MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther Dyck
in München

Adolph Mayer
in Leipzig

46. Band. 4. Heft.

Ausgegeben am 7. November.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER

1895.

Neuester Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

1895. V.

Klein, F., the Evanston Colloquium. Lectures on Mathematics delivered from Aug. 28 to Sept. 9, 1893, before members of the Congress of Mathematics held in connection with the World's Fair in Chicago at Northwestern University Evanston, Ill. by F. K. Reported by Alexander Ziwet. [IX u. 109 S.] gr. 8. 1894. In Leinw. geb. n. ℳ 6.— [In Kommission.]

Krause, Dr. **Martin**, Professor an der Königl. Sächs. technischen Hochschule zu Dresden, Theorie der doppeltperiodischen Functionen einer veränderlichen Grösse. 2 Bde. I. Band. [VIII u. 328 S.] gr. 8. 1895. geh. n. ℳ 12.—

Schröder, Dr. **Ernst**, o. Prof. der Mathematik an der technischen Hochschule zu Karlsruhe, Algebra und Logik der Relative, der Vorlesungen über die Algebra der Logik dritter Band. I. Abteilung. Mit vielen Textfiguren. [VIII u. 649 S.] gr. 8. 1895. geh. n. ℳ 16.—
Band II, 2 erscheint im Sommer 1896.

Wirtinger, Dr. **Wilhelm**, a. o. Professor an der Universität in Innsbruck, Untersuchungen über Thetafunktionen. Von der philosophischen Fakultät der Universität Göttingen mit dem Beneke-Preise für 1895 gekrönt und mit Unterstützung der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften daselbst herausgegeben. [VIII u. 125 S.] gr. 4. 1895. geh. n. ℳ 9.—

Verlag von Arthur Felix in Leipzig.

Die sogenannte

Thomas'sche Rechenmaschine

für Mathematiker, Astronomen, Ingenieure, Finanzbeamte, Versicherungsgesellschaften und Zahlenrechner überhaupt

von

F. Reuleaux,

Professor.

Zweite umgearbeitete und erweiterte Auflage.

Mit einer lithographirten Tafel.

In 8°. VII. 60 Seiten. 1892. Broschirt. **Preis 2 Mark.**

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

1895.

Biermann, Dr. **Otto**, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule zu Brünn, Elemente der höheren Mathematik. Vorlesungen zur Vorbereitung des Studiums der Differentialrechnung, Algebra und Funktionentheorie. [XII u. 382 S.] gr. 8. 1895. geh. n. ℳ 10.—

Eberhard, Dr. **V.**, Professor a. d. Universität zu Königsberg i. P., die Grundgebilde der ebenen Geometrie. In 2 Bänden. I. Band. Mit 5 Figurentafeln. [XLVIII u. 302 S.] gr. 8. 1895. geh. n. ℳ 14.—

Fiorini, Matteo, Erd- und Himmelsgloben, ihre Geschichte und Konstruktion. Nach dem Italienischen frei bearbeitet von Siegmund Günther. Mit 9 Textfiguren. [V u. 137 S.] gr. 8. 1895. geh. n. ℳ 4.—

Gundelfinger, Dr. **Sigmund**, Prof. an der technischen Hochschule zu Darmstadt, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte, herausgegeben von Dr. Friedrich Dingeldey, Privatdocent ebendaselbst. Mit in den Text gedruckten Figuren und einem Anhange, enthaltend Aufgaben und weitere Ausführungen. [VIII u. 434 S.] gr. 8. 1895. geh. n. ℳ 12.—

Holzmüller, Dr. **Gustav**, Direktor der Gewerbeschule (Realschule mit Fachklassen) zu Hagen i. W., Mitglied der Kais. Leop. Carol. Akad. der Naturforscher, methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik. (Im engsten Anschluß an die Neuen Lehrpläne.) In drei Teilen. gr. 8. In Leinw. geb.

I. Teil, nach Jahrgängen geordnet und bis zur Abschlußprüfung der Vollanstalten reichend. Mit 142 Figuren im Text. 2. Aufl. [VIII u. 212 S.] 1895. n. ℳ 2.40.

II. Teil, für die drei Oberklassen der höheren Lehranstalten bestimmt. Mit 210 Figuren im Text. [VII u. 273 S.] 1894. n. ℳ 3.—

III. Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitungen auf die Hochschul-Mathematik. Mit 160 Figuren im Text. [VIII u. 224 S.] 1895. n. ℳ 2.80.

Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre.

Von

Georg Cantor in Halle a./S.

(Erster Artikel.)

„Hypotheses non fingo.“

„Neque enim leges intellectui aut rebus damus ad arbitrium nostrum, sed tanquam scribae fideles ab ipsius naturae voce latas et prolatas excipimus et describimus.“

„Veniet tempus, quo ista quae nunc latent, in lucem dies extrahat et longioris aevi diligentia.“

§ 1.

Der Mächtigkeitsbegriff oder die Cardinalzahl.

Unter einer ‚Menge‘ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objecten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘ von M genannt werden) zu einem Ganzen.

In Zeichen drücken wir dies so aus:

(1) $$M = \{m\}.$$

Die Vereinigung mehrerer Mengen $M, N, P, \ldots$, die keine gemeinsamen Elemente haben, zu einer einzigen bezeichnen wir mit

(2) $$(M, N, P, \ldots).$$

Die Elemente dieser Menge sind also die Elemente von M, von N, von P etc. zusammengenommen.

‚Theil‘ oder ‚Theilmenge‘ einer Menge M nennen wir jede *andere* Menge M_1, deren Elemente zugleich Elemente von M sind.

Ist M_2 ein Theil von M_1, M_1 ein Theil von M, so ist auch M_2 ein Theil von M.

Jeder Menge M kommt eine bestimmte ‚Mächtigkeit‘ zu, welche wir auch ihre ‚Cardinalzahl‘ nennen.

‚Mächtigkeit‘ oder ‚Cardinalzahl‘ von M nennen wir den Allgemeinbegriff, welcher mit Hülfe unseres activen Denkvermögens dadurch aus der Menge M hervorgeht, dass von der Beschaffenheit ihrer verschiedenen Elemente m und von der Ordnung ihres Gegebenseins abstrahirt wird.

Das Resultat dieses zweifachen Abstractionsacts, die Cardinalzahl oder Mächtigkeit von M, bezeichnen wir mit

(3) $$\overline{\overline{M}}.$$

Da aus jedem einzelnen Elemente m, wenn man von seiner Beschaffenheit absieht, eine ‚Eins' wird, so ist die Cardinalzahl $\overline{\overline{M}}$ selbst eine bestimmte aus lauter Einsen zusammengesetzte Menge, die als intellectuelles Abbild oder Projection der gegebenen Menge M in unserm Geiste Existenz hat.

Zwei Mengen M und N nennen wir ‚äquivalent' und bezeichnen dies mit

univalent

(4) $$M \sim N \quad oder \quad N \sim M,$$

wenn es möglich ist, dieselben gesetzmässig in eine derartige Beziehung zu einander zu setzen, dass jedem Element der einen von ihnen ein und nur ein Element der andern entspricht.

Jedem Theil M_1 von M entspricht alsdann ein bestimmter äquivalenter Theil N_1 von N und umgekehrt.

Hat man ein solches Zuordnungsgesetz zweier äquivalenten Mengen, so lässt sich dasselbe (abgesehen von dem Falle, dass jede von ihnen aus nur einem Elemente besteht) mannigfach modificiren. Namentlich kann stets die Vorsorge getroffen werden, dass einem besonderen Elemente m_0 von M irgend ein besonderes Element n_0 von N entspricht. Denn entsprechen bei dem anfänglichen Gesetze die Elemente m_0 und n_0 noch nicht einander, vielmehr dem Elemente m_0 von M das Element n_1 von N, dem Elemente n_0 von N das Element m_1 von M, so nehme man das modificirte Gesetz, wonach m_0 und n_0 und ebenso m_1 und n_1 entsprechende Elemente beider Mengen werden, an den übrigen Elementen jedoch das erste Gesetz erhalten bleibt. Hierdurch ist jener Zweck erreicht.

Jede Menge ist sich selbst äquivalent:

(5) $$M \sim M.$$

Sind zwei Mengen einer dritten äquivalent, so sind sie auch unter einander äquivalent:

(6) $$aus \quad M \sim P \quad und \quad N \sim P \quad folgt \quad M \sim N.$$

Von fundamentaler Bedeutung ist es, *dass zwei Mengen M und N dann und nur dann dieselbe Cardinalzahl haben, wenn sie äquivalent sind:*

(7) $$aus \quad M \sim N \quad folgt \quad \overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}},$$

und

(8) $$aus \quad \overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}} \quad folgt \quad M \sim N.$$

Die Aequivalenz von Mengen bildet also das nothwendige und untrügliche Criterium für die Gleichheit ihrer Cardinalzahlen.

In der That bleibt nach der obigen Definition der Mächtigkeit die Cardinalzahl $\overline{\overline{M}}$ ungeändert, wenn an Stelle eines Elementes oder auch an Stelle mehrerer, selbst aller Elemente m von M je ein anderes Ding substituirt wird.

Ist nun $M \sim N$, so liegt ein Zuordnungsgesetz zu Grunde, durch welches M und N gegenseitig eindeutig auf einander bezogen sind; dabei entspreche dem Elemente m von M das Element n von N. Wir können uns alsdann an Stelle jedes Elementes m von M das entsprechende Element n von N substituirt denken, und es verwandelt sich dabei M in N ohne Aenderung der Cardinalzahl; es ist folglich

$$\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}.$$

Die Umkehrung des Satzes ergiebt sich aus der Bemerkung, dass zwischen den Elementen von M und den verschiedenen Einsen ihrer Cardinalzahl $\overline{\overline{M}}$ ein gegenseitig eindeutiges Zuordnungsverhältniss besteht. Denn es wächst gewissermassen, wie wir sahen, $\overline{\overline{M}}$ so aus M heraus, dass dabei aus jedem Elemente m von M eine besondere Eins von $\overline{\overline{M}}$ wird. Wir können daher sagen, dass

$$M \sim \overline{\overline{M}}. \tag{9}$$

Ebenso ist $N \sim \overline{\overline{N}}$. Ist also $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$, so folgt nach (6) $M \sim N$.

Wir heben noch den aus dem Begriff der Aequivalenz unmittelbar folgenden Satz hervor:

Sind $M, N, P, \ldots$ Mengen, die keine gemeinsamen Elemente haben, $M', N', P', \ldots$ ebensolche jenen entsprechende Mengen, und ist

$$M \sim M', \; N \sim N', \; P \sim P', \ldots,$$

so ist auch immer

$$(M, N, P, \ldots) \sim (M', N', P', \ldots).$$

§ 2.

Das ‚Grösser' und ‚Kleiner' bei Mächtigkeiten.

Sind bei zwei Mengen M und N mit den Cardinalzahlen $\mathfrak{a} = \overline{\overline{M}}$ und $\mathfrak{b} = \overline{\overline{N}}$ die *zwei* Bedingungen erfüllt:

1) *es giebt keinen Theil von M, der mit N äquivalent ist,*

2) *es giebt einen Theil N_1 von N, so dass $N_1 \sim M$,*

so ist zunächst ersichtlich, dass dieselben erfüllt bleiben, wenn in ihnen M und N durch zwei denselben äquivalente Mengen M' und N' ersetzt werden; *sie drücken daher eine bestimmte Beziehung der Cardinalzahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zu einander aus.*

Ferner *ist die Aequivalenz von* M *und* N, *also die Gleichheit von* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *ausgeschlossen;* denn wäre $M \sim N$, so hätte man, weil $N_1 \sim M$, auch $N_1 \sim N$ und es müsste wegen $M \sim N$ auch ein Theil M_1 von M existiren, so dass $M_1 \sim M$, also auch $M_1 \sim N$ wäre, was der Bedingung 1) widerspricht.

Drittens *ist die Beziehung von* $\mathfrak{a}$ *zu* $\mathfrak{b}$ *eine solche, dass sie dieselbe Beziehung von* $\mathfrak{b}$ *zu* $\mathfrak{a}$ *unmöglich macht;* denn wenn in 1) und 2) die Rollen von M und N vertauscht werden, so entstehen daraus zwei Bedingungen, die jenen contradictorisch entgegengesetzt sind.

Wir drücken die durch 1) *und* 2) *charakterisirte Beziehung von* $\mathfrak{a}$ *zu* $\mathfrak{b}$ *so aus, dass wir sagen:* $\mathfrak{a}$ *ist kleiner als* $\mathfrak{b}$ *oder auch* $\mathfrak{b}$ *ist grösser als* $\mathfrak{a}$, in Zeichen:

(1) $$\mathfrak{a} < \mathfrak{b} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{b} > \mathfrak{a}.$$

Man beweist leicht, dass

(2) $$\text{wenn} \quad \mathfrak{a} < \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{b} < \mathfrak{c}, \quad \text{dann immer} \quad \mathfrak{a} < \mathfrak{c}.$$

Ebenso folgt ohne Weiteres aus jener Definition, dass, *wenn* P_1 *Theil einer Menge* P *ist, aus* $\mathfrak{a} < \overline{\overline{P}}_1$ *immer auch* $\mathfrak{a} < \overline{\overline{P}}$ *und aus* $\overline{\overline{P}} < \mathfrak{b}$ *immer auch* $\overline{\overline{P}}_1 < \mathfrak{b}$ *sich ergiebt.*

Wir haben gesehen, dass von den drei Beziehungen

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{a} < \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{b} < \mathfrak{a}$$

jede einzelne die beiden anderen ausschliesst.

Dagegen versteht es sich keineswegs von selbst und dürfte an dieser Stelle unseres Gedankenganges kaum zu beweisen sein, dass bei irgend zwei Cardinalzahlen $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *eine von jenen drei Beziehungen nothwendig realisirt sein müsse.*

Erst später, wenn wir einen Ueberblick über die aufsteigende Folge der transfiniten Cardinalzahlen und eine Einsicht in ihren Zusammenhang gewonnen haben werden, wird sich die Wahrheit des Satzes ergeben:

A. „*Sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *zwei beliebige Cardinalzahlen, so ist entweder* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ *oder* $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ *oder* $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$.“

Auf's Einfachste lassen sich aus diesem Satze die folgenden ableiten, von denen wir aber vorläufig keinerlei Gebrauch machen dürfen:

B. „*Sind zwei Mengen* M *und* N *so beschaffen, dass* M *mit einem Theil* N_1 *von* N *und* N *mit einem Theil* M_1 *von* M *äquivalent ist, so sind auch* M *und* N *äquivalent.*“

C. „*Ist* M_1 *ein Theil einer Menge* M, M_2 *ein Theil der Menge* M_1, *und sind die Mengen* M *und* M_2 *äquivalent, so ist auch* M_1 *den Mengen* M *und* M_2 *äquivalent.*“

D. „*Ist bei zwei Mengen* M *und* N *die Bedingung erfüllt, dass* N *weder mit* M *selbst, noch mit einem Theile von* M *äquivalent ist, so giebt es einen Theil* N_1 *von* N, *der mit* M *äquivalent ist.*“

E. „*Sind zwei Mengen* M *und* N *nicht äquivalent, und giebt es einen Theil* N_1 *von* N, *der mit* M *äquivalent ist, so ist kein Theil von* M *mit* N *äquivalent.*“

§ 3.

Die Addition und Multiplication von Mächtigkeiten.

Die Vereinigung zweier Mengen M und N, die keine gemeinschaftlichen Elemente haben, wurde in § 1, (2) mit (M, N) bezeichnet. Wir nennen sie die *„Vereinigungsmenge von M und N“*.

Sind M', N' zwei andere Mengen ohne gemeinschaftliche Elemente, und ist $M \sim M'$, $N \sim N'$, so sahen wir, dass auch

$$(M, N) \sim (M', N').$$

Daraus folgt, dass die Cardinalzahl von (M, N) nur von den Cardinalzahlen $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{a}$ und $\overline{\overline{N}} = \mathfrak{b}$ abhängt.

Dies führt zur Definition der Summe von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, indem wir setzen:

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \overline{\overline{(M, N)}}. \tag{1}$$

Da im Mächtigkeitsbegriff von der Ordnung der Elemente abstrahirt ist, so folgt ohne Weiteres

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \tag{2}$$

und für je drei Cardinalzahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$

$$\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c}. \tag{3}$$

Wir kommen zur Multiplication.

Jedes Element m einer Menge M lässt sich mit jedem Elemente n einer andern Menge N zu einem neuen Elemente (m, n) verbinden; für die Menge aller dieser Verbindungen (m, n) setzen wir die Bezeichnung $(M . N)$ fest. Wir nennen sie die *„Verbindungsmenge von M und N“*. Es ist also

$$(M . N) = \{(m, n)\}. \tag{4}$$

Man überzeugt sich, dass auch die Mächtigkeit von $(M . N)$ nur von den Mächtigkeiten $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{a}$, $\overline{\overline{N}} = \mathfrak{b}$ abhängt; denn ersetzt man die Mengen M und N durch die ihnen äquivalenten Mengen

$$M' = \{m'\} \quad \text{und} \quad N' = \{n'\}$$

und betrachtet man m, m' sowie n, n' als zugeordnete Elemente, so wird die Menge

$$(M' . N') = \{(m', n')\}$$

dadurch in ein gegenseitig eindeutiges Zuordnungsverhältniss zu $(M . N)$ gebracht, dass man (m, n) und (m', n') als einander entsprechende Elemente ansieht; es ist also

$$(M' . N') \sim (M . N). \tag{5}$$

Wir definiren nun das Product $\mathfrak{a} . \mathfrak{b}$ durch die Gleichung

$$\mathfrak{a} . \mathfrak{b} = \overline{\overline{(M . N)}}. \tag{6}$$

Kreuzproduct

Eine Menge mit der Cardinalzahl $\mathfrak{a} . \mathfrak{b}$ lässt sich aus zwei Mengen M und N mit den Cardinalzahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ auch nach folgender Regel herstellen: man gehe von der Menge N aus und ersetze in ihr jedes Element n durch eine Menge $M_n \sim M$; fasst man die Elemente aller dieser Mengen M_n zu einem Ganzen S zusammen, so sieht man leicht, dass

$$S \sim (M . N), \tag{7}$$

folglich

$$\overline{\overline{S}} = \mathfrak{a} . \mathfrak{b} .$$

Denn wird bei irgend einem zu Grunde liegenden Zuordnungsgesetze der beiden äquivalenten Mengen M und M_n das dem Elemente m von M entsprechende Element von M_n mit m_n bezeichnet, so hat man:

$$S = \{m_n\}, \tag{8}$$

und es lassen sich daher die Mengen S und $(M . N)$ dadurch gegenseitig eindeutig auf einander beziehen, dass m_n und (m, n) als entsprechende Elemente angesehen werden.

Aus unseren Definitionen folgen leicht die Sätze:

$$\mathfrak{a} . \mathfrak{b} = \mathfrak{b} . \mathfrak{a}, \tag{9}$$

$$\mathfrak{a} . (\mathfrak{b} . \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} . \mathfrak{b}) . \mathfrak{c}, \tag{10}$$

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}, \tag{11}$$

weil

$$(M . N) \sim (N . M),$$

$$\big(M . (N . P)\big) \sim \big((M . N) . P\big),$$

$$\big(M . (N, P)\big) \sim \big((M . N), (M . P)\big).$$

Addition und Multiplication von Mächtigkeiten unterliegen also allgemein dem commutativen, associativen und distributiven Gesetze.

§ 4.

Die Potenzirung von Mächtigkeiten.

Unter einer ‚*Belegung der Menge N mit Elementen der Menge M*‘ oder einfacher ausgedrückt, unter einer ‚*Belegung von N mit M*‘ verstehen wir ein Gesetz, durch welches mit jedem Elemente n von N je ein bestimmtes Element von M verbunden ist, wobei ein und dasselbe Element von M wiederholt zur Anwendung kommen kann. Das mit n verbundene Element von M ist gewissermassen eine eindeutige Function von n und kann etwa mit $f(n)$ bezeichnet werden; sie heisse ‚*Belegungsfunction* von n‘; die entsprechende Belegung von N werde $f(N)$ genannt.

Zwei Belegungen $f_1(N)$ und $f_2(N)$ heissen dann und nur dann gleich, wenn *für alle Elemente* n *von* N die Gleichung erfüllt ist:

$$f_1(n) = f_2(n), \tag{1}$$

so dass, wenn auch nur für ein einziges besonderes Element $n = n_0$ diese Gleichung nicht besteht, $f_1(N)$ und $f_2(N)$ als verschiedene Belegungen von N charakterisirt sind.

Beispielsweise kann, wenn m_0 ein besonderes Element von M ist, festgesetzt sein, dass für alle n

$$f(n) = m_0$$

sei; dieses Gesetz constituirt eine besondere Belegung von N mit M.

Eine andere Art von Belegungen ergiebt sich, wenn m_0 und m_1 zwei verschiedene besondere Elemente von M sind, n_0 ein besonderes Element von N ist, durch die Festsetzung:

$$f(n_0) = m_0,$$
$$f(n) = m_1$$

für alle n, die von n_0 verschieden sind.

Die Gesammtheit aller verschiedenen Belegungen von N mit M bildet eine bestimmte Menge mit den Elementen $f(N)$; wir nennen sie die ‚*Belegungsmenge von* N *mit* M' und bezeichnen sie durch $(N \mid M)$. Es ist also:

$$(N \mid M) = \{f(N)\}. \tag{2}$$

Ist $M \sim M'$ und $N \sim N'$, so findet man leicht, dass auch

$$(N \mid M) \sim (N' \mid M'). \tag{3}$$

Die Cardinalzahl von $(N \mid M)$ hängt also nur von den Cardinalzahlen $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{a}$ und $\overline{\overline{N}} = \mathfrak{b}$ ab; sie dient uns zur Definition der Potenz $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$:

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} = \overline{\overline{(N \mid M)}}. \tag{4}$$

Für drei beliebige Mengen M, N und P beweist man leicht die Sätze:

$$\big((N \mid M) . (P \mid M)\big) \sim \big((N, P) \mid M\big), \tag{5}$$

$$\big((P \mid M) . (P \mid N)\big) \sim \big(P \mid (M . N)\big), \tag{6}$$

$$\big(P \mid (N \mid M)\big) \sim \big((P . N) \mid M\big), \tag{7}$$

aus denen, wenn $\overline{\overline{P}} = \mathfrak{c}$ gesetzt wird, auf Grund von (4) und im Hinblick auf § 3, die für drei beliebige Cardinalzahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ gültigen Sätze sich ergeben:

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} . \mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}, \tag{8}$$

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} . \mathfrak{b}^{\mathfrak{c}} = (\mathfrak{a} . \mathfrak{b})^{\mathfrak{c}}, \tag{9}$$

$$(\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b} . \mathfrak{c}}. \tag{10}$$

Wie inhaltreich und weittragend diese einfachen auf die Mächtigkeiten ausgedehnten Formeln sind, erkennt man an folgendem Beispiel:

Bezeichnen wir die Mächtigkeit des Linearcontinuums X (d. h. des Inbegriffs X aller reellen Zahlen x, die $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind) mit $\mathfrak{o}$, so überzeugt man sich leicht, dass sie sich unter anderm durch die Formel

$$\mathfrak{o} = 2^{\aleph_0} \tag{11}$$

darstellen lässt, wo über die Bedeutung von $\aleph_0$ der § 6 Aufschluss giebt.

