + c_{r\varkappa_1\varkappa_0}(X_{\iota_1} X_{\varkappa_0}) = c_{r(\iota+\varkappa)_1(\iota+\varkappa)_0}\, c_{\iota_1\varkappa_1(\iota+\varkappa)_1}\, X_{(\iota+\varkappa)_0}$$

beachten wir den Coefficienten von $X_{(\iota+\varkappa)_1}$ und verbinden damit die aus $(r, \iota_0, \varkappa_1)$ und $(r, \iota_1, \varkappa_0)$ folgenden Gleichungen, von denen die erstere ist:

$$c_{r\varkappa_1\varkappa_0}\, c_{\iota_0\varkappa_0(\iota+\varkappa)_0} = c_{\iota_0\varkappa_1(\iota+\varkappa)_1}\, c_{r(\iota+\varkappa)_1(\iota+\varkappa)_0},$$

so ergiebt sich:

$$(8) \qquad c_{\iota_0\varkappa_0(\iota+\varkappa)_0} = 0, \quad c_{\iota_1\varkappa_0(\iota+\varkappa)_1} = 0.$$

Aus der Jacobi'schen Identität für $(\iota_1, \iota_1', \alpha_0)$:

$$(9) \quad \sum\nolimits^{\nu} c_{\iota_1\iota_1'(r-\nu)}\, \omega_\alpha^{(\nu)} = c_{\iota_1\alpha_0(\alpha+\iota)_0}\, c_{(\alpha+\iota)_0\iota_1'\alpha_0} - c_{\iota_1'\alpha_0(\alpha-\iota)_0}\, c_{(\alpha-\iota)_0\iota_1\alpha_0}$$

leiten wir in der schon öfters angegebenen Weise her:

$$(10) \qquad \sum\nolimits^{\nu} c_{\iota_1\iota_1'(r-\nu)} \left(2\omega_\alpha^{(\nu)} + a_{\alpha\iota}\, \omega_\iota^{(\nu)}\right) = 0,$$

wo $a_{\alpha\iota}$ eine ganze (positive oder negative) Zahl mit Einschluss der Null ist. Ist also $\sum\nolimits^{\nu} c_{\iota_1\iota_1'(r-\nu)}\, \omega_\iota^{(\nu)} = 0$, so muss auch für jede Wurzelreihe $\omega_\alpha^{(\nu)}$ sein: $\sum\nolimits^{\nu} c_{\iota_1\iota_1'(r-\nu)}\, \omega_\alpha^{(\nu)} = 0$. Damit die Gruppe ihre eigene Haupt-Untergruppe ist, müssen mindestens l Paare ω_ι und $-\omega_\iota$ vorkommen, für welche

$$(X_{\iota_1} X_{\iota_1'}) = \sum\nolimits^{\nu} c_{\iota_1\iota_1'(r-\nu)}\, X_{r-\nu}$$

und zugleich

$$\sum\nolimits^{\nu} c_{\iota_1\iota_1'(r-\nu)}\, \omega_\iota^{(\nu)} \neq 0$$

ist. Zugleich lassen sich alle Wurzeln ω_α als homogene lineare Functionen der ω_ι mit rationalen Coefficienten darstellen.

Ganz entsprechend der Gleichung (9) ist die folgende:

(11) $$\sum^{\nu} c_{\iota_1 \iota_1' (r-\nu)}\, \omega_\varkappa^{(\nu)} = c_{\iota_1 \varkappa_1 (\varkappa+\iota)_1}\, c_{(\varkappa+\iota)_1 \iota_1' \varkappa_1} - c_{\iota_1' \varkappa_1 (\varkappa-\iota)_1}\, c_{(\varkappa-\iota)_1 \iota_1 \varkappa_1'},$$

welche sich aus dem Coefficienten von $X_{\varkappa_1}$ in $(\iota_1, \iota_1', \varkappa_1)$ ergiebt.

Jetzt leiten wir aus der Jacobi'schen Identität die Relationen $(\iota_1, \iota_1', \iota_0)$, $\left(\iota_1, \iota_1', (2\iota)_0\right) \ldots$ her, deren erste ist:

$$\sum^{\nu} c_{\iota_1 \iota_1' (r-\nu)}\, \omega_\iota^{(\nu)} = c_{\iota_1 \iota_0 (2\iota)_0}\, c_{(2\iota)_0 \iota_1' \iota_0} - \sum^{\nu} c_{\iota_1' \iota_0 (r-\nu)}\, c_{(r-\nu) \iota_1 \iota_0}$$

und addiren dieselben, so folgt:

(12) $$\sum^{\nu} c_{\iota_0 \iota_1' (r-\nu)}\, c_{(r-\nu) \iota_1 \iota_0} = \mathfrak{a} \sum^{\nu} c_{\iota_1 \iota_1' (r-\nu)}\, \omega_\iota^{(\nu)},$$

wo $\mathfrak{a}$ eine positive ganze Zahl mit Ausschluss der Null ist. Hiermit bringen wir noch $(\iota_0, \iota_1', \varkappa_1)$ zusammen, nämlich:

(13) $$\sum^{\nu} c_{\iota_0 \iota_1' (r-\nu)}\, c_{(r-\nu) \varkappa_1 \varkappa_0} = c_{\iota_0 \varkappa_1 (\varkappa+\iota)_0}\, c_{(\varkappa+\iota)_0 \iota_1' \varkappa_0} - c_{\iota_1' \varkappa_1 (\varkappa-\iota)_1}\, c_{(\varkappa-\iota)_1 \iota_0 \varkappa_0}.$$

Die Gleichung $\left(\iota_0, \varkappa_1, (\iota+\varkappa)_1'\right)$, nämlich:

$$c_{\iota_0 \varkappa_1 (\iota+\varkappa)_0} \left(X_{(\iota+\varkappa)_0} X_{(\iota+\varkappa)_1'}\right) + c_{\varkappa_1 (\iota+\varkappa)_1' \iota_1'} \left(X_{\iota_1'} X_{\iota_0}\right) + c_{(\iota+\varkappa)_1' \iota_0 \varkappa_0'} \left(X_{\varkappa_0'} X_{\varkappa_0}\right) = 0$$

lehrt unmittelbar, dass unter den sämmtlichen $(X_{\iota_0} X_{\iota_1'})$ höchstens l von einander unabhängig sein können. Diese Zahl wird auch jedesmal erreicht, wenn das System der $a_{\iota\varkappa}$ nicht dem System A) äquivalent ist. Denn wenn weder $\omega_\iota + \omega_\varkappa$ noch $\omega_\iota - \omega_\varkappa$ mit ω_ι und $\omega_\varkappa$ eine neue Wurzel ist, so wird die rechte Seite von (13) verschwinden. Demnach muss $\sum^{\nu} c_{\iota_0 \iota_1' (r-\nu)}\, c_{(r-\nu) \varkappa_1 \varkappa_0} = 0$ sein, während entsprechend $\sum c_{\iota_0 \iota_1' (r-\nu)}\, c_{(r-\nu) \iota_1 \iota_0}$ nicht gleich Null sein kann; und es können $(X_{\iota_0} X_{\iota_1'})$ und $(X_{\varkappa_0} X_{\varkappa_1'})$ nicht durch Multiplication mit einem constanten Factor in einander übergeführt werden. Diese specielle Voraussetzung über die Wurzeln ω_ι und $\omega_\varkappa$ kann aber immer gemacht werden, wenn das System der $a_{\iota\varkappa}$ nicht in A) übergeführt werden kann. Alsdann ist also die Zahl k der verschwindenden Coefficienten $\psi_r \ldots \psi_{r-k+1}$ mindestens gleich $2l$. Nur wenn das System $a_{\iota\varkappa}$ auf A) hinauskommt, müssen wir es wenigstens als möglich hinstellen, dass die sämmtlichen $(X_{\iota_0} X_{\iota_1'})$ auf weniger als l von einander unabhängige inf. Transformationen hinauskommen.

Man wähle jetzt l von einander unabhängige Hauptwurzeln $\omega_\iota, \omega_\varkappa \ldots$ und stelle die l Gleichungen auf:

(14) $$\sum^{\nu} \eta_{r-\nu}\, c_{(r-\nu) \iota_1 \iota_0} = 0, \qquad \sum^{\nu} \eta_{r-\nu}\, c_{(r-\nu) \varkappa_1 \varkappa_0} = 0 \ldots.$$

Dann bestimmen diejenigen η, welche diesen Gleichungen genügen, mindestens eine $(l-1)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit. Diess ist unmittelbar klar, wenn $k \geqq 2l$ ist. Sollte das aber nicht der Fall sein, so werden auch die Gleichungen (14) nicht sämmtlich von einander unabhängig sein. So oft von diesen Gleichungen mehrere von einander unabhängig sind, muss auch die Zahl der von einander unabhängigen $(X_{\iota_0} X_{\iota_1'})$, $(X_{\varkappa_0} X_{\varkappa_1'})$ ... zunehmen.

Um das zu beweisen, beachte man $(r-\nu,\ \iota_1,\ \varkappa_1)$ und $\left(r-\nu,\ (\iota+\varkappa)_1,\ \varkappa_1'\right)$, nämlich die Gleichungen:

$$c_{(r-\nu)\iota_1\iota_0}\, c_{\iota_0\varkappa_1(\iota+\varkappa)_0} + c_{(r-\nu)\varkappa_1\varkappa_0}\, c_{\iota_1\varkappa_0(\iota+\varkappa)_0} = c_{(r-\nu)(\iota+\varkappa)_1(\iota+\varkappa)_0}\, c_{\iota_1\varkappa_1(\iota+\varkappa)_1}$$
$$c_{(r-\nu)(\iota+\varkappa)_1(\iota+\varkappa)_0}\, c_{(\iota+\varkappa)_0\varkappa_1'\iota_0} + c_{(r-\nu)\varkappa_1'\varkappa_0'}\, c_{(\iota+\varkappa)_0\varkappa_0'\iota_0} = c_{(r-\nu)\iota_1\iota_0}\, c_{(\iota+\varkappa)_1\varkappa_1'\iota_1}.$$

Da der Quotient $c_{(r-\nu)\varkappa_1'\varkappa_0'} : c_{(r-\nu)\varkappa_1\varkappa_0}$ von ν unabhängig ist, so können die vorstehenden Gleichungen nur dann von einander unabhängig sein, wenn die Gleichung

$$c_{\iota_0\varkappa_1(\iota+\varkappa)_0}\, c_{(\iota+\varkappa)_0\varkappa_1'\iota_0} = c_{\iota_1\varkappa_1(\iota+\varkappa)_1}\, c_{(\iota+\varkappa)_1\varkappa_1'\iota_1},$$

sowie diejenige Gleichung besteht, welche man hieraus durch Vertauschung der Marken ι und $\varkappa$ erhält. Indem man X_{ι_0} und $X_{\varkappa_0}$ mit passenden Factoren multiplicirt, kann man erreichen, dass

$$(15)\qquad c_{\iota_0\varkappa_1(\iota+\varkappa)_0} = c_{\iota_1\varkappa_0(\iota+\varkappa)_0} = c_{\iota_1\varkappa_1(\iota+\varkappa)_1}$$

ist, und man kann bewirken, dass entsprechende Gleichungen für alle diejenigen Marken bestehen, zu denen man durch Addition und Subtraction der Wurzeln ω_ι und $\omega_\varkappa$ gelangt.

Die Wurzeln ω_ι und $\omega_\varkappa$ seien durch die Zahlen $a_{\iota\varkappa}$ und $a_{\varkappa\iota}$ verbunden; aus $\omega_\varkappa$ erhalte man durch Addition und Subtraction von ω_ι die Wurzeln

$$\omega_\varkappa - \mathfrak{a}\,\omega_\iota \cdots \omega_\varkappa - \omega_\iota,\quad \omega_\varkappa \cdots \quad \omega_\varkappa + \mathfrak{b}\,\omega_\iota,$$

wo $\mathfrak{b} - \mathfrak{a} = a_{\varkappa\iota}$ ist; ebenso mögen die Wurzeln

$$\omega_\iota - \mathfrak{a}'\omega_\varkappa, \cdots \quad \omega_\iota \cdots \quad \omega_\iota + \mathfrak{b}'\omega_\varkappa$$

vorkommen, wo $\mathfrak{b}' - \mathfrak{a}' = a_{\iota\varkappa}$ sein muss. Sind für $X_{(\iota+\varkappa)_0}, X_{(\iota+\varkappa)_1} \ldots$ constante Factoren passend gewählt, so gelten folgende Relationen:

$$c_{(r-\nu)(\varkappa+\iota)_1(\varkappa+\iota)_0} = c_{(r-\nu)\varkappa_1\varkappa_0} + c_{(r-\nu)\iota_1\iota_0},$$
$$c_{(r-\nu)(\varkappa-\iota)_1(\varkappa-\iota)_0} = c_{(r-\nu)\varkappa_1\varkappa_0} - c_{(r-\nu)\iota_1\iota_0},$$
$$c_{(r-\nu)(\varkappa+2\iota)_1(\varkappa+2\iota)_0} = c_{(r-\nu)\varkappa_1\varkappa_0} + 2c_{(r-\nu)\iota_1\iota_0}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Indem man nun in (13) $\omega_\varkappa$ durch alle Wurzeln $\omega_\varkappa - \mathfrak{a}\,\omega_\iota \cdots \omega_\varkappa + \mathfrak{b}\,\omega_\iota$ ersetzt und addirt, erhält man die Gleichung:

$$\sum^\nu c_{\iota_0\iota_1'(r-\nu)} \left\{2c_{(r-\nu)\varkappa_1\varkappa_0} + a_{\varkappa\iota}\, c_{(r-\nu)\iota_1\iota_0}\right\} = 0$$

und entsprechend:

$$\sum^\nu c_{\varkappa_0\varkappa_1'(r-\nu)} \left\{a_{\iota\varkappa}\, c_{(r-\nu)\varkappa_1\varkappa_0} + 2c_{(r-\nu)\iota_1\iota_0}\right\} = 0.$$

Da $a_{\iota\varkappa}a_{\varkappa\iota}$ nicht $= 4$ sein kann, so müssen jedesmal, wenn die beiden ersten Gleichungen (14) von einander unabhängig sind, auch $(X_{\iota_0} X_{\iota_1'})$ und $(X_{\varkappa_0} X_{\varkappa_1'})$ wesentlich verschiedene inf. Transformationen darstellen.

Ersetzt man in der ersten Gleichung (14) die Marke ι durch ι', so erhält man die erste Gleichung wieder bis auf einen constanten Factor. Bildet man die entsprechende Gleichung für die Marke $\iota + \varkappa$, so erhält man eine Gleichung, welche sich aus den beiden ersten Gleichungen (14) homogen linear zusammensetzt. Man kann also l von einander unabhängige inf. Transformationen $\sum \eta_{r-\nu} X_{r-\nu}$ so bestimmen, dass für alle Marken ι ist:

$$(16) \qquad \left(\sum \eta_{r-\nu} X_{r-\nu},\ X_{\iota_1}\right) = \varpi_\iota X_{\iota_1} f.$$

Die Gleichungen (14) ändern sich nicht, wenn man X_{ι_1} durch $X_{\iota_1} + \eta_\iota X_{\iota_0}$ ersetzt. Nimmt man jetzt X_{ι_1} in der Schaar $\mu X_{\iota_1} + \nu X_{\iota_0}$ willkürlich an, so soll zunächst $\eta_{\iota'}$ so gewählt werden, dass wenn gesetzt wird:

$$(X_{\iota_1},\ X_{\iota_1'} + \eta_{\iota_1} X_{\iota_0'}) = \sum^{\nu} \eta_{r-\nu} X_{r-\nu},$$

für die Coefficienten $\eta_r \ldots \eta_{r-k+1}$ die Gleichungen (14) bestehen. Diess giebt die Gleichungen:

$$(17) \qquad \begin{cases} \sum^{\nu} c_{\iota_1 \iota_1' (r-\nu)}\, c_{(r-\nu)\iota_1 \iota_0} + \eta_{\iota'} \sum^{\nu} c_{\iota_1 \iota_1' (r-\nu)}\, c_{(r-\nu)\iota_1 \iota_0} = 0, \\ \sum^{\nu} c_{\iota_1 \iota_1' (r-\nu)}\, c_{(r-\nu)\varkappa_1 \varkappa_0} + \eta_{\iota'} \sum^{\nu} c_{\iota_1 \iota_0' (r-\nu)}\, c_{(r-\nu)\varkappa_1 \varkappa_0} = 0. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Wir haben zu beweisen, dass diese l Gleichungen auf eine einzige hinauskommen. Nun haben wir bereits bewiesen, dass wenn der Quotient

$$c_{(r-\nu)\iota_1 \iota_0} : c_{(r-\nu)\varkappa_1 \varkappa_0}$$

nicht für alle ν denselben Werth hat, dann die Gleichungen (15) und die entsprechenden für $\iota + \varkappa$ u. s. w. bestehen. Wir suchen dann in $(\iota_1, \iota_1', \varkappa_1)$ den Coefficienten von $X_{\varkappa_0}$, welcher liefert:

$$\sum^{\nu} c_{\iota_1 \iota_1' (r-\nu)}\, c_{(r-\nu)\varkappa_1 \varkappa_0} = c_{\iota_1 \varkappa_1 (\varkappa+\iota)_1}\, c_{(\varkappa+\iota)_1 \iota_1' \varkappa_0} + c_{\iota_1 \varkappa_1 (\varkappa+\iota)_0}\, c_{(\varkappa+\iota)_0 \iota_1' \varkappa_0} +$$
$$- c_{\iota_1' \varkappa_1 (\varkappa-\iota)_1}\, c_{(\varkappa-\iota)_1 \iota_1 \varkappa_0} - c_{\iota_1' \varkappa_1 (\varkappa-\iota)_0}\, c_{(\varkappa-\iota)_0 \iota_1 \varkappa_0}.$$

Daraus folgt in der bereits oben durchgeführten Weise:

$$\sum^{\nu} c_{\iota_1 \iota_1' (r-\nu)} \left(2 c_{(r-\nu)\varkappa_1 \varkappa_0} + a_{\varkappa\iota}\, c_{(r-\nu)\iota_1 \iota_0}\right) = 0.$$

Somit wird auch in diesem Falle die zweite Gleichung (17) aus der ersten durch einfache Multiplication mit einem constanten Factor erhalten.