In der That ist $2^{\aleph_0}$ nach (4) nichts anderes als die Mächtigkeit aller Darstellungen

$$x = \frac{f(1)}{2} + \frac{f(2)}{2^2} + \cdots + \frac{f(\nu)}{2^\nu} + \cdots \qquad \left(\text{wo } f(\nu) = 0 \text{ oder } 1\right) \tag{12}$$

der Zahlen x im Zweiersystem. Beachten wir hierbei, dass jede Zahl x nur einmal zur Darstellung kommt, mit Ausnahme der Zahlen $x = \dfrac{2\nu + 1}{2^\mu} < 1$, die zweimal dargestellt werden, so haben wir, wenn wir die „abzählbare" Gesammtheit der letzteren mit $\{s_\nu\}$ bezeichnen, zunächst

$$2^{\aleph_0} = \overline{\overline{(\{s_\nu\}, X)}}.$$

Hebt man aus X irgend eine „abzählbare" Menge $\{t_\nu\}$ heraus und bezeichnet den Rest mit X_1, so ist

$$X = (\{t_\nu\}, X_1) = (\{t_{2\nu-1}\}, \{t_{2\nu}\}, X_1),$$
$$(\{s_\nu\}, X) = (\{s_\nu\}, \quad \{t_\nu\}, \quad X_1),$$
$$\{t_{2\nu-1}\} \sim \{s_\nu\}, \quad \{t_{2\nu}\} \sim \{t_\nu\}, \quad X_1 \sim X_1,$$

mithin

$$X \sim (\{s_\nu\}, X),$$

also (§ 1)

$$2^{\aleph_0} = \overline{\overline{X}} = \mathfrak{o}.$$

Aus (11) folgt durch Quadriren (nach § 6, (6))

$$\mathfrak{o} \cdot \mathfrak{o} = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{o}$$

und hieraus durch fortgesetzte Multiplication mit $\mathfrak{o}$

$$\mathfrak{o}^\nu = \mathfrak{o}, \tag{13}$$

wo ν irgend eine endliche Cardinalzahl ist.

Erhebt man beide Seiten von (11) zur Potenz $\aleph_0$, so erhält man

$$\mathfrak{o}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0}.$$

Da aber nach § 6, (8) $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$, so ist

$$\mathfrak{o}^{\aleph_0} = \mathfrak{o}. \tag{14}$$

Die Formeln (13) und (14) haben aber keine andere Bedeutung als diese: „Das ν-dimensionale sowohl, wie das $\aleph_0$-dimensionale Continuum haben die Mächtigkeit des eindimensionalen Continuums." Es wird also *der ganze Inhalt* der Arbeit im 84ten Bande des Crelle'schen Journals, pag. 242 *mit diesen wenigen Strichen* aus den *Grundformeln des Rechnens mit Mächtigkeiten* rein algebraisch abgeleitet.

§ 5.

Die endlichen Cardinalzahlen.

Es soll zunächst gezeigt werden, wie die dargelegten Principien, auf welchen später die Lehre von den actual unendlichen oder transfiniten Cardinalzahlen aufgebaut werden soll, auch die natürlichste, kürzeste und strengste Begründung der endlichen Zahlenlehre liefern.

Einem einzelnen Ding e_0, wenn wir es unter den Begriff einer Menge $E_0 = (e_0)$ subsumiren, entspricht als Cardinalzahl das, was wir ‚Eins' nennen und mit 1 bezeichnen; wir haben:

$$1 = \overline{\overline{E}}_0. \tag{1}$$

Man vereinige nun mit E_0 ein anderes Ding e_1, die Vereinigungsmenge heisse E_1, so dass

$$E_1 = (E_0, e_1) = (e_0, e_1). \tag{2}$$

Die Cardinalzahl von E_1 heisst ‚Zwei' und wird mit 2 bezeichnet

$$2 = \overline{\overline{E}}_1. \tag{3}$$

Durch Hinzufügung neuer Elemente erhalten wir die Reihe der Mengen

$$E_2 = (E_1, e_2), \quad E_3 = (E_2, e_3), \ldots,$$

welche in unbegrenzter Folge uns successive die übrigen, mit 3, 4, 5, ... bezeichneten, sogenannten *endlichen Cardinalzahlen* liefern. Die hierbei vorkommende hülfsweise Verwendung derselben Zahlen als Indices rechtfertigt sich daraus, dass eine Zahl erst dann in dieser Bedeutung gebraucht wird, nachdem sie als Cardinalzahl definirt worden ist. Wir haben, wenn unter $\nu - 1$ die der Zahl ν in jener Reihe nächstvorangehende verstanden wird,

$$\nu = \overline{\overline{E}}_{\nu-1}, \tag{4}$$

$$E_\nu = (E_{\nu-1}, e_\nu) = (e_0, e_1, \ldots e_\nu). \tag{5}$$

Aus der Summendefinition in § 3 folgt:

$$\overline{\overline{E}}_\nu = \overline{\overline{E}}_{\nu-1} + 1, \tag{6}$$

d. h. jede endliche Cardinalzahl (ausser 1) ist die Summe aus der nächst vorhergehenden und 1.

Bei unserm Gedankengange treten nun folgende drei Sätze in den Vordergrund:

A. „*Die Glieder der unbegrenzten Reihe endlicher Cardinalzahlen*

$$1, 2, 3, \ldots \nu, \ldots$$

sind alle unter einander verschieden (d. h. die in § 1 aufgestellte Aequivalenzbedingung ist an den entsprechenden Mengen nicht erfüllt)".

B. „*Jede dieser Zahlen* ν *ist grösser, als die ihr vorangehenden und kleiner, als die auf sie folgenden* (§ 2)."

C. „*Es giebt keine Cardinalzahlen, welche ihrer Grösse nach zwischen zwei benachbarten* ν *und* $\nu + 1$ *lägen* (§ 2)."

Die Beweise dieser Sätze stützen wir auf die zwei folgenden D und E, welche daher zunächst zu erhärten sind.

D. „*Ist* M *eine Menge von solcher Beschaffenheit, dass sie mit keiner von ihren Theilmengen gleiche Mächtigkeit hat, so hat auch die Menge* (M, e), *welche aus* M *durch Hinzufügung eines einzigen neuen Elementes* e *hervorgeht, dieselbe Beschaffenheit, mit keiner von ihren Theilmengen gleiche Mächtigkeit zu haben.*"

E. „*Ist* N *eine Menge mit der endlichen Cardinalzahl* ν, N_1 *irgend eine Theilmenge von* N, *so ist die Cardinalzahl von* N_1 *gleich einer der vorangehenden Zahlen* $1, 2, 3, \ldots \nu - 1$."

Beweis von D. Nehmen wir an, es hätte die Menge (M, e) mit einer ihrer Theilmengen, wir wollen sie N nennen, gleiche Mächtigkeit, so sind zwei Fälle zu unterscheiden, die beide auf einen Widerspruch führen:

1) Die Menge N enthält e als Element; es sei $N = (M_1, e)$; dann ist M_1 ein Theil von M, weil N ein Theil von (M, e) ist. Wie wir in § 1 sahen, lässt sich das Zuordnungsgesetz der beiden äquivalenten Mengen (M, e) und (M_1, e) so modificiren, dass das Element e der einen demselben Element e der andern entspricht; alsdann sind von selbst auch M und M_1 gegenseitig eindeutig auf einander bezogen. Dies streitet aber gegen die Voraussetzung, dass M mit seinem Theile M_1 nicht gleiche Mächtigkeit hat.

2) Die Theilmenge N von (M, e) enthält e nicht als Element, so ist N entweder M oder ein Theil von M. Bei dem zu Grunde liegenden Zuordnungsgesetze zwischen (M, e) und N möge das Element e der ersteren dem Elemente f der letzteren entsprechen. Sei $N = (M_1, f)$; dann wird gleichzeitig die Menge M in gegenseitig eindeutige Beziehung zu M_1 gesetzt sein; M_1 ist aber als Theil von N jedenfalls auch ein Theil von M. Es wäre auch hier M einem seiner Theile äquivalent, gegen die Voraussetzung.

Beweis von E. Es werde die Richtigkeit des Satzes bis zu einem gewissen ν vorausgesetzt und dann auf die Gültigkeit für das nächstfolgende $\nu + 1$ wie folgt geschlossen.

Als Menge mit der Cardinalzahl $\nu + 1$ werde $E_\nu = (e_0, e_1, \ldots e_\nu)$ zu Grunde gelegt; ist der Satz für diese richtig, so folgt ohne Weiteres (§ 1) auch seine Gültigkeit für jede andere Menge mit derselben Cardinalzahl $\nu + 1$. Sei E' irgend ein Theil von E_ν; wir unterscheiden folgende Fälle:

1) E' enthält e_ν nicht als Element, dann ist E' entweder $E_{\nu-1}$

oder ein Theil von $E_{\nu-1}$, hat also zur Cardinalzahl entweder ν oder eine der Zahlen $1, 2, 3, \ldots \nu - 1$, weil wir ja unsern Satz als richtig für die Menge $E_{\nu-1}$ mit der Cardinalzahl ν voraussetzen.

2) E' besteht aus dem einzigen Element e_ν, dann ist $\overline{\overline{E'}} = 1$.

3) E' besteht aus e_ν und einer Menge E'', so dass $E' = (E'', e_\nu)$ E'' ist ein Theil von $E_{\nu-1}$, hat also vorausgesetztermassen zur Cardinalzahl eine der Zahlen $1, 2, 3, \ldots \nu - 1$.

Nun ist aber $\overline{\overline{E'}} = \overline{\overline{E''}} + 1$, daher hat E' zur Cardinalzahl eine der Zahlen $2, 3, \ldots \nu$.

Beweis von A. Jede der von uns mit E_ν bezeichneten Mengen hat die Beschaffenheit, mit keiner ihrer Theilmengen äquivalent zu sein. Denn nimmt man an, dass dies für ein gewisses ν richtig sei, so folgt aus dem Satze D dasselbe für das nächstfolgende $\nu + 1$.

Für $\nu = 1$ erkennt man aber unmittelbar, dass die Menge $E_1 = (e_0, e_1)$ keiner ihrer Theilmengen, die hier (e_0) und (e_1) sind, äquivalent ist.

Betrachten wir nun irgend zwei Zahlen μ und ν der Reihe $1, 2, 3, \ldots$ und ist μ die frühere, ν die spätere, so ist $E_{\mu-1}$ eine Theilmenge von $E_{\nu-1}$; es sind daher $E_{\mu-1}$ und $E_{\nu-1}$ nicht äquivalent; die zugehörigen Cardinalzahlen $\mu = \overline{\overline{E}}_{\mu-1}$ und $\nu = \overline{\overline{E}}_{\nu-1}$ sind somit nicht gleich.

Beweis von B. Ist von den beiden endlichen Cardinalzahlen μ und ν die erste die frühere, die zweite die spätere, so ist $\mu < \nu$. Denn betrachten wir die beiden Mengen $M = E_{\mu-1}$ und $N = E_{\nu-1}$, so ist an ihnen jede der beiden Bedingungen in § 2 für $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{N}}$ erfüllt. Die Bedingung 1) ist erfüllt, weil nach Satz E eine Theilmenge von $M = E_{\mu-1}$ nur eine von den Cardinalzahlen $1, 2, 3, \ldots \mu - 1$ haben, also der Menge $N = E_{\nu-1}$ nach Satz A nicht äquivalent sein kann. Die Bedingung 2) ist erfüllt, weil hier M selbst ein Theil von N ist.

Beweis von C. Sei $\mathfrak{a}$ eine Cardinalzahl, die kleiner ist als $\nu + 1$. Wegen der Bedingung 2) des § 2 giebt es eine Theilmenge von E_ν mit der Cardinalzahl $\mathfrak{a}$. Nach Satz E kommt einer Theilmenge von E_ν nur eine der Cardinalzahlen $1, 2, 3, \ldots \nu$ zu.

Es ist also $\mathfrak{a}$ gleich einer von den Zahlen $1, 2, 3, \ldots \nu$.

Nach Satz B ist keine von diesen grösser als ν.

Folglich giebt es keine Cardinalzahl $\mathfrak{a}$, die kleiner als $\nu + 1$ und grösser als ν wäre. —

Von Bedeutung für das Spätere ist folgender Satz:

F. „*Ist K irgend eine Menge von verschiedenen endlichen Cardinalzahlen, so giebt es unter ihnen eine $\varkappa_1$, die kleiner als die übrigen, also die kleinste von allen ist.*“

Beweis. Die Menge K enthält entweder die Zahl 1, dann ist diese die kleinste, $\varkappa_1 = 1$; oder nicht. Im letzteren Falle sei J der Inbegriff *aller* derjenigen Cardinalzahlen unsrer Reihe $1, 2, 3, \ldots$, welche kleiner sind, als die in K vorkommenden. Gehört eine Zahl ν zu J, so gehören auch alle Zahlen $< \nu$ zu J. Es muss aber J ein Element ν_1 haben, so dass $\nu_1 + 1$ und folglich auch alle grösseren Zahlen nicht zu J gehören, weil sonst J die Gesammtheit aller endlichen Zahlen umfassen würde, während doch die zu K gehörigen Zahlen nicht in J enthalten sind. J ist also nichts anderes als der Abschnitt $(1, 2, 3, \ldots \nu_1)$. Die Zahl $\nu_1 + 1 = \varkappa_1$ ist nothwendig ein Element von K und kleiner als die übrigen.

Aus F schliesst man auf:

G. „*Jede Menge* $K = \{\varkappa\}$ *von verschiedenen endlichen Cardinalzahlen lässt sich in die Reihenform*

$$K = (\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \ldots)$$

bringen, so dass

$$\varkappa_1 < \varkappa_2 < \varkappa_3 \ldots \text{“}$$

§ 6.

Die kleinste transfinite Cardinalzahl Alef-null.

Die Mengen mit endlicher Cardinalzahl heissen ‚*endliche Mengen*‘, alle anderen wollen wir ‚*transfinite Mengen*‘ und die ihnen zukommenden Cardinalzahlen ‚*transfinite Cardinalzahlen*‘ nennen.

Die Gesammtheit *aller endlichen Cardinalzahlen* ν bietet uns das nächstliegende Beispiel einer transfiniten Menge; wir nennen die ihr zukommende Cardinalzahl (§ 1) ‚*Alef-null*‘, in Zeichen $\aleph_0$, definiren also

$$(1) \qquad \aleph_0 = \overline{\overline{\{\nu\}}}.$$

Dass $\aleph_0$ eine *transfinite* Zahl, d. h. *keiner endlichen* Zahl μ *gleich* ist, folgt aus der einfachen Thatsache, dass, wenn zu der Menge $\{\nu\}$ ein neues Element e_0 hinzugefügt wird, die Vereinigungsmenge $(\{\nu\}, e_0)$ der ursprünglichen $\{\nu\}$ äquivalent ist. Denn es lässt sich zwischen beiden die gegenseitig eindeutige Beziehung denken, wonach dem Elemente e_0 der ersten das Element 1 der zweiten, dem Element ν der ersten das Element $\nu + 1$ der andern entspricht. Nach § 3 haben wir daher:

$$(2) \qquad \aleph_0 + 1 = \aleph_0.$$

In § 5 wurde aber gezeigt, dass $\mu + 1$ stets von μ verschieden ist, daher ist $\aleph_0$ keiner endlichen Zahl μ gleich.

Die Zahl $\aleph_0$ *ist grösser als jede endliche Zahl* μ:

$$(3) \qquad \aleph_0 > \mu.$$

Dies folgt im Hinblick auf § 3 daraus, dass $\mu = \overline{\overline{(1, 2, 3, \ldots \mu)}}$, kein Theil der Menge $(1, 2, 3, \ldots \mu)$ äquivalent der Menge $\{\nu\}$ und dass $(1, 2, 3, \ldots \mu)$ selbst ein Theil von $\{\nu\}$ ist.

Andrerseits ist $\aleph_0$ *die kleinste transfinite Cardinalzahl.*

Ist $\mathfrak{a}$ irgend eine von $\aleph_0$ verschiedene transfinite Cardinalzahl, so ist immer

$$\aleph_0 < \mathfrak{a}. \tag{4}$$

Dies beruht auf folgenden Sätzen:

A. „*Jede transfinite Menge T hat Theilmengen mit der Cardinalzahl $\aleph_0$*“.

Beweis. Hat man nach irgend einer Regel eine endliche Zahl von Elementen $t_1, t_2, \ldots t_{\nu-1}$ aus T entfernt, so bleibt stets die Möglichkeit, ein ferneres Element t_ν herauszunehmen. Die Menge $\{t_\nu\}$, worin ν eine beliebige endliche Cardinalzahl bedeutet, ist eine Theilmenge von T mit der Cardinalzahl $\aleph_0$, weil $\{t_\nu\} \sim \{\nu\}$ (§ 1).

B. „*Ist S eine transfinite Menge mit der Cardinalzahl $\aleph_0$, S_1 irgend eine transfinite Theilmenge von S, so ist auch $\overline{\overline{S_1}} = \aleph_0$.*“

Beweis. Vorausgesetzt ist, dass $S \sim \{\nu\}$; bezeichnen wir, unter Zugrundelegung eines Zuordnungsgesetzes zwischen diesen beiden Mengen, mit s_ν dasjenige Element von S, welches dem Elemente ν von $\{\nu\}$ entspricht, so ist

$$S = \{s_\nu\}.$$

Die Theilmenge S_1 von S besteht aus gewissen Elementen $s_\varkappa$ von S und die Gesammtheit aller Zahlen $\varkappa$ bildet einen transfiniten Theil K der Menge $\{\nu\}$. Nach Satz G, § 5 lässt sich die Menge K in die Reihenform bringen

$$K = \{\varkappa_\nu\},$$

wo

$$\varkappa_\nu < \varkappa_{\nu+1},$$

folglich ist auch

$$S_1 = \{s_{\varkappa_\nu}\}.$$

Daraus folgt, dass $S_1 \sim S$, mithin $\overline{\overline{S_1}} = \aleph_0$. —

Aus A und B ergiebt sich die Formel (4) im Hinblick auf § 2.

Aus (2) schliesst man durch Hinzufügung von 1 auf beiden Seiten

$$\aleph_0 + 2 = \aleph_0 + 1 = \aleph_0,$$

und indem man diese Betrachtung wiederholt,

$$\aleph_0 + \nu = \aleph_0. \tag{5}$$

Wir haben aber auch

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0. \tag{6}$$

Denn nach (1) § 3 ist $\aleph_0 + \aleph_0$ die Cardinalzahl $\overline{\overline{(\{a_\nu\},\ \{b_\nu\})}}$, weil

$$\overline{\overline{\{a_\nu\}}} = \overline{\overline{\{b_\nu\}}} = \aleph_0.$$

Nun hat man offenbar

$$\{\nu\} = (\{2\nu - 1\},\ \{2\nu\}),$$

$$(\{2\nu - 1\},\ \{2\nu\}) \sim (\{a_\nu\},\ \{b_\nu\}),$$

also

$$\overline{\overline{(\{a_\nu\},\ \{b_\nu\})}} = \overline{\overline{\{\nu\}}} = \aleph_0.$$

Die Gleichung (6) kann auch so geschrieben werden:

$$\aleph_0 \cdot 2 = \aleph_0$$

und, indem man zu beiden Seiten wiederholt $\aleph_0$ addirt, findet man, dass

(7) $$\aleph_0 \cdot \nu = \nu \cdot \aleph_0 = \aleph_0.$$

Wir haben aber auch

(8) $$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0.$$

Beweis. Nach (6) des § 3 ist $\aleph_0 \cdot \aleph_0$ die der Verbindungsmenge

$$\{(\mu,\ \nu)\}$$

zukommende Cardinalzahl, wo μ und ν unabhängig von einander zwei beliebige endliche Cardinalzahlen sind. Ist auch λ Repräsentant einer beliebigen endlichen Cardinalzahl (so dass $\{\lambda\}$, $\{\mu\}$ und $\{\nu\}$ nur verschiedene Bezeichnungen für dieselbe Gesammtheit aller endlichen Cardinalzahlen sind), so haben wir zu zeigen, dass

$$\{(\mu,\ \nu)\} \sim \{\lambda\}.$$

Bezeichnen wir $\mu + \nu$ mit ϱ, so nimmt ϱ die sämmtlichen Zahlenwerthe $2, 3, 4, \ldots$ an, und es giebt im Ganzen $\varrho - 1$ Elemente $(\mu,\ \nu)$, für welche $\mu + \nu = \varrho$, nämlich diese:

$$(1,\ \varrho - 1),\ (2,\ \varrho - 2),\ \ldots\ (\varrho - 1,\ 1).$$

In dieser Reihenfolge denke man sich zuerst das eine Element $(1, 1)$ gesetzt, für welches $\varrho = 2$, dann die beiden Elemente, für welche $\varrho = 3$, dann die drei Elemente, für welche $\varrho = 4$ u. s. w., so erhält man sämmtliche Elemente $(\mu,\ \nu)$ in einfacher Reihenform:

$$(1, 1);\ (1, 2),\ (2, 1);\ (1, 3),\ (2, 2),\ (3, 1);\ (1, 4),\ (2, 3),\ \ldots,$$

und zwar kommt hier, wie man leicht sieht, das Element $(\mu,\ \nu)$ an die λ^{te} Stelle, wo

(9) $$\lambda = \mu + \frac{(\mu + \nu - 1)(\mu + \nu - 2)}{2}.$$

λ nimmt jeden Zahlwerth $1, 2, 3, \ldots$ einmal an; es besteht also vermöge (9) eine gegenseitig eindeutige Beziehung zwischen den beiden Mengen $\{\lambda\}$ und $\{(\mu,\ \nu)\}$. —

Werden die beiden Seiten der Gleichung (8) mit $\aleph_0$ multiplicirt, so erhält man $\aleph_0^3 = \aleph_0^2 = \aleph_0$ und durch wiederholte Multiplication mit $\aleph_0$ die für jede endliche Cardinalzahl ν gültige Gleichung:

$$\aleph_0^\nu = \aleph_0 . \tag{10}$$

Die Sätze E und A des § 5 führen zu dem Satze über *endliche* Mengen:

C. „*Jede endliche Menge E ist so beschaffen, dass sie mit keiner von ihren Theilmengen äquivalent ist.*"

Diesem Satz steht scharf der folgende für *transfinite* Mengen gegenüber:

D. „*Jede transfinite Menge T ist so beschaffen, dass sie Theilmengen T_1 hat, die ihr äquivalent sind.*"

Beweis. Nach Satz A dieses Paragraphen giebt es eine Theilmenge $S = \{t_\nu\}$ von T mit der Cardinalzahl $\aleph_0$. Sei $T = (S, U)$, so dass U aus denjenigen Elementen von T zusammengesetzt ist, welche von den Elementen t_ν verschieden sind. Setzen wir $S_1 = \{t_{\nu+1}\}$, $T_1 = (S_1, U)$, so ist T_1 eine Theilmenge von T und zwar die durch Fortlassung des einzigen Elementes t_1 aus T hervorgehende. Da $S \sim S_1$ (Satz B dieses Paragraphen) und $U \sim U$, so ist auch (§ 1) $T \sim T_1$.

In diesen Sätzen C und D tritt die wesentliche Verschiedenheit von endlichen und transfiniten Mengen am Deutlichsten zu Tage, auf welche bereits im Jahre 1877 im 84sten Bande des Crelle'schen Journals pag. 242 hingewiesen wurde.

Nachdem wir die kleinste transfinite Cardinalzahl $\aleph_0$ eingeführt und ihre nächstliegenden Eigenschaften abgeleitet haben, entsteht die Frage nach den höheren Cardinalzahlen und ihrem Hervorgang aus $\aleph_0$.

Es soll gezeigt werden, dass die transfiniten Cardinalzahlen sich nach ihrer Grösse ordnen lassen und in dieser Ordnung, wie die endlichen, jedoch in einem erweiterten Sinne, eine ‚*wohlgeordnete Menge*' bilden.

Aus $\aleph_0$ geht nach einem bestimmten Gesetze die *nächstgrössere* Cardinalzahl $\aleph_1$, aus dieser nach demselben Gesetze die *nächstgrössere* $\aleph_2$ hervor und so geht es weiter.

Aber auch die unbegrenzte Folge der Cardinalzahlen

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\nu, \ldots$$

erschöpft nicht den Begriff der transfiniten Cardinalzahl. Es wird die Existenz einer Cardinalzahl nachgewiesen werden, die wir mit $\aleph_\omega$ bezeichnen und welche sich als die zu *allen* $\aleph_\nu$ *nächstgrössere* ausweist; aus ihr geht in derselben Weise wie $\aleph_1$ aus $\aleph_0$ eine nächstgrössere $\aleph_{\omega+1}$ hervor und so geht es ohne Ende fort.

Zu *jeder transfiniten Cardinalzahl* $\mathfrak{a}$ giebt es eine nach einheitlichem Gesetz aus ihr hervorgehende *nächstgrössere;* aber auch zu jeder unbegrenzt aufsteigenden wohlgeordneten Menge $\{\mathfrak{a}\}$ von transfiniten Cardinalzahlen $\mathfrak{a}$ giebt es eine *nächstgrössere*, einheitlich daraus hervorgehende.

Zur strengen Begründung dieses im Jahre 1882 gefundenen und in dem Schriftchen „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Leipzig 1883", sowie im XXI. Bande der Math. Annalen ausgesprochenen Sachverhaltes bedienen wir uns der sogenannten ‚*Ordnungstypen*', deren Theorie wir zunächst in den folgenden Paragraphen auseinander zu setzen haben. —

§ 7.

Die Ordnungstypen einfach geordneter Mengen.

Eine Menge M nennen wir ‚*einfach geordnet*', wenn unter ihren Elementen m eine bestimmte ‚*Rangordnung*' herrscht, in welcher von je zwei beliebigen Elementen m_1 und m_2 das eine den ‚*niedrigeren*', das andere den ‚*höheren*' Rang einnimmt und zwar so, dass wenn von drei Elementen m_1, m_2 und m_3 etwa m_1 dem Range nach niedriger ist als m_2, dieses niedriger als m_3, alsdann auch immer m_1 niedrigeren Rang hat als m_3.

Die Beziehung zweier Elemente m_1 und m_2, bei welcher m_1 den niedrigeren, m_2 den höheren Rang in der gegebenen Rangordnung hat, soll durch die Formeln ausgedrückt werden

(1) $$m_1 \prec m_2, \qquad m_2 \succ m_1.$$

So ist beispielsweise jede in einer unendlichen Geraden definirte Punktmenge P eine einfach geordnete Menge, wenn von zwei zu ihr gehörigen Punkten p_1 und p_2 demjenigen der niedrigere Rang zugewiesen wird, dessen Coordinate (unter Zugrundelegung eines Nullpunktes und einer positiven Richtung) die kleinere ist. —

Es leuchtet ein, dass eine und dieselbe Menge nach den verschiedensten Gesetzen ‚einfach geordnet' werden kann. Nehmen wir zum Beispiel die Menge R aller positiven rationalen Zahlen $\frac{p}{q}$ (wo p und q theilerfremd seien), die grösser als 0 und kleiner als 1 sind, so hat man einmal ihre ‚natürliche' Rangordnung der Grösse nach. Dann lassen sie sich aber auch etwa so ordnen (und in dieser Ordnung wollen wir die Menge mit R_0 bezeichnen), dass von zwei Zahlen $\frac{p_1}{q_1}$ und $\frac{p_2}{q_2}$, bei denen die Summen $p_1 + q_1$ und $p_2 + q_2$ verschiedene Werthe haben, diejenige Zahl den niedrigeren Rang erhält, für welche die betreffende Summe die kleinere ist, und dass wenn $p_1 + q_1 = p_2 + q_2$, alsdann die kleinere der beiden rationalen Zahlen die niedrigere sei.

In dieser Rangordnung hat unsere Menge, da zu einem und demselben Werth von $p+q$ immer nur eine endliche Anzahl von verschiedenen rationalen Zahlen $\frac{p}{q}$ gehört, offenbar die Form

$$R_0 = (r_1, r_2, \cdots, r_\nu, \cdots) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \cdots\right),$$

wo

$$r_\nu \prec r_{\nu+1}. \text{ —}$$

Stets also, wenn wir von einer *einfach geordneten* Menge M sprechen, denken wir uns eine *bestimmte Rangordnung* ihrer Elemente in dem erklärten Sinne zu Grunde gelegt. —

Es giebt zweifach, dreifach, ν-fach, α-fach geordnete Mengen, von diesen sehen wir aber vorläufig in unserer Untersuchung ab. Daher sei es uns auch erlaubt, im Folgenden den kürzeren Ausdruck ‚geordnete Menge' zu gebrauchen, während wir die ‚einfach geordnete Menge' im Sinne haben. —

Jeder geordneten Menge M kommt ein bestimmter ‚*Ordnungstypus*' oder kürzer ein bestimmter ‚*Typus*' zu, den wir mit

(2) $$\overline{M}$$

bezeichnen wollen; hierunter verstehen wir *den Allgemeinbegriff, welcher sich aus M ergiebt, wenn wir nur von der Beschaffenheit der Elemente m abstrahiren, die Rangordnung unter ihnen aber beibehalten.*

Darnach ist der Ordnungstypus $\overline{M}$ *selbst eine geordnete Menge,* deren Elemente *lauter Einsen* sind, die dieselbe Rangordnung unter einander haben, wie die entsprechenden Elemente von M, aus denen sie durch Abstraction hervorgegangen sind.

Zwei geordnete Mengen M und N nennen wir ‚*ähnlich*', wenn sie sich gegenseitig eindeutig einander so zuordnen lassen, dass wenn m_1 und m_2 irgend zwei Elemente von M, n_1 und n_2 die entsprechenden Elemente von N sind, alsdann immer die Rangbeziehung von m_1 zu m_2 innerhalb M dieselbe ist, wie die von n_1 zu n_2 innerhalb N. Eine solche Zuordnung ähnlicher Mengen nennen wir eine ‚Abbildung' derselben auf einander. Dabei entspricht jeder Theilmenge M_1 von M (die offenbar auch als geordnete Menge erscheint) eine ihr ähnliche Theilmenge N_1 von N.

Die Aehnlichkeit zweier geordneten Mengen M und N drücken wir durch die Formel aus:

(3) $$M \simeq N.$$

Jede geordnete Menge ist sich selbst ähnlich.

Sind zwei geordnete Mengen einer dritten ähnlich, so sind sie auch einander ähnlich.

Eine einfache Ueberlegung zeigt, dass *zwei geordnete Mengen dann und nur dann denselben Ordnungstypus haben, wenn sie ähnlich sind, so dass von den beiden Formeln*

$$(4)\qquad \overline{M} = \overline{N}, \quad M \simeq N$$

immer die eine eine Folge der andern ist.

Abstrahirt man an einem Ordnungstypus $\overline{M}$ auch noch von der Rangordnung der Elemente, so erhält man (§ 1) die Cardinalzahl $\overline{\overline{M}}$ der geordneten Menge M, welche zugleich Cardinalzahl des Ordnungstypus $\overline{M}$ ist.

Aus $\overline{M} = \overline{N}$ folgt immer $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$, d. h. geordnete Mengen von gleichem Typus haben immer dieselbe Mächtigkeit oder Cardinalzahl; die Aehnlichkeit geordneter Mengen begründet stets ihre Aequivalenz. Hingegen können zwei geordnete Mengen äquivalent sein, ohne ähnlich zu sein.

Wir werden zur Bezeichnung der Ordnungstypen die kleinen Buchstaben des griechischen Alphabets gebrauchen.

Ist α ein Ordnungstypus, so verstehen wir unter

$$(5)\qquad \overline{\alpha}$$

die zugehörige Cardinalzahl.

Die Ordnungstypen endlicher einfach geordneter Mengen bieten kein besonderes Interesse. Denn man überzeugt sich leicht, dass für eine und dieselbe endliche Cardinalzahl ν alle einfach geordneten Mengen einander ähnlich sind, also einen und denselben Typus haben. Die endlichen einfachen Ordnungstypen sind daher denselben Gesetzen unterworfen wie die endlichen Cardinalzahlen, und es wird erlaubt sein, für sie dieselben Zeichen $1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$ zu gebrauchen, wenn sie auch begrifflich von den Cardinalzahlen verschieden sind.

Ganz anders verhält es sich mit den *transfiniten Ordnungstypen*; denn zu einer und derselben transfiniten Cardinalzahl giebt es unzählig viele verschiedene Typen einfach geordneter Mengen, die in ihrer Gesammtheit eine besondere ‚*Typenclasse*' constituiren.

Jede dieser Typenclassen ist also bestimmt durch die transfinite Cardinalzahl $\mathfrak{a}$, welche allen einzelnen zur Classe gehörigen Typen gemeinsam ist; wir nennen sie daher kurz Typenclasse $[\mathfrak{a}]$.

Diejenige von ihnen, welche sich uns naturgemäss zuerst darbietet, und deren vollständige Erforschung daher auch das nächste besondere Ziel der transfiniten Mengenlehre sein muss, ist die Typenclasse $[\aleph_0]$, welche alle Typen mit der kleinsten transfiniten Cardinalzahl $\aleph_0$ umfasst.

Wir haben zu unterscheiden von der Cardinalzahl $\mathfrak{a}$, welche die Typenclasse $[\mathfrak{a}]$ *bestimmt*, diejenige Cardinalzahl $\mathfrak{a}'$, welche *ihrerseits* *durch die Typenclasse* [$\mathfrak{a}$] *bestimmt ist;* es ist die Cardinalzahl, welche (§ 1) der Typenclasse [$\mathfrak{a}$] zukommt, sofern sie eine *wohldefinirte Menge* darstellt, *deren Elemente die sämmtlichen Typen* α *mit der Cardinalzahl* $\mathfrak{a}$ *sind.* Wir werden sehen, dass $\mathfrak{a}'$ von $\mathfrak{a}$ verschieden und zwar immer grösser als $\mathfrak{a}$ ist. —

Werden in einer geordneten Menge M alle Rangbeziehungen ihrer Elemente umgekehrt, so dass überall aus dem ‚niedriger' ein ‚höher' und aus dem ‚höher' ein ‚niedriger' wird, so erhält man wieder eine geordnete Menge, die wir mit

(6) $$^*M$$

bezeichnen und die *‚inverse'* von M nennen wollen.

Den Ordnungstypus von $^*M$ bezeichnen wir, wenn $\alpha = \overline{M}$ ist, mit

(7) $$^*\alpha.$$

Es kann vorkommen, dass $^*\alpha = \alpha$, wie z. B. bei den endlichen Typen oder bei dem Typus der Menge R aller rationalen Zahlen, die grösser als 0 und kleiner als 1 sind, in ihrer natürlichen Rangordnung, den wir unter der Bezeichnung η untersuchen werden.

Wir bemerken ferner, dass zwei ähnliche geordnete Mengen entweder auf eine einzige Weise oder auf mehrere Weisen auf einander abgebildet werden können; im ersten Falle ist der betreffende Typus sich selbst nur auf eine Weise ähnlich, im andern auf mehrere Weisen. So sind nicht nur alle endlichen Typen, sondern die Typen der transfiniten ‚wohlgeordneten Mengen', welche uns später beschäftigen werden und die wir transfinite Ordnungszahlen nennen, von der Art, nur eine einzige Abbildung auf sich selbst zuzulassen. Dagegen ist jener Typus η sich selbst auf unzählig viele Weisen ähnlich.

Wir wollen diesen Unterschied an zwei einfachen Beispielen verdeutlichen.

Unter ω verstehen wir den Typus einer wohlgeordneten Menge

$$(e_1, e_2, \ldots, e_\nu, \ldots),$$

in welcher

$$e_\nu \prec e_{\nu+1}$$

und wo ν Repräsentant aller endlichen Cardinalzahlen ist.

Eine andere wohlgeordnete Menge

$$(f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots)$$

mit der Bedingung

$$f_\nu \prec f_{\nu+1}$$

vom nämlichen Typus ω kann offenbar auf jene nur so ‚abgebildet' werden, dass e_ν und f_ν entsprechende Elemente sind. Denn das dem Range nach niedrigste Element e_1 der ersten muss bei der Abbildung dem niedrigsten Element f_1 der zweiten, das dem Range nach auf e_1 nächstfolgende e_2 dem auf f_1 nächstfolgenden f_2 u. s. w. zugeordnet werden.

Jede andere gegenseitig eindeutige Zuordnung der beiden äquivalenten Mengen $\{e_\nu\}$ und $\{f_\nu\}$ ist keine ‚Abbildung‘ in dem Sinne, wie wir ihn oben für die Typentheorie fixirt haben.

Nehmen wir dagegen eine geordnete Menge von der Form

$$\{e_{\nu'}\},$$

wo ν' Repräsentant aller positiven und negativen endlichen ganzen Zahlen mit Einschluss der 0 ist und wo ebenfalls

$$e_{\nu'} \prec e_{\nu'+1}.$$

Diese Menge hat kein dem Range nach niedrigstes und kein höchstes Element. Ihr Typus ist nach der Summendefinition, die im § 8 gegeben werden wird, dieser:

$$^*\omega + \omega.$$

Er ist sich selbst auf unzählig viele Weisen ähnlich.

Denn betrachten wir eine Menge von demselben Typus

$$\{f_{\nu'}\},$$

wo

$$f_{\nu'} \prec f_{\nu'+1},$$

so können die beiden geordneten Mengen so aufeinander abgebildet werden, dass, unter ν_0' eine bestimmte der Zahlen ν' verstanden, dem Elemente $e_{\nu'}$ der ersten das Element $f_{\nu_0'+\nu'}$ der zweiten entspricht. Bei der Willkürlichkeit von ν_0' haben wir also hier unendlich viele Abbildungen.

Der hier entwickelte Begriff des „Ordnungstypus“ umfasst, wenn er in gleicher Weise auf „mehrfach geordnete Mengen“ übertragen wird, neben dem in § 1 eingeführten Begriff der „Cardinalzahl oder Mächtigkeit“, alles „Anzahlmässige“, das überhaupt denkbar ist und lässt in diesem Sinne keine weitere Verallgemeinerung zu. Er enthält nichts Willkürliches, sondern ist die naturgemässe Erweiterung des Anzahlbegriffs. *Es verdient besonders betont zu werden, dass das Gleichheitskriterium* (4) *mit absoluter Nothwendigkeit aus dem Begriffe des Ordnungstypus folgt und daher keinerlei Abänderung zulässt.* In dem Verkennen dieses Sachverhaltes ist die Hauptursache der schweren Irrthümer zu erblicken, welche sich in dem Werke des Herrn G. Veronese „Grundzüge der Geometrie“ finden (Deutsch von A. Schepp, Leipzig 1894).

Auf pag. 30 wird dort die „Anzahl oder Zahl einer geordneten Gruppe“ ganz in Uebereinstimmung mit dem, was wir „Ordnungstypus einer einfach geordneten Menge“ genannt haben, erklärt. (Zur Lehre vom Transfiniten, Halle 1890, pag. 68—75, Abdruck aus der Ztschr. f. Philos. u. philos. Kritik, vom Jahre 1887).

Dem Kriterium der Gleichheit vermeint aber Herr V. einen Zusatz geben zu müssen. Er sagt pag. 31: „Zahlen, deren Einheiten sich eindeutig und in derselben Ordnung entsprechen *und von denen die eine nicht ein Theil der andern oder einem Theil der andern gleich ist*, sind gleich.“ *)

Diese Definition der Gleichheit enthält einen *Cirkel* und wird daher zu einem *Nonsens.*

Was heisst denn in seinem Zusatz „*einem Theil der andern nicht gleich*“?

Um diese Frage zu beantworten, muss man vor allem wissen, wann zwei Zahlen gleich oder nicht gleich sind. *Es setzt also seine Definition der Gleichheit* (abgesehen von ihrer Willkürlichkeit) *eine Definition der Gleichheit voraus, die wiederum eine Definition der Gleichheit voraussetzt, bei welcher man von neuem wissen muss, was gleich und ungleich ist, u. s. w., u. s. w., in infinitum.*

Nachdem Herr V. auf solche Weise das unentbehrliche Fundament für die Vergleichung von Zahlen so zu sagen *freiwillig preisgegeben* hat, darf man sich über die Regellosigkeit nicht wundern, in welcher er des Weiteren mit seinen pseudotransfiniten Zahlen operirt und den letzteren Eigenschaften zuschreibt, die sie aus dem einfachen Grunde nicht besitzen können, weil sie, in der von ihm fingirten Form, selbst keinerlei Existenz, es sei denn auf dem Papiere, haben. Auch wird hiermit die auffallende Aehnlichkeit verständlich, welche seinen Zahlbildungen mit den höchst absurden „unendlichen Zahlen“ Fontenelle's in dessen „Géometrie de L'Infini, Paris 1727“ anhaftet.

Kürzlich hat auch Herr W. Killing in dem „Index lectionum“ der Akademie in Münster (für 1895—96) seinen Bedenken gegen die Grundlage des Veronese'schen Buches dankenswerthen Ausdruck gegeben.

§ 8.

Addition und Multiplication von Ordnungstypen.

Die Vereinigungsmenge (M, N) zweier Mengen M und N lässt sich, wenn die letzteren geordnet sind, selbst als eine geordnete Menge auffassen, in welcher die Rangbeziehungen der Elemente von M unter einander, ebenso die Rangbeziehungen der Elemente von N unter einander dieselben wie in M resp. N geblieben sind, dagegen alle Elemente von M niedrigeren Rang als alle Elemente von N haben. Sind M' und N' zwei andere geordnete Mengen, $M \,\underline{\backsim}\, M'$, $N \,\underline{\backsim}\, N'$,

---

*) In der italienischen Originalausgabe (pag. 27) lautet diese Stelle wörtlich: „Numeri le unità dei quali si corrispondono univocamente e nel medesimo ordine, e di cui l'uno non è parte o uguale ad una parte dell' altro, sono uguali.“

so ist auch $(M, N) \backsim (M', N')$; der Ordnungstypus von (M, N) hängt also nur von den Ordnungstypen $\overline{M} = \alpha$, $\overline{N} = \beta$ ab; wir definiren also:

$$(1) \qquad \alpha + \beta = \overline{(M, N)}.$$

In der Summe $\alpha + \beta$ heisst α der ‚*Augendus*', β der ‚*Addendus*'.

Für drei beliebige Typen beweist man leicht das associative Gesetz

$$(2) \qquad \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma.$$

Dagegen ist das commutative Gesetz bei der Addition von Typen im Allgemeinen nicht gültig. Wir sehen dies bereits am folgenden einfachen Beispiel.

Ist ω der im § 7 bereits erwähnte Typus der wohlgeordneten Menge

$$E = (e_1, e_2, \ldots, e_\nu, \ldots), \quad e_\nu \prec e_{\nu+1}$$

so ist $1 + \omega$ nicht gleich $\omega + 1$.

Denn ist f ein neues Element, so hat man nach (1)

$$1 + \omega = \overline{(f, E)},$$
$$\omega + 1 = \overline{(E, f)}.$$

Die Menge

$$(f, E) = (f, e_1, e_2, \ldots, e_\nu, \ldots)$$

ist aber der Menge E ähnlich, folglich

$$1 + \omega = \omega.$$

Dagegen sind die Mengen E und (E, f) nicht ähnlich, weil erstere kein dem Range nach höchstes Glied, letztere aber das höchste Glied f hat. $\omega + 1$ ist also von $\omega = 1 + \omega$ verschieden.