Man wähle überhaupt l inf. Transformationen $X_{\iota_1}, X_{\varkappa_1} \ldots$ je in den betreffenden Schaaren beliebig und bestimme die $X_{\iota_1'}, X_{\varkappa_1'}, \ldots$ so, dass die Gleichungen (17) und die entsprechenden für $\eta_\iota', \eta_\varkappa' \ldots$ erfüllt sind. Um für $X_{(\iota+\varkappa)_1}$ die richtige Wahl zu treffen, lasse man

$(X_{\iota_1} X_{\varkappa_1}) = c_{\iota_1 \varkappa_1 (\iota+\varkappa)_1} X_{(\iota+\varkappa)_1}$ sein. Hierbei ist das Verfahren einzuhalten, welches im vorigen Paragraphen (S. 78) für einen ähnlichen Zweck eingeschlagen ist. Auch ist der Beweis, dass man hierdurch für jede Marke zu einer ganz bestimmten Transformation gelangt, wenn auch die zugehörige Wurzel auf mehrfachem Wege aus den l zuerst gewählten Wurzeln $\omega_\iota, \omega_\varkappa \ldots$ erhalten werden kann, ganz dem dort gelieferten Beweis gleich: man hat die Relationen $\left(\iota_1, \varkappa_1, (\iota+\varkappa)_1'\right)$ und $(\iota_1, \varkappa_1, \lambda_1)$ zu benutzen.

Jetzt vertreten die Wurzeln $\omega_\iota, \omega_\varkappa \ldots$ und alle daraus vermittelst der Coefficienten $a_{\iota\varkappa}$ erhaltenen die früher definirten Hauptwurzeln und sollen auch als solche bezeichnet werden. Zu ihnen gehören inf. Transformationen $X_{\iota_1}, X_{\varkappa_1} \ldots$, welche in der angegebenen Weise gewählt sein sollen. Diese bestimmen mit l inf. Transformationen $\sum \eta_{r-\nu} X_{r-\nu}$, für welche die Gleichungen (14) erfüllt sind, und welche jetzt als $X_r \ldots X_{r-l+1}$ bezeichnet werden sollen, eine einfache oder halbeinfache Gruppe. Die übrigen inf. Transformationen, durch welche nach den obigen Festsetzungen die Gruppe bestimmt ist, und zu denen die sämmtlichen X_{ι_0}, sowie die $(X_{\iota_0} X_{\iota_1'})$ gehören, bestimmen eine invariante Untergruppe.

Gleichwie bei den Voraussetzungen des vorigen Paragraphen alle Elementartheiler vom ersten Grade sind, so können sie hier höchstens vom zweiten Grade sein; aber wenn auch für eine ganz allgemeine inf. Transformation ein Elementartheiler vom zweiten Grade ist, so wird derselbe in zwei Elementartheiler ersten Grades zerfallen, sobald durch die gewählte Transformation diejenigen Bedingungen befriedigt werden, welche für $X_r \ldots X_{r-l+1}$ vorausgesetzt sind. Diese Folgerungen ergeben sich aus den Entwicklungen des vorigen Paragraphen (S. 80).

Indem wir jetzt dazu übergehen, die einzelnen Classen von Gruppen, welche den hier aufgestellten Bedingungen genügen, kennen zu lernen und näher zu charakterisiren, ist es angebracht, nur den Fall einer einzigen invarianten Untergruppe in's Auge zu fassen. Wir haben dann zwei Fälle zu unterscheiden, von denen jeder in mehrere Unterabtheilungen zerfällt: 1) mögen überhaupt nur die Wurzeln $\omega_\iota, \omega_\varkappa \ldots$ vorkommen, oder es sollen doch alle weiteren Wurzeln aus ihnen vermittelst ganzzahliger Coefficienten gebildet sein; und 2) es sollen ausserdem noch Wurzeln vorkommen, welche sich aus den Hauptwurzeln nicht vermittelst ganzzahliger Coefficienten bilden lassen. Im ersten Falle mögen ausser den Hauptwurzeln $\omega_\iota, \omega_\varkappa \ldots$ noch als Nebenwurzeln vorkommen $m_\iota \omega_\iota + m_\varkappa \omega_\varkappa \ldots$, wo die m_ι ganze Zahlen sind; jede solche soll mit $\omega_\alpha, \omega_\beta \ldots$ bezeichnet werden. Wenn dann zu ω_α und $-\omega_\alpha$ gehören $X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1}$ resp. $X_{\alpha_0'}, X_{\alpha_1'}$, so nehmen wir zuvörderst an, es sei $(X_{\alpha_0} X_{\alpha_0'}) = (X_{\alpha_0} X_{\alpha_1'}) = (X_{\alpha_1} X_{\alpha_1'}) = \cdots = 0$.

Dann gehört jede Nebenwurzel einem Elementartheiler ersten Grades an, und wenn nur eine einzige invariante Untergruppe vorhanden sein soll, so müssen die Nebenwurzeln einfache Wurzeln sein. Da für jede Nebenwurzel ω_α nothwendig $\big((X_{\iota_0} X_{\iota_1'}) X_\alpha\big) = 0$ ist, so muss wegen $(\iota_0, \iota_1', \alpha)$ auch $c_{\alpha\iota_0(\alpha+\iota)_0} = 0$ sein, wie man erkennt, indem man zunächst ω_α so wählt, dass $\omega_\alpha - \omega_\iota$ keine Wurzel ist, und indem man dann in der angegebenen Relation die ω_α der Reihe nach durch $\omega_\alpha - \omega_\iota$, $\omega_\alpha - 2\omega_\iota \dots$ ersetzt. Die Gleichung $c_{\alpha\iota_0(\alpha+\iota)_0} = 0$ gilt auch noch, wenn $\omega_\alpha + \omega_\iota$ eine Hauptwurzel ist. Andererseits sei ω_α eine Nebenwurzel, zu welcher man durch Addition zweier Hauptwurzeln ω_ι und $\omega_\varkappa$ gelangt; dann lehrt die Jacobische Identität für $(\alpha, \iota_0', \varkappa_1')$: $c_{\alpha\varkappa_1'\iota_1} = 0$, $c_{\alpha\iota_0'\varkappa_0} = 0$. Ebenso folgt $c_{(\alpha+\varkappa)\alpha'\varkappa_0} = 0$. Die hier gefundene Classe von Wurzeln kann demnach in folgender Weise charakterisirt werden:

Man gehe von einer einfachen (oder halbeinfachen) Gruppe G_ϵ vom Range l aus; in dieser wähle man $X_r \dots X_{r-l+1}$ mit einander vertauschbar, aber sonst ganz allgemein; die Haupttransformationen der zweigliedrigen Untergruppen, denen X_r angehört, bezeichnen wir mit $X_{\iota_1}, X_{\varkappa_1}, \dots$. Man suche nach den Anweisungen von § 12 weitere Wurzeln, welche mit den gegebenen Wurzeln vereinbar sind, und richte die Wahl so ein, dass die Coefficienten ganzzahlig sind. Ausserdem hat man eine gewisse Anzahl verschwindender Wurzeln hinzuzufügen. Jeder Nebenwurzel ω_α ordne man eine inf.* Transformation X_α so zu, dass $(X_r X_\alpha) = \omega_\alpha X_\alpha$ ist; für $\omega_\alpha = \omega_\iota$ ersetze man X_α durch X_{ι_0}. Die zu den weiteren verschwindenden Wurzeln gehörigen inf. Transformationen mögen mit $X_{r-l} \dots X_{r-k+1}$ bezeichnet werden. Dann bestimmen die $X_{r-l} \dots X_{r-k+1}$, X_{ι_0}, X_α eine invariante Untergruppe, deren Transformationen mit einander vertauschbar sind. Wenn $\omega_\iota + \omega_\alpha = \omega_\beta$ ist, so wird $(X_{\iota_1} X_\alpha)$ durch X_β ausgedrückt und $c_{\iota_1\alpha\beta}$ verschwindet nicht. Hier kann ω_α oder ω_β gleich einem $\omega_\varkappa$ sein. Ganz entsprechend wird $(X_{\iota_1} X_{\iota_0'})$ durch $X_{r-l} \dots X_{r-k+1}$ und $(X_{\iota_1} X_{r-\iota})$ durch X_{ι_0} dargestellt, ohne dass die Coefficienten verschwinden.

Wollte man die Nebenwurzeln als einfach voraussetzen und dabei annehmen, dass $(X_\alpha X_{\alpha'})$ von Null verschieden ist, so müssen sich alle $(X_{\iota_0} X_{\iota_1'})$ durch eine einzige inf. Transformation darstellen lassen. Wenn auch die Nebenwurzeln zu Elementartheilern zweiten Grades gehören, so hat man zu denjenigen Transformationen, durch welche die $(X_{\iota_0} X_{\iota_1'})$ dargestellt werden können, höchstens zwei hinzuzufügen, um alle $(X_{\alpha_0} X_{\alpha_1'})$ und $(X_{\alpha_1} X_{\alpha_1'})$ darstellen zu können. In beiden Fällen müssen noch bestimmte weitere Bedingungen erfüllt sein; ob aber überhaupt diesen Voraussetzungen Gruppen entsprechen, kann ich noch nicht angeben.

Wir nehmen jetzt an, es kämen auch solche Nebenwurzeln vor, deren Ausdruck gebrochene Coefficienten erfordert; und dabei wollen wir die Entwicklungen nur in dem Falle durchführen, wenn alle Nebenwurzeln diese Eigenschaft haben. Indem wir die $X_r \dots X_{r-l+1}$ und die X_{ι_1} in der festgesetzten Weise bestimmen, ist durch diese eine einfache oder halbeinfache Gruppe gegeben, in welcher alle Coefficienten c als bekannt vorauszusetzen sind. Zugleich wird durch diese Transformationen nebst den X_{ι_0} und den $(X_{\iota_0} X_{\iota_1'})$ eine Untergruppe bestimmt. Daraus folgt, dass die $(X_{\iota_0} X_{\iota_1'})$ sich durch l von einander unabhängige inf. Transformationen, aber nicht durch weniger darstellen lassen. Man kann also

$$c_{\iota_0 \iota_1' (r-l-\nu)} = c_{\iota_1 \iota_0' (r-l-\nu)} = c_{\iota_1 \iota_1' (r-\nu)}$$

machen für $\nu = 0 \dots l - 1$; ebenso

$$(X_{r-l-\nu} X_{\iota_1}) = \omega_\iota^{(\nu)} X_{\iota_0},$$

und für

$$\omega_\iota + \omega_\varkappa = \omega_\lambda : c_{\iota_1 \varkappa_0 \lambda_0} = c_{\iota_0 \varkappa_1 \lambda_0} = c_{\iota_1 \varkappa_1 \lambda_1}.$$

Machen wir zuerst die Voraussetzung, dass die Nebenwurzeln nicht nur zu Elementartheilern ersten Grades gehören, sondern sogar einfach sind, so folgt aus $(\iota_0, \iota_1', \alpha)$, nämlich aus der Gleichung:

$$c_{\iota_1' \alpha (\alpha-\iota)} c_{(\alpha-\iota) \iota_0 \alpha} + c_{\alpha \iota_0 (\alpha+\iota)} c_{(\alpha+\iota) \iota_1' \alpha} = 0,$$

dass $c_{\alpha \iota_0 (\alpha+\iota)} = 0$ ist. Die Relation $\left(\alpha, (\iota - \alpha), \iota_1'\right)$ lehrt, dass alle $(X_\alpha X_{\alpha'})$ sich entweder aus den $(X_{\iota_0} X_{\iota_1'})$ allein oder mit Hinzufügung einer einzigen weitern Grösse ergeben. Es erübrigt nur noch die $c_{\alpha\beta\iota_0}$ für $\omega_\alpha + \omega_\beta = \omega_\iota$ zu bestimmen, worauf hier nicht näher eingegangen werden soll. Um ein Beispiel anzuführen, bestimme man eine Gruppe durch die Transformationen $Y_0, Y_2, Y_{-2}, X_0, X_2, X_{-2}, X_1, X_{-1}, Z$, indem wir festsetzen:

$$\begin{array}{llll}
(Y_2 Y_{-2}) = Y_0, & (X_2 Y_{-2}) = (Y_2 X_{-2}) = X_0, & & (Y_0 Y_2) = -2 Y_2, \\
(Y_0 Y_{-2}) = 2 Y_{-2}, & (Y_0 X_2) = -2 X_2, & & (Y X_{-2}) = 2 X_{-2}, \\
(X_0 Y_2) = -2 X_2, & (X_0 Y_{-2}) = 2 X_{-2}, & & (Y X_1) = -X_1, \\
(Y X_{-1}) = X_{-1}, & (Y_2 X_{-1}) = X_1, & (Y_{-2} X_1) = X_{-1}, & (X_1 X_{-1}) = Z,
\end{array}$$

wo Z eine ausgezeichnete eingliedrige Untergruppe ist. Im vorliegenden Falle zerfällt die sechsgliedrige invariante Untergruppe in zwei dreigliedrige; ob das allgemein stattfindet, möge offen gelassen werden.

Wir nehmen jetzt an, auch die Nebenwurzeln gehörten zu Elementartheilern zweiten Grades. Indem dann zu ω_α die inf. Transformationen X_{α_0} und X_{α_1} und zu $-\omega_\alpha$ die $X_{\alpha_0'}$ und $X_{\alpha_1'}$ zugeordnet werden, muss $(X_{\alpha_0} X_{\alpha_0'}) = 0$ sein. Wir bilden die Jacobi'sche Identität für $(\iota_0, \iota_1', \alpha_1)$ und ersetzen ω_α hier der Reihe nach durch alle Wurzeln, zu denen man aus einer solchen durch Addition und Subtraction von

ω_ι gelangt. Dann zeigt sich, dass wenn $((X_{\iota_1'} X_{\iota_0}) X_{\alpha_1})$ nicht verschwindet, auch kein $c_{\iota_0 \alpha_1 (\iota+\alpha)_0}$ verschwindet, wofern $\omega_\alpha + \omega_\iota$ eine neue Wurzel ist. Fügt man hierzu eine passend gewählte Relation $(\iota_0, \alpha_1, \varkappa_1)$, so erkennt man, dass überhaupt, wenn irgend einmal $c_{\iota_0 \alpha_1 (\iota+\alpha)_0}$ von Null verschieden ist, diess jedesmal für $c_{\varkappa_0 \beta_1 (\varkappa+\beta)_0}$ eintreten muss, wofern nur $\omega_\varkappa + \omega_\beta$ eine neue Wurzel ist.

Ganz entsprechend zeigen wir unter Anwendung von $(\alpha_0, \alpha_1', \iota_1)$, dass mit $(X_{\alpha_0} X_{\alpha_1'}) \neq 0$ für $\omega_\alpha + \omega_\beta = \omega_\iota$ auch $c_{\alpha_1 \beta_0 \iota_0}$ von Null verschieden sein muss, und dass umgekehrt das Nicht-Verschwinden eines Coefficienten $c_{\alpha_1 \beta_0 \iota_0}$ dasselbe für $(X_{\alpha_0} X_{\alpha_1'})$ nach sich zieht.

Man kann immer eine Hauptwurzel ω_ι und zwei Nebenwurzeln ω_α und ω_β so auswählen, dass $\omega_\alpha + \omega_\iota$ eine neue Nebenwurzel ω_γ und $\omega_\alpha + \omega_\beta + \omega_\iota$ eine weitere Hauptwurzel $\omega_\varkappa$, dass aber $\omega_\iota + \omega_\beta$ keine neue Wurzel ist. Dann lehrt die Relation $(\iota_0, \alpha_1, \beta_1) : c_{\iota_0 \alpha_1 \gamma_0} c_{\gamma_0 \beta_1 \varkappa_0} = 0$, dass entweder $(X_{\iota_0} X_{\alpha_1})$ oder $(X_{\gamma_0} X_{\beta_1})$ gleich Null sein muss. Somit werden wir hier auf zwei sich gegenseitig ausschliessende Möglichkeiten geführt, nämlich ob die Coefficienten $c_{\iota_0 \alpha_1 (\alpha+\iota)_0}$ oder ob die $c_{\alpha_0 \beta_1 \iota_0}$ von Null verschieden sind. Der letztere Fall liefert allerdings Elementartheiler ersten Grades.

Umgekehrt kann man aber den Fall, dass derartige Doppelwurzeln vorhanden sind, immer in der angegebenen Weise behandeln, wenn man nur die X_{α_0} so wählt, dass $(X_{\iota_0} X_{\alpha_0})$ stets gleich Null ist.

In der ersten Classe bilden bereits die X_{α_0} für sich eine invariante Untergruppe, und zwar eine solche, deren Transformationen sämmtlich mit einander vertauschbar sind; dagegen enthält die invariante Untergruppe für die zweite Classe keine invariante Untergruppe von geringerer Gliederzahl unter sich. Wollten wir annehmen, dass sowohl die $(X_{\alpha_1} X_{\beta_0})$ wie die $(X_{\iota_0} X_{\alpha_1})$ immer gleich Null sind, so würden wir zu vollständig getrennten invarianten Untergruppen gelangen.