Aus zwei geordneten Mengen M und N mit den Typen α und β lässt sich eine geordnete Menge S dadurch herstellen, dass in N an Stelle jedes Elementes n eine geordnete Menge M_n substituirt wird, welche denselben Typus α wie M hat, also

$$(3) \qquad \overline{M}_n = \alpha,$$

und dass über die Rangordnung in

$$(4) \qquad S = \{M_n\}$$

folgende Bestimmungen getroffen werden:

1) je zwei Elemente von S, welche einer und derselben Menge M_n angehören, behalten in S dieselbe Rangbeziehung wie in M_n,

2) je zwei Elemente von S, welche zwei verschiedenen Mengen M_{n_1} und M_{n_2} angehören, erhalten in S die Rangbeziehung, welche n_1 und n_2 in N haben.

Der Ordnungstypus von S hängt, wie leicht zu sehen, nur von den Typen α und β ab; wir definiren:

$$(5) \qquad \alpha \cdot \beta = \overline{S}.$$

In diesem Producte heisst α der ‚*Multiplicandus*' und β der ‚*Multiplicator*'.

Unter Zugrundelegung irgend einer *Abbildung* von M auf M_n sei m_n das dem Elemente m von M entsprechende Element von M_n.

Wir können dann auch schreiben

$$S = \{m_n\}. \tag{6}$$

Nehmen wir eine dritte geordnete Menge $P = \{p\}$ mit dem Ordnungstypus $\overline{P} = \gamma$ hinzu, so ist nach (5)

$$\alpha \cdot \beta = \overline{\{m_n\}}, \quad \beta \cdot \gamma = \overline{\{n_p\}}, \quad (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \overline{\{(m_n)_p\}},$$
$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = \overline{\{m_{(n_p)}\}}.$$

Die beiden geordneten Mengen $\{(m_n)_p\}$ und $\{m_{(n_p)}\}$ sind aber ähnlich und werden auf einander abgebildet, indem man ihre Elemente $(m_n)_p$ und $m_{(n_p)}$ als entsprechende ansieht.

Es besteht folglich für drei Typen α, β und γ das *associative Gesetz*

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma). \tag{7}$$

Aus (1) und (5) folgt auch leicht das *distributive Gesetz*

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma \tag{8}$$

jedoch nur in dieser Form, wo *der zweigliedrige Factor die Rolle des Multiplicators* hat.

Dagegen hat bei Typen das *commutative Gesetz* ebensowenig bei der Multiplication wie bei der Addition allgemeine Geltung.

Beispielsweise sind $2 . \omega$ und $\omega . 2$ verschiedene Typen; denn nach (5) ist

$$2 . \omega = \overline{(e_1, f_1;\ e_2, f_2;\ \ldots;\ e_\nu, f_\nu;\ \ldots)} = \omega;$$

dagegen ist

$$\omega \cdot 2 = \overline{(e_1, e_2, \ldots, e_\nu, \ldots;\ f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots)}$$

offenbar von ω verschieden.

Vergleicht man die in § 3 gegebenen Definitionen der Elementaroperationen für Cardinalzahlen mit den hier aufgestellten für Ordnungstypen, so erkennt man leicht, dass die Cardinalzahl der Summe zweier Typen gleich ist der Summe der Cardinalzahlen der einzelnen Typen und dass die Cardinalzahl des Products zweier Typen gleich ist dem Product der Cardinalzahlen der einzelnen Typen.

Jede aus den beiden Elementaroperationen hervorgehende Gleichung zwischen Ordnungstypen bleibt also auch richtig, wenn man darin sämmtliche Typen durch ihre Cardinalzahlen ersetzt.

§ 9.

Der Ordnungstypus η der Menge R aller rationalen Zahlen, die grösser als 0 und kleiner als 1 sind, in ihrer natürlichen Rangordnung.

Unter R verstehen wir, wie in § 7, das System aller rationalen Zahlen $\frac{p}{q}$ (p und q als theilerfremd gedacht) die > 0 und < 1, *in ihrer natürlichen Rangordnung*, wo die Grösse der Zahl ihren Rang bestimmt. Den Ordnungstypus von R bezeichnen wir mit η:

$$(1) \qquad \eta = \overline{R}.$$

Wir haben aber dort dieselbe Menge auch in eine andere Rangordnung gesetzt, in welcher wir sie R_0 nennen, wobei in erster Linie die Grösse von $p+q$, in zweiter Linie, nämlich bei rationalen Zahlen, für welche $p+q$ denselben Werth hat, die Grösse von $\frac{p}{q}$ selbst den Rang bestimmt. R_0 hat die Form einer wohlgeordneten Menge vom Typus ω:

$$(2) \qquad R_0 = (r_1, r_2, \ldots, r_\nu, \ldots), \quad \text{wo} \quad r_\nu \prec r_{\nu+1},$$

$$(3) \qquad \overline{R}_0 = \omega.$$

R und R_0 haben, weil sie sich nur in der Rangordnung der Elemente unterscheiden, dieselbe Cardinalzahl, und da offenbar $\overline{\overline{R}}_0 = \aleph_0$, so ist auch

$$(4) \qquad \overline{\overline{R}} = \overline{\eta} = \aleph_0.$$

Der Typus η gehört also in die Typenclasse $[\aleph_0]$.

Wir bemerken zweitens, dass in R weder ein dem Range nach niedrigstes, noch ein dem Range nach höchstes Element vorkommt.

Drittens hat R die Eigenschaft, dass *zwischen* je zweien seiner Elemente dem Range nach andere liegen; diese Beschaffenheit drücken wir mit den Worten aus: *R ist ‚überalldicht'*.

Es soll nun gezeigt werden, dass diese drei Merkmale den Typus η von R kennzeichnen, so dass folgender Satz besteht:

„Hat man eine einfach geordnete Menge M, welche die drei Bedingungen erfüllt:

1) $\overline{\overline{M}} = \aleph_0$.

2) M hat kein dem Range nach niedrigstes und kein höchstes Element.

3) M ist überalldicht,

so ist der Ordnungstypus von M gleich η:

$$\overline{M} = \eta.\text{“}$$

Beweis. Wegen der Bedingung 1) lässt sich M in die Form einer wohlgeordneten Menge vom Typus ω bringen; in einer solchen Form zu Grunde gelegt, bezeichnen wir M mit M_0 und setzen

(5) $$M_0 = (m_1, m_2, \ldots, m_\nu, \ldots).$$

Wir haben nun zu zeigen, dass

(6) $$M \simeq R.$$

D. h. es muss bewiesen werden, dass sich M auf R *abbilden* lässt, so dass das Rangverhältniss je zweier Elemente in M dasselbe ist, wie das Rangverhältniss der beiden entsprechenden Elemente in R.

Das Element r_1 in R möge dem Elemente m_1 in M zugeordnet werden.

r_2 hat eine bestimmte Rangbeziehung zu r_1 in R; wegen der Bedingung 2) giebt es unzählig viele Elemente m_ν von M, welche zu m_1 dieselbe Rangbeziehung in M haben, wie r_2 zu r_1 in R; *von ihnen* wählen wir dasjenige, welches in M_0 den kleinsten Index hat, es sei m_{ι_2} und ordnen es dem r_2 zu.

r_3 hat in R bestimmte Rangbeziehungen zu r_1 und r_2; wegen der Bedingungen 2) und 3) giebt es unzählig viele Elemente m_ν von M, welche in M zu m_1 und m_{ι_2} dieselben Rangbeziehungen haben, wie r_3 zu r_1 und r_2 in R; wir wählen dasjenige von ihnen, es sei m_{ι_3}, welches in M_0 den kleinsten Index hat, dieses ordnen wir dem r_3 zu.

Nach diesem Gesetze denken wir uns das Zuordnungsverfahren fortgesetzt; sind den ν Elementen

$$r_1, r_2, r_3, \ldots, r_\nu$$

von R bestimmte Elemente

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots, m_{\iota_\nu}$$

von M als Bilder zugewiesen, welche in M dieselben Rangbeziehungen unter einander haben wie die entsprechenden in R, so werde dem Elemente $r_{\nu+1}$ von R das in M_0 mit dem kleinsten Index versehene Element $m_{\iota_{\nu+1}}$ von M als Bild zugewiesen, welches zu

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots, m_{\iota_\nu}$$

dieselben Rangbeziehungen in M hat, wie $r_{\nu+1}$ zu $r_1, r_2, \ldots, r_\nu$ in R.

Wir haben auf diese Weise *allen* Elementen r_ν von R bestimmte Elemente m_{ι_ν} von M als Bilder zugewiesen und die Elemente m_{ι_ν} haben in M dieselbe Rangordnung wie die entsprechenden Elemente r_ν in R.

Es muss aber noch gezeigt werden, dass die Elemente m_{ι_ν} *alle Elemente m_ν von M* umfassen oder, was dasselbe ist, dass die Reihe

$$1, \iota_2, \iota_3, \ldots, \iota_\nu, \ldots$$

nur eine *Permutation* der Reihe

$$1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$$

ist.

Dies beweisen wir durch eine *vollständige Induction*, indem wir zeigen, dass *wenn* die Elemente $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ bei der Abbildung zur Geltung kommen, *dasselbe auch bei dem folgenden Elemente* $m_{\nu+1}$ *der Fall ist.*

Sei λ so gross, dass unter den Elementen

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots, m_{\iota_\lambda}$$

die Elemente

$$m_1, m_2, \ldots, m_\nu,$$

(welche vorausgesetztermassen zur Abbildung gelangen) vorkommen. Es kann sein, dass sich auch $m_{\nu+1}$ darunter vorfindet; dann kommt $m_{\nu+1}$ bei der Abbildung zur Geltung.

Findet sich aber $m_{\nu+1}$ *nicht unter den Elementen*

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots, m_{\iota_\lambda},$$

so hat $m_{\nu+1}$ zu diesen Elementen innerhalb M eine bestimmte Rangstellung; dieselbe Rangstellung zu $r_1, r_2, \ldots, r_\lambda$ in R haben unzählig viele Elemente von R, unter ihnen sei das in R_0 mit dem kleinsten Index versehene $r_{\lambda+\sigma}$.

Dann hat $m_{\nu+1}$, wie man sich leicht überzeugt, auch zu

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots, m_{\iota_{\lambda+\sigma-1}}$$

dieselbe Rangstellung in M, wie $r_{\lambda+\sigma}$ zu

$$r_1, r_2, \ldots, r_{\lambda+\sigma-1}$$

in R. Da $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ bereits zur Abbildung gelangt sind, so ist $m_{\nu+1}$ das mit dem kleinsten Index in M_0 versehene Element, welches diese Rangstellung zu

$$m_1, m_{\iota_2}, \ldots, m_{\iota_{\lambda+\sigma-1}}$$

hat. Folglich ist nach unserm Zuordnungsgesetze

$$m_{\iota_{\lambda+\sigma}} = m_{\nu+1}.$$

Es kommt also auch in diesem Falle das Element $m_{\nu+1}$ bei der Abbildung zur Geltung und zwar ist $r_{\lambda+\sigma}$ das ihm zugeordnete Element von R.

So sehen wir, dass durch unsern Zuordnungsmodus *die ganze Menge* M auf *die ganze Menge* R abgebildet wird; M und R sind ähnliche Mengen, w. z. b. w.

Aus dem soeben bewiesenen Satze ergeben sich beispielsweise die folgenden:

„η ist der Ordnungstypus der Menge aller negativen und positiven rationalen Zahlen, mit Einschluss der Null, in ihrer natürlichen Rangordnung.“

„η ist der Ordnungstypus der Menge aller rationalen Zahlen, welche grösser als a und kleiner als b sind, in ihrer natürlichen Rangordnung, wo a und b irgend zwei reelle Zahlen sind, $a < b$.“

„η ist der Ordnungstypus der Menge aller reellen algebraischen Zahlen in ihrer natürlichen Rangordnung.“

„η ist der Ordnungstypus der Menge aller reellen algebraischen Zahlen, welche grösser als a und kleiner als b sind, in ihrer natürlichen Rangordnung, wo a und b irgend zwei reelle Zahlen sind, $a < b$.“

Denn alle diese geordneten Mengen erfüllen die drei in unserm Satze für M geforderten Bedingungen (M. v. Crelle's Journal Bd. 77, pag. 258).

Betrachten wir ferner nach den in § 8 gegebenen Definitionen Mengen mit den Typen $\eta + \eta$, $\eta\eta$, $(1+\eta)\eta$, $(\eta+1)\eta$, $(1+\eta+1)\eta$ so finden sich auch bei ihnen jene drei Bedingungen erfüllt. Wir haben somit die Sätze:

$$\eta + \eta = \eta, \tag{7}$$

$$\eta\eta = \eta, \tag{8}$$

$$(1+\eta)\eta = \eta, \tag{9}$$

$$(\eta+1)\eta = \eta, \tag{10}$$

$$(1+\eta+1)\eta = \eta. \tag{11}$$

Die wiederholte Anwendung von (7) und (8) giebt für jede endliche Zahl ν:

$$\eta \cdot \nu = \eta, \tag{12}$$

$$\eta^\nu = \eta. \tag{13}$$

Dagegen sind, wie man leicht sieht, für $\nu > 1$, die Typen $1 + \eta$, $\eta + 1$, $\nu \cdot \eta$, $1 + \eta + 1$ sowohl unter sich, wie auch von η verschieden. Andrerseits ist

$$\eta + 1 + \eta = \eta, \tag{14}$$

dagegen $\eta + \nu + \eta$ für $\nu > 1$ von η verschieden.

Endlich verdient hervorgehoben zu werden, dass

$$^*\eta = \eta. \tag{15}$$

§ 10.

Die in einer transfiniten geordneten Menge enthaltenen Fundamentalreihen.

Legen wir irgend eine einfach geordnete transfinite Menge M zu Grunde. Jede Theilmenge von M ist selbst eine geordnete Menge. Für das Studium des Typus $\overline{M}$ scheinen diejenigen Theilmengen von M, denen die Typen ω und $^*\omega$ zukommen, besonders werthvoll zu sein; wir nennen sie *,in M enthaltene Fundamentalreihen erster Ordnung'* und zwar die ersteren (vom Typus ω) *,steigende'*, die anderen (vom Typus $^*\omega$) *,fallende'*.

Da wir uns auf die Betrachtung von Fundamentalreihen *erster Ordnung* beschränken (in späteren Untersuchungen werden auch solche *höherer Ordnung* zur Geltung kommen), so wollen wir sie hier einfach *,Fundamentalreihen'* nennen.

Eine ,steigende Fundamentalreihe' hat also die Form

$$(1) \qquad \{a_\nu\}, \quad \text{wo} \quad a_\nu \prec a_{\nu+1},$$

eine ,fallende Fundamentalreihe' ist von der Form

$$(2) \qquad \{b_\nu\}, \quad \text{wo} \quad b_\nu \succ b_{\nu+1}.$$

ν hat überall in unseren Betrachtungen (sowie auch $\varkappa$, λ, μ) die Bedeutung einer beliebigen endlichen Cardinalzahl oder auch eines endlichen Typus resp. einer endlichen Ordnungszahl.

Zwei in M enthaltene steigende Fundamentalreihen $\{a_\nu\}$ und $\{a'_\nu\}$ nennen wir, *zusammengehörig'*, in Zeichen

$$(3) \qquad \{a_\nu\} \parallel \{a'_\nu\},$$

wenn sowohl zu jedem Elemente a_ν Elemente a'_λ existiren, so dass

$$a_\nu \prec a'_\lambda,$$

wie auch zu jedem Elemente a'_ν Elemente a_μ vorhanden sind, so dass

$$a'_\nu \prec a_\mu.$$

Zwei in M enthaltene fallende Fundamentalreihen $\{b_\nu\}$ und $\{b'_\nu\}$ heissen *,zusammengehörig'*, in Zeichen

$$(4) \qquad \{b_\nu\} \parallel \{b'_\nu\},$$

wenn zu jedem Elemente b_ν Elemente b'_λ vorhanden sind, so dass

$$b_\nu \succ b'_\lambda,$$

und zu jedem Elemente b'_ν Elemente b_μ existiren, so dass

$$b'_\nu \succ b_\mu.$$

Eine steigende Fundamentalreihe $\{a_\nu\}$ und eine fallende $\{b_\nu\}$ nennen wir dann *,zusammengehörig'*, in Zeichen

(5) $$\{a_\nu\} \parallel \{b_\nu\},$$

wenn 1) für alle ν und μ

$$a_\nu \prec b_\mu$$

und 2) in *M höchstens ein* Element m_0 (also entweder nur eines oder gar kein solches) existirt, so dass für alle ν

$$a_\nu \prec m_0 \prec b_\nu.$$

Es bestehen dann die Sätze:

A. „*Sind zwei Fundamentalreihen zusammengehörig mit einer dritten, so sind sie auch unter einander zusammengehörig.*"

B. „*Zwei gleichgerichtete Fundamentalreihen, von denen die eine Theilmenge der andern ist, sind stets zusammengehörig.*"

Existirt in M ein Element m_0, welches zu der steigenden Fundamentalreihe $\{a_\nu\}$ eine solche Stellung hat, dass

1) für jedes ν

$$a_\nu \prec m_0,$$

2) für jedes Element m von M das $\prec m_0$, eine gewisse Zahl ν_0 existirt, so dass

$$a_\nu \succ m, \quad \text{für} \quad \nu \geqq \nu_0,$$

so wollen wir m_0 ‚*Grenzelement von* $\{a_\nu\}$ *in* M' und zugleich ein ‚*Hauptelement von* M' nennen.

Ebenso nennen wir auch m_0 ein ‚*Hauptelement von* M' und zugleich ‚*Grenzelement von* $\{b_\nu\}$ *in* M', wenn die Bedingungen erfüllt sind:

1) für jedes ν

$$b_\nu \succ m_0,$$

2) für jedes Element m von M, das $\succ m_0$, existirt eine gewisse Zahl ν_0, so dass

$$b_\nu \prec m, \quad \text{für} \quad \nu \geqq \nu_0.$$

Eine Fundamentalreihe kann *nie mehr als ein* Grenzelement in M haben; M aber hat im Allgemeinen viele Hauptelemente.

Man überzeugt sich von der Wahrheit folgender Sätze:

C. „*Hat eine Fundamentalreihe ein Grenzelement in M, so haben alle mit ihr zusammengehörigen Fundamentalreihen dasselbe Grenzelement in M.*"

D. „*Haben zwei Fundamentalreihen (gleichgerichtete oder verschiedengerichtete) ein und dasselbe Grenzelement in M, so sind sie zusammengehörig.*"

Sind M und M' zwei ähnliche geordnete Mengen, so dass

(6) $$\overline{M} = \overline{M'},$$

und legt man *irgend eine Abbildung* der beiden Mengen zu Grunde, so gelten, wie man leicht sieht, folgende Sätze:

E. „*Jeder Fundamentalreihe in M entspricht als Bild eine Fundamentalreihe in M' und umgekehrt; jeder steigenden eine steigende, jeder fallenden eine fallende; zusammengehörigen Fundamentalreihen in M entsprechen als Bilder zusammengehörige Fundamentalreihen in M' und umgekehrt.*"

F. „*Gehört zu einer Fundamentalreihe in M ein Grenzelement in M, so gehört auch zu der entsprechenden Fundamentalreihe in M' ein Grenzelement in M' und umgekehrt; und diese beiden Grenzelemente sind Bilder von einander bei der Abbildung.*"

G. „*Den Hauptelementen von M entsprechen als Bilder Hauptelemente von M' und umgekehrt.*"

Besteht eine Menge M aus lauter Hauptelementen, so dass jedes ihrer Elemente ein Hauptelement ist, so nennen wir sie eine ‚*insichdichte Menge.*"

Giebt es zu jeder Fundamentalreihe in M ein Grenzelement in M, so nennen wir M eine ‚*abgeschlossene Menge*'.

Eine Menge, die sowohl ‚insichdicht', wie auch ‚abgeschlossen' ist, heisse eine ‚*perfecte Menge*'.

Hat eine Menge eins von diesen drei Prädicaten, so kommt dasselbe Prädicat auch jeder ähnlichen Menge zu; es lassen sich dieselben Prädicate daher auch den entsprechenden Ordnungstypen zuschreiben, und es giebt somit ‚*insichdichte Typen*', ‚*abgeschlossene Typen*', ‚*perfecte Typen*', desgleichen auch ‚*überalldichte Typen*' (§ 9).

So ist z. B. η ein ‚insichdichter' Typus; wie in § 9 gezeigt, ist er auch ‚überalldicht', aber nicht ‚abgeschlossen'.

ω und $^*\omega$ haben keine Hauptelemente (Haupteinsen); dagegen haben $\omega + \nu$ und $\nu + {}^*\omega$ je ein Hauptelement und sind ‚abgeschlossene' Typen.

Der Typus $\omega \cdot 3$ hat zwei Hauptelemente, ist aber nicht ‚abgeschlossen'; der Typus $\omega \cdot 3 + \nu$ hat drei Hauptelemente und ist ‚abgeschlossen'.

§ 11.

Der Ordnungstypus θ des Linearcontinuums X.

Wir wenden uns zur Untersuchung des Ordnungstypus der Menge $X = \{x\}$ aller reellen Zahlen x, die $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind, in ihrer natürlichen Rangordnung, so dass bei zwei beliebigen Elementen x und x' derselben

(1) $$x \prec x', \quad \text{falls} \quad x < x'.$$

Die Bezeichnung dieses Typus sei

(1) $$\overline{X} = \theta.$$

Aus den Elementen der rationalen und irrationalen Zahlenlehre weiss man, dass jede Fundamentalreihe $\{x_\nu\}$ in X ein Grenzelement x_0 in X hat, und dass auch umgekehrt jedes Element x von X Grenzelement von zusammengehörigen Fundamentalreihen in X ist. Somit ist X eine ‚*perfecte Menge*', θ ein ‚*perfecter Typus*'.

Damit ist θ aber noch nicht ausreichend charakterisirt, wir haben vielmehr noch folgende Eigenschaft von X ins Auge zu fassen:

X *enthält* die in § 9 untersuchte Menge R vom Ordnungstypus η als Theilmenge und zwar *im Besondern so, dass zwischen je zwei beliebigen Elementen* x_0 und x_1 von X Elemente von R dem Range nach liegen.

Es soll nun gezeigt werden, dass *diese Merkmale zusammengenommen* in erschöpfender Weise den Ordnungstypus θ des Linearcontinuums X kennzeichnen, so dass der Satz gilt:

„*Hat eine geordnete Menge M ein solches Gepräge, dass sie* 1) ‚*perfect*' *ist*, 2) *in ihr eine Menge S mit der Cardinalzahl $\overline{\overline{S}} = \aleph_0$ enthalten ist, welche zu M in der Beziehung steht, dass zwischen je zwei beliebigen Elementen m_0 und m_1 von M Elemente von S dem Range nach liegen, so ist $\overline{M} = \theta$.*"

Beweis. Sollte S ein niedrigstes oder ein höchstes Element haben, so würden sie wegen 2) auch denselben Charakter als Elemente von M tragen; wir könnten sie alsdann von S entfernen, ohne dass diese Menge dadurch die in 2) ausgedrückte Beziehung zu M verliert.

Wir setzen daher S von vornherein ohne niedrigstes und höchstes Element voraus; S hat alsdann nach § 9 den Ordnungstypus η.

Denn da S ein Theil von M ist, so müssen nach 2) zwischen je zwei beliebigen Elementen s_0 und s_1 von S dem Range nach andere Elemente von S liegen. Ausserdem haben wir nach 2) $\overline{\overline{S}} = \aleph_0$.

Die beiden Mengen S und R sind daher einander ‚*ähnlich*',

$$S \simeq R. \tag{2}$$

Wir denken uns irgend eine ‚*Abbildung*' von R auf S zu Grunde gelegt und behaupten, dass dieselbe zugleich eine bestimmte ‚*Abbildung*' von X auf M ergiebt, und zwar in folgender Weise:

Alle Elemente von X, die gleichzeitig der Menge R angehören, mögen als Bilder denjenigen Elementen von M entsprechen, welche zugleich Elemente von S sind und bei der vorausgesetzten Abbildung von R auf S jenen Elementen von R entsprechen.

Ist aber x_0 ein nicht zu R gehöriges Element von X, so lässt sich dasselbe als Grenzelement einer in X enthaltenen Fundamentalreihe $\{x_\nu\}$ ansehen, welche durch eine in R enthaltene mit ihr zusammengehörige Fundamentalreihe $\{r_{\varkappa_\nu}\}$ ersetzt werden kann. Der letzteren entspricht als Bild eine Fundamentalreihe $\{s_{\lambda_\nu}\}$ in S und M, welche wegen 1) von einem Elemente m_0 in M begrenzt wird, das nicht zu S gehört. (F, § 10). Dieses Element m_0 in M (welches dasselbe bleibt, wenn an Stelle der Fundamentalreihen $\{x_\nu\}$ und $\{r_{\varkappa_\nu}\}$ andere von demselben Elemente x_0 in X begrenzte gedacht werden, [E, C, D, § 10]) gelte als Bild von x_0 in X. Umgekehrt gehört zu jedem Elemente m_0 von M, welches nicht in S vorkommt, ein ganz bestimmtes Element x_0 von X, welches nicht zu R gehört und von welchem m_0 das Bild ist.

Auf diese Weise ist zwischen X und M eine gegenseitig eindeutige Beziehung hergestellt, von der zu zeigen ist, dass sie eine ‚Abbildung' dieser Mengen begründet.

Dies steht von vornherein für diejenigen Elemente von X und M fest, welche gleichzeitig den Mengen R resp. S angehören.

Vergleichen wir ein Element r von R mit einem nicht zu R gehörigen Elemente x_0 von X; die zugehörigen Elemente von M seien s und m_0.

Ist $r < x_0$, so giebt es eine steigende Fundamentalreihe $\{r_{\varkappa_\nu}\}$, welche von x_0 begrenzt wird, und es ist von einem gewissen ν_0 an

$$r < r_{\varkappa_\nu} \quad \text{für} \quad \nu \geqq \nu_0.$$

Das Bild von $\{r_{\varkappa_\nu}\}$ in M ist eine steigende Fundamentalreihe $\{s_{\lambda_\nu}\}$, welch ein M von m_0 begrenzt wird, und man hat (§ 10) erstens $s_{\lambda_\nu} \prec m_0$ für jedes ν und andrerseits $s \prec s_{\lambda_\nu}$, für $\nu \geqq \nu_0$, daher (§ 7) $s \prec m_0$.

Ist $r > x_0$, so schliesst man ähnlich, dass $s \succ m_0$.

Betrachten wir endlich zwei nicht zu R gehörige Elemente x_0 und x_0' und die ihnen in M entsprechenden Elemente m_0 und m_0', so zeigt man durch eine analoge Betrachtung, dass wenn $x_0 < x_0'$, alsdann $m_0 \prec m_0'$.

Damit wäre der Beweis der Aehnlichkeit von X und M erbracht, und es ist daher

$$\overline{M} = \theta.$$

Halle, März 1895.

Ueber arithmetische Eigenschaften analytischer Functionen.

Von

Paul Stäckel in Halle a./S.

1.

Theorem. *Es mögen $x_0, x_1, \ldots, x_\nu, \ldots$ die Punkte einer beliebigen abzählbaren Punktmenge im Gebiete der unbeschränkt veränderlichen complexen Grösse x bezeichnen, während Q irgend eine in dieser Ebene überalldichte Punktmenge bedeuten soll. Dann giebt es stets unendlich viele eindeutige analytische Functionen $f(x)$, die für alle Argumente $x_0, x_1, \ldots$ der Menge P nur Werthe aus der Menge Q annehmen.*

Beweis. Man bilde die ganzen rationalen Functionen:

$$\begin{aligned}
&\varphi_0(x) = 1,\\
&\varphi_1(x) = x - x_0,\\
&\varphi_2(x) = (x-x_0)(x-x_1),\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&\varphi_\nu(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{\nu-1}),\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot
\end{aligned}$$

und betrachte zunächst rein formal den Ausdruck:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu x^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)} \varphi_\nu(x);$$

die Grössen u_ν sind Constanten, über die noch verfügt werden darf.

Alsdann ist:

$$f(x_0) = u_0,$$

daher setze man:

$$u_0 = y_0,$$

wo y_0 ein beliebiger Punkt der Menge Q ist. Ferner hat man:

$$f(x_1) = y_0 + u_1 x_1 (x_1 - x_0).$$

Wird noch die Festsetzung getroffen, dass $x_0 = 0$ ist, falls der Punkt $x = 0$ der Menge P angehören sollte, so darf man:

$$u_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1(x_1 - x_0)}$$

setzen, wo y_1 abermals ein beliebiger Punkt der Menge Q ist. Ebenso ergiebt sich:

$$f(x_2) = y_0 + (y_1 - y_0)\frac{x_2(x_2 - x_0)}{x_1(x_1 - x_0)} + u_2 x_2^3 (x_2 - x_0)(x_2 - x_1),$$

und man kann daher wiederum u_2 so bestimmen, dass

$$f(x_2) = y_2$$

wird, wo y_2 ein beliebiger Punkt der Menge Q ist.

So geht es weiter, und nachdem $u_0, u_1, \ldots, u_{\nu-1}$ bestimmt worden sind, hat man für u_ν eine Gleichung der Form:

$$y_\nu = a_\nu + u_\nu . x_\nu^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)} (x_\nu - x_0)(x_\nu - x_1) \cdots (x_\nu - x_{\nu-1}),$$

in der a_ν eine bekannte rationale Function von $x_0, x_1, \ldots, x_{\nu-1}$ und $y_0, y_1, \ldots, y_{\nu-1}$ bedeutet, während y_ν ein beliebiger Punkt der Menge Q ist.

Hieraus geht hervor, dass bei einer solchen Bestimmung der Constanten u_ν der Ausdruck $f(x)$, rein formal betrachtet, die verlangte Eigenschaft besitzt, und es bleibt daher nur übrig zu untersuchen wie die noch willkürlichen Punkte $y_0, y_1, \ldots, y_\nu, \ldots$ der Menge Q gewählt werden müssen, damit $f(x)$ eine *beständig convergente Potenzreihe von* x wird.

Führt man in dem Gliede:

$$u_\nu x^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)} \varphi_\nu(x)$$

die Multiplicationen aus und ordnet nach steigenden Potenzen von x, so beginnt die Entwickelung mit dem Exponenten:

$$\tfrac{1}{2}\nu(\nu+1)$$

und endet mit dem Exponenten:

$$\tfrac{1}{2}\nu(\nu+1) + \nu = \tfrac{1}{2}(\nu+1)(\nu+2) - 1.$$

Mithin geht $f(x)$ bei Ausführung der Multiplicationen *unmittelbar* in eine Potenzreihe von x über, die sich in der Form schreiben lässt:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\alpha=0}^{\nu-1} u_\nu c_{\nu,\alpha} x^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)+\alpha};$$

hierin bedeutet $c_{\nu,\alpha}$ den Coefficienten von x^α in $\varphi_\nu(x)$.

Gelingt es daher für jeden positiven ganzzahligen Werth von ν die Ungleichheiten:

$$\left| u_\nu \, c_{\nu,\alpha} \right| \leqq \frac{1}{\left[\frac{1}{2}\nu(\nu+1)+\alpha\right]!} \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \cdots, \nu-1)$$

oder, was dasselbe ist:

$$\left| \frac{(y_\nu - a_\nu)\, c_{\nu,\alpha}}{x_\nu^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)} (x_\nu - x_0) \cdots (x_\nu - x_{\nu-1})} \right| \leqq \frac{1}{\left[\frac{1}{2}\nu(\nu+1)+\alpha\right]!}$$

zu befriedigen, so ist damit die beständige Convergenz jener Potenzreihe für $f(x)$ gesichert. Das zu erreichen ist jedoch immer auf unendlich viele Arten möglich, weil *die Punkte der Menge Q die Ebene der complexen Veränderlichen x überalldicht erfüllen sollten*; denn aus diesem Grunde kann y_ν so nahe an a_ν gewählt werden, dass die absoluten Beträge der ν Grössen:

$$(y_\nu - a_\nu) \cdot \frac{c_{\nu,\alpha} \left[\frac{1}{2}\nu(\nu+1)+\alpha\right]!}{x_\nu^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)} (x_\nu - x_0) \cdots (x_\nu - x_{\nu-1})} \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \cdots, \nu-1)$$

alle kleiner als *eins* sind.

Mithin stellt der Ausdruck:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu \, x^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)} \, \varphi_\nu(x)$$

eine eindeutige analytische Function von x mit der einen wesentlich singulären Stelle $x = \infty$ dar, die für alle Argumente aus der *abzählbaren* Menge P nur Werthe aus der *überalldichten* Menge Q annimmt; dass nämlich die Constanten u_ν von einem bestimmten Index an sämmtlich verschwinden, das lässt sich augenscheinlich immer durch geeignete Wahl der Punkte y_ν verhüten.

Zusatz. Ein entsprechendes Theorem gilt, wenn die abzählbare Punktmenge P aus lauter *reellen* Punkten besteht, und die Punktmenge Q in der *reellen Axe* überalldicht ist.

2.

Anwendungen. Um von diesem allgemeinen Theoreme Anwendungen zu machen, will ich zunächst annehmen, dass die Menge P der Inbegriff aller *rationalen complexen Zahlen* ist, dass man also:

$$x_\nu = x_\nu' + i x_\nu''$$

hat, wo x_ν' und x_ν'' reelle rationale Zahlen bedeuten. Die Menge Q möge — was ja erlaubt ist — mit der Menge P identisch sein. Dann gilt der Satz:

Es giebt unendlich viele transcendente Functionen der complexen

Veränderlichen x, die für alle rationalen Werthe des Argumentes selbst lauter rationale Werthe annehmen.

Diese Eigenschaft ist also *nicht* charakteristisch für die rationalen Functionen von x mit rationalen Coefficienten. Wohl aber gilt nach Herrn Hilbert*) der Satz:

„Wenn eine *algebraische* Function von x für alle rationalen in einem beliebig kleinen Intervall gelegenen Werthe stets selber rationale Werthe annimmt, so ist sie nothwendig eine rationale Function."

Dass eine analytische Function, die für alle reellen rationalen Werthe des Argumentes selbst reelle rationale Werthe annimmt, nothwendig eine rationale Function sein müsse, hatte ein frühgestorbener, talentvoller Mathematiker, Emil Strauss, im Jahre 1886 zu beweisen versucht, war aber von Herrn Weierstrass, dem er seinen Beweisversuch mitgetheilt hatte, auf die Vergeblichkeit seiner Bemühungen aufmerksam gemacht worden. Herr Weierstrass construirte nämlich eine *transcendente* Function von x, der die verlangte Eigenschaft zukam.

Mit seiner gütigen Erlaubniss darf ich die betreffende Stelle aus seinem Briefe an Strauss vom 19. März 1886 im Folgenden mittheilen.**)

„Es werde gesetzt (für $n = 1, 2, 3, \ldots$):

$$\varphi_n(x) = \prod_{\nu=1}^{n} \left[1 - \left(\frac{n+1-\nu}{\nu}\right)^2 x^2\right],$$

$$f_n(x) = \prod_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(x);$$

dann sind $\varphi_n(x)$, $f_n(x)$ ganze rationale Functionen von x mit lauter rationalen Zahlencoefficienten; der Grad der ersten ist $2n$, der Grad der andern gleich

$$2 + 4 + \cdots + 2n = n(n+1).$$

Ferner werde gesetzt:

$$\begin{aligned}
m_1 &= 1,\\
m_2 &= m_1 + 1 \,.\, 2 + 1,\\
m_3 &= m_2 + 2 \,.\, 3 + 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
m_{\nu+1} &= m_\nu + \nu(\nu+1) + 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \infty).\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Dann kann man eine unendliche Reihe rationaler Zahlen:

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 110 (1892). S. 129.

**) Eine Abschrift dieses Briefes verdanke ich der Freundlichkeit von Frau Mathilde Speyer geb. Strauss, der ich auch an dieser Stelle meinen besten Dank aussprechen möchte.

$$a_0, a_1, a_2, \ldots$$

so bestimmen, dass der Ausdruck:

$$f(x) = a_0 + a_1 x^{m_1} f_1(x) + a_2 x^{m_2} f_2(x) + \cdots + a_n x^{m_n} f_n(x) + \cdots$$

eine transcendente ganze Function von x und durch eine beständig convergente Potenzreihe von der Form:

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots,$$

deren Coefficienten sämmtlich rationale Zahlen sind, darstellbar ist.

Zu dem Ende werde irgend eine beständig convergirende Potenzreihe von x:

$$C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots$$

mit lauter *positiven* Coefficienten angenommen, und dann (für jeden bestimmten Werth von n) a_n so gewählt, dass in der nach Potenzen von x entwickelten Function:

$$a_n x^{m_n} f_n(x)$$

der Coefficient eines jeden Gliedes seinem absoluten Betrage nach kleiner ist als der Coefficient des dieselbe Potenz von x enthaltenden Gliedes der Reihe

$$C_0 + C_1 x + \cdots.$$

Dann ist nicht nur der Ausdruck $f(x)$ für jeden endlichen Werth von x convergent, sondern kann auch in eine beständig convergirende Potenzreihe von der angegebenen Beschaffenheit umgeformt werden. Zugleich erhellt, dass in dieser Reihe die Coefficienten von

$$x^{m_1}, x^{m_2}, \ldots x^{m_n}, \ldots$$

beziehlich:

$$a_1, a_2, \ldots a_n,$$

sind, und es ist daher, wenn man die Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ so annimmt, dass nicht von einer bestimmten Stelle an alle gleich Null sind,

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

eine *unendliche* Reihe und stellt demgemäss eine *transcendente* ganze Function von x dar.

Dies festgestellt, sei nun x_0 eine beliebige, von Null verschiedene rationale Zahl, so bringe man dieselbe auf die Form:

$$\pm \frac{\lambda}{\mu},$$

wo λ, μ ganze positive Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler sein sollen; dann ist

$$\varphi_{\lambda+\mu-1}(x_0) = 0;$$

es verschwinden demnach für $x = x_0$ sämmtliche Functionen $f_n(x)$, für die

$$n \overline{\gtrless} \lambda + \mu - 1$$

ist, und $f(x)$ hat einen *rationalen* Werth. Dasselbe gilt für $x = 0$, und somit ist bewiesen:

Es existiren *transcendente* ganze Functionen einer Veränderlichen von der Beschaffenheit, dass sie für *jeden* rationalen Werth ihres Argumentes einen ebenfalls rationalen Werth haben.

— — — — —.

Ich bemerke noch, dass es auch (auf mannigfaltige Weise) möglich ist, eine *transcendente* ganze Function von x herzustellen, welche lauter rationale Coefficienten und für *jeden algebraischen* Werth von x einen ebenfalls algebraischen Werth hat."

Angeregt durch die letzte Bemerkung von Herrn Weierstrass hat Strauss versucht, eine solche transcendente Function von x herzustellen, und zwar verfuhr er folgendermassen*).

Nach dem Vorgange von Herrn G. Cantor**) ordne man jeder irreduciblen ganzzahligen Function von x:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

als *Höhe* die ganze positive Zahl:

$$h = n - 1 + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}| + |a_n|$$

zu. Das Product aller Functionen derselben Höhe h ist eine ganze ganzzahlige durch x theilbare Function von x, die mit $f_n(x)$ bezeichnet werde. Bildet man noch die Producte:

$$g_h(x) = \prod_{\lambda=1}^{h} f_\lambda(x) \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots, \infty),$$

so hat der Ausdruck:

$$G(x) = \sum_{h=1}^{\infty} x^{\mu_h} g_h(x);$$

in welchem die μ_h positive ganze Zahlen sein sollen, augenscheinlich die Eigenschaft, dass jedem algebraischen Werthe von x (im Convergenzbereiche) ein algebraischer Werth von $G(x)$ zugehört.

Definirt man nun die Zahlen μ_h durch die Gleichungen:

$$\mu_h = M_1 + M_2 + \cdots + M_h + (h-1)\lambda_1 + (h-2).\lambda_2 + \cdots + 2.\lambda_{h-1} + 1.\lambda_h$$
$$(h = 1, 2, 3, \cdots, \infty),$$

---

*) Berichte des Freien Deutschen Hochstiftes zu Frankfurt am Main. Neue Folge. Dritter Band. Jahrgang 1890. S. 18—29.

**) Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 77 (1873). S. 259.

in denen $M_1, M_2, \ldots, M_h$ den grössten der absoluten Beträge der Coefficienten und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ den Grad beziehungsweise von $g_1, g_2, \ldots, g_h$ bezeichnet, so wird $G(x)$ eine Potenzreihe von x, die den *Einheitskreis* zum wahren Convergenzkreis hat.

Dass $G(x)$ keine *rationale* Function von x darstellt, lässt sich leicht einsehen. Es hat nämlich die höchste Potenz von x in

$$x^{\mu_{h-1}} g_{h-1}(x)$$

den Exponenten $\mu_h - M_h$, die niedrigste Potenz von x in

$$x^{\mu_h} g_h(x)$$

dagegen den Exponenten $\mu_h + 1$, sodass die dazwischen liegenden M_h Potenzen von x den Coefficienten *Null* besitzen. Da nun die Grössen M_h mit wachsendem h jede endliche Grenze überschreiten, so kann keine Recursionsformel endlicher Ordnung zwischen den Coefficienten der Potenzreihe $G(x)$ bestehen, wie es der Fall sein müsste, wenn diese Potenzreihe eine *rationale* Function von x darstellt.

Wenn jedoch Strauss hieraus schliesst, dass er in $G(x)$ eine *transcendente* Function der verlangten Beschaffenheit erhalten hat, so übersieht er dabei die Möglichkeit, dass die Fortsetzung seiner Potenzreihe zwar keine *rationale* Function, wohl aber eine *algebraische* Function von x ergeben könnte. *Sein sonst recht scharfsinniger Beweis kann daher nicht als stichhaltig anerkannt werden.*

Allerdings lässt sich diese Lücke ausfüllen. Zu diesem Zwecke braucht man nämlich nur zu beachten, dass zu jedem *rationalen* Werthe von x (innerhalb des Einheitskreises) ein *rationaler* Werth von $G(x)$ gehört, und sich den vorhin erwähnten Satz von Herrn Hilbert ins Gedächtniss zurückzurufen. Mithin stellt $G(x)$ wirklich eine *transcendente* Function von x dar.

Aber selbst wenn man davon absehen wollte, dass das von Strauss angegebene Beispiel nicht die wünschenswerthe Einfachheit besitzt, so hat es doch folgenden wesentlichen Mangel. Es zeigt nur, dass jedem algebraischen Werthe von x *innerhalb des Einheitskreises* ein algebraischer Werth einer transcendenten Function zugehören kann, und es bleibt somit die Frage offen, ob es auch transcendente Functionen von x giebt, bei denen *jedem* algebraischen Argumente ein algebraischer Functionswerth entspricht.

Dass diese Frage zu bejahen ist, ergiebt sich aus meinem allgemeinen Theoreme, wenn man als Menge P den Inbegriff aller algebraischen Zahlen nimmt und die Menge Q mit P identisch sein lässt. Es bedarf kaum der Erwähnung, dass man auch bei geeigneter Anordnung der algebraischen Zahlen, welche die Menge P bilden, für $f(x)$ eine beständig convergente Potenzreihe mit lauter *rationalen* Coefficienten erhalten kann.

Hat man übrigens eine solche *beständig convergente* Potenzreihe $f(x)$, so kann man auch sofort beliebig viele *beschränkt convergente* Potenzreihen mit derselben Eigenschaft angeben, die ebenfalls *transcendente* Functionen darstellen. Zu diesem Zwecke braucht man nur zu $f(x)$ eine Potenzreihe y hinzuzufügen, die aus irgend einer ganzzahligen algebraischen Gleichung

$$g(x, y) = 0$$

entspringt.

Man kann sogar noch mehr erreichen. Wenn man annimmt, dass P aus allen *algebraischen* Zahlen und Q aus allen *rationalen* Zahlen besteht, so erhält man den Satz:

Es giebt unendlich viele transcendente Functionen von x, die für alle algebraischen Werthe des Argumentes selbst lauter rationale Werthe annehmen.

Dass es Functionen einer *reellen* Veränderlichen giebt, die für alle reellen algebraischen Werthe der Argumente selbst lauter reelle rationale Werthe annehmen, das hatte mir Herr G. Cantor mündlich mitgetheilt, und ich bin hierdurch angeregt worden, den entsprechenden Satz für Functionen einer *complexen* Veränderlichen zu beweisen.

Zum Schluss finde noch folgende Bemerkung Platz. Nach Herrn Lindemann*) besitzt die Function

$$e^x$$

die Eigenschaft, für alle *algebraischen* Werthe des Argumentes, *den Werth Null ausgenommen*, *transcendente* Werthe anzunehmen. Es giebt aber auch analytische Functionen von x, bei denen *ausnahmslos* jedem algebraischen Werthe des Argumentes ein transcendenter Functionswerth entspricht; denn man braucht dazu nur anzunehmen, dass die Menge P der Inbegriff aller algebraischen Zahlen, die Menge Q dagegen der Inbegriff aller transcendenten complexen Zahlen ist.