Jede der beiden angegebenen Möglichkeiten schliesst wieder die beiden Fälle ein, dass auch alle $(X_{\alpha_0} X_{\alpha_1'})$, $(X_{\alpha_1} X_{\alpha_1'})$ sich bereits durch die $(X_{\iota_0} X_{\iota_1'})$ darstellen lassen oder neue inf. Transformationen bedürfen. Im ersten Fall ist $k = 2l$, im zweiten $= 2l + 1$ oder $= 2l + 2$. Es unterscheiden sich nämlich die $(X_{\alpha_0} X_{\alpha_1'})$ nur durch einen constanten Factor, die $(X_{\alpha_1} X_{\alpha_1'})$ dagegen lassen sich durch eine unter ihnen und die $(X_{\iota_0} X_{\iota_1'})$ ausdrücken.

Als Beispiele führe ich zwei zehngliedrige Gruppen vom Range Eins an, von denen zehn inf. Transformationen mit X_0, X_1, X_1', Y_0, Y_1, Y_1', U, U', V, V' bezeichnet werden mögen. In beiden Gruppen soll sein:

$$(X_0 X_1) = -2 X_1, \quad (X_0 X_1') = 2 X_1', \quad (X_0 Y_1) = -2 Y_1, \quad (X_0 Y_1') = 2 Y_1,$$
$$(X_0 U) = -U, \quad (X_0 U') = U', \quad (X_0 V) = -V, \quad (X_0 V') = V',$$

$$(Y_0 X_1) = -2Y_1, \quad (Y_0 X_1') = 2Y_1', \quad (Y_0 U) = -V, \quad (Y_0 U') = V',$$
$$(X_1 X_1') = X_0, \quad (Y_1 X_1') = (X_1 Y_1') = Y_0,$$
$$(X_1' V) = -V', \quad (X_1' U) = -U', \quad (X_1 V') = V, \quad (X_1 U') = U.$$

Hierzu treten in dem einen Falle:

$$(Y_1 U') = V, \quad (Y_1' U) = -V', \quad (Y_0 U) = -V, \quad (Y_0 U') = V',$$
$$(U V) = (U' V') = (U V') = (U' V) = 0.$$

Im zweiten Falle dagegen ist:

$$(Y_1 U') = (Y_1' U) = (Y_0 U) = (Y_0 U') = 0,$$
$$(U V) = 2Y_1, \quad (U' V') = 2Y_1', \quad (U V') = Y_0, \quad (U' V) = Y_0.$$

Die nicht hingeschriebenen Combinationen geben ein verschwindendes Resultat. Die erste Gruppe lässt sich in vier Variabeln x, y, u, v, wenn denselben die Differentialquotienten p, q, r, s entsprechen, in folgender Weise darstellen:

$$X_1 = p, \; Y_1 = q, \; U = r, \; V = s, \quad X_0 = 2xp + 2yq + ru + sv,$$
$$Y_0 = 2xq + 2ys, \quad X_1' = x^2 p + 2xyq + (ur + vs)xr + yus,$$
$$Y_1' = x^2 q + xus, \quad U' = ys + xr, \quad V' = xs.$$

Die zweite drücken wir in drei Variabeln entsprechend aus:

$$X_1 = p, \; Y_1 = q, \; U = r, \; V = 2zq, \; X_0 = 2xp + 2yq + zr,$$
$$Y_0 = 2xq, \quad X_1' = x^2 p + 2xyq + xzr,$$
$$Y_1' = x^2 q, \quad U' = xr, \quad V' = 2xzq.$$

§ 24.

Zusammensetzung aller Gruppen, welche ihre eigenen Hauptuntergruppen sind.

In einer Gruppe, welche ihre eigene Haupt-Uutergruppe ist, sei $X_r f$ als eine inf. Transformation ganz allgemeiner Art vorausgesetzt. Für diese habe die charakteristische Gleichung k verschwindende Wurzeln, so dass nach einem früher bewiesenen Satze $k-1$ weitere Transformationen $X_{r-1} \ldots X_{r-k+1}$ vorkommen müssen, welche mit X_r und unter einander vertauschbar sind. Zu jeder nicht verschwindenden Wurzel ω_ι gehören bestimmte Transformationen $X_{\iota_0} \ldots X_{\iota_a}$, für welche die Gleichungen bestehen:

$$(X_r X_{\iota_0}) = \omega_\iota X_{\iota_0},$$
$$(X_r X_{\iota_1}) = \omega_\iota X_{\iota_1} + c_{r \iota_1 \iota_0} X_{\iota_0} \cdots (X_r X_{\iota_a}) = \omega_\iota X_{\iota_a} + \cdots.$$

Die r auf diese Weise gefundenen inf. Transformationen werden der Untersuchung zu Grunde gelegt. Da die durch die $(X_\iota X_\varkappa)$ bestimmte

Gruppe mit der gegebenen zusammenfallen soll, so müssen zu gewissen Wurzeln die entgegengesetzt gleichen vorkommen, und wenn $X_{\iota_0'}, X_{\iota_1'} \ldots$ zu $-\omega_\iota$ gehören, so müssen für gewisse Paare entgegengesetzt gleicher Wurzeln die Beziehungen bestehen:

(1) $$(X_{\iota_a} X_{\iota_b}') = \sum^\nu c_{\iota_a \iota_b' (r-\nu)} X_{(r-\nu)},$$

wo wenigstens einige der Coefficienten nicht verschwinden. Da aber nach den Entwicklungen, welche im Anfang des vorigen Paragraphen im Anschluss an die Gleichungen (2) — (4) durchgeführt sind und welche sich unmittelbar übertragen lassen, zugleich mit der Gleichung

$$\sum^\nu c_{\iota_a \iota_b' (r-\nu)} \omega_\iota^{(\nu)} = 0 \quad \text{auch} \quad \sum^\nu c_{\iota_a \iota_b' (r-\nu)} \omega_\alpha^{(\nu)} = 0$$

sein muss, wo $\omega_\alpha \ldots \omega_\alpha^{(k-1)}$ irgend zusammengehörige Wurzeln für $X_r \ldots X_{r-k+1}$ sind, so muss es möglich sein, die ω_ι und $-\omega_\iota$ und die Marken $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ so zu wählen, dass

(2) $$\sum^\nu c_{\iota_a \iota_b' (r-\nu)} \omega_\iota^{(\nu)} \neq 0$$

ist.

Aus dieser Gleichung ergeben sich weitere Folgerungen. Die Relation $(\iota_a, \iota_b', \iota_0')$, zu der man für den Fall, dass $-2\omega_\iota \ldots$ Wurzeln sind, noch $\left(\iota_a, \iota_b', (2\iota)_0'\right) \ldots$ fügt, sowie überhaupt die Relationen $(\iota_a, \iota_b', \iota_c')$ für $\mathfrak{c} = 0 \ldots \mathfrak{b} - 1$, liefern das Resultat, dass

1) nicht alle Coefficienten $c_{\iota_a \iota_0' (r-\nu)}$ gleich Null sind, und dass

2) für $\mathfrak{c} = 0 \ldots \mathfrak{b} - 1$: $\sum c_{\iota_a \iota_c' (r-\nu)} \omega_\iota^{(\nu)} = 0$ ist.

Ebenso dürfen, wenn $\mathfrak{b} < \mathfrak{a}$ ist, die Coefficienten $c_{\iota_b \iota_b' (r-\nu)}$ nicht sämmtlich verschwinden, aber es muss $\sum c_{\iota_b \iota_b' (r-\nu)} \omega_\iota^{(\nu)} = 0$ sein.

Die Jacobi'sche Identität für (r, ι_c, ι_0') liefert:

$$c_{r \iota_c \iota_{c-1}} (X_{\iota_{c-1}} X_{\iota_0'}) + c_{r \iota_{c-1} \iota_{c-2}} (X_{\iota_{c-2}} X_{\iota_0'}) + \cdots = 0.$$

Nimmt man hier an, $(X_{\iota_{c-2}} X_{\iota_0'}) \ldots (X_{\iota_0} X_{\iota_0'})$ seien gleich Null, aber $(X_{\iota_{c-1}} X_{\iota_0'})$ nicht, so folgt $c_{r \iota_c \iota_{c-1}} = 0$; dann kann also ω_ι keinem Elementartheiler $(\mathfrak{c} + 1)^{\text{ten}}$ Grades angehören. Wenden wir diess auf die oben gemachte Voraussetzung an, so folgt:

1) ω_ι kann zu keinem $(\mathfrak{a} + 2)$-fachen Elementartheiler gehören;

2) es ist $(X_{\iota_{a-1}} X_{\iota_0'}) = \cdots = (X_{\iota_0} X_{\iota_0'}) = 0$.

Ebenso folgt, dass nur $(\omega + \omega_\iota)^{\mathfrak{b}+1}$, nicht aber $(\omega + \omega_\iota)^{\mathfrak{b}+2}$ ein Elementartheiler sein kann, und zugleich $(X_{\iota_0} X_{\iota_{b-1}}') = \cdots = 0$ ist.

Die Jacobi'sche Identität für $(r, \iota_c, \iota_\mathfrak{d}')$ liefert für $\mathfrak{c} + \mathfrak{d} = \mathfrak{b} + 1$, wofern $\mathfrak{b}$ die kleinere der Zahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ist, die Gleichung:

$$c_{r \iota_c \iota_{c-1}} (X_{\iota_{c-1}} X_{\iota_\mathfrak{d}}') = c_{r \iota_\mathfrak{d}' \iota_{\mathfrak{d}-1}'} (X_{\iota_c} X_{\iota_{\mathfrak{d}-1}}'),$$

woraus sich ergiebt, dass alle $(X_{\iota_\varrho} X'_{\iota_\sigma})$, für welche $\varrho + \sigma = \mathfrak{b}$ ist, von Null verschieden sind und sich von $(X_{\iota_0} X'_{\iota_\mathfrak{b}})$ nur durch einen constanten Factor unterscheiden. Hieraus folgt denn, dass in (1) und (2) die Nummern $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ einander gleich sind. In gleicher Weise sind überhaupt, wenn $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = \mathfrak{c} + \mathfrak{d}$ und $2\mathfrak{a} \geqq \mathfrak{c} + \mathfrak{d} > \mathfrak{a}$ ist, die $(X_{\iota_\mathfrak{m}} X'_{\iota_\mathfrak{n}})$ und $(X_{\iota_\mathfrak{c}} X'_{\iota_\mathfrak{d}})$ ausser durch einen constanten, von Null verschiedenen Factor nur um solche Grössen $(X_{\iota_\varrho} X'_{\iota_\sigma})$ verschieden, für welche $\varrho + \sigma < \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$ ist.

Die Relationen $(\iota_0, \iota_\mathfrak{c}, \iota'_\mathfrak{a})$ und $(\iota_\mathfrak{c}, \iota_\mathfrak{a}, \iota'_\mathfrak{a})$ zeigen entsprechend der Gl. (12) des vorigen Paragraphen, dass für $\mathfrak{d} < \mathfrak{c} \leqq \mathfrak{a}$

$$\sum c_{\iota_0 \iota'_\mathfrak{a} (r-\nu)} \, c_{(r-\nu) \iota_\mathfrak{c} \iota_\mathfrak{d}} = 0$$

ist, dass dagegen

$$\sum c_{\iota_\mathfrak{c} \iota'_\mathfrak{a} (r-\nu)} \, c_{(r-\nu) \iota_\mathfrak{a} \iota_\mathfrak{c}}$$

sich von

$$\sum c_{\iota_\mathfrak{a} \iota'_\mathfrak{a} (r-\nu)} \, \omega_\iota^{(\nu)}$$

nur durch einen constanten Factor unterscheidet. Daraus folgt, dass sich $(X_{\iota_\mathfrak{c}} X'_{\iota_\mathfrak{a}})$ nicht durch $(X_{\iota_0} X'_{\iota_\mathfrak{a}}) \ldots (X_{\iota_{\mathfrak{c}-1}} X'_{\iota_\mathfrak{a}})$ darstellen lässt, dass überhaupt die sämmlichen Ausdrücke $(X_{\iota_\varrho} X'_{\iota_\sigma})$ gerade $\mathfrak{a} + 1$ wesentlich von einander unabhängige Functionen der $X_r \ldots X_{r-k+1}$ sind.

Wir fassen die vorstehenden Resultate in folgender Weise zusammen:

Damit die Gruppe ihre eigene Haupt-Untergruppe ist, muss ihre charakteristische Gleichung für eine ganz allgemeine inf. Transformation mindestens ein Paar entgegengesetzt gleicher Wurzeln haben. Wenn k der Coefficienten $\psi_r, \psi_{r-1} \ldots \psi_{r-k+1}$ identisch verschwinden und damit alle Unterdeterminanten $r - k + 1^{\text{ten}}$ Grades der charakteristischen Determinante, so mögen mit der einmal angenommenen allgemeinen inf. Transformation $X_r f$ die weiteren $X_{r-1} \ldots X_{r-k+1}$ vertauschbar sein. Zugleich möge einer Wurzel ω_ι für X_r die Wurzel $\omega_\iota^{(\nu)}$ für $X_{r-\nu}$ entsprechen. Zugleich mögen zu ω_ι $\mathfrak{a} + 1$ inf. Transformationen gehören, so dass die Gleichungen erfüllt sind:

$$(X_r X_{\iota_\mathfrak{a}}) = \omega_\iota X_{\iota_\mathfrak{a}} + X_{\iota_{\mathfrak{a}-1}},$$
$$(X_r X_{\iota_{\mathfrak{a}-1}}) = \omega_\iota X_{\iota_{\mathfrak{a}-1}} + X_{\iota_{\mathfrak{a}-2}} \cdots (X_r X_{\iota_0}) = \omega_\iota X_{\iota_0},$$

und ebenso mögen zu $-\omega_\iota$ die Transformationen gehören:

$$(X_r X'_{\iota_\mathfrak{a}}) = -\omega_\iota X'_{\iota_\mathfrak{a}} + X'_{\iota_{\mathfrak{a}-1}},$$
$$(X_r X'_{\iota_{\mathfrak{a}-1}}) = -\omega_\iota X'_{\iota_{\mathfrak{a}-1}} + X'_{\iota_{\mathfrak{a}-2}} \cdots (X_r X_{\iota'_0}) = -\omega_\iota X_{\iota'_0}.$$

Endlich dürfen X_{ι_a} *und* X'_{ι_a} *nicht mit einander vertauschbar und soll* $\sum^{\nu} c_{\iota_a \iota'_a (r-\nu)}\, \omega_\iota^{(\nu)}$ *von Null verschieden sein.*

Dann muss je einer der zu ω_ι *und* $-\omega_\iota$ *gehörigen Elementartheiler den Grad* $\mathfrak{a}+1$, *aber keiner derselben darf einen höheren erreichen. Ferner ist* $(X_{\iota_\varrho} X'_{\iota_\sigma}) = 0$, *wenn* $\varrho + \sigma < \mathfrak{a}$ *ist, aber* $(X_{\iota_\varrho} X'_{\iota_\sigma}) \neq 0$ *für* $\varrho + \sigma \geq \mathfrak{a}$; *ist* $\mathfrak{r} + \mathfrak{s} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$, *so ist bis auf einen von Null verschiedenen Factor das* $(X_{\iota_\mathfrak{m}} X'_{\iota_\mathfrak{n}})$ *gleich* $(X_{\iota_\mathfrak{r}} X'_{\iota_\mathfrak{s}})$ *vermehrt um Ausdrücke von solchen* $(X_{\iota_\varrho} X'_{\iota_\sigma})$, *für welche* $\varrho + \sigma < \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$ *ist. Alle diese* $(X_{\iota_\varrho} X'_{\iota_\sigma})$ *stellen* $\mathfrak{a}+1$ *von einander unabhängige Ausdrücke dar. Aber wenn* $\varrho + \sigma < 2\mathfrak{a}$ *ist, so ist*

$$\sum^{\nu} c_{\iota_\varrho \iota'_\sigma (r-\nu)}\, \omega_a^{(\nu)} = 0,$$

wenn $\omega_a, \omega'_a \ldots \omega_a^{(k-1)}$ *irgend einander entsprechende Wurzeln für* $X_r, X_{r-1} \ldots X_{r-k+1}$ *sind.*

Wenn eine Wurzel den im voranstehenden Lehrsatze aufgezählten Bedingungen genügt, so möge sie als Hauptwurzel bezeichnet werden. Dazu ist erforderlich, dass auch die entgegengesetzt gleiche Grösse eine Wurzel ist, und dass, wenn zur ersten die Transformationen $X_{\iota_0}, X_{\iota_1} \ldots X_{\iota_\mathfrak{a}}$ gehören, zur zweiten die $X_{\iota'_0}, X_{\iota'_1} \ldots X'_{\iota_\mathfrak{a}}$ gehören, und dass diejenige Transformation, welche man durch Combination von $X_{\iota_\mathfrak{a}}$ und $X'_{\iota_\mathfrak{a}}$ erhält, mit keinem $X_{\iota_\mathfrak{a}} \ldots X_{\iota_0}$ vertauscht werden kann. Es ergiebt sich unmittelbar, dass wenn ω_ι eine Hauptwurzel ist, dasselbe von $-\omega_\iota$ gilt.

Wir suchen jetzt alle von einander unabhängigen Hauptwurzeln. Dabei betrachten wir mehrere Hauptwurzeln, z. B. $\omega_\iota, \omega_\varkappa, \omega_\lambda$ nur dann als unabhängig, wenn die Gleichungen

$$\sum^{\nu} (a c_{\iota_\mathfrak{a} \iota'_\mathfrak{a} (r-\nu)} + b c_{\varkappa_\mathfrak{b} \varkappa'_\mathfrak{b} (r-\nu)} + c c_{\lambda_\mathfrak{c} \lambda'_\mathfrak{c} (r-\nu)})\, \omega_\alpha^{(\nu)} = 0,$$
$$\sum^{\nu} (a c_{\iota_\mathfrak{a} \iota'_\mathfrak{a} (r-\nu)} + b c_{\varkappa_\mathfrak{b} \varkappa'_\mathfrak{b} (r-\nu)} + c c_{\lambda_\mathfrak{c} \lambda'_\mathfrak{c} (r-\nu)})\, \omega_\beta^{(\nu)} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

für alle Wurzeln $\omega_\alpha, \omega_\beta \ldots$ und constante Werthe a, b, c nur dann erfüllt werden können, wenn a, b, c gleich Null sind. Da die Gruppe ihre eigene Haupt-Untergruppe ist, so müssen, wenn l die Zahl der von einander unabhängigen Hauptwurzeln ist, zwischen den $r-k$ Wurzelreihen noch $k-l$ lineare Bedingungen bestehen. Somit ist l gleich dem Range der Gruppe.

Wir machen die Voraussetzung, dass alle Hauptwurzeln zu Elementartheilern von demselben Grade gehören, indem wir hoffen, dass diese Voraussetzung selbst in den Fällen, wo sie nicht nothwendig ist, uns für die Bildung der Gruppen den nöthigen Anhalt liefert. So seien ω_ι, $\omega_\varkappa$, $\omega_\iota + \omega_\varkappa$ drei Hauptwurzeln und alle drei seien $(\mathfrak{a}+1)$-fache Wurzeln im Sinne der Gleichungen (1). Dann bilde man für $\mathfrak{c} < \mathfrak{a}$ die Jacobi'sche Identität $\left(\iota_\mathfrak{a},\ \varkappa_\mathfrak{a},\ (\iota+\varkappa)'_\mathfrak{c}\right)$:

$$\sum_0^{\mathfrak{a}}{}^{\mathfrak{m}} \left\{ c_{\iota_\mathfrak{a} \varkappa_\mathfrak{a} (\iota+\varkappa)_\mathfrak{m}} \left(X_{(\iota+\varkappa)_\mathfrak{m}} X_{(\iota+\varkappa)'_\mathfrak{c}}\right) + c_{\varkappa_\mathfrak{a} (\iota+\varkappa)'_\mathfrak{c} \iota'_\mathfrak{m}} \left(X_{\iota'_\mathfrak{m}} X_{\iota_\mathfrak{a}}\right) + \right.$$
$$\left. + c_{(\iota+\varkappa)'_\mathfrak{c} \iota_\mathfrak{a} \varkappa'_\mathfrak{m}} \left(X_{\varkappa'_\mathfrak{m}} X_{\varkappa_\mathfrak{a}}\right) \right\} = 0.$$

Da ω_ι und $\omega_\varkappa$ unabhängig sind und demnach $(X_{\varkappa'_\mathfrak{a}} X_{\varkappa_\mathfrak{a}})$ nicht durch $(X_{\iota_\mathfrak{a}} X_{\iota'_\mathfrak{a}})$ und solche $(X_{\lambda_\varrho} X_{\lambda'_\sigma})$ dargestellt werden kann, für welche $\varrho + \sigma < 2\mathfrak{a}$ ist, so muss

(3) $$c_{\varkappa_\mathfrak{a} (\iota+\varkappa)'_\mathfrak{c} \iota'_\mathfrak{a}} = c_{(\iota+\varkappa)'_\mathfrak{c} \iota_\mathfrak{a} \varkappa'_\mathfrak{a}} = 0 \quad (\text{für } \mathfrak{c} < \mathfrak{a})$$

sein. Ebenso folgt für $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c} < \mathfrak{a}$, dass ist:

$$c_{\varkappa_\mathfrak{b} (\iota+\varkappa)'_\mathfrak{c} \iota'_\mathfrak{a}} = 0.$$

Die vorstehende Entwicklung gilt auch für $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}$, wenn $\omega_\iota + \omega_\varkappa$ keine Hauptwurzel ist; dann folgt:

$$c_{\varkappa_\mathfrak{a} (\iota+\varkappa)'_\mathfrak{a} \iota'_\mathfrak{a}} = 0.$$

Ebenso, wenn ω_α, $-\omega_\alpha$, $\omega_\alpha + \omega_\iota$, $-\omega_\alpha - \omega_\iota$ Nebenwurzeln sind, zu denen etwa die Marken $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}$ gehören, so liefert die Relation $\left(\iota_\mathfrak{a},\ \alpha_\mathfrak{c},\ (\alpha+\iota)'_\mathfrak{b}\right)$ in gleicher Weise:

$$c_{\alpha_\mathfrak{c} (\alpha+\iota)'_\mathfrak{b} \iota'_\mathfrak{a}} = 0.$$

Hieraus folgt der bereits früher erwähnte Satz:

Wenn eine r-gliedrige Gruppe des Ranges l einfach oder auch nur halbeinfach sein soll, so muss die charakteristische Gleichung für eine allgemeine inf. Transformation $r - l$ von Null verschiedene ungleiche Wurzeln haben, welche paarweise entgegengesetzt gleich sind, und die zu entgegengesetzt gleichen Wurzeln gehörigen Transformationen dürfen nicht vertauschbar sein.

Die Jacobi'sche Identität für $(r,\ \iota_\mathfrak{m},\ \varkappa_\mathfrak{n})$ liefert die Gleichung:

$$c_{r \iota_\mathfrak{m} \iota_{\mathfrak{m}-1}} (X_{\iota_{\mathfrak{m}-1}} X_{\varkappa_\mathfrak{n}}) + c_{r \iota_\mathfrak{m} \iota_{\mathfrak{m}-2}} (X_{\iota_{\mathfrak{m}-2}} X_{\varkappa_\mathfrak{n}}) + c_{r \iota_\mathfrak{m} \iota_{\mathfrak{m}-3}} (X_{\iota_{\mathfrak{m}-3}} X_{\varkappa_\mathfrak{n}}) + \cdots$$
$$+ c_{r \varkappa_\mathfrak{n} \varkappa_{\mathfrak{n}-1}} (X_{\iota_\mathfrak{m}} X_{\varkappa_{\mathfrak{n}-1}}) + c_{r \varkappa_\mathfrak{n} \varkappa_{\mathfrak{n}-2}} (X_{\iota_\mathfrak{m}} X_{\varkappa_{\mathfrak{n}-2}}) + c_{r \varkappa_\mathfrak{n} \varkappa_{\mathfrak{n}-3}} (X_{\iota_\mathfrak{m}} X_{\varkappa_{\mathfrak{n}-3}}) + \cdots$$
(4) $$= c_{\iota_\mathfrak{m} \varkappa_\mathfrak{n} (\iota+\varkappa)_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}} \Big(c_{r (\iota+\varkappa)_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} (\iota+\varkappa)_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-1}} X_{(\iota+\varkappa)_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-1}} +$$
$$+ c_{r (\iota+\varkappa)_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} (\iota+\varkappa)_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-2}} X_{(\iota+\varkappa)_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-2}} + \cdots \Big)$$
$$+ c_{\iota_\mathfrak{m} \varkappa_\mathfrak{n} (\iota+\varkappa)_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-1}} \Big(c_{r (\iota+\varkappa)_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-1} (\iota+\varkappa)_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-2}} X_{(\iota+\varkappa)_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-2}} +$$
$$+ c_{r (\iota+\varkappa)_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-1} (\iota+\varkappa)_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-3}} X_{(\iota+\varkappa)_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-3}} + \cdots \Big) + \cdots .$$

Hierin nehme man den Coefficienten von $X_{(\iota+\varkappa)_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-1}}$. Indem man zunächst $\mathfrak{m}+\mathfrak{n}=\mathfrak{a}$ sein lässt, wird der rechts stehende Coefficient gleich Null; nun setze man $\mathfrak{m}=\mathfrak{a}$, $\mathfrak{n}=0$ und erhält

$$c_{\iota_{\mathfrak{a}-1}\varkappa_0(\iota+\varkappa)_{\mathfrak{a}-1}}=0;$$

mit Berücksichtigung dieser Gleichung folgt für $\mathfrak{m}=\mathfrak{a}-1$, $\mathfrak{n}=1$:

$$c_{\iota_{\mathfrak{a}-2}\varkappa_1(\iota+\varkappa)_{\mathfrak{a}-1}}=0$$

und so fahre man fort, indem man für $\mathfrak{m}+\mathfrak{n}=\mathfrak{a}$ der Reihe nach $\mathfrak{n}=2, 3\ldots$ sein lässt. Daraus folgt, dass für $\mathfrak{m}+\mathfrak{n}=\mathfrak{a}-1$ der Coefficient

$$c_{\iota_\mathfrak{m}\varkappa_{\mathfrak{a}-\mathfrak{m}-1}(\iota+\varkappa)_{\mathfrak{a}-1}}=0$$

sein muss.

Jetzt setze man in dieser selben Gleichung:

$$c_{r\iota_\mathfrak{m}\iota_{\mathfrak{m}-1}}\,c_{\iota_{\mathfrak{m}-1}\varkappa_\mathfrak{n}(\iota+\varkappa)_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-1}}+c_{r\varkappa_\mathfrak{n}\varkappa_{\mathfrak{n}-1}}\,c_{\iota_\mathfrak{m}\varkappa_{\mathfrak{n}-1}(\iota+\varkappa)_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-1}}=$$
$$=c_{\iota_\mathfrak{m}\varkappa_\mathfrak{n}(\iota+\varkappa)_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}}\,c_{r(\iota+\varkappa)_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}(\iota+\varkappa)_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-1}}$$

$\mathfrak{m}+\mathfrak{n}=\mathfrak{a}-1$, wodurch die rechte Seite verschwindet, und lasse wiederum, wie eben, $\mathfrak{n}$ der Reihe nach die Werthe $0, 1\ldots\mathfrak{a}-1$ annehmen, woraus sich ergiebt, dass auch für $\mathfrak{m}+\mathfrak{n}=\mathfrak{a}-2$ der Coefficient $c_{\iota_\mathfrak{m}\varkappa_\mathfrak{n}(\iota+\varkappa)_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}}=0$ ist. So kann man beliebig fortfahren und erhält allgemein:

(5) $$c_{\iota_\mathfrak{m}\varkappa_\mathfrak{n}(\iota+\varkappa)_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}}=0.$$

Indem man diese Gleichung berücksichtigt und den Coefficienten von $X_{(\iota+\varkappa)_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-2}}$ in (4) sucht, erhält man die Gleichung:

(6) $$c_{r\iota_\mathfrak{m}\iota_{\mathfrak{m}-1}}\,c_{\iota_{\mathfrak{m}-1}\varkappa_\mathfrak{n}(\iota+\varkappa)_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-2}}+c_{r\varkappa_\mathfrak{n}\varkappa_{\mathfrak{n}-1}}\,c_{\iota_\mathfrak{m}\varkappa_{\mathfrak{n}-1}(\iota+\varkappa)_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-2}}=$$
$$=c_{r(\iota+\varkappa)_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-1}(\iota+\varkappa)_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-2}}\,c_{\iota_\mathfrak{m}\varkappa_\mathfrak{n}(\iota+\varkappa)_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-1}}.$$

Indem man in der Gleichung (6) $\mathfrak{m}+\mathfrak{n}=\mathfrak{a}+1$ setzt und der Reihe nach $\mathfrak{n}=1, 2, \ldots\mathfrak{a}$ nimmt, dann $\mathfrak{m}+\mathfrak{n}=\mathfrak{a}$ sein lässt u. s. f., erkennt man, dass alle $c_{\iota_\mathfrak{m}\varkappa_\mathfrak{n}(\iota+\varkappa)_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-1}}$ durch eine einzige dargestellt werden können vermittelst eines nicht verschwindenden Factors. Nun enthält aber $(X_{\iota_\mathfrak{a}}X_{\iota'_{\mathfrak{a}-1}})$ wegen der Möglichkeit, $X_{\iota'_{\mathfrak{a}-1}}$ durch eine lineare Function von $X_{\iota'_{\mathfrak{a}-1}}, X_{\iota'_{\mathfrak{a}-2}}\ldots X_{\iota'_0}$ zu ersetzen und wegen der Unabhängigkeit von $(X_{\iota_\mathfrak{a}}X_{\iota'_0})\ldots(X_{\iota_\mathfrak{a}}X_{\iota'_{\mathfrak{a}-1}})$ noch $\mathfrak{a}-1$ willkürliche Grössen, während $(X_{\varkappa_\mathfrak{a}}X_{\varkappa'_{\mathfrak{a}-2}})$ nur $\mathfrak{a}-2$ willkürliche Constanten enthält. Folglich kann man $(X_{\iota_\mathfrak{a}}X_{\iota'_{\mathfrak{a}-1}})$ nicht durch $(X_{\varkappa_\mathfrak{a}}X_{\varkappa'_0})\ldots(X_{\varkappa_\mathfrak{a}}X_{\varkappa'_{\mathfrak{a}-2}})$ und $(X_{(\iota+\varkappa)_\mathfrak{a}}X_{(\iota+\varkappa)'_0})\ldots(X_{(\iota+\varkappa)_\mathfrak{a}}X_{(\iota+\varkappa)'_{\mathfrak{a}-2}})$ vermittelst fester Constanten darstellen. Bildet man also $(\iota_\mathfrak{m}, \varkappa_\mathfrak{n}, (\iota+\varkappa)_\mathfrak{a}')$ für $\mathfrak{m}+\mathfrak{n}=\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{m}>0$, $\mathfrak{n}>0$ so folgt:

$$c_{\iota_\mathfrak{m}\varkappa_\mathfrak{n}(\iota+\varkappa)_{\mathfrak{a}-1}}(X_{(\iota+\varkappa)_{\mathfrak{a}-1}}X_{(\iota+\varkappa)'_\mathfrak{a}})+\cdots+c_{\varkappa_\mathfrak{n}(\iota+\varkappa)'_\mathfrak{a}\iota'_{\mathfrak{a}-1}}(X_{\iota'_{\mathfrak{a}-1}}X_{\iota_\mathfrak{m}})+\cdots$$
$$+c_{(\iota+\varkappa)'_\mathfrak{a}\iota_\mathfrak{m}\varkappa'_{\mathfrak{a}-1}}(X_{\varkappa'_{\mathfrak{a}-1}}X_{\varkappa_\mathfrak{m}})+\cdots=0,$$

so dass für $\mathfrak{m}+\mathfrak{n}=\mathfrak{a}$ auch $c_{\iota_\mathfrak{m}\varkappa_\mathfrak{n}(\iota+\varkappa)_{\mathfrak{a}-1}}=0$ sein muss. Folglich gilt allgemein die Gleichung:

(7) $$c_{\iota_\mathfrak{m}\varkappa_\mathfrak{n}(\iota+\varkappa)_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-1}}=0.$$

Jetzt bleibt der Beweis ungeändert. Man bestimme in (4) den Coefficienten von $X_{(\iota+\varkappa)_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-3}}$, welcher das Resultat liefert:

$$c_{r\iota_\mathfrak{m}\iota_{\mathfrak{m}-1}}c_{\iota_{\mathfrak{m}-1}\varkappa_\mathfrak{n}(\iota+\varkappa)_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-3}}+c_{r\varkappa_\mathfrak{n}\varkappa_{\mathfrak{n}-1}}c_{\iota_\mathfrak{m}\varkappa_{\mathfrak{n}-1}(\iota+\varkappa)_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-3}}=$$
$$=c_{\iota_\mathfrak{m}\varkappa_\mathfrak{n}(\iota+\varkappa)_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-2}}c_{r(\iota+\varkappa)_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-2}(\iota+\varkappa)_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-3}}.$$

In $\left(\iota_\mathfrak{m},\varkappa_\mathfrak{n},(\iota+\varkappa)_\mathfrak{a}'\right)$ lasse man $\mathfrak{m},\mathfrak{n}>1$ und $\mathfrak{m}+\mathfrak{n}=\mathfrak{a}+1$ sein und wende wieder die vorangehende Betrachtung an. Auf diesem Wege kann man beliebig fortfahren und gelangt zu dem Resultat

(8) $$c_{\iota_\mathfrak{m}\varkappa_\mathfrak{n}(\iota+\varkappa)_\mathfrak{r}}=0,\quad \text{für}\quad \mathfrak{r}>\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-\mathfrak{a},$$

während erst $c_{\iota_\mathfrak{m}\varkappa_\mathfrak{n}(\iota+\varkappa)_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-\mathfrak{a}}}$ von Null verschieden sein kann. Ordnet man also jeder Hauptwurzel ω_ι die inf. Transformationen $X_{\iota_0}\ldots X_{\iota_{\mathfrak{a}-1}}$ zu und fügt die entsprechende $(X_{\iota_\mathfrak{m}}X_{\iota_\mathfrak{a}}')$ hinzu, so erhält man eine Untergruppe vom Range Null.