Halle a./S., December 1894.

---

*) Mathematische Annalen Bd. 20 (1882), S. 224.

Sur les points singuliers des équations différentielles du premier ordre.

(Extrait d'une lettre adressée à M. Klein).

Par

M. Émile Picard à Paris.

---

1. Je voudrais vous présenter quelques remarques sur l'étude des courbes définies par une équation différentielle du premier ordre. C'est un sujet qui a fait l'objet de bien des recherches, mais il me semble que quelques points n'ont pas été traités avec une rigueur suffisante. Ainsi prenons d'abord une équation différentielle du premier ordre et du premier degré dans le voisinage d'un point singulier que nous pouvons supposer être l'origine. Nous aurons l'équation

$$\frac{dx}{ax + by + \cdots} = \frac{dy}{a'x + b'y + \cdots}$$

les termes non écrits étant de degrés supérieurs au premier. La nature des racines de l'équation du second degré en λ

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ a' & b' - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

joue, comme vous savez, un rôle capital dans l'étude du point singulier. En nous bornant au cas genéral c'est á dire sans supposer de relations particulières entre les coefficients, il y a trois cas à distinguer. Si les racines de (1) sont réelles et de même signe, toutes les courbes intégrales se rapprochant suffissament de l'origine passent à l'origine et on a alors ce que M. Poincaré dans ses études classiques sur ce sujet (Journal de Liouville, 1881 et 1882) appelle un *nœud.* Quand les racines de l'équation (1) sont imaginaires, il y a une infinité de courbes intégrales ayant comme point asymptote l'origine, que M. Poincaré appelle alors un *foyer*. Je n'ai aucune remarque à faire sur ces deux cas; mais il reste encore le cas du *col* où l'équation (1) a ses racines réelles et de signes contraires. Il résulte alors immédiatement des anciennes recherches de Briot et Bouquet que l'on peut trouver deux courbes intégrales passant à l'origine, mais on n'a ici aucune forme de l'intégrale générale dans le voisinage de l'origine, et pour affirmer que les deux courbes intégrales trouvées sont *les seules qui passent à l'origine ou s'en rapprochent indéfiniment*, quelques compléments sont nécessaires. Il est d'abord presque évident que, si une courbe intégrale passe à l'origine avec une tangente déterminée, elle coïncidera avec une des deux courbes que je viens de signaler; c'est un point sur lequel il n'est pas besoin d'insister. Il nous suffira donc de montrer que toute courbe intégrale de l'équation différentielle passant à l'origine ou s'en rapprochant indéfiniment *a nécessairement une tangente déterminée* au point singulier. A cet effet, remarquons d'abord qu'on peut faire un changement de variables tel que les axes des x et des y soient les deux intégrales dont nous venons de parler. L'équation différentielle aura nécessairement alors la forme

$$\frac{dx}{x(\lambda_1+\cdots)}=\frac{dy}{y(\lambda_2+\cdots)}$$

les termes non écrits étant au moins du premier degré en x et y. Il est clair d'abord que, dans la région autour de l'origine où convergent les séries des dénominateurs, une courbe intégrale ne peut rencontrer l'axe des x ou l'axe des y. Si, en effet, une intégrale rencontre l'axe des y au point ($x=0$, $y_0 \neq 0$), elle sera tangente en ce point avec l'axe des y et devra par suite coïncider avec lui. Ceci posé, envisageons une courbe intégrale passant à l'origine ou s'en rapprochant indéfiniment et distincte de Ox et Oy. Nous pouvons supposer que, depuis un certain point P_0, elle est dans l'angle (xOy). Suivons la courbe depuis le point P_0 jusqu' à l'origine; si P désigne le point mobile de la courbe, le rayon vecteur OP tourne toujours dans le même sens autour de l'origine O, car autrement pour la position du point P correspondant à ce changement de sens, la droite OP serait tangente en P à la courbe, et on aurait pour les coordonnées de ce point

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}$$

et, par suite,

$$\frac{1}{\lambda_1+\cdots}=\frac{1}{\lambda_2+\cdots}$$

égalité impossible, puisque λ_1 est différent de λ_2. Supposons, pour fixer les idées; que OP marche dans le sens de Ox vers Oy; quand P tendra vers l'origine, *OP aura nécessairement une limite*, puisque OP marche toujours dans le même sens et ne peut dépasser Oy, d'après ce que nous avons dit plus haut. Il est donc établi que *la courbe intégrale considérée a une tangente à l'origine*, et nous sommes alors assuré qu'il n'y a que deux courbes intégrales passant par le point singulier considérée, c'est à dire par un col.

2. Une question du même genre, mais un peu moins simple, se présente pour les équations différentielles du premier ordre et du second degré, qu'il n'est peut être pas sans intérêt de discuter d'une manière complète à cause des nombreuses questions de géométrie où elles se rencontrent. Prenons donc l'équation

$$(ax+by+\cdots)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2(a_1x+b_1y+\cdots)\left(\frac{dy}{dx}\right)$$
$$+(a_2x+b_2y+\cdots)=0$$

et *cherchons les courbes intégrales passant à l'origine ou s'en rapprochant indéfiniment.* Il est expressément entendu que nous nous plaçons dans le *cas général,* c'est à dire que nous ne supposons remplie aucune condition particulière d'égalité entre a, b, a_1, b_1, a_2 et b_2.

5. On voit immédiatement que, si une courbe intégrale possède une tangente à l'origine, le coefficient angulaire de cette tangente devra être une racine de l'équation du troisième degré

(2) $$(a+bt)t^2+2(a_1+b_1t)t+a_2+b_2t=0.$$

Des circonstances différentes se présenteront suivant la nature des racines de cette équation du troisième degré; les racines réelles seules seront ici intéressantes, et à une racine réelle t_0 correspondront, pour l'équation, une seule intégrale on une infinité d'intégrales suivant que l'équation différentielle en t, proposée de la transformée en posant $y=tx$, aura une intégrale ou une infinité d'intégrales prenant pour $x=0$ la valeur t_0.

L'équation (2) se retrouve en faisant dans l'équation $y=tx$. On aura, en résolvant d'abord

(3) $$\frac{dy}{dx}=\frac{-(a_1x+b_1y+\cdots)\pm\sqrt{(a_1x+b_1y+\cdots)^2-(ax+by+\cdots)(a_2x+b_2y+\cdots)}}{ax+by+\cdots}$$

et par suite

(4) $$x\frac{dt}{dx}=\frac{-t(a+bt)-(a_1+b_1t)+x(\quad)\pm\sqrt{(a_1+b_1t)^2-(a+bt)(a_2+b_2t)+x(\quad)}}{a+bt+x(\quad)}$$

en marquant par des parenthèses des séries entières en x et t. Pour $x=0$, le second membre se réduit à

$$\frac{-t(a+bt)-(a_1+b_1t)\pm\sqrt{(a_1+b_1t)^2-(a+bt)(a_2+b_2t)}}{a+bt}.$$

En égalant cette expression à zéro, on retrouve l'équation (2) du troisième degré, après suppression de la racine $t=-\frac{a}{b}\cdot$ On pourrait avoir à craindre, pour l'équation différentielle (4) en t, quelque difficulté à cause de cette racine $t=-\frac{a}{b}\cdot$ Le second nombre de cette équation se présente en effet sous forme indéterminée pour $x=0$, $t=-\frac{a}{b}$, du moins pour une des déterminations du radical. Ne pourrait-il pas y avoir alors une intégrale t de l'équation tendant vers $-\frac{a}{b}$, quand x tend vers zéro. Pour voir que la chose est impossible, il suffit de considérer dans l'équation différentielle proposée en x et y, x comme fonction de y, et, posant $x = t'y$, on aura une équation différentielle entre y et t', et cette équation ne pourra avoir une intégrale t' tendant vers $-\frac{b}{a}$ quand y tend vers zéro, car il n'y a plus ici aucune difficulté, puisque $ab_2 - a_2 b \neq 0$.

4. Les courbes intégrales que nous venons d'étudier étaient supposées avoir une tangente à l'origine. *Peut-il exister des courbes intégrales se rapprochant indéfiniment de l'origine sans avoir de tangente déterminée?* Telle est la question qui doit maintenant nous occuper. Outre l'équation (2) nous aurons encore à considérer l'équation

$$(a_1 + b_1 t)^2 - (a + bt)(a_2 + b_2 t) = 0 \tag{5}$$

correspondant aux directions qui donnent une racine double pour $\frac{dy}{dx}$.

5. Supposons d'abord que l'équation (5) ait ses racines imaginaires. En se servant des coordonnées polaires, l'équation différentielle devient

$$[f(\Theta) + \varrho(\quad)]\, d\varphi = \varrho[\varphi(\Theta) + \varrho(\quad)]\, d\Theta \tag{6}$$

en posant

$$f(\Theta = -\sin\Theta\,(a\cos\Theta + b\sin\Theta) - \cos\Theta(a_1\cos\Theta + b_1\sin\Theta)$$
$$\pm \cos\Theta\sqrt{(a_1\cos\Theta + b_1\sin\Theta)^2 - (a\cos\Theta + b\sin\Theta)(a_1\cos\Theta + b_2\sin\Theta)}$$

et $\varphi(\Theta)$ ayant une expression analogue. Les coefficients de ϱ, qui sont marqués dans l'équation (6) par des parenthèses, sont des séries ordonnées suivant les puissances de ϱ et convergentes quel que soit Θ; nous nous appuyons ici sur ce que l'équation (5) a ses racines imaginaires, d'où il résulte que le radical figurant dans $f(\Theta)$ ne peut s'annuler.

Les racines de l'équation (2) correspondent aux racines dé l'équation

$$f(\Theta) = 0 \tag{7}$$

où il est entendu, une fois pour toutes, que parmi ces racines nous ne comptons pas la racine sans intérêt pour nous répondant à

$$a\cos\Theta + b\sin\Theta = 0.$$

Il résulte de la forme de l'équation (6) que, partant d'une valeur initiale (ϱ_0, Θ_0) avec une détermination fixee pour le radical qui figure dans $f(\Theta)$, *nous pourrons toujours faire varier Θ dans le même sens.* *)

*) Si l'on veut développer davantage ce point, sur lequel nous passons peut-être un peu rapidement dans le texte, on peut raisonner de la manière suivante. Il pourrait arriver que le rayon vecteur changeât de sens de rotation, si l'on

Les seules valeurs de Θ, appelant l'attention, sont les racines de l'équation (7). Si, Θ arrivant à une telle racine Θ_0, ϱ prend la valeur zéro, nous serons dans le cas étudié d'une courbe ayant une tangente déterminée à l'origine. Si ϱ ne prend pas la valeur zéro, le point ne présente rien de particulier pour nous.

Nous venons de dire que l'on pourra toujours suivre une courbe intégrale en faisant varier Θ dans le même sens, tant qu'on n'aura pas atteint l'origine. On peut donc penser qu'il est possible d'avoir une intégrale ayant la forme d'une spirale; nous allons voir qu'il n'en est rien.

L'équation (2) ayant au moins une racine réelle, il y aura toujours une courbe intégrale passant à l'origine et formant un arc analytique, à savoir celle qui correspond à l'intégrale holomorphe de l'équation différentielle en t. Soit C cette courbe; concevons une autre courbe intégrale Γ rencontrant en m la première, et passant à l'origine ou s'en rapprochant indéfiniment. En suivant Γ, nous pourrons arriver

---

arrivait à un point (x, y) de la courbe telle que la tangente en ce point passe à l'origine. Or le lieu des points des courbes intégrales pour lesquels la tangente passe à l'origine est la courbe que l'on obtient en remplaçant dans l'équation différentielle $\frac{dy}{dx}$ par $\frac{y}{x}$. Cette courbe a un point triple à l'origine, les tangentes correspondant aux directions données par l'équation (2). En coordonnées polaires, cette courbe a pour équation le coefficient de $d\varrho$ dans (6), c'est-à-dire

$$\text{(L)} \qquad f(\Theta) + \varrho(\quad) = 0.$$

On pourrait craindre qu'une intégrale eût, sur une branche de la courbe précédente, une infinité de points dans le voisinage de l'origine, pour lesquels la tangente à l'intégrale passerait à l'origine. Dan ce cas, il ne serait plus permis d'affirmer que, si près de l'origine qu'on considère l'intégrale, le rayon vecteur marche toujours dans le même sens. Pour démontrer qu'il n'en peut être ainsi, remarquons qu'il y a une courbe intégrale tangente à l'origine à la branche considérée de la courbe (L); nous pouvons supposer, en effectuant préalablement un changement de variable, que cette courbe intégrale est l'axe des x. Pour une détermination convenable du radical $f(\Theta)$ s'annulera pour $\Theta = 0$, et l'équation différentielle devant être satisfaite pour $\Theta = 0$, quel que soit ϱ, le second terme dans (L) s'annulera pour $\Theta = 0$, quel que soit ϱ. Il en résulte que, dans le voisinage de $\Theta = 0$, l'équation différentielle peut prendre la forme

$$\Theta[1 + (\quad)]\, d\varrho = \varrho[\varphi(\Theta) + \varrho(\quad)]\, d\Theta,$$

la quantité représentée dans le premier membre par une parenthèse s'annulant pour $\varrho = \Theta = 0$. Si maintenant on suit une intégrale à partir d'une détermination initiale (Θ_0, ϱ_0), Θ_0 et ϱ_0 désignant des quantités positives très petites, et que Θ commence par décroître, il continuera nécessairement à décroître jusqu'à $\Theta = 0$, car le multiplicateur de $d\varrho$ ne s'annule que pour $\Theta = 0$. Ce sera pour cette dernière valeur que ϱ s'annulera si la courbe se rapproche indéfiniment de l'origine, il est clair que $\varphi(0)$ sera alors nécessairement positif.

Les considérations précedentes un peu développées permettraient même d'éviter la discussion que nous faisons dans le texte, mais on pénètre ainsi moins profondément dans la question.

au point O, Θ marchant toujours dans le même sens. Cherchons si Γ peut rencontrer C en un second point m' qui sera nécessairement situé sur C de l'autre côté que m par rapport à O (dans le cas contraire, Θ aurait du rétrograder à un certain moment).

En m l'équation différentielle donne deux valeurs pour $\frac{dy}{dx}$; l'une convient à C l'autre à Γ. Sous le radical qui figure dans l'expression de $\frac{dy}{dx}$ se trouve une expression toujours positive. Les points m et m' sont de part et d'autre de O et très voisins. Supposons qu'en m ce soit la détermination positive du radical qui convienne à Γ; le coefficient angulaire de la tangente à Γ en m est

$$\text{(E)} \qquad \frac{-(a_1x+b_1y+\cdots)+\sqrt{(a_1x+b_1y+\cdots)^2-\cdots}}{ax+by+\cdots}$$

tandis que pour C il faudra mettre le signe *moins* devant le radical. Suivons maintenant (x, y) sur Γ de m en m'; le radical gardera toujours le même signe, en m' et en m les coordonnées x et y sont respectivement de signes contraires, le rapport $\frac{y}{x}$ ayant à très peu près la même valeur. Il en résulte qu'en suivant Γ, nous trouvons en m' une valeur de (E) très voisine de la valeur de $\frac{dy}{dx}$ en m pour la courbe C, et par suite très voisine de celle de $\frac{dy}{dx}$ en m' pour la même courbe C. Mais en m' l'équation différentielle donne deux valeurs différentes pour $\frac{dy}{dx}$; les deux valeurs que nous avons trouvées très peu différentes sont donc rigoureusement égales, et par suite la tangente en m' à la courbe C coincide avec la tangente à Γ: les deux courbes C et Γ coïncideraient donc, ce qui est absurde. La courbe Γ ne peut donc rencontrer C en aucun autre point que O (en dehors de m), et elle arrive par suite en O avec une tangente déterminée, rentrant ainsi dans la classe d'intégrales dont nous avons fait l'étude. Notre conclusion est donc que *toutes les courbes intégrales cherchées ont à l'origine une tangente déterminée.*

6. Examinons maintenant le cas où l'équation (5) a ses racines réelles. En écrivant que les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ données par l'équation différentielle sont égales, on obtient une courbe ayant un point double à l'origine avec tangentes distinctes. On peut faire un changement de variables tel que les deux branches de la courbe coïncident avec Ox et Oy; nous allons nous placer dans cette hypothèse. D'après un théorème classique, les axes de coordonnées sont alors *le lieu des points de rebroussement* des courbes intégrales, et celles-ci avant d'atteindre l'origine resteront toujours dans un même quadrant que nous pouvons

supposer être le premier. Quand on suit une courbe intégrale, le rayon vecteur marche toujours dans le même sens, sauf pour les positions Ox et Oy où change le sens du mouvement; c'est ce qui résulte de ce que la seule irrationnelle figurant dans l'équation est le radical

$$P(\Theta) = \sqrt{(a_1 \cos\Theta + b_1 \sin\Theta)^2 - (a\cos\Theta + b\sin\Theta)(a_2\cos\Theta + b_2\sin\Theta)}$$

qui d'ailleurs se réduit ici à $\sqrt{\cos\Theta \sin\Theta}$ d'après nos hypothèses. Le signe du radical sera à changer quand Θ arrivera à *zéro* ou à $\frac{\pi}{2}$.

Remarquons encore que toute racine réelle τ de l'équation (2) satisfait à l'inégalité

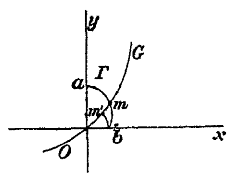
$$(a_1 + b_1\tau)^2 - (a + b\tau)(a_2 + b_2\tau) > 0$$

comme on le conclut de suite de l'équation

$$(a + b\tau)\tau^2 + 2(a_1 + b_1\tau)\tau + a_2 + b_2\tau = 0.$$

Il en résulte qu'il y aura au moins dans le premier quadrant une courbe intégrale avec une tangente déterminée.

Nous pouvons maintenant chercher à suivre une courbe intégrale qui tendrait vers l'origine. Soit C une intégrale ayant une tangente déterminée à l'origine; suivons une autre intégrale Γ, et supposons que, en suivant la courbe en allant vers l'origine, Θ aille d'abord en croissant. Il pourra arriver que ϱ tende vers zéro pour une valeur de Θ moindre que $\frac{\pi}{2}$, et alors nous aurons une branche de courbe avec une tangente déterminée. Dans le



cas contraire, Θ pourra croître jusqu'à $\frac{\pi}{2}$ et la courbe Γ aura un point de rebroussement a sur l'axe des y. Il faut alors faire décroître Θ. Deux cas pourront maintenant se rencontrer: ou bien ϱ prendra la valeur *zéro* pour une certaine valeur de Θ comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et 0, et alors nous aurons une courbe intégrale avec une tangente déterminée, ou bien Θ pourra atteindre la valeur zéro et on aura en b sur Ox un second point de rebroussement. Dans ce cas, il y aura certainement un point m de rencontre de Γ avec C, et pour la branche ab de Γ, le radical $\sqrt{P(\Theta)}$ aura un certain signe. Continuons à avancer sur Γ: ou bien la courbe intégrale arrivera à l'origine avec une tangente déterminée, ou bien Θ pourra aller jusqu'à $\frac{\pi}{2}$; mais, dans ce dernier cas, il y aura un second point de rencontre m' de Γ avec C. Pour la branche bm', le radical $\sqrt{P(\Theta)}$ a dans l'équation différentielle un autre signe que pour la branche bm. Or en m l'équation différentielle donne deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ correspondant aux deux courbes intégrales passant en m; ces valeurs correspondent aux deux signes du radical. L'une correspond à C l'autre à Γ, mais en m et m' les coefficients angulaires de la tangente à C sont très peu différents. Il s'en suit que le coefficient angulaire de la tangente en m' à Γ coïncide avec le coefficient angulaire de la tangente à C (puisque en m ils étaient distincts, et que le signe du radical a changé en b). Nous arrivons donc encore à une contradiction qui établit l'impossibilité du second point de rencontre m', à moins que ce dernier ne coïncide avec l'origine. Nous avons donc dans tous les cas la conclusion suivante:

Toutes les courbes intégrales passant à l'origine ou s'en rapprochant indéfiniment arrivent nécessairement en ce point avec une tangente déterminée.

Ainsi se trouve traité d'une manière qui me parait complètement rigoureuse le cas *général* de l'équation du second degré, intéressant dans diverses questions de géometrie notamment dans la recherche des lignes de courbure passant par un ombilic.

Paris, 4. Janvier 1895.

Die geometrische Theorie der Schwarz'schen s-Function für complexe Exponenten.

(Zweite Abhandlung).

Von

Fritz Schilling in Aachen.

Die folgenden Betrachtungen bilden die Fortsetzung des in diesen Annalen Bd. 46, pag. 62ff. veröffentlichten ersten Theiles. Bereits am Schlusse des § 4 daselbst sind die Punkte kurz genannt worden, die noch zu besprechen wünschenswerth sind. Dieselben betreffen die Ausdehnung der allgemeinen Construction der Fundamentalbereiche auf den Fall, dass einer oder zwei der Exponenten rein imaginär sind, sowie die Aufstellung der allgemeinen Criterien, wie sie die geometrische Theorie für das Auftreten parabolischer Ecken sowie für die functionentheoretische Verwandtschaft der Fundamentalbereiche ergiebt.

§ 5.

Construction der allgemeinen Fundamentalbereiche für einen oder zwei rein imaginäre Exponenten.

Im Anfange des § 2 des ersten Theiles war der Fall von der weiteren Betrachtung ausgeschlossen worden, dass einer oder zwei der Exponenten λ, μ, ν rein imaginär sind. Wir wollen jetzt zeigen, wie auch für solche Werthe der Fundamentalbereich der zugehörigen s-Function sich geometrisch am einfachsten construiren lässt. Unsere Methode wird zunächst in genau derselben Weise vorgehen, wie für den allgemeinen Fall dreier complexer Exponenten im ersten Theile ausgeführt ist. An der Gestalt der sich in solcher Weise geometrisch ergebenden Vierecke wird jedoch dann noch eine Abänderung vorzunehmen sein, um sie zu functionentheoretisch brauchbaren Fundamentalbereichen zu erheben. Eine besondere Betrachtung widmen wir hierbei wieder dem Ausnahmefall, in dem die Bedingung

$$\pm \lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$$

erfüllt ist.