Die Jacobi'sche Identität für $(r, r-\nu, \iota_\mathfrak{c})$ liefert:

(9) $$\begin{aligned}
&c_{(r-\nu)\iota_\mathfrak{c}\iota_{\mathfrak{c}-1}}c_{r\iota_{\mathfrak{c}-1}\iota_{\mathfrak{c}-2}}=c_{r\iota_\mathfrak{c}\iota_{\mathfrak{c}-1}}c_{(r-\nu)\iota_{\mathfrak{c}-1}\iota_{\mathfrak{c}-2}},\\
&c_{(r-\nu)\iota_\mathfrak{c}\iota_{\mathfrak{c}-1}}c_{r\iota_{\mathfrak{c}-1}\iota_{\mathfrak{c}-3}}+c_{(r-\nu)\iota_\mathfrak{c}\iota_{\mathfrak{c}-2}}c_{r\iota_{\mathfrak{c}-2}\iota_{\mathfrak{c}-3}}=\\
&\qquad=c_{r\iota_\mathfrak{c}\iota_{\mathfrak{c}-1}}c_{(r-\nu)\iota_{\mathfrak{c}-1}\iota_{\mathfrak{c}-3}}+c_{r\iota_\mathfrak{c}\iota_{\mathfrak{c}-2}}c_{(r-\nu)\iota_{\mathfrak{c}-2}\iota_{\mathfrak{c}-3}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&c_{(r-\nu)\iota_\mathfrak{c}\iota_{\mathfrak{c}-1}}c_{r\iota_{\mathfrak{c}-1}\iota_0}+c_{(r-\nu)\iota_\mathfrak{c}\iota_{\mathfrak{c}-2}}c_{r\iota_{\mathfrak{c}-2}\iota_0}+\cdots+c_{(r-\nu)\iota_\mathfrak{c}\iota_1}c_{r\iota_1\iota_0}=\\
&\qquad=c_{r\iota_\mathfrak{c}\iota_{\mathfrak{c}-1}}c_{(r-\nu)\iota_{\mathfrak{c}-1}\iota_0}+c_{r\iota_\mathfrak{c}\iota_{\mathfrak{c}-2}}c_{(r-\nu)\iota_{\mathfrak{c}-2}\iota_0}+\cdots+c_{r\iota_\mathfrak{c}\iota_1}c_{(r-\nu)\iota_1\iota_0}.
\end{aligned}$$

Solcher Gleichungen giebt es $\frac{\mathfrak{a}(\mathfrak{a}-1)}{2}$. Dieselben sind von einander unabhängig und gestatten alle $c_{r\iota_\mathfrak{c}\iota_\mathfrak{d}}$ durch $c_{r\iota_\mathfrak{a}\iota_{\mathfrak{a}-1}}\ldots c_{r\iota_\mathfrak{a}\iota_0}$ linear homogen auszudrücken, wobei die Coefficienten Functionen der $c_{(r-\nu)\iota_\mathfrak{c}\iota_\mathfrak{d}}$ sind.

Jetzt bestimme man die $\eta_r\ldots\eta_{r-k+1}$ aus den Gleichungen:

(10) $$\begin{aligned}
&\sum_0^{k-1}{}_\varrho\,\eta_{r-\varrho}c_{(r-\varrho)\iota_\mathfrak{a}\iota_{\mathfrak{a}-1}}=0,\quad \sum_0^{k-1}{}_\varrho\,\eta_{r-\varrho}c_{(r-\varrho)\iota_\mathfrak{a}\iota_{\mathfrak{a}-2}}=0\ldots,\quad \sum_0^{k-1}{}_\varrho\,\eta_{r-\varrho}c_{(r-\varrho)\iota_\mathfrak{a}\iota_0}=0\\
&\sum{}_\varrho\,\eta_{r-\varrho}c_{(r-\varrho)\varkappa_\mathfrak{a}\varkappa_{\mathfrak{a}-1}}=0\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind nicht nur mit einander vereinbar, sondern die η, welche denselben genügen, bilden mindestens eine $(l-1)$-fache

Unendlichkeit. Wenn nämlich die vorstehenden Gleichungen alle von einander unabhängig sind, so muss k mindestens gleich $(\mathfrak{a}+1)l$ sein, und jede Verminderung der letzteren Zahl hat auch eine entsprechende Vergeringerung der von einander unabhängigen Gleichungen (10) zur Folge (man vergleiche die entsprechenden Entwickelungen des vorigen Paragraphen). Sobald aber die obigen Gleichungen erfüllt werden, bleiben sie für dieselben η erfüllt, wenn man $X_{\iota_\mathfrak{a}}$ durch $X'_{\iota_\mathfrak{a}}$ oder durch $X_{(\iota+\varkappa)_\mathfrak{a}} \dots$ ersetzt, wie sich aus den Gleichungen (4) ergiebt. Mit der ersten Reihe (10) ist aber auch wegen (9) für jedes $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}$ $(\mathfrak{c} > \mathfrak{b})$ die Gleichung erfülllt:

$$\sum^{\varrho} \eta_{r-\varrho}\, c_{(r-\varrho)\iota_\mathfrak{c}\iota_\mathfrak{b}} = 0.$$

Auch ändert sich das Resultat nicht, wenn man $X_{\iota_\mathfrak{a}}$ ersetzt durch eine lineare Function von $X_{\iota_\mathfrak{a}} \dots X_{\iota_0}$, also etwa durch

$$X_{\iota_\mathfrak{a}} + \eta_\iota X_{\iota_{\mathfrak{a}-1}} + \cdots + \eta_\iota^{(\mathfrak{a}-1)} X_{\iota_0}.$$

Indem wir also wieder die l Hauptwurzeln $\omega_\iota, \omega_\varkappa \dots$ so bestimmen, dass die übrigen Hauptwurzeln sich aus den zwischen diesen l bestehenden Coefficienten $a_{\iota\varkappa}$ ergeben, denken wir $X_{\iota_\mathfrak{a}}, X_{\varkappa_\mathfrak{a}} \dots$ willkürlich als eine k^{te} zu ω_ι, resp. $\omega_\varkappa \dots$ gehörige inf. Transformation gewählt; jetzt suchen wir $\mathfrak{a}$ Coefficienten $\eta_0 \dots \eta_{\mathfrak{a}-1}$ so, dass für

$$(X_{\iota_\mathfrak{a}}, X'_{\iota_\mathfrak{a}} + \eta_{\mathfrak{a}-1} X'_{\iota_{\mathfrak{a}-1}} + \cdots + \eta_0 X_{\iota_0}') = \sum \eta_{r-\varrho} X_{r-\varrho}$$

die $\eta_{r-\varrho}$ den obigen Gleichungen (10) genügen. Dies giebt, wenn $\mathfrak{c} = 0 \dots \mathfrak{a}-1$ genommen wird, die Gleichungen:

$$(11)\quad \begin{cases} \sum^{\varrho} c_{\iota_\mathfrak{a}\iota'_\mathfrak{a}(r-\varrho)}\, c_{(r-\varrho)\iota_\mathfrak{a}\iota_\mathfrak{c}} + \eta_{\mathfrak{a}-1} \sum^{\varrho} c_{\iota_\mathfrak{a}\iota'_{\mathfrak{a}-1}(r-\varrho)}\, c_{(r-\varrho)\iota_\mathfrak{a}\iota_\mathfrak{c}} + \cdots \\ \qquad\qquad + \eta_0 \sum^{\varrho} c_{\iota_\mathfrak{a}\iota_0'(r-\varrho)}\, c_{(r-\varrho)\iota_\mathfrak{a}\iota_\mathfrak{c}} = 0, \\ \sum^{\varrho} c_{\iota_\mathfrak{a}\iota'_\mathfrak{a}(r-\varrho)}\, c_{(r-\varrho)\varkappa_\mathfrak{a}\varkappa_\mathfrak{c}} + \eta_{\mathfrak{a}-1} \sum^{\varrho} c_{\iota_\mathfrak{a}\iota'_{\mathfrak{a}-1}(r-\varrho)}\, c_{(r-\varrho)\varkappa_\mathfrak{a}\varkappa_\mathfrak{c}} + \cdots = 0. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Hier haben wir zu zeigen, dass wenn die $\mathfrak{a}$ Gleichungen erfüllt sind, welche man aus der ersten Gleichung für $\mathfrak{c} = 0 \dots \mathfrak{a}-1$ erhält, zugleich auch alle übrigen Gleichungen erfüllt werden. Dieser Nachweis ergiebt sich ganz entsprechend dem für $\mathfrak{a} = 1$ geführten Beweise des entsprechenden Satzes. Daraus folgt, dass man zur Bildung der Gruppen folgenden Weg einschlagen kann:

Wenn jede Transformation einer k-gliedrigen Untergruppe angehört, deren Transformation mit einander vertauschbar sind, so wähle man in einer solchen Untergruppe l eingliedrige Untergruppen $X_r \dots X_{r-l+1}$

dass für jede als $\mathfrak{a}+1^{\text{te}}$ zu einer Hauptwurzel gehörige inf. Transformation $X_{\iota_\mathfrak{a}}$ die Gleichungen bestehen:

$$(X_{r-\nu} X_{\iota_\mathfrak{a}}) = \omega_\iota^{(\nu)} X_{\iota_\mathfrak{a}} \quad \text{für} \quad \nu = 0 \cdots l-1.$$

Nachdem unter den Hauptwurzeln l beliebig ausgewählt sind $\omega_\iota, \omega_\varkappa \ldots$ und ihnen $X_{\iota_\mathfrak{a}}, X_{\varkappa_\mathfrak{a}} \ldots$ ohne weitere Beschränkung zugeordnet sind, bestimme man in der Schaar

$$X'_{\iota_\mathfrak{a}} + \eta_{\mathfrak{a}-1} X'_{\iota_{\mathfrak{a}-1}} + \cdots + \eta_0 X'_{\iota_0}$$

die $X'_{\iota_\mathfrak{a}}$ so, dass $(X_{\iota_\mathfrak{a}} X'_{\iota_\mathfrak{a}})$ nur durch die l gewählten inf. Transformationen $X_r \ldots X_{r-l+1}$ dargestellt wird; entsprechend bestimme man $X'_{\varkappa_\mathfrak{a}} \ldots$. Wenn $\omega_\iota + \omega_\varkappa$ eine weitere Hauptwurzel ist, so lege man $X_{(\iota+\varkappa)_\mathfrak{a}}$ durch die Forderung fest, dass $(X_{\iota_\mathfrak{a}} X_{\varkappa_\mathfrak{a}})$ bis auf einen constanten Factor gleich $X_{(\iota+\varkappa)_\mathfrak{a}}$ sein soll, und fahre in gleicher Weise fort, bis man alle Hauptwurzeln erschöpft hat. Alle diese Forderungen können erfüllt werden und führen zu einer einfachen oder halbeinfachen Gruppe, welche eine Untergruppe der gegebenen Gruppe und mit ihr von demselben Range ist. Sucht man die Wurzeln der charakteristischen Gleichung bei beiden Gruppen für dieselbe eingliedrige Untergruppe, so sind alle für die Untergruppe gefundenen Wurzeln auch Wurzeln für die gegebene Gruppe selbst; und alle weiteren Wurzeln für letztere Gruppe lassen sich durch die Wurzeln der ersteren linear darstellen, wobei die Coefficienten rationale Zahlen sind. Alle weiteren inf. Transformationen, welche die gegebene Gruppe bestimmen, sind die $X_{\iota_\mathfrak{c}}$ für $\mathfrak{c} = 0 \cdots \mathfrak{a}-1$, wo ω_ι irgend eine Hauptwurzel sein soll; ferner die $X_{\alpha_\mathfrak{b}}$, wo ω_α eine Nebenwurzel darstellt, sowie $k-l$ mit $X_r \ldots X_{r-l+1}$ und unter einander vertauschbare Transformationen $X_{r-l} \ldots X_{r-k+1}$, welche den Bedingungen genügen: $(X_{r-l-\varrho} X_{\iota_\mathfrak{a}}) = [\iota_{\mathfrak{a}-1} \ldots \iota_1, \iota_0]$, wo ϱ alle Werthe von 0 bis $k-1$ annimmt und die eckige Klammer eine lineare Function bezeichnet. Besteht also die gegebene Gruppe aus r, die oben angegebene einfache oder halbeinfache aus r' Gliedern, so können $r-r'$ von einander und von den r' Transformationen der letzteren Gruppe unabhängige inf. Transformationen so gewählt werden, dass sie eine invariante Untergruppe bestimmen; es sind dies die $X_{\iota_{\mathfrak{a}-1}} \ldots X_{\iota_0}$, $X_{\alpha_\mathfrak{b}} \ldots X_{\alpha_0}$, $X_{r-l} \ldots X_{r-k+1}$. Diese Untergruppe ist aber vom Range Null. Dies kann man einmal in derselben Weise zeigen, wie im vorangehenden Paragraphen geschehen, indem man nämlich die einzelnen Möglichkeiten kurz charakterisirt. Dieser Weg lehrt dann unmittelbar, wenn man die am Schlusse des § 22 gestellten Aufgaben als gelöst betrachtet, eine grosse Zahl von Coefficienten c kennen. Man kann aber auch die charakteristische Gleichung direct bilden. Diejenigen inf. Transformationen, durch welche die einfache oder halbeinfache Gruppe bestimmt wird, mögen die Marken $\iota, \varkappa, \lambda \ldots$, die der invarianten Untergruppe die Marken $\varrho, \sigma, \tau \ldots$ erhalten, während die Marken $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ über alle Nummern $1 \ldots r$ ausgedehnt werden sollen. Dann ist $\sum^\alpha \eta_\alpha c_{\alpha\varrho\iota} = 0$; folglich zerfällt die Determinante

$$\left|\sum^\alpha \eta_\alpha c_{\alpha\beta\gamma} - \delta_{\beta\gamma}\,\omega\right| \\ (\beta, \gamma = 1 \cdots r)$$

in die Factoren

$$\left|\sum^\alpha \eta_\alpha c_{\alpha\varrho\sigma} - \delta_{\varrho\sigma}\,\omega\right| \cdot \left|\sum^\alpha \eta_\alpha c_{\alpha\iota\varkappa} - \delta_{\iota\varkappa}\,\omega\right| \\ (\varrho\sigma) \qquad\qquad (\iota\varkappa).$$

Der zweite Factor ist aber, da $c_{\varrho\iota\varkappa} = 0$ ist, identisch mit der charakteristischen Determinante für die einfache oder halbeinfache Gruppe. Die Coefficienten der verschiedenen Coefficienten von ω in dieser Determinante lassen sich durch l von einander unabhängige Functionen $P(\eta_\iota, \eta_\varkappa, \eta_\lambda \ldots)$ darstellen. Durch dieselben l Functionen müssen sich auch die verschiedenen Coefficienten von ω in dem Factor

$$\left|\sum \eta_\alpha c_{\alpha\varrho\sigma} - \delta_{\varrho\sigma}\,\omega\right|$$

ausdrücken lassen. Also sind die Coefficienten der einzelnen Potenzen von ω in dieser Gleichung blosse Functionen von $\eta_\iota, \eta_\varkappa, \eta_\lambda \ldots$ und daher hat die charakteristische Gleichung für die invariante Untergruppe selbst nur verschwindende Wurzeln, da man in deren Determinante die Summation α nur auf $\varrho, \sigma \ldots$ erstrecken darf.

Somit sind wir zu dem wichtigen Satze gelangt:

Jede Gruppe, welche ihre eigene Hauptuntergruppe ist, kann zusammengesetzt werden aus einer einfachen oder halbeinfachen Gruppe desselben Ranges mit einer invarianten Untergruppe vom Range Null.

Nun haben wir freilich in § 9 gestehen müssen, dass es uns noch nicht möglich ist, alle Gruppen des Ranges Null in expliciter Form anzugeben. Aber davon wird die Darstellung der hier in Betracht kommenden Gruppen nicht berührt. Sobald die einfachen Gruppen angegeben und die beiden am Schluss von § 22 aufgestellten Aufgaben gelöst sind, erfordert die explicite Darstellung aller Gruppen von der verlangten Beschaffenheit nur die Bestimmung von sehr wenigen Constanten.

Die durchgeführten Untersuchungen zeigen, so weit diejenigen Gruppen in Betracht kommen, welche ihre eigenen Hauptuntergruppen sind, wie berechtigt es ist, nach dem Vorschlage des Herrn Lie die Gruppen als zusammengesetzte und einfache zu unterscheiden, jenachdem sie eine invariante Untergruppe besitzen oder nicht. Zwar zeigt sich ein wesentlicher Unterschied zwischen einfachen Gruppen und Primzahlen, sowie zwischen zusammengesetzten Gruppen und zusammengesetzten Zahlen, aber die Analogie tritt doch beidemal so deutlich zu Tage, dass es nicht nothwendig sein dürfte, dieselbe hier noch im Einzelnen darzulegen.

Nachdem durch die Entwicklungen der vier letzten Paragraphen alle Möglichkeiten erschöpft sind, ist auch ein Satz bewiesen, der bereits in § 20 ausgesprochen wurde, nämlich der Satz, dass, wenn von den Coefficienten der charakteristischen Gleichung der letzte nicht verschwindende gerade $\psi_{r-l}(\eta)$ ist, wo l der Rang der Gruppe ist, dann alle Hauptwurzeln einfach sind; dass dann ferner unter Beibehaltung der frühern Bezeichnung $\sum^{\nu} c_{\iota\iota'(r-\nu)}\omega_{\iota}^{(\nu)} \mp 0$ und die Det. $|\omega_{\iota}^{(\nu)}| \mp 0$ ist, sowie alle Transformationen der invarianten Untergruppe vertauschbar sind. In diesem Falle, und nur in diesem, kann man eine Transformation, welche der einfachen Gruppe angehören soll, ganz allgemein wählen, während in jedem andern Falle eine Transformation besondern Bedingungen genügen muss, wenn sie der einfachen Gruppe angehören soll.

§ 25.

Zusammenhang der Nebenwurzeln unter einander und mit den Hauptwurzeln.

Wie schon öfters bemerkt, können l der Hauptwurzeln als $\omega_1 \dots \omega_l$ so gewählt werden, dass alle andern durch das System der zwischen den gewählten bestehenden Coefficienten $a_{\iota\varkappa}$ gefordert werden. Wie in § 12 und § 20 weiter gezeigt ist, müssen dann alle weiteren Wurzeln homogene lineare Functionen der l Wurzeln $\omega_1 \dots \omega_l$ mit rationalen Coefficienten sein, also in der Form erscheinen:

$$(1) \qquad m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \cdots + m_l\omega_l.$$

Um die Coefficienten m_ι zu bestimmen, hat man l ganze Zahlen $g_1 \dots g_l$ anzunehmen und dann das Gleichungssystem zu lösen:

$$(2) \qquad g_\varkappa = \sum_1^l m_\lambda a_{\lambda\varkappa} \qquad (\varkappa = 1 \cdots l).$$

Eine Wurzel (1) kann niemals für sich allein vorkommen, sondern mit derselben sind stets weitere Wurzeln nothwendig verbunden. Wie in § 13 auf eine Hauptwurzel, können wir hier auf die Wurzel (1) die Transformation $b_{\iota\varkappa}$ anwenden, wo die $b_{\iota\varkappa}$ allmählich nach folgenden Regeln berechnet werden:

$$(3)\quad \begin{cases} \text{für } \iota = \varkappa \text{ ist } b_{\iota\iota} = \sum_1^{\iota-1}{}^{\varrho} b_{\iota\varrho}\, a_{\varrho\iota} - 1, \\ \text{für } \iota > \varkappa \text{ ist } b_{\iota\varkappa} = \sum_1^{\varkappa-1}{}^{\varrho} b_{\iota\varrho}\, a_{\varrho\varkappa} + a_{\iota\varkappa}, \\ \text{für } \iota < \varkappa \text{ ist } b_{\iota\varkappa} = \sum_1^{\varkappa-1}{}^{\varrho} b_{\iota\varrho}\, a_{\varrho\varkappa}. \end{cases}$$

Diese Transformation führt nach einer bestimmten Zahl von Wiederholungen auf die identische Substitution. Dabei gilt folgender Satz:

Die Summe aller verschiedenen Wurzeln, welche man aus einer beliebigen durch die genügend wiederholte Anwendung der Substitution $b_{\iota\varkappa}$ erhält, ist gleich Null.

Es sei

$$m_\iota' = \sum{}^{\varkappa} m_\varkappa b_{\varkappa\iota}, \quad m_\iota'' = \sum{}^{\varkappa} m_\varkappa' b_{\varkappa\iota} \cdots m_\varkappa = \sum{}^{\varkappa} m_\varkappa^{(\mu-1)} b_{\varkappa\iota},$$

wo $\mu_\varkappa^{(\mu)} = m_\varkappa$ vorausgesetzt wird. Die Addition liefert, wenn man $m_\iota + m_\iota' + \cdots + m_\iota^{(\mu-1)} = M_\iota$ setzt:

$$M_\iota = \sum{}^{\varkappa} M_\varkappa b_{\varkappa\iota} \quad (\text{für } \iota = 1 \ldots l).$$

Soll dies Gleichungssystem erfüllt sein, ohne dass alle M_ι verschwinden, so muss die Determinante

$$\begin{vmatrix} b_{11} - s & b_{21} & \cdots & b_{l1} \\ b_{12} & b_{22} - s & \cdots & b_{l2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{1l} & b_{2l} & \cdots & b_{ll} - s \end{vmatrix}$$

für $s = 1$ verschwinden, was nach § 13 auf das Verschwinden der Determinante $|a_{\iota\varkappa}|$ hinauskommt und nicht möglich ist.

Noch einige andere Bemerkungen über die Substitution $b_{\iota\varkappa}$ dürften hier angebracht sein. Die reciproke Transformation $B_{\iota\varkappa}$ wird erhalten, wenn man die Reihenfolge $1 \ldots l$ durch die entgegengesetzte Reihenfolge $1 \ldots l$ ersetzt. Demnach gelten zur Bestimmung der $B_{\iota\varkappa}$, indem man mit $\iota = l$ beginnt, folgende Regeln:

$$\iota = \varkappa : B_{\iota\varkappa} = \sum_l^{\varkappa+1}{}^{\varrho} B_{\iota\varrho}\, a_{\varrho\iota} - 1,$$

$$\iota < \varkappa : B_{\iota\varkappa} = \sum_l^{\varkappa+1}{}^{\varrho} B_{\iota\varrho}\, a_{\varrho\iota} + a_{\iota\varkappa},$$

$$\iota > \varkappa : B_{\iota\varkappa} = \sum_l^{\varkappa+1}{}^{\varrho} B_{\iota\varrho}\, a_{\varrho\varkappa}.$$

Wenn die m_ι durch die Transformation $b_{\iota\varkappa}$ umgeändert werden in m_ι', und wenn dann zu m_ι' die ganzen Zahlen g_ι' gehören, so werden auch die g_ι in g_ι' umgewandelt durch eine ganz ähnliche Substitution. Wird gesetzt:

$$g_\varkappa = \sum^\iota g_\iota' \, h_{\iota\varkappa},$$

so gelten für deren Bildung folgende Regeln:

$$\iota > \varkappa : h_{\iota\varkappa} = \sum_1^{\iota-1} {}^\varrho \, a_{\iota\varrho} h_{\varrho\varkappa},$$

$$\iota = \varkappa : h_{\iota\iota} = \sum_1^{\iota-1} {}^\varrho \, a_{\iota\varrho} h_{\varrho\iota} - 1,$$

$$\iota < \varkappa : h_{\iota\varkappa} = \sum_1^{\iota-1} {}^\varrho \, a_{\iota\varrho} h_{\varrho\varkappa} + a_{\iota\varkappa},$$

deren reciproke Substitution wieder durch Vertauschung der Marken $1, 2 \ldots l$ mit $l, l-1, \ldots 1$ erhalten wird.

Im Allgemeinen erhält man ein anderes System von Transformationen, wenn man bei der Bildung der Coefficienten $b_{\iota\varkappa}$ eine andere Reihenfolge der Marken einschlägt; ebenso, wenn man nicht alle l Marken $1 \ldots l$ berücksichtigt, sondern aus denselben eine kleinere Anzahl beliebig auswählt. Alle Wurzeln aber, welche man auf diese Weise erhält, hängen in der Weise zusammen, dass, wenn man aus $\sum m_\iota \omega_\iota$ auf irgend eine der hier angegebenen Weisen $\sum m_\iota' \omega_\iota$ herleitet, auch wiederum mit $\sum m_\iota' \omega_\iota$ nothwendig $\sum m_\iota \omega_\iota$ verbunden ist.

Das Gesetz, nach welchem hier neue Wurzeln erhalten werden, beruht darauf, dass mit der Wurzel $\sum m_\iota \omega_\iota$ auch die Wurzel

$$\sum m_\iota \omega_\iota + \omega_\varkappa \sum^\lambda m_\lambda a_{\lambda\varkappa} \quad \text{oder} \quad \sum m_\iota \omega_\iota + g_\varkappa m_\varkappa$$

vorkommt. Wenn hier aber $g_\varkappa$ von $0, \pm 1$ verschieden ist und $\mathfrak{a}_\varkappa$ irgend eine zwischen 0 und $g_\varkappa$ gelegene ganze Zahl ist, so muss die charakteristische Gleichung auch eine Wurzel $\sum m_\iota \omega_\iota + \mathfrak{a}_\varkappa \omega_\varkappa$ haben. Dies giebt wieder Veranlassung zu neuen Wurzeln, aber während die früher gefundenen Wurzeln nothwendig mit einander verbunden sind, wird durch die Wurzel $\sum^\iota m_\iota \omega_\iota + \mathfrak{a}_\varkappa \omega_\varkappa$ nicht die Wurzel $\sum m_\iota \omega_\iota$ nicht mitverlangt. Hiernach sind die Nebenwurzeln, wenn nicht alle g_ι gleich ± 1 oder 0 sind, in der Weise zu unterscheiden, dass jedesmal diejenigen als besonders zusammengehörig betrachtet werden, welche einander wechselseitig bedingen. So ist für $l = 1$, wenn die Hauptwurzeln $+2$ und -2 sind, mit der Wurzel $2m+1$ die $-2m-1$ in eine Reihe zu stellen; diese Wurzeln bedingen für $m > 0$ noch die Wurzeln $\pm(2m-1)$, $\pm(2m-3)$, ± 3, ± 1; aber die letzten Wurzeln verlangen nicht das Vorkommen der Wurzel $2m+1$.

Wenn alle m_ι dasselbe Zeichen haben und einige m_ι ihrem absoluten Werthe nach grösser als Eins sind, so zeigt man unmittelbar, dass Wurzeln vorkommen, in denen kein m_ι einen grösseren, aber einige einen kleineren Werth annehmen. Hieraus folgt:

Wenn die m_ι, welche nach (2) *durch das System $g_1 \ldots g_l$ gefunden werden, ganze Zahlen sind, so gelangt man durch Aufsuchung aller Wurzeln, welche mit der Wurzel $\sum m_\iota \omega_\iota$ verbunden sind, zu solchen, welche Hauptwurzeln gleich sind.*

Nun ist freilich in den beiden vorangehenden Paragraphen schon angegeben, was man zu thun habe, wenn man von Nebenwurzeln durch Addition einer Hauptwurzel wieder zu einer Hauptwurzel gelangt. Aber in dem angeführten Beweise ist, wie schon bemerkt, noch eine Lücke, und diese wird durch die beiden folgenden Sätze ausgefüllt:

Wenn für eine allgemeine Transformation $X_r f$ die ω_ι eine einfache Wurzel der charakteristischen Gleichung ist und zugleich bei der frühern Bezeichnung $\sum^\nu c_{\iota\iota'(r-\nu)}\, \omega_\iota^{(\nu)}$ nicht verschwindet, so kann 2ω keine Wurzel der charakteristischen Gleichung für X_r sein.

Die Summe zweier einfachen Hauptwurzeln kann nicht gleich einer Nebenwurzel sein, die Summe einer Haupt- und einer Nebenwurzel kann keine einfache Hauptwurzel ergeben.

Der Beweis des zweiten Satzes folgt unmittelbar aus der Jacobi'schen Identität $\big(\iota, \varkappa, (\iota+\varkappa)'\big)$; für den Beweis des ersten nehme man an, es kämen die Wurzeln $2\omega_\iota, 3\omega_\iota \ldots \mathfrak{a}\omega_\iota$ vor. Dann bilde man die Jacobi'schen Identitäten $\big(\iota, \iota', (2\iota)\big)$, $\big(\iota, \iota', (3\iota)\big) \cdots \big(\iota, \iota', (\mathfrak{a}\iota)\big)$, deren beide ersten für $\mathfrak{a} > 3$ sind:

$$2 \sum^\nu c_{\iota\iota'(r-\nu)}\, \omega_\iota^{(\nu)} = c_{\iota(2\iota)(3\iota)}\, c_{(3\iota)\iota'(2\iota)},$$

$$3 \sum^\nu c_{\iota\iota'(r-\nu)}\, \omega_\iota^{(\nu)} = c_{\iota(3\iota)(4\iota)}\, c_{(4\iota)\iota'(3\iota)} - c_{\iota(3\iota)(2\iota)}\, c_{(2\iota)\iota(3\iota)},$$

so dass sich durch Addition aller ergiebt:

$$\sum c_{\iota\iota'(r-\nu)}\, \omega_\iota^{(\nu)} = 0. \quad \text{(c. h.)}.$$

Daraus folgt: Wenn die Coefficienten m_ι sämmtlich ganze Zahlen sind, so hat man diejenigen Hauptwurzeln aufzusuchen, welche durch die gegebene Wurzel gefordert werden; alle diese müssen in diesem Falle mindestens Doppelwurzeln sein. Hiernach ist vollständig erwiesen, was über die Behandlung dieses Falles im vorigen Paragraphen gesagt ist.

Um nach der im § 22 (S. 81, 82) angegebenen Methode Gruppen zu bilden, hat man die Constanten $g_1 \dots g_l$ so zu wählen, dass sich als Lösungen der l Gleichungen (1) nicht lauter ganzzahlige Werthe $m_1 \dots m_l$ ergeben; wenn nach der Wahl von $g_1 \dots g_l$ die $m_1 \dots m_l$ ganze Zahlen werden, so wird man auf die im letzten Paragraphen angegebene Bildung geführt. Wenn speciell die Determinante der $a_{\iota\varkappa}$ gleich Eins ist, so wird jede Wahl der Constanten g_ι ganzzahlige m_ι zur Folge haben; in diesem Falle ist also nur diejenige Zusammensetzung möglich, welche im letzten Paragraphen angegeben ist; oder:

Wenn für eine r-gliedrige einfache Gruppe vom Range l die Determinante der $a_{\iota\varkappa}$ gleich Eins ist, so haben die hiermit zusammengesetzten Gruppen, welche ihre eigenen Hauptuntergruppen sind, folgende Eigenschaften:

1) *die Zahl der verschwindenden Wurzeln der charakteristischen Gleichung ist mindestens gleich $2l$;*

2) *soll eine Transformation der zusammengesetzten Gruppe zugleich einer einfachen Gruppe des Ranges l angehören, so muss sie mindestens l beschränkenden Bedingungen genügen.*

Um mit der vierzehngliedrigen einfachen Gruppe vom Range zwei eine r-gliedrige Gruppe zusammenzusetzen, in welcher $p = r$ ist, hat man mindestens sechs Nebenwurzeln, welche Hauptwurzeln gleich sind, und zwei verschwindende Wurzeln beizufügen, so dass die Zahl der Glieder mindestens 22 beträgt.

Die obigen Gesetze über die g_ι sollen jetzt auf die vier einfachen Gruppen angewandt werden, welche in § 17 angegeben sind. Von der Ausführung der Beweise wird man bei ihrer Einfachheit absehen können.

Mit einer einfachen Gruppe des Ranges l von der Zusammensetzung der allgemeinen projectiven Gruppe des l-dimensionalen Raumes soll eine Gruppe zusammengesetzt werden, in welcher $p = r$ ist. Wenn die Hauptwurzeln sind $\pm\omega_\iota$, $\pm(\omega_\iota - \omega_\varkappa)$, und wenn eine Nebenwurzel durch die $g_1 \dots g_l$ bestimmt wird, so erhält man weitere Wurzeln, welche sich gegenseitig bedingen, indem man zu dem Systeme

$$(g_1, g_2 \dots g_l)$$

hinzufügt:

$$(-g_1, g_2 - g_1, g_3 - g_1 \cdots g_l - g_1), \quad (g_1 - g_2, -g_2, g_3 - g_2 \cdots g_l - g_2)$$
$$\cdots (g_1 - g_l, g_2 - g_l \cdots g_{l-1} - g_2, -g_l),$$

und wenn man in jedem dieser Systeme alle möglichen Umstellungen vornimmt. Wenn also alle $g_1 \dots g_l$ unter einander und von Null verschieden sind, so ist die Zahl der einander gegenseitig bedingenden Wurzeln gleich $(l+1)\cdot l! = (l+1)!$ Wenn aber α unter ihnen gleich, und keine gleich Null ist, so erhalten wir

$$\frac{l!}{\alpha!} + (l-\alpha)\frac{l!}{\alpha!} + \frac{l!}{(\alpha-1)!} = \frac{(l+1)!}{\alpha!};$$

und wenn β gleich Null und alle übrigen von einander verschieden sind, so ist die Zahl $\frac{l!}{\beta!} + (l-\beta)\frac{l!}{(\beta+1)!} = \frac{(l+1)!}{(\beta+1)!}$. Wenn endlich β gleich Null und die übrigen in Schaaren von $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ gleichen zerfallen, so ist die Zahl der einander gegenseitig bedingenden Wurzeln gleich $\frac{(l+1)!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\cdots(\beta+1)!}$.

Wir können annehmen, von den Zahlen $g_1 \ldots g_l$ sei keine negativ; ist dann etwa $g_1 > 1$, so muss auch diejenige Wurzel vorkommen, zu der die Constanten $(g_1-2,\ g_2-1,\ g_3-1 \cdots g_l-1)$ gehören. Hierdurch gelangen wir zu einer zweiten Reihe von Wurzeln.

Damit die Coefficienten $m_1 \ldots m_l$ ganzzahlig werden, ist nothwendig und hinreichend, dass $g_1 + g_2 + \cdots + g_l$ durch $l+1$ theilbar ist. Zugleich erkennt man, dass, wie auch immer die $g_1 \ldots g_l$ gewählt sind, immer unter den Nebenwurzeln folgende vorkommen:
entweder $l(l+1)$ solche, welche den Hauptwurzeln gleich sind, für

$$\sum g \equiv 0,$$

oder

$$\frac{1}{l+1}(\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_l),\quad \frac{1}{l+1}(\omega_1+\cdots+\omega_l)-\omega_1,$$
$$\frac{1}{l+1}(\omega_1+\cdots+\omega_l)-\omega_2 \cdots \frac{1}{l+1}(\omega_1+\cdots+\omega_l)-\omega_l$$

für

$$\sum g \equiv 1,$$

oder

$$\frac{1}{l+1}\Big(-(l-1)(\omega_1+\omega_2)+2(\omega_3+\cdots+\omega_l)\Big),\quad \cdots$$
$$\frac{1}{l+1}\Big(-(l-1)\,\omega_1+2\omega_2+\cdots+2\omega_l\Big)\cdots$$

für

$$\sum g \equiv 2,$$

oder

$$\frac{1}{l+1}\Big(-(l-2)(\omega_1+\omega_2+\omega_3)+3(\omega_4+\cdots+\omega_l)\Big)\cdots$$
$$\frac{1}{l+1}\Big(-(l-2)(\omega_1+\omega_2)+3(\omega_3+\cdots+\omega_l)\Big)\cdots$$
$$\frac{1}{l+1}\Big(-(l-2)\omega_1+3(\omega_2+\cdots+\omega_l)\Big)\cdots$$

für $$\sum g \equiv 3 \quad \text{u. s. w.}$$

Soll daher aus dieser Gruppe eine zusammengesetzte gebildet werden, welche ihre eigene Hauptuntergruppe ist, so muss deren Gliederzahl mindestens l^2+3l+1 betragen. Es giebt nur eine einzige so gebildete Gruppe von dieser Gliederzahl, da die beiden in Betracht kommenden Systeme $(1, 0, 0 \ldots 0)$ und $(1, 1, 1 \ldots 1)$ entgegengesetzt gleiche Wurzeln liefern.