Nehmen wir jetzt zunächst an, *dass nur ein Exponent, etwa λ, rein imaginär ist*, die übrigen, μ und ν, beliebig complex sind. Der bestimmteren Ausdrucksweise wegen sei ferner $\nu' \geqq \mu'$ vorausgesetzt. Wir bestimmen vorerst die Lage der 4 Eckpunkte a_1, b_1, c_1, c_2' unseres Bereiches in der s-Ebene vermöge der Gleichung

$$D\,V\,(a_1 b_1 c_1 c_2') = e^{i\pi(\nu-\mu-\lambda+1)}.$$

Dann lassen wir an Stelle der gegebenen Exponenten $\lambda = i\lambda''$, μ, ν für einen Augenblick das neue Tripel $\lambda_1 = 0$, $\mu_1 = \mu$, $\nu_1 = \nu - i\lambda''$ treten, welches das Doppelverhältniss der 4 Eckpunkte a_1, b_1, c_1, c_2' unverändert lässt, und construiren das diesen Exponenten zugehörige Kreisbogenviereck, was keine Schwierigkeit bietet. In diesem Kreisbogenviereck wird nothwendig die Ecke a_1 von zwei sich berührenden Kreisbogen mit verschwindendem Winkel gebildet werden. Nun wissen wir nach unserem Hülfssatze in § 1, dass wir durch entsprechende Zuordnung der Seitenpaare $a_1 c_1$, $a_1 c_2'$ und $b_1 c_1$, $b_1 c_2'$ unser Viereck zum Fundamentalbereich eines jeden Exponententripels erheben können, welcher in den reellen Theilen mit dem ursprünglichen übereinstimmt, dessen imaginäre Theile aber ganz beliebig gewählt sein können, insofern nur der Ausdruck $e^{-\pi(\nu''-\mu''-\lambda'')}$ unverändert bleibt. Wir können daher die Zuordnung der Seiten jedenfalls auch so festsetzen, dass sie den gegebenen Exponenten λ, μ, ν entsprechend ist. Doch dann tritt im Gegensatz zu dem allgemeinen Falle hier die neue Thatsache hervor, dass die Ecke a_1 einen *hyperbolischen Zipfel* darstellt, unser Kreisbogenviereck daher in solcher Form als Fundamentalbereich für die gegebenen Exponenten bekanntlich nicht brauchbar ist. *Wie werden wir nun unser Viereck abändern können, um einen brauchbaren Fundamentalbereich aus ihm zu bekommen?*

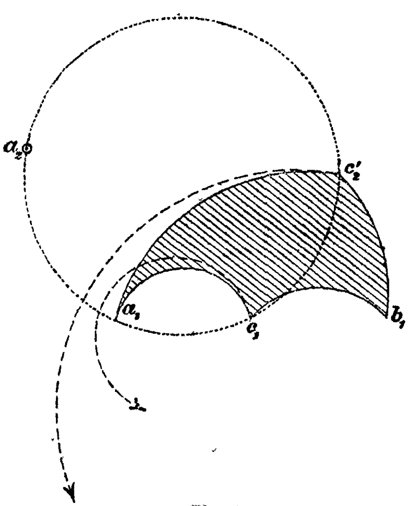


Fig. 1.

Wir haben bereits früher gelernt, dass an Stelle des hyperbolischen Zipfels ein unendliches Kreisband treten muss*). Um unsere Vorstellung zu fixiren, knüpfen wir unsere Betrachtung an das Viereck der Fig. 1 an; doch wolle man bemerken, dass der einfache geometrische Process, den wir ausführen werden, sich als allgemein anwendbar erweist. Wir erkennen zunächst, dass der zweite Fixpunkt a_2 der

*) Vgl. Annalen Bd. 44, pag. 176 ff.

hyperbolischen Substitution A, wie auch die Zuordnung des Seitenpaares $a_1 c_1$ und $a_1 c_2'$ getroffen sein mag, gewiss auf dem Hülfskreise gelegen ist, den wir durch die Punkte a_1, c_1, c_2' construirt denken können. Jedoch kann andererseits a_2 nicht gerade auf dem Bogenstücke $c_1 c_2'$ dieses Hülfskreises liegen, welches sich in dem sichelförmigen Theile zwischen den Kreisen der Seiten $a_1 c_1$ und $a_1 c_2'$ befindet. Wir wollen demgemäss eine beliebige Lage des Punktes a_2 in der Figur 1 auswählen. (Fällt a_2 in a_1 hinein, so ist die Substitution, welche die Zuordnung der Seiten $a_1 c_1$ und $a_1 c_2'$ leistet, eben die parabolische geworden, von der wir oben ausgingen).

Der für die in Aussicht genommene Abänderung des Bereiches wesentliche Gedanke ist jetzt folgender: Wir denken den Kreis der Seite $a_1 c_1$ durch einen von ihm in seiner Lage beliebig wenig abweichenden Kreis ersetzt, der auch von dem Punkte c_1 ausgeht, die Fixpunkte a_1 und a_2 jedoch von einander trennt. (Derselbe mag überdies, um ihn ein ev. störendes zweites Schneiden der Seite $c_1 b_1$ vermeiden zu lassen, den ursprünglichen Kreisbogen $a_1 c_1$ im Punkte c_1 berühren*)). Zu dem neuen Kreis suchen wir jetzt den vermöge der Substitution A zugeordneten Kreis, der von der Ecke c_2' ausgeht. Beide Kreise sind in der Figur 1 gestrichelt eingezeichnet. Man erkennt jetzt, dass diese neuen Kreise sich niemals schneiden werden. Wir werden daher die geschlossene Ecke a_1 des hyperbolischen Zipfels durch das unendliche Kreisband ersetzen, welches sich zwischen diesen Kreisen wiederholt um die s-Kugel windet. Hiermit ist die beabsichtigte Umwandlung durchgeführt. *Das neue Kreisbogenviereck, welches in Fig. 2 nochmals für sich gezeichnet ist, stellt mit der entsprechenden Zuordnung der Seitenpaare in durchaus brauchbarer Gestalt den gesuchten Fundamentalbereich für das gegebene Exponententripel* $\lambda = i\lambda'', \mu, \nu$ *dar.*

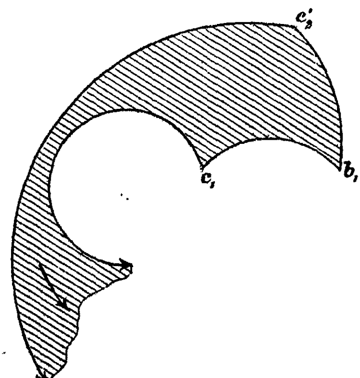


Fig. 2.

Sind nun weiter *zwei Exponenten, etwa* λ *und* μ, *rein imaginär*, der dritte ν dagegen beliebig complex, so ergiebt sich jetzt ganz von selbst, wie auch für sie der Fundamentalbereich zu construiren ist. Man wird ganz analog vorgehen wie soeben und sich zunächst das Kreisbogenviereck $a_1 b_1 c_1 c_2'$ für die Exponenten $\lambda_1 = 0$, $\mu_1 = 0$, $\nu_1 = \nu - i\lambda'' - i\mu''$ construiren, in dem die nicht verdoppelten Ecken

*) Ein Durchschneiden der Seite $b_1 c_2'$ kann auch in jedem Falle leicht vermieden werden, wie wir nicht weiter ausführen wollen.

a_1 und b_1 je von zwei sich berührenden Kreisbogen gebildet werden, indem ihre Winkel gleich 0 sind. In diesem Viereck können wir wieder die Seitenpaare a_1c_1, a_1c_2' und b_1c_1, b_1c_2' durch die hyperbolischen Substitutionen A und B einander zuordnen, welche den gegebenen Exponenten $i\lambda''$ und $i\mu''$ entsprechen. Hierdurch werden die Ecken a_1 und b_1 zu hyperbolischen Zipfeln; diese sind aber wieder leicht durch je ein unendliches Kreisband zu ersetzen durch genau denselben geometrischen Process wie vorhin. *Das resultirende Kreisbogenviereck wird dann wieder in durchaus brauchbarer Gestalt den Fundamentalbereich für die Exponenten $\lambda = i\lambda''$, $\mu = i\mu''$, ν darstellen.*

Es bleibt noch ein Wort den bisher ausgeschlossenen Fundamentalbereichen zu widmen, *für welche bei Stattfinden der Bedingung $\pm\lambda \pm \mu \pm \nu = 2n+1$ ein oder zwei der Exponenten rein imaginär sind, sowie der Gesammtheit aller mit einem jeden derselben arithmetisch verwandten Bereiche*).*

Ist nur ein Exponent rein imaginär und sind die beiden anderen beliebig complex (ohne ganzzahlig zu sein), so ist leicht zu übersehen, dass der Construction des zugehörigen Fundamentalbereiches sowie aller mit ihm arithmetisch verwandten Bereiche eine neue Schwierigkeit nicht im Wege steht. Das Gleiche ist der Fall, wenn etwa zwei Exponenten rein imaginär, der dritte complex (mit ungradzahligem reellen Theile) ist. Auf diese Fälle wollen wir nicht erst näher eingehen. Nur solche Fundamentalbereiche, für welche *zwei der Exponenten, etwa μ und ν, rein imaginär sind, während der dritte λ, gleich 1 ist, sowie alle mit denselben arithmetisch verwandten Bereiche* (für die also stets der Exponent λ eine ganze Zahl ist) erfordern noch eine besondere Beachtung, zumal wir sogleich in den folgenden Paragraphen auf sie zurückkommen werden. Die zum Vergleich heranzuziehenden Figuren des § 26 der Beiträge werden eben für diesen Ausnahmefall zu unbrauchbaren Bereichen ausarten.

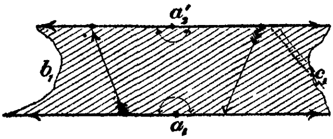
Um auch für diesen speciellen Fall die Construction der Fundamentalbereiche vollständig zu erledigen, wird man zweckmässig vorerst eine Tabelle aller mit dem Exponententripel $\lambda_0 = 1$, $\mu_0 = i\mu''$, $\nu_0 = i\nu''$ arithmetisch verwandten reducirten Tripel aufstellen. Man findet, dass es deren insgesammt 25 giebt**). Die ihnen entsprechenden Funda-

---

*) Wir wollen zwei Bereiche dann „arithmetisch mit einander verwandt“ nennen, wenn ihre Exponenten sich um ganze Zahlen unterscheiden, deren Summe gerade ist. Wir kommen im § 7 hierauf noch genauer zu sprechen.

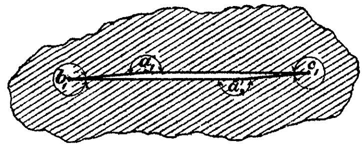
**) Diese Anzahl ergiebt sich deswegen grösser als im Falle dreier beliebiger Exponenten, weil man in der Tabelle der Beiträge § 16 für die Exponenten $i\mu''$ und $i\nu''$ beide Vorzeichen zu berücksichtigen hat, also z. B. neben dem Tripel $\lambda = 1$, $\mu = 1 + i\mu''$, $\nu = 1 + i\nu''$ auch $\lambda = 1$, $\mu = 1 - i\mu''$, $\nu = 1 - i\nu''$ vorkommt.

mentalbereiche lassen sich dann leicht zeichnen; ich will mich darauf beschränken, die 5 charakteristischen Gestalten, welche hier vorkommen, in folgenden Figuren 3, a—e zusammenzustellen*). Von diesen reducirten Bereichen zu der Gesammtheit aller erweiterten Bereiche



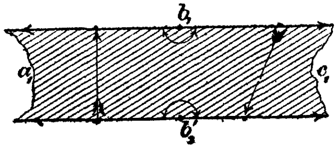
$\lambda = 1,\ \mu = i\mu_0'',\ \nu = i\nu_0''.$

a)



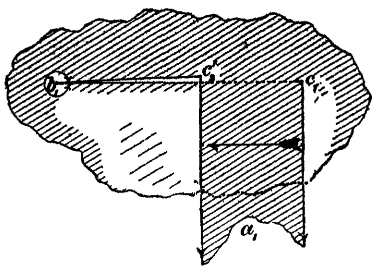
$\lambda = 1,\ \mu = 1 - i\mu_0'',\ \nu = 1 - i\nu_0''.$

b)



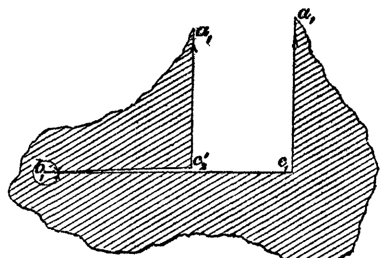
$\lambda = 0,\ \mu = 1 - i\mu_0'',\ \nu = i\nu_0''.$

c)



$\lambda = 0,\ \mu = 1 - i\mu_0'',\ \nu = 2 + i\nu_0''.$

d)



$\lambda = 0,\ \mu = 1 - i\mu_0'',\ \nu = 1 + i\nu_0''.$

e)

Fig. 3, a)—e).

aufzusteigen, bietet keine Schwierigkeit. Man bemerkt, dass wieder die Gesammtheit aller Bereiche sich in 2 Gruppen sondert, denen entweder der Kern $c, 1$ (Fig. 3a, b) oder der Kern $c, 2$ (Fig. 3c, d, e) des § 12 der Beiträge zu Grunde liegt. Es zeigt sich zugleich, wie man unmittelbar aus den Figuren ablesen kann, dass der Kern $c, 1$ dem Fundamentalbereich zugehört, d. h. *dass der ganzzahlige Exponent* λ *eine identische Substitution darstellt, wenn* $\lambda - \mu \pm \nu = 2n + 1$ (*für* $\mu' > \nu'$) *ist. Ist aber diese Bedingung nicht erfüllt, so kommt*

*) In den Figuren 3a und 3c sind natürlich die hyperbolischen Zipfel in bekannter Weise umgewandelt zu denken. Doch sind die Figuren in dieser Form in Rücksicht auf die sich aufbauenden verwandten Bereiche gezeichnet worden.

der Kern c, 2 zur Anwendung, d. h. die Substitution A *hat parabolischen Charakter.*

Hiermit sind die Betrachtungen, welche sich auf die Construction der Fundamentalbereiche beziehen, zum definitiven, befriedigenden Abschluss geführt. Das allgemein erreichte Resultat fassen wir nochmals in dem Satze zusammen:

Für jede beliebige Auswahl der Exponenten λ, μ, ν, mag der einzelne Exponent ganzzahlig, rein imaginär, reell oder complex sein, und mag im besonderen die Bedingung $\pm\lambda\pm\mu\pm\nu=2n+1$ erfüllt sein oder nicht, stets lässt sich der Fundamentalbereich der zugehörigen Schwarz'schen s-Function in der Gestalt eines Kreisbogenvierecks wirklich geometrisch construiren.

§ 6.

Allgemeines Criterium für das Auftreten parabolischer oder identischer Ecken.

Wir wollen jetzt noch dem Falle, dass einer oder mehrere Exponenten ganzzahlig sind, eine zusammenfassende Betrachtung widmen. Die Construction der bezüglichen Fundamentalbereiche ist ja freilich völlig erledigt; doch interessirt es, von vorneherein allgemein angeben zu können, *ob der einem ganzzahligen Exponenten entsprechenden Ecke des Bereiches eine identische oder eine parabolische Substitution angehört.*

Wir hatten bereits wiederholt bei speciellen Bereichen Gelegenheit, uns diese Frage vorzulegen und fanden stets das folgende Criterium bestätigt:

Ist $\lambda-\mu\pm\nu=2n+1$, für $\mu'\geqq\nu'$, so besitzt die dem Exponenten λ zugehörige Substitution nothwendig identischen Charakter, d. h. die entsprechende Ecke des Fundamentalbereiches wird von zwei Bogenstücken desselben Kreises gebildet. Hierbei ist natürlich nothwendig, wenn diese Ecke verdoppelt auftreten sollte, ihre beiden Theile durch einfache erlaubte Abänderung des Bereiches vereinigt zu denken.

Ist dagegen diese Bedingung nicht erfüllt, so besitzt die betreffende Substitution nothwendig parabolischen Charakter, d. h. die entsprechende einfache Ecke wird von zwei sich berührenden Kreisbogen gebildet.

Wir wollen jetzt nachweisen, dass dieses Criterium völlig allgemeine Gültigkeit besitzt.

Der Fall, dass *alle drei Exponenten ganzzahlig* sind, ist in diesem Sinne bereits im § 17 der Beiträge erledigt worden.

Sind ferner *nur zwei Exponenten, etwa λ und μ, ganzzahlig*, der dritte ν beliebig complex, so zeigt die Betrachtung des Kernes der drei Geraden I, II, III, dass den Exponenten λ und μ zwei identische

Substitutionen ebensowenig entsprechen können wie je eine identische und eine parabolische Substitution. Denn gemäss der Gleichung $\mathsf{AB\Gamma} = 1$ müsste die dritte Substitution im ersteren Falle auch die Identität darstellen, im letzteren dagegen der parabolischen Substitution invers sein, d. h. der ihr entsprechende Exponent ν müsste ebenfalls ganzzahlig sein, was ausgeschlossen ist. *Sind daher nur 2 Exponenten ganzzahlig, so besitzen die ihnen zugehörigen Substitutionen stets parabolischen Charakter.* Man erkennt aus diesem Satze unmittelbar, dass also auch hier das obige Criterium erfüllt ist.

Kaum umständlicher zu betrachten ist jetzt der Fall, dass *nur ein Exponent, etwa λ, ganzzahlig ist*, wenn wir beachten, dass gerade diejenigen Werthetripel, die eine besondere Untersuchung erfordern würden, bereits vorweg erledigt sind. Mit letzteren gemeint sind eben alle Exponententripel, welche der Bedingung $\pm\lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$ genügen. Es zeigte sich für sie stets das oben aufgestellte Criterium bestätigt, mögen die nicht ganzzahligen Exponenten μ und ν ihrerseits reell, rein imaginär oder beliebig complex sein. Nun können wir leicht für allgemeine Exponententripel folgendermassen schliessen: Gehört etwa der ganzzahlige Exponent λ zu einer Identität, so müssen die beiden anderen Substitutionen (bis auf volle Umdrehungen) nothwendig zu einander invers sein, d. h. ihre Axen müssen zusammenfallen. Dann aber gilt $\pm\lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$ und der Exponent λ muss auch der Bedingung $\lambda - \mu \pm \nu = 2n + 1$ (für $(\mu' > \nu')$ genügen. Entspricht aber andererseits dem ganzzahligen Exponenten λ eine parabolische Substitution, so kann die Bedingung $\lambda - \mu \pm \nu = 2n + 1$ (für $\mu' > \nu'$) gewiss nicht gelten. Denn sonst würde ja gerade wieder der charakteristische Ausnahmefall $\pm\lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$ vorliegen, für welchen das Nichtbestehen der genannten Bedingung erwiesen ist, was einen Widerspruch involvirt. Unser Schlussergebniss ist daher, dass in der That das eben aufgestellte Criterium für beliebige Exponententripel ausnahmslose Gültigkeit besitzt.

§ 7.

Allgemeines Criterium für die Verwandtschaft der Fundamentalbereiche.

Bei der Construction der Fundamentalbereiche haben wir insbesondere stets auch auf die Verwandtschaft derselben Rücksicht genommen. Es zeigt sich wünschenswerth, nochmals im Zusammenhange diese Verhältnisse zu beleuchten, zumal beim Bestehen der Bedingung $\pm\lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$, wie Herr Klein in seiner Vorlesung über die hypergeometrische Function*) bemerkt, die von Riemann gegebene analytische Definition der Verwandtschaft nicht ausreicht.

*) Wintersemester 1893/94. Vgl. das Selbstreferat Ann. Bd. 45, pag. 151.

Als allgemeine Bedingung für die Verwandtschaft zweier Fundamentalbereiche gilt, *dass die zugehörigen Functionen in zweckmässig ausgewählten Zweigen dieselbe Gruppe von Substitutionen erleiden, wenn die unabhängige Variable z beliebige Umläufe um die singulären Punkte ihrer Ebene macht.* Bei der geometrischen Uebertragung dieser Forderung auf unsere Fundamentalbereiche ergiebt sich zunächst als nothwendig, dass diese demselben Kern angehören, und demnach die Exponenten sich um ganze Zahlen von gerader Summe unterscheiden müssen. Doch ist, wie wir jetzt zeigen wollen, dieses Criterium eben nur in dem Falle zugleich auch hinreichend, wenn die Bedingung $\pm\lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$ nicht erfüllt ist.

Der bequemeren Ausdrucksweise wegen wollen wir alle Bereiche, deren Exponenten sich um ganze Zahlen von gerader Summe unterscheiden, als „*arithmetisch mit einander verwandt*“ bezeichnen, solche, welche zugleich dieselbe Monodromiegruppe besitzen, dagegen als „*functionentheoretisch verwandt*“.

Wir denken die singulären Punkte a, b, c in der Reihenfolge, wie es die Figur 4 zeigt, auf der Axe der reellen Zahlen in der z-Ebene

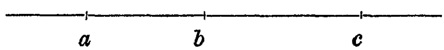


Fig. 4.

gelegen. Wie leicht zu übersehen ist, verlangt dann die charakteristische Bedingung $\mathsf{AB\Gamma} = 1$ folgendes: Wenn wir unsere Fundamentalvierecke umlaufen denken, indem wir die Fläche linker Hand lassen, so müssen die Ecken in der cyklischen Reihenfolge $a_1 c_1 b_1 c_2'$ (bezw. bei Verdoppelung einer anderen Ecke $c_1 b_1 a_1 b_2'$ oder $b_1 a_1 c_1 a_2'$) auf einander folgen, woselbst $a_1 b_1 c_1$ als Fixpunkte der Substitutionen A, B, $\mathsf{\Gamma}$ anzusehen sind.

Für ein allgemeines Werthetripel λ, μ, ν nun, welches der Bedingung $\pm\lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$ nicht genügt, haben gewiss die drei Geraden des Kernes unter sich keinen Fixpunkt gemein. Als unmittelbare Folge ergiebt sich hieraus, dass jedem Fundamentalbereich eines solchen Kernes ein zweiter entspricht, welcher die complementäre Auswahl der drei Fixpunkte als Ecken besitzt. Beide aber sind durch eine geeignete Substitution, nämlich eine Umklappung um eine der Geraden 1, 2, 3, in einander überzuführen. Dies aber besagt, dass wir der soeben gefundenen Aufeinanderfolge der Eckpunkte des Bereiches stets gerecht werden können, dass also mit anderen Worten alle mit einem Fundamentalbereiche eines solchen Kernes arithmetisch verwandten Bereiche zugleich auch functionentheoretisch verwandt sind.