Um mit der einfachen Gruppe B), nach deren Typus die Gruppe der allgemeinen projectiven Transformationen eines eigentlichen $(2l-1)$-dimensionalen Gebildes zweiter Ordnung in einem $(2l)$-dimensionalen Raume gebildet ist, eine Gruppe zusammenzusetzen, nehmen wir die Wurzeln $\omega_1 \ldots \omega_l$ so an, dass sich die $2l^2$ Hauptwurzeln in der Form $\pm\omega_\iota$, $\pm\omega_\iota\pm\omega_\varkappa$ darstellen. Wenn dann für eine weitere Wurzel $g_1 \ldots g_l$ die bestimmenden Constanten sind, so müssen dieselben entweder sämmtlich gerade oder sämmtlich ungerade sein. Dann kommt man zu allen einander wechselseitig bedingenden Wurzeln, indem man einmal die $g_1 \ldots g_l$ beliebig permutirt und dann beliebig vielen unter ihnen das entgegengesetzte Vorzeichen giebt. Wenn also unter ihnen β gleich Null sind und die übrigen sich in Schaaren von $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ gleichen zerlegen, so ist die Zahl der einander bedingenden Wurzeln gleich

$$\frac{l!\,2^{l-\beta}}{\alpha_1!\,\alpha_2!\cdots\beta!}.$$

Um zu erkennen, welche Systeme $(g_1' \ldots g_l')$ dem gegebenen System untergeordnet sind, hat man folgendes zu beachten: zunächst müssen die $g_1' \ldots g_l'$ mit den $g_1 \ldots g_\iota$ zugleich gerade oder ungerade sein; ferner darf die Summe aus den absoluten Beträgen der g_ι' nicht grösser sein, als die der g_ι, und endlich darf kein g_ι' dem absoluten Betrage nach grösser sein als das absolut grösste der g_ι. So kommen mit $(6, 0, 0)$ folgende vor: $(4, 2, 0)$, $(2, 2, 2)$, $(4, 0, 0)$, $(2, 2, 0)$, $(2, 0, 0)$. Wenn die $g_\varkappa$ sämmtlich gerade sind, so müssen jedesmal auch die Wurzeln $\pm\omega_\varkappa$ als Nebenwurzeln vorkommen; für ungerade $g_\varkappa$ sind unter den Nebenwurzeln jedesmal die 2^l Ausdrücke: $\dfrac{\pm\omega_1\pm\omega_2\pm\cdots\pm\omega_l}{2}$ enthalten.

Ganz ähnlich werden die Resultate für die mit einer einfachen Gruppe C) zusammengesetzten Gruppen, wenn die Hauptwurzeln für $\iota, \varkappa = 1 \cdots l$ unter der Form $\pm\omega_\varkappa$, $\dfrac{\pm\omega_\iota\pm\omega_\varkappa}{2}$ vorausgesetzt werden. Man kann die l ganzen Zahlen $g_1 \ldots g_l$ beliebig wählen; mit ihnen darf man jede Permutation und jede Aenderung der Vorzeichen vornehmen. Die Zahl der sich gegenseitig bedingenden Wurzeln bleibt dieselbe wie vorher. Für ein untergeordnetes System $g_1' \ldots g_l'$ ist die Summe der absoluten Beträge dieselbe oder um eine gerade Zahl kleiner: auch darf keine unter ihnen ihrem absoluten Betrage nach grösser sein als die grösste der gegebenen. Jenachdem $g_1 + g_2 + \cdots + g_l$ gerade oder ungerade ist, werden einzelne Nebenwurzel Hauptwurzeln gleich oder nicht.

Zur Bestimmung der Hauptwurzeln in der einfachen Gruppe D) (projective Gruppe eines eigentlichen $(2l-2)$-dimensionalen Gebildes zweiter Ordnung in einem $(2l-1)$-dimensionalen Raume) kann man l Grössen $x_1 \ldots x_l$ wählen und dann alle Hauptwurzeln in der Form $\pm x_\iota \pm x_\varkappa$ darstellen. Um eine Nebenwurzel zu bestimmen, wähle man l ganze Zahlen $h_1 \ldots h_l$, welche entweder sämmtlich gerade oder sämmtlich ungerade sind. Dann ordnet man der Wurzel $x_\iota + x_\varkappa$ die Zahl $\frac{1}{2}(h_\iota + h_\varkappa)$, der Wurzel $x_\iota - x_\varkappa$ die Zahl $\frac{1}{2}(h_\iota - h_\varkappa)$ zu; die Nebenwurzel selbst ist dann $-\frac{1}{2}(h_1 x_1 + h_2 x_2 + \cdots + h_l x_l)$. Um zu den sich gegenseitig bedingenden Wurzeln zu gelangen, kann man einmal die $h_1 \ldots h_l$ beliebig permutiren, zweitens bei je zweien das Vorzeichen in das entgegengesetzte verwandeln. Betreffs der $h_\varkappa$ hat man zu unterscheiden, ob sich verschwindende unter ihnen befinden und ob mehrere ihrem absoluten Betrage nach gleich sind. Wenn kein $h_\varkappa$ gleich Null ist und alle in Schaaren von $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ zerfallen, welche ihrem absoluten Betrage nach gleich sind, so ist die Zahl der einander gegenseitig bedingenden Wurzeln gleich

$$\frac{l!\, 2^{l-1}}{\alpha_1!\, \alpha_2! \cdots};$$

wenn aber zugleich β verschwinden, so ist diese Zahl gleich

$$\frac{l!\, 2^{l-\beta}}{\alpha_1!\, \alpha_2! \cdots \beta!}.$$

Um die untergeordneten Systeme $(h_1' \ldots h_l')$ zu finden, hat man folgende Regeln zu beachten:

a) die neuen Zahlen müssen mit den früheren zugleich entweder sämmtlich gerade oder ungerade sein;

b) die Summe der absoluten Beträge der neuen darf nicht grösser sein, als die der gegebenen, und die neue Summe darf sich überhaupt von der frühern nur um Vielfache von vier unterscheiden;

c) keine einzelne Zahl $h_\varkappa'$ darf ihrem absoluten Betrage nach grösser sein als die grösste der $h_\varkappa$.

Demnach werden die Hauptwurzeln wieder unter den Nebenwurzeln vorkommen, wenn alle $h_\varkappa$ gerade sind und ihre Summe durch vier theilbar ist. Ueberhaupt kommen unter den Nebenwurzeln, wenn alle $\varepsilon_\iota = \pm 1$ sind, entweder alle diejenigen $\frac{1}{2}(\varepsilon_1 \omega_1 + \varepsilon_2 \omega_2 + \cdots + \varepsilon_l \omega_l)$ vor, für welche die Zahl der positiven $\varepsilon_\varkappa$ gerade ist, oder diejenigen, für welche diese Zahl negativ ist, oder alle $\pm x_\varkappa$ oder endlich die $\pm x_\iota \pm x_\varkappa$.

Auf die weiteren einfachen Gruppen gehen wir nicht ein. Die vorstehenden Entwicklungen würden genügen, um eine Reihe wichtiger Sätze über die Zusammensetzung der Gruppen mit Leichtigkeit aufzustellen. Darauf gehen wir jedoch nicht ein. Nur die einfachste Folgerung, welche daraus unmittelbar ersichtlich ist, soll hier erwähnt werden. indem wir den Satz aussprechen:

Soll eine Gruppe vom Range l ihre eigene Hauptuntergruppe sein, so muss ihre Gliederzahl mindestens $3l$ betragen, und die einzige, bei der dies der Fall ist, zerfällt in l Kegelschnittsgruppen; dagegen kann keine Gruppe l^{ten} Ranges von $3l+1$ Gliedern ihre eigene Hauptuntergruppe sein. Soll eine Gruppe vom Range l, ohne zu zerfallen, ihre eigene Hauptuntergruppe sein, so muss sie mindestens $l(l+2)$ Glieder haben. Um eine zusammengesetzte, nicht zerfallende Gruppe der bezeichneten Art zu bilden, hat man zu der betreffenden einfachen Gruppe mindestens $l+1$ Glieder hinzuzufügen.

Dieser Satz bildet die Erweiterung des schon von Herrn Lie bewiesenen Satzes, dass keine viergliedrige Gruppe ihre eigene Hauptuntergruppe sein kann.

§ 26.

Explicite Form der Gestaltung gewisser zusammengesetzter Formen.

Wir stellen uns die Aufgabe, für gewisse zusammengesetzte Gruppen alle Coefficienten c vollständig zu bestimmen. Jede solche Gruppe soll folgenden Bedingungen genügen:

a) sie soll nicht zerfallen,

b) sie soll eine einzige invariante Untergruppe besitzen und deren Transformationen sollen mit einander vertauschbar sein,

c) die einfache Gruppe, aus der sie hergeleitet ist, soll eine der vier Gestalten A) — D) besitzen.

Diese Aufgabe ist nicht nur für sich von besonderem Interesse, da diejenigen Gruppen, welche den genannten Bedingungen genügen, eine hervorragende Wichtigkeit beanspruchen dürften, sondern ihre Lösung ist auch für alle weiteren Gruppen, welche ihre eigenen Hauptuntergruppen sind, (somit nicht die andern einfachen Gruppen in Betracht kommen) unbedingt nothwendig. Können wir aber die bezeichnete Aufgabe für alle einfachen Gruppen als gelöst voraussetzen, so ist die Lösung der allgemeinen Aufgabe, alle Gruppen anzugeben, welche ihre eigenen Hauptuntergruppen sind, nur unbedeutenden Schwierigkeiten unterworfen.

Wir gehen von der Gestaltung A) aus, welche sich bei der allgemeinen projectiven Gruppe des l-dimensionalen Raumes findet. Die inf. Transformationen, durch welche die Gruppe bestimmt wird, seien

Y_a, X_a, X_{-a}, X_{a-b} für $a, b = 0 \dots l$. Zwischen ihnen mögen folgende Beziehungen stattfinden:

$$
(1)\quad
\begin{aligned}
&(Y_a Y_b) = 0,\ (Y_a X_a) = -X_a,\ (Y_a X_b) = 0,\ (Y_a X_{-a}) = X_{-a},\\
&(Y_a X_{-b}) = 0,\ \ (Y_a X_{a-b}) = -X_{a-b},\ \ (Y_b X_{a-b}) = X_{a-b},\\
&(X_a X_{-a}) = Y_a + \sum Y_m,\ (X_{a-b} X_{b-a}) = -Y_a + Y_b,\\
&(X_a X_{-b}) = -X_{a-b},\ \ (X_a X_{b-a}) = X_b,\ \ (X_{-a} X_{a-b}) = -X_{-b}.
\end{aligned}
$$

Vorläufig lassen wir jede andere Wurzel durch ein System von l ganzen Zahlen $g_1 \dots g_l$ bestimmt sein, wobei z. B. der obigen Marke a entspricht: $g_1 = \cdots g_{a-1} = g_{a+1} = \cdots = g_l = -1$, $g_a = -2$. Wenn jetzt zu den Marken $(g_1 \dots g_l)$ und $(g_1 - 1 \dots g_a - 2 \dots g_l - 1)$, aber nicht zu $(g_1 + 1 \dots g_a + 2 \dots g_l + 1)$ eine Wurzel gehört, so gelten in Folge der Jacobi'schen Identitäten

$$\big(a, a', (g_1 \dots g_l)\big),\ \big(a, a', (g_1 - 1 \dots g_a - 2 \dots g_a - 1)\big) \dots$$

die Gleichungen:

$$
(2)\quad
\begin{cases}
c_{(a)(g_1 \cdots g_l)(g_1-1 \cdots g_a-2 \cdots g_l-1)}\, c_{(-a)(g_1-1 \cdots g_a-2 \cdots g_l-1)(g_1 \cdots g_l)} = g_a,\\[4pt]
c_{(a)(g_1-1 \cdots g_a-2 \cdots g_l-1)(g_1-2 \cdots g_a-4 \cdots g_l-2)}\\
\qquad\qquad c_{(-a)(g_1-2 \cdots g_a-4 \cdots g_l-2)(g_1-1 \cdots g_a-2 \cdots g_l-1)} = 2(g_a - 1),\\[4pt]
c_{(a)(g_1-2 \cdots g_a-4 \cdots g_l-2)(g_1-3 \cdots g_a-6 \cdots g_l-3)}\\
\qquad\qquad c_{(-a)(g_1-3 \cdots g_a-6 \cdots g_l-3)(g_1-2 \cdots g_a-4 \cdots g_l-2)} = 3(g_a - 2),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
c_{(a)(g_1-g_a+1 \cdots)(g_1-g_a \cdots -g_a \cdots g_l-g_a)}\, c_{(-a)(g_1-g_a \cdots)(g_1-g_a+1 \cdots)} = g_a.
\end{cases}
$$

Aehnliche Gleichungen gelten für die Marken $(a-b)$, aber es ist nicht nöthig, dieselben herzusetzen.

Aus dem vorigen Paragraphen wissen wir, dass unter den sich gegenseitig bedingenden Systemen $(g_1 \dots g_l)$ sich immer mindestens eins befindet, dessen Zahlen entweder sämmtlich positiv oder sämmtlich negativ mit Ausschluss der Null sind. Wir betrachten ein System $(g_1 \dots g_l)$ von positiven Zahlen und nehmen an, dieselben seien nach der Grösse geordnet, so dass

$$g_1 \geqq g_2 \geqq g_3 \cdots \geqq g_l$$

ist.

Nun bilden wir die Jacobi'sche Identität für

$$\big((I), (+II), (g_1 \dots g_l)\big)$$

und für

$$\big((-I), (-II), (g_1 - 3, g_2 - 3, g_3 - 2 \dots g_l - 2)\big),$$

welche liefern:

$$c_{II(g_1\cdots g_l)\,(g_1-1,g_2-2\cdots g_{l-1})}\, c_{(g_1-1,g_2-2\cdots g_{l-1})\,I(g_1-3,g_2-3\cdots g_{l-2})}$$
$$+\, c_{(g_1\cdots g_l)\,I(g_1-2,g_2-1\cdots g_{l-1})}\, c_{(g_1-2,g_2-1\cdots g_l-1)\,II(g_1-3,g_2-3\cdots g_l-2)} = 0,$$

$$c_{(-II)(g_1-3,g_2-3\cdots g_l-2)(g_1-2,g_2-1\cdots g_l-1)}\, c_{g_1-2,g_2-1\cdots g_l-1)(-I)(g_1\cdots g_l)}$$
$$+\, c_{(g_1-3,g_2-3\cdots g_l-2)(-I)(g_1-1,g_2-2\cdots g_l-1)}\, c_{(g_1-1,g_2-2\cdots g_l-1)(-II)(g_1\cdots g_l)} = 0.$$

Bezeichne ich den Werth von

$$c_{II(g_1-2,g_2-1\cdots g_l-1)(g_1-3,g_2-3\cdots g_l-2)}\, c_{(-II)(g_1-3,g_2-3\cdots g_l-2)(g_1-2,g_2-1\cdots g_l-1)}$$

mit m, so folgt aus den vorstehenden Gleichungen:

$$g_2(g_1-1) = m g_1.$$

Nun hat für $g_1 = g_2 = g$ das m den Werth $g-1$, und in jedem andern Falle den Werth $2(g_2-1)$; letzterer genügt aber der vorstehenden Gleichung nicht, folglich muss $g_1 = g_2$ sein. Ebenso folgt

$$g_2 = g_3 = \cdots = g_l.$$

Da die Behandlung des Falles, in welchem alle g_ι negativ sind, keinen wesentlichen Unterschied macht, so ergiebt sich der Satz:

Soll mit der einfachen Gruppe (A) *eine Gruppe der bezeichneten Art zusammengesetzt sein, so ergeben sich bis auf eine sofort hervortretende Ausnahme alle Nebenwurzeln aus einem Systeme* $(g_1 \ldots g_l)$, *in welchem alle Nummern* $g_1 \ldots g_l$ *einander gleich sind.*

Aus dem gegebenen Systeme leite ich alle vorkommenden auf einem ganz bestimmten Wege her und bestimme durch diesen Weg auch die jeder Nebenwurzel zukommende Marke. Ich lasse etwa die $g_1 = g_2 = \cdots = g_l$ sämmtlich negativ $= -g$ sein und bezeichne die zugehörige inf. Transformation als Z_0. Zu der hierdurch bezeichneten Wurzel addire ich diejenige Hauptwurzel, deren Marke a_1 ist, für welche also -2 auf der a_1^{ten} Stelle steht, während auf allen andern Stellen -1 steht. Derjenigen Nebenwurzel, zu der ich durch α_1-malige Addition dieser Wurzel gelange, gebe ich die Marke $\alpha_1 a_1$ und setze dieselbe Marke an Z zur Bezeichnung der entsprechenden Transformation. Auf das System $\alpha_1 a_1$ wende ich das Hauptsystem a_2 an, was $g-\alpha_1$-mal angeht. Dasjenige System, zu welchem ich durch α_2-fache Anwendung dieser Operation gelange, bezeichne ich mit $(\alpha_1 a_1, \alpha_2 a_2)$. Für dasselbe ist $g_{a_1} = -g + 2\alpha_1 + \alpha_2$, $g_{a_2} = -g + \alpha_1 + 2\alpha_2$, während jedes andere $g_\iota = -g + \alpha_1 + \alpha_2$ ist. Folglich kann die Reihenfolge der Operationen $[a_1]$ und $[a_2]$ beliebig vertauscht werden, wenn nur die erste überhaupt α_1-, die zweite α_2-mal ausgeführt wird. Ebenso wende man auf $(\alpha_1 a_1, \alpha_2 a_2)$ die Operation $[a_3]$ etwa α_3-mal an, wo α_3 höchstens gleich $g - \alpha_1 - \alpha_2$ sein kann, und bezeichne das entsprechende Sytem mit $(\alpha_1 a_1, \alpha_2 a_2, \alpha_3 a_3)$. Auf diesem Wege fährt man fort. Dann ist es gestattet in $(\alpha_1 a_1, \alpha_2 a_2 \ldots \alpha_\nu a_\nu)$ die Reihenfolge der einzelnen Operationen beliebig zu vertauschen. Auf diesem

Wege gelangt man zu jedem mit $(-g, -g \cdots -g)$ nothwendig verbundenen Systeme und zu jedem nur einmal. Somit werden hierdurch auch alle inf. Transformationen erhalten, welche zu Nebenwurzeln gehören, und jede solche soll mit $Z_{(\alpha_1 a_1,\, \alpha_2 a_2 \cdots \alpha_\nu a_\nu)}$ bezeichnet werden. Die Zahl der Nebenwurzeln beträgt $\binom{g+l}{l}$. Da jede zugehörige inf. Transformation noch mit einem constanten Factor multiplicirt werden kann, so ist es immer möglich, folgende Gleichungen zu bekommen:

$$(X_{a_i},\ Z_{(\alpha_1 a_1,\, \alpha_2 a_2 \cdots \alpha_\nu a_\nu)}) = (\alpha_i + 1)\, Z_{(\alpha_1 a_1,\, \alpha_2 a_2 \cdots (\alpha_i+1) a_i \cdots \alpha_\nu a_\nu)},$$

für

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_\nu < g,$$

worunter auch die Gleichung fällt:

$$(X_b,\ Z_{(\alpha_1 a_1,\, \alpha_2 a_2 \cdots \alpha_\nu a_\nu)}) = (Z_{\alpha_1 a_1,\, \alpha_2 a_2 \cdots \alpha_\nu a_\nu,\, b}) \quad \text{für} \quad b \gtrless a_1, a_2 \ldots a_\nu,$$

$$(X_{a_i},\ Z_{(\alpha_1 a_1,\, \alpha_2 a_2 \cdots \alpha_\nu a_\nu)}) = 0 \quad \text{für} \quad \alpha_1 + \cdots + \alpha_\nu = g,$$

$$(X_{-a_i},\ Z_{(\alpha_1 a_1,\, \alpha_2 a_2 \cdots \alpha_i a_i \cdots \alpha_\nu a_\nu)}) =$$
$$= (g - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_\nu + 1)\, Z_{(\alpha_1 a_1,\, \alpha_2 a_2 \cdots (\alpha_i - 1) a_i \cdots \alpha_\nu a_\nu)}$$

$$(X_{-b},\ Z_{(\alpha_1 a_1,\, \alpha_2 a_2 \cdots \alpha_\nu a_\nu)}) = 0 \quad \text{für} \quad b \gtrless a_1, a_2 \ldots a_\nu,$$

$$(X_{(a_1 - a_2)},\ Z_{(\alpha_1 a_1,\, \alpha_2 a_2 \cdots \alpha_\nu a_\nu)}) = (\alpha_1 + 1)\, Z_{((\alpha_1+1) a_1,\, (\alpha_2 - 1) a_2 \cdots \alpha_\nu a_\nu)}.$$

Die vorstehenden Gruppen können in keinem Raume von l Dimensionen vorkommen, dagegen stets in einem solchen von $l + 1$ Dimensionen. Speciell für $g = 1$ können wir folgende inf. Transformationen zu Grunde legen:

$$p_a,\ p_{l+1},\ x_{l+1} p_a,\ x_a p_{l+1},\ x_b p_a,\ x_{l+1} p_{l+1} - x_a p_a,$$

wo $a, b = 1 \ldots l$ zu setzen sind. Für jedes beliebige g können gewählt werden:

$$g x_{l+1} p_{l+1} + (l+1) x_a p_a,\ p_a,\ x_a(g x_{l+1} p_{l+1} + x_1 p_1 + \cdots + x_l p_l),$$
$$p_a x_b,\ p_{l+1},\ x_{a_1}^{\alpha_1} x_{a_2}^{\alpha_2} \cdots x_{a_\nu}^{\alpha_\nu} p_{l+1},$$

bei welcher Wahl allerdings die obigen Coefficienten eine kleine Veränderung erleiden. Werden zwei derartige invariante Untergruppen vorausgesetzt, so erhält man in $l + 2$ Veränderlichen eine ganz ähnliche Darstellung.

Um die Coefficienten c für die einfache Gruppe B) anzugeben, ist es am einfachsten, wie in § 6 geschehen, bestimmte inf. Transformationen zu benutzen und diese mit Doppelmarken zu versehen. Aber zur Bildung zusammengesetzter Gruppen empfiehlt es sich, diejenigen inf. Transformationen zu Grunde zu legen, welche den Wurzeln

$\pm\omega_a$, $\pm\omega_a\pm\omega_b$ entsprechen. Dann können wir dieselbe in $2l+1$ Variabeln auf folgende Weise darstellen:

$$X_1 \quad = p_1,\; X_{1+a} = p_{1+a},\; X_{1-a} = p_{1-a},\quad X_a = x_1 p_{1+a} + 2x_{1-a}p_1,$$

$$X_{-1} \quad = p_1\left(x_1^2 + 4\sum x_{1+a}\,x_{1-a}\right) + 2x_1\sum(x_{1+a}p_{1+a} + x_{1-a}p_{1-a}),$$

$$X_{a+b} \quad = 2x_{1-a}p_{1+b} - 2x_{1-b}p_{1+a} \text{ für } |a| < |b|,$$

$$X_{-1+a} = 4x_{1-a}\left[x_1 p_1 + \sum(x_{1+m}p_{1+m} + x_{1-m}p_{1-m})\right]$$
$$- p_{1+a}\left(-x_1^2 + 4\sum x_{1+m}\,x_{1-m}\right),$$

$$Y_1 \quad = x_1 p_1 + \sum(x_{1+m}p_{1+m} + x_{1-m}p_{1-m}),\; Y_a = x_{1+a}p_{1+a} - x_{1-a}p_{1-a},$$

wo a, b als Marken an einem X auch negativ sein können.

Es sei $(g_1 \ldots g_l)$ ein System von lauter positiven Marken, durch welches bei der eingeführten Wahl der $\omega_1 \ldots \omega_l$ eine Nebenwurzel bestimmt ist; diese Nebenwurzel soll zudem alle andern liefern. Wir setzen ferner voraus, dass $g_1 \geqq g_2 \geqq \cdots \geqq g_l$ sei. Dann bilden wir die Identitäten $\left(-1, -1-2, (g_1 \ldots, g_l)\right)$ und

$$(1,\; 1+2,\; g_1-4,\; g_2-2,\; g_3 \ldots g_l),$$

durch deren Multiplication sich ergiebt:

$$c_{1\,(g_1-4,\,g_2-2\cdots)\,(g_1-2,\,g_2-2\cdots)}\; c_{(-1)\,(g_1-2,\,g_2-2\cdots)\,(g_1-4,\,g_2-2\cdots)}$$
$$\times\; c_{(1+2)\,(g_1-2,\,g_2-2\cdots)\,(g_1,\,g_2\cdots)}\; c_{(-1-2)\,(g_1,\,g_2\cdots)\,(g_1-2,\,g_2-2\cdots)} =$$
$$= c_{1\,(g_1-2,\,g_2\cdots)\,(g_1,\,g_2\cdots)}\; c_{(-1)\,(g_1,\,g_2\cdots)\,(g_1-2,\,g_2\cdots)}$$
$$\times\; c_{(1+2)\,(g_1-4,\,g_2-2\cdots)\,(g_1-2,\,g_2\cdots)}\; c_{(-1-2)\,(g_1-2,\,g_2\cdots)\,(g_1-4,\,g_2-2\cdots)}.$$

Hier hat das erste Product der linken Seite (aus zwei Factoren gebildet) den Werth: $2(g_1-1)$, das zweite: $2(g_1+g_2)$; auf der rechten Seite hat das erste Product den Werth g_1, das zweite $2(g_1+g_2-2)$. Demnach kann die obige Gleichung nicht erfüllt werden oder alle g_ν können nur die Werthe 0, 1, 2 annehmen. Im Gegensatze zu den einfachen Gruppen der Form A) giebt es daher nur sehr wenige Arten von Gruppen, welche aus der Form B) durch Zusammensetzung erhalten werden können; diese Formen vollständig anzugeben, bietet keine Schwierigkeit.

Für die einfache Form C) waren die Coefficienten c in § 17 noch von willkürlichen Constanten abhängig gemacht. Diese können wir so wählen, dass folgende Beziehungen gelten, wobei festgesetzt ist, dass $a, b \ldots$ stets positiv, aber $m, n \ldots$ sowohl positiv wie negativ sind:

$$(Y_a\ X_a) = -2X_a,\quad (Y_a\ Y_b) = 0,\quad (Y_a X_{-a}) = 2X_{-a},$$
$$(Y_a\ X_{-b}) = 0,\quad \left(Y_a\ X_{\frac{a+n}{2}}\right) = -X_{\frac{a+n}{2}},$$
$$\left(Y_a\ X_{-\frac{a+n}{2}}\right) = X_{-\frac{a+n}{2}},\quad (X_a\ X_{-a}) = Y_a,$$
$$\left(X_{\frac{a+b}{2}}\ X_{\frac{-a-b}{2}}\right) = Y_a + Y_b,\quad \left(X_{\frac{a-b}{2}}\ X_{\frac{-a+b}{2}}\right) = Y_b - Y_a,$$
$$\left(X_a\ X_{\frac{-a+n}{2}}\right) = X_{\frac{a+n}{2}},\quad \left(X_{-a}\ X_{\frac{a+n}{2}}\right) = -X_{\frac{-a+n}{2}},$$
$$\left(X_{\frac{a+n}{2}}\ X_{\frac{-a+n}{2}}\right) = X_n,\quad \left(X_{\frac{a+m}{2}}\ X_{\frac{-a+n}{2}}\right) = X_{\frac{m+n}{2}}.$$

In $2l-1$ Variabeln kann man diese Gruppe folgendermassen darstellen:

$$X_1 = p_1,\quad X_{\frac{1+a}{2}} = p_{\frac{1+a}{2}},\quad X_{\frac{1-a}{2}} = p_{\frac{1-a}{2}} + 2p_1 x_{\frac{1+a}{2}}$$
$$Y_1 = 2p_1x_1 + \sum\left(x_{\frac{1+n}{2}}p_{\frac{1+n}{2}} + x_{\frac{1-n}{2}}p_{\frac{1-n}{2}}\right),$$
$$Y_a = p_{\frac{1+a}{2}}x_{\frac{1+a}{2}} - p_{\frac{1-a}{2}}x_{\frac{1-a}{2}},\quad X_a = -p_1x^2_{\frac{1-a}{2}} - p_{\frac{1+a}{2}}x_{\frac{1-a}{2}},$$
$$X_{-a} = p_1x^2_{\frac{1+a}{2}} + p_{\frac{1-a}{2}}x_{\frac{1+a}{2}},$$
$$X_{\frac{a+b}{2}} = -2x_{\frac{1-a}{2}}x_{\frac{1-b}{2}}p_1 - x_{\frac{1-b}{2}}p_{\frac{1+a}{2}} - x_{\frac{1-a}{2}}p_{\frac{1+b}{2}},$$
$$X_{\frac{a-b}{2}} = x_{\frac{1+b}{2}}p_{\frac{1+a}{2}} - x_{\frac{1-a}{2}}p_{\frac{1-b}{2}},$$
$$X_{\frac{-a-b}{2}} = 2x_{\frac{1+a}{2}}x_{\frac{1+b}{2}}p_1 + x_{\frac{1+b}{2}}p_{\frac{1-a}{2}} + x_{\frac{1+a}{2}}p_{\frac{1-b}{2}},$$
$$X_{-1} = \left(x_1 - \sum x_{\frac{1+n}{2}}x_{\frac{1-n}{2}}\right)\left[p_1x_1 + p_1\sum x_{\frac{1+n}{2}}x_{\frac{1-n}{2}} + \right.$$
$$\left. + \sum\left(x_{\frac{1+n}{2}}x_{\frac{1+n}{2}} + x_{\frac{1-n}{2}}p_{\frac{1-n}{2}}\right)\right],$$
$$X_{\frac{-1+a}{2}} = p_{\frac{1+a}{2}}\left(x_1 - \sum x_{\frac{1+n}{2}}x_{\frac{1-n}{2}}\right) -$$
$$-x_{\frac{1-a}{2}}\left[2p_1\sum x_{\frac{1+n}{2}}x_{\frac{1-n}{2}} + \sum\left(x_{\frac{1+n}{2}}p_{\frac{1+n}{2}} + x_{\frac{1-n}{2}}p_{\frac{1-n}{2}}\right)\right],$$
$$X_{\frac{-1-a}{2}} = p_{\frac{1-a}{2}}\left(x_1 - \sum x_{\frac{1+n}{2}}x_{\frac{1-n}{2}}\right) +$$
$$+x_{\frac{1+a}{2}}\left[2p_1x_1 + \sum\left(x_{\frac{1+n}{2}}p_{\frac{1+n}{2}} + x_{\frac{1-n}{2}}p_{\frac{1-n}{2}}\right)\right].$$

Es sei gestattet, eine Darstellung in $\frac{l(l+1)}{2}$ Variabeln hier beizufügen

$$X_a = p_a, \quad X_{\frac{a+b}{2}} = p_{\frac{a+b}{2}}, \quad Y_a = 2p_a x_a + \sum^n p_{\frac{a+n}{2}} x_{\frac{a+n}{2}},$$

$$X_{-a} = p_a x_a^2 + x_a \sum p_{\frac{a+n}{2}} x_{\frac{a+n}{2}} + \sum p_a x^2_{\frac{a+n}{2}} + \sum p_{\frac{m+n}{2}} x_{\frac{a+m}{2}} x_{\frac{a+n}{2}},$$

$$X_{\frac{a-b}{2}} = 2p_a x_{\frac{a+b}{2}} + x_b p_{\frac{a+b}{2}} + \sum^n p_{\frac{a+n}{2}} x_{\frac{b+n}{2}},$$

$$\begin{aligned} X_{\frac{-a-b}{2}} = x_{\frac{a+b}{2}} \Big(& 2x_a p_a + 2x_b p_b + x_{\frac{a+b}{2}} p_{\frac{a+b}{2}} + x_a x_b p_{\frac{a+b}{2}} \\ & + \sum \Big(x_{\frac{a+n}{2}} p_{\frac{a+n}{2}} + x_{\frac{b+n}{2}} p_{\frac{b+n}{2}} + x_a x_{\frac{b+n}{2}} p_{\frac{a+n}{2}} + x_b x_{\frac{a+n}{2}} p_{\frac{b+n}{2}} \\ & + 2 \sum x_{\frac{a+n}{2}} x_{\frac{b+n}{2}} p_n \Big). \end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass betreffs der Zusammensetzung mit Gruppen von der Form C) dasselbe Gesetz gilt, wie für B), können wir fast genau dasselbe Beweisverfahren einschlagen. Indem wir also für die $g_1 \dots g_l$ dieselbe Voraussetzung machen wie vorher, bilden wir die Jacobi'sche Identität für $\left(-1, \frac{-1-2}{2}, (g_1 \dots g_l)\right)$ und für

$$\left(1, \frac{1+2}{2}, g_1 - 3, g_2 - 1, g_3 \dots g_l\right).$$

Da $(g_1 + 1, g_2 - 1 \dots)$ nicht vorkommen kann, muss $(g_1 - 1)(g_1 + g_2)$ entweder gleich $g_1(g_1 + g_2 - 2)$ oder gleich $2g_1(g_1 + g_2 - 4)$ sein, was beides nicht möglich ist.

Einfache Gruppen von der Gestaltung D) können für jedes l in $2l - 2$ Variabeln vorkommen; man erlangt dieselben aus der oben angegebenen Darstellung von B) indem man sowohl x_1 wie p_1 verschwinden lässt. (Für $l = 3$, wo die Formen D) und A) äquivalent sind, kommt die letztere Darstellung auf die allgemeine projective Transformation der Geraden eines dreidimensionalen Raumes hinaus.) Ueber die Zusammensetzung brauchen wir nach den vorangehenden Untersuchungen nichts mehr beizufügen.

Braunsberg, im October 1888.