Anders aber ist es, falls die Bedingung $\pm\lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$ erfüllt ist. Indem jetzt die drei Geraden des Kernes einen Fixpunkt gemeinsam haben, wissen wir, dass dann jeder beliebig gegebene Bereich eines solchen Kernes ausartet und unbrauchbar wird, falls wir verlangen, dass an Stelle der drei ihm als Ecken angehörenden Fixpunkte die complementären Fixpunkte des Kernes als Ecken auftreten sollen. Die Fundamentalbereiche desselben Kernes werden sich daher auf zwei verschiedene functionentheoretische Verwandtschaften vertheilen. Indem wir auf diesen Ausnahmefall jetzt näher eingehen, seien ganzzahlige Exponenten zunächst ausgeschlossen. Um dann das analytische Criterium für die functionentheoretische Verwandtschaft der Bereiche abzuleiten, brauchen wir nur die uns gezeichnet vorliegenden Bereiche nochmals zu überblicken. Wir wollen im einzelnen dies nicht näher ausführen; wir werden finden, dass die Gesammtheit der arithmetisch mit einander verwandten Bereiche sich auf zwei verschiedene Gruppen functionentheoretischer Verwandtschaften vertheilt, die sich folgendermassen am einfachsten umgränzen lassen: Wir bezeichnen mit λ_0, μ_0, ν_0 dasjenige Exponententripel der arithmetischen Verwandtschaft, für welches $\lambda_0 + \mu_0 + \nu_0 = 1$ gilt und jeder Exponent in seinem positiv zu wählenden reellen Theile kleiner als 1 ist, und denken die arithmetisch verwandten Exponententripel stets in der Form $\lambda = \lambda_0 \pm p$, $\mu = \mu_0 \pm q$, $\nu = \nu_0 \pm r$ geschrieben, wo p, q, r beliebige positive ganze Zahlen sind. *Für die Exponententripel der ersten Gruppe aller mit einander functionentheoretisch verwandten Bereiche wird dann* $(\lambda_0 \pm p) + (\mu_0 \pm q) + (\nu_0 \pm r)$ *gleich einer ungeraden positiven Zahl, für die Exponententripel der zweiten Gruppe dagegen gleich einer ungeraden negativen Zahl sein**). (Für den symmetrischen Fall der geradlinigen Dreiecke besagt dieses Resultat, dass die zu zwei Dreiecken desselben Kernes gehörenden Bereiche dann functionentheoretisch verwandt sein werden, wenn die den singulären Punkten a, b, c entsprechenden Ecken der Dreiecke bei gleicher Umlaufung in demselben Sinne auf einander folgen. Die eine Gruppe der Dreiecke wird natürlich stets die positive, die andere die negative Halbebene des Argumentes abbilden).

Nun wollen wir noch ein Wort hinzufügen, falls neben der Bedingung $\pm\lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$ alle drei Exponenten oder einer derselben einen ganzzahligen Werth besitzt.

Sind alle drei Exponenten ganzzahlig (von ungerader Summe), so

---

*) Man vergleiche die Bemerkung von Frl. Winston in diesen Annalen Bd. 46, pag. 159—160. Das dort gegebene Criterium ist leicht mit dem unsrigen in Uebereinstimmung zu bringen, wenn man bedenkt, dass $\alpha_0' + \beta_0' + \gamma_0' = 1$ und $\alpha_0'' + \beta_0'' + \gamma_0'' = 0$ zu setzen ist und die Beziehungen gelten
$$(\alpha' + \beta' + \gamma') + (\alpha'' + \beta'' + \gamma'') = 1$$
und
$$(\alpha' + \beta' + \gamma') - (\alpha'' + \beta'' + \gamma'') = (\lambda_0 \pm p) + (\mu_0 \pm q) + (\nu_0 \pm r).$$

vertheilen sich alle diese mit einander arithmetisch verwandten Bereiche auf 4 Gruppen functionentheoretischer Verwandtschaften, je nachdem alle drei Exponenten oder nur je einer derselben zu einer identischen Substitution gehört. Des Näheren sehe man, was bereits im § 17 der Beiträge unter a, 2 gesagt ist.

Ist endlich nur ein Exponent, etwa λ, *ganzzahlig,* so haben wir die Figuren des allgemeinen Falles § 26 der Beiträge, sowie des am Schlusse des § 5 dieser Arbeit behandelten Specialfalles in Rücksicht zu ziehen. Ich will mich wieder darauf beschränken, das für beide gleichmässig gültige Resultat auszuführen:

Die Gesammtheit aller mit einander arithmetisch verwandten Bereiche vertheilt sich stets auf drei Gruppen functionentheoretischer Verwandtschaften. Von diesen ist die eine dadurch charakterisirt, dass die dem Exponenten λ *zugehörige Ecke einer identischen Substitution zugehört; als Bedingung hierfür gilt nach* § 6 $\lambda - \mu \pm \nu = 2n + 1$ *(für* $\mu' > \nu'$*); für die beiden anderen Gruppen dagegen, für welche die Substitution* A *parabolischen Charakter besitzt, gilt in unveränderter Form das obige allgemeine Criterium der Bereiche* $\pm \lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$, *indem wir als bevorzugtes Exponententripel im allgemeinen Falle des* § 26 *der Beiträge* $\lambda_0 = 0$, μ_0, ν_0 *mit der Bedingung* $\mu_0' < 1$, $\nu_0' < 1$ *und* $\mu_0 + \nu_0 = 1$, *im Specialfall des* § 5 $\lambda_0 = 0$, $\mu_0 = 1 - i\mu''$, $\nu_0 = i\nu''$ *mit der Bedingung* $\mu'' = \nu''$ *wählen.*

Schlussbemerkung.

Hiermit hat die geometrische Theorie der Schwarz'schen s-Function ihren Abschluss gefunden und kann nun ihrerseits als Grundlage für den independenten Aufbau der ganzen Theorie dieser Functionsclasse dienen. — Wir verlangen nach dem Programm Riemann's Functionen zu studiren, die in der Ebene des Argumentes drei singuläre Punkte besitzen, bei deren Umlaufung jene lineare Substitutionen A, B, Γ mit der Bedingung $\mathsf{A}\mathsf{B}\Gamma = 1$ erleiden. Die Existenz dieser Functionen wird durch unsere Fundamentalbereiche nachgewiesen; insbesondere ist im Falle eines ganzzahligen Exponenten zugleich ausgesprochen, ob demselben eine identische oder eine parabolische Substitution zuzuordnen ist. —

Dass jetzt, wo die Betrachtungen bis zu Ende durchgeführt sind, diese oder jene Anordnung im Rahmen des Ganzen vielleicht übersichtlicher durchführbar sein mag, liegt auf der Hand, und man wolle etwaige Mängel in dieser Hinsicht, die eine erneute Darstellung der Theorie vermeiden würde, mit Nachsicht hinnehmen.

Göttingen, Anfang Januar 1895.

Verallgemeinerung zweier Sätze aus der Theorie der Substitutionengruppen.

Von

P. Hoyer in Schnepfenthal b. Waltershausen.

In der Theorie der Substitutionengruppen finden zwei Sätze vielfache Anwendung, die aus dem Vorkommen gewisser Circularsubstitutionen in einer Gruppe darauf zu schliessen gestatten, dass die Gruppe symmetrisch oder alternirend ist. Diese beiden Sätze sind:

I. Enthält eine Gruppe der Elemente $x_1 \dots x_n$ die Transpositionen $(x_1 x_2)$, $(x_1 x_3) \dots (x_1 x_n)$, so ist sie symmetrisch.

II. Enthält eine Gruppe der Elemente $x_1 \dots x_n$ die Circularsubstitutionen $(x_1 x_2 x_3)$, $(x_1 x_2 x_4) \dots (x_1 x_2 x_n)$, so ist sie symmetrisch oder alternirend (sie enthält die alternirende Gruppe).

Von diesen beiden Sätzen werde ich mir im Folgenden eine Verallgemeinerung mitzutheilen erlauben, welche mittelst eines der Theorie des Zusammenhanges in Reihen angehörenden Begriffes möglich ist.

Es bezeichne (s. meine Abhandl. d. Ann. Bd. 42)

$$A_1, A_2, \dots A_n$$

eine transitive Reihe, die so geordnet vorausgesetzt werde, dass jedes Glied A_k mit der Reihe der vorangehenden $A_1 \dots A_{k-1}$ wenigstens einen Buchstaben gemeinsam hat. Finden sich die sämmtlichen Buchstaben von A_k auch in $A_1 \dots A_{k-1}$ vor, so wird man durch Fortlassen von A_k aus der Reihe $A_1 \dots A_n$ eine Reihe $A_1 \dots A_{k-1} A_{k+1} \dots A_n$ erhalten, die wieder transitiv ist und die sämmtlichen verschiedenen Buchstaben von $A_1 \dots A_n$ enthält. Sind umgekehrt alle verschiedenen Buchstaben von $A_1 \dots A_{k-1}$ enthalten in A_k, so kann man mit dem gleichen Erfolge $A_1 \dots A_{k-1}$ aus der Reihe fortlassen. Verstehen wir nun unter dem „*Reduciren*" einer beliebigen Reihe jedes Fortlassen von Gliedern derselben, durch deren Fortfall weder die Anzahl der transitiven Gruppen vermehrt, noch die Anzahl der verschiedenen Buchstaben vermindert wird (sodass also beide Anzahlen für die neue Reihe den respectiven Anzahlen für die ursprüngliche gleich sind), so werden wir unter einer „*irreductibeln Reihe*“ eine solche zu verstehen haben, aus der man kein Glied fortlassen kann, ohne die Anzahl der transitiven Gruppen zu vermehren, oder die Anzahl der verschiedenen Buchstaben zu vermindern. Ist eine irreductible Reihe transitiv und wird dieselbe in der soeben angegebenen Weise geordnet, sodass also jedes Glied mit der Reihe der vorangehenden wenigstens einen Buchstaben gemeinsam hat, so kann in keiner solchen Anordnung, wie aus dem Vorstehenden folgt, ein Glied auftreten, dessen Buchstaben sämmtlich bereits unter den Buchstaben der vorangehenden Glieder enthalten sind, oder unter dessen Buchstaben sich alle verschiedenen Buchstaben der vorangehenden Glieder wieder vorfinden. Umgekehrt, wenn ein derartiges Glied bei keiner solchen Anordnung einer transitiven Reihe auftritt, so ist die Reihe auch irreductibel.

Endlich möge noch, um eine kurze Ausdrucksweise zu ermöglichen, eine Reihe als „*k-stufig*“ oder als „*Reihe k^{ter} Stufe*“ bezeichnet werden, wenn die kleinste (von Null verschiedene) Anzahl der Buchstaben, welche zweien Gliedern der Reihe gemeinsam sind, gleich k ist. Eine k-stufige Reihe enthält also nur Glieder mit k, $k+1$ u. s. w. gemeinsamen Buchstaben, ausser solchen Gliedern, die keinen Buchstaben gemeinsam haben und die in der Reihe vorkommen oder fehlen können.

Uebertragen wir nun, wenn eine Reihe von Circularsubstitutionen $(A_1), (A_2), \dots (A_n)$ gegeben ist, die für die Reihe der Cyklen $A_1, A_2, \dots A_n$ geltenden Bezeichnungen auf die Reihe der Circularsubstitutionen, so können wir den in Rede stehenden Satz, welcher die Verallgemeinerung der obigen beiden Sätze bildet, in folgender Weise aussprechen:

Finden sich sämmtliche Buchstaben einer Gruppe in einer transitiven, irreductibeln Reihe von Circularsubstitutionen der Gruppe vor, so enthält die Gruppe die alternirende, wenn die Reihe dieser Circularsubstitutionen einstufig ist, oder wenn dieselbe eine Circularsubstitution dritter Ordnung enthält.

Ein specieller Fall dieses Satzes ist der, dass die sämmtlichen Buchstaben der Gruppe in einer transitiven, einfach zusammenhängenden Reihe von Circularsubstitutionen von wenigstens zwei Gliedern enthalten sind. Denn eine einfach zusammenhängende Reihe ist stets irreductibel und, sofern sie transitiv ist und mehr als ein Glied enthält, auch einstufig. Darin als specieller Fall enthalten ist aber der obige Satz I, denn die Reihe der Transpositionen $(x_1 x_2), (x_2 x_3) \dots (x_1 x_n)$ ist einfach zusammenhängend und transitiv, und die Gruppe muss natürlich symmetrisch sein, weil sie Transpositionen enthält. Ebenso aber ist Satz II als specieller Fall in unserm Satze enthalten, denn die Reihe $(x_1 x_2 x_3), (x_1 x_2 x_4) \dots (x_1 x_2 x_n)$ ist transitiv, irreductibel und enthält Circularsubstitutionen dritter Ordnung.

Zum Beweise des Satzes bedürfen wir zweier Hilfssätze, die wir jetzt ableiten wollen.

Hilfssatz I. Eine Gruppe, welche durch zwei Circularsubstitutionen mit einem und nur einem gemeinsamen Buchstaben bestimmt ist, ist symmetrisch oder alternirend.

Sind

$$S_1 = (x_{-k}, x_{-k+1} \ldots x_{-1} x_0),$$
$$S_2 = (x_0 x_1 \ldots x_l)$$

die beiden Circularsubstitutionen, so enthält die Gruppe die durch $S_2^\alpha (\alpha = 1 \ldots l)$ transformirte von S_1, welche gleich ist mit

$$(x_0 x_\alpha) S_1 (x_0 x_\alpha) = S_1 (x_{-1} x_\alpha)(x_0 x_\alpha).$$

Mithin enthält die Gruppe auch, wie durch Multiplication der erhaltenen Substitution mit S_1^{-1} folgt, die Circularsubstitution $(x_0 x_{-1} x_\alpha)$ $(\alpha = 1 \ldots l)$, also die alternirende Gruppe von $x_{-1}, x_0, x_1 \ldots x_l$. Ebenso folgt, dass die Gruppe die alternirende Gruppe von $x_{-k}, x_{-k+1} \ldots x_{-1}, x_0, x_l$ enthalten muss, sie enthält also die Circularsubstitutionen

$$(x_{-1} x_0 x_\alpha) \; (\alpha = 1 \ldots l, -2, -3 \ldots -k)$$

und folglich die alternirende Gruppe sämmtlicher Elemente.

Hilfssatz II. Verbindet man mit einer Gruppe G_1, welche die alternirende Gruppe ihrer sämmtlichen Elemente enthält, eine Circularsubstitution S, welche einige, aber nicht alle Elemente der Gruppe enthält, so enthält die entstehende Gruppe G_2 wieder die alternirende Gruppe sämmtlicher Elemente.

Es sei $S = (x_0 x_1 \ldots x_l)$. Wir nehmen zunächst an, S habe mit G_1 nur einen Buchstaben x_0 gemeinsam. Dann enthält G_1 entweder eine Transposition $(x_0 y)$, oder eine Circularsubstitution $(x_0 y z)$, wo y, z zwei beliebige Buchstaben der Gruppe G_1 sind*). Wie durch Transformation mit den Potenzen von S_1 folgt, enthält mithin die Gruppe G_2 die Transpositionen $(x_\alpha y)$, oder die Circularsubstitutionen $(x_\alpha y, z)$ $(\alpha = 0 \ldots l)$. Enthält G_1 nur die beiden Elemente x_0, y, so wird daher G_2 die symmetrische Gruppe der Elemente $x_0 \ldots x_l y$. Enthält G_1 die Elemente $x_0 y_1 \ldots y_k$, so folgt, dass G_2 die alternirende Gruppe der Elemente $x_0 \ldots x_l y_1 y_\alpha$ $(\alpha > 1)$ enthält. Mithin enthält G_2 die Circularsubstitutionen $(x_l y_1 x_\alpha)$ $(\alpha = 0, 1 \ldots l-1)$ und $(x_l y_1 y_\alpha)$ $(\alpha = 2 \ldots k)$, und G_2 enthält folglich die alternirende Gruppe sämmtlicher Elemente. Hat S mit G_1 mehr als einen Buchstaben gemeinsam, so mögen x_0, x_α zwei dieser Buchstaben sein. Dann enthält G_1 wenigstens einen Buchstaben y, der sich nicht in S findet, und die Circularsubstitution $(x_0 x_\alpha y)$. Wird diese durch $S^\beta (\beta = 1 \ldots l)$ transformirt, so ergiebt sich $(x_\beta x_{\alpha+\beta} y)$. Ist keine der Zahlen $\beta, \alpha + \beta$

*) Natürlich setzen wir voraus, dass G_1 sich nicht auf die Identität reducirt.

congruent 0 oder α mod $(l+1)$, also β eine der Zahlen $1 \ldots l$ mit Ausnahme von α und $l+1-\alpha$, so ergiebt die Transformation von $(x_\beta x_{\alpha+\beta} y)$ durch $(x_0 x_\alpha y)$ die Circularsubstitution $(x_\beta x_{\alpha+\beta} x_0)$. Wird diese durch $S^{-\beta}$ transformirt, so erhält man $(x_0 x_\alpha x_{l+1-\beta})$. Somit enthält G_2 die Circularsubstitutionen $(x_0 x_\alpha y)$ und $(x_0 x_\alpha x_\gamma)$, wo γ jede der Zahlen $1 \ldots l$ sein kann mit Ausnahme von $l+1-\alpha$ und α. Ist $l+1-\alpha = \alpha$, so folgt hieraus, dass G_2 die alternirende Gruppe der Elemente $x_0 x_1 \ldots x_l\, y$ enthält. Ist $l+1-\alpha \gtrless \alpha$, so folgt, dass G_2 die alternirende Gruppe der Elemente $x_0 \ldots x_{\gamma_1-1} x_{\gamma_1+1} \ldots x_l y$ enthält, wo $\gamma_1 = l+1-\alpha$ gesetzt ist. Ist ausserdem $l > 2$, so ist entweder $l-1$, oder $l-2$ eine gerade, von Null verschiedene Zahl, und G_2 enthält daher im ersten Falle die Circularsubstitution

$$S_1 = (x_{\gamma_1+1} \ldots x_l x_0 \ldots x_{\gamma_1-1}),$$

im zweiten die Circularsubstitution

$$S_2 = (x_{\gamma_1+1} \ldots x_l x_0 \ldots x_{\gamma_1-2}),$$

oder wenn $\gamma_1 = 1$ ist, die Circularsubstitution $S_3 = (x_2 x_3 \ldots x_l)$. Im ersten Falle folgt durch Multiplication von S mit S_1^{-1}, dass G_2 die Circularsubstitution $(x_{\gamma_1-1} x_{\gamma_1})$ enthält, mithin enthält G_2 die alternirende Gruppe der Elemente $x_0 \ldots x_l y$, weil $(x_{\gamma_1-1} x_{\gamma_1})$ mit der alternirenden Gruppe der Elemente $x_0 \ldots x_{\gamma_1-1} x_{\gamma_1+1} \ldots x_l y$ nur den einen Buchstaben x_{γ_1-1} gemeinsam hat. Im zweiten Falle folgt durch Multiplication von S mit S_2^{-1} oder S_3^{-1}, dass G_2 die Circularsubstitution $(x_{\gamma_1-2} x_{\gamma_1-1} x_{\gamma_1})$ oder $(x_l x_0 x_1)$ enthält. G_2 enthält daher ausser $(x_{\gamma_1-2} x_{\gamma_1-1} y)$ oder $(x_l x_0 y)$ noch die Circularsubstitutionen $(x_{\gamma_1-2} x_{\gamma_1-1} x_\gamma)$ wo γ jede der Zahlen $0, 1, \ldots l$ ausser γ_1-2, γ_1-1 sein kann, oder die Circularsubstitutionen $(x_l x_0 x_\gamma)$ $(\gamma = 1 \ldots l-1)$, und es folgt wieder, dass G_2 die alternirende Gruppe der Elemente $x_0 \ldots x_l y$ enthält. Das Gleiche ergiebt sich für den Fall $l = 2$ unmittelbar aus der Existenz der beiden Circularsubstitutionen $(x_0 x_\alpha y)$, wo $\alpha = 1$ oder $= 2$ ist, und $(x_0 x_1 x_2)$. Für den Fall $l = 1$ enthält G_2 die symmetrische Gruppe der Elemente x_0, x_1, y. Sind also $y_1 \ldots y_k$ die nicht in S enthaltenen Elemente von G_1, so enthält G_2 die alternirende Gruppe der Elemente $x_0 \ldots x_l y_\alpha$, wo α jede der Zahlen $1 \ldots k$ sein kann. Somit enthält G_2 die Circularsubstitutionen $(x_0 x_1 x_\alpha)$ $(\alpha = 2 \ldots l)$ und $(x_0 x_1 y_\beta)$ $(\beta = 1 \ldots k)$, oder doch, wenn $l = 1$ ist, die Circularsubstitutionen $(x_0 x_1 y_\beta)$ $(\beta = 1 \ldots k)$, jedenfalls also die alternirende Gruppe sämmtlicher Elemente $x_0 \ldots x_l$ $y_1 \ldots y_k$.

Es möge nun eine Gruppe G eine transitive Reihe von Circularsubstitutionen $(A_1), (A_2) \ldots (A_n)$ enthalten. Ordnen wir diese Reihe so, dass jedes Glied mit der Reihe der vorangehenden wenigstens einen Buchstaben gemeinsam hat, so können wir bei dieser Anordnung ein beliebiges Glied, oder zwei beliebige Glieder mit wenigstens einem gemeinsamen Buchstaben an die Spitze stellen. Enthält daher die Reihe eine Circularsubstitution dritter Ordnung, so dürfen wir voraussetzen, dass (A_1) diese Circularsubstitution ist, und ist die Reihe einstufig, so werden wir voraussetzen dürfen, dass (A_1) und (A_2) einen einzigen Buchstaben gemeinsam haben. Ist ferner die Reihe irreductibel, so sind die Buchstaben von $A_1 \ldots A_{k-1}$ $(k = 2 \ldots n)$ nicht sämmtlich enthalten in A_k. Ist nun (A_1) von dritter Ordnung, so enthält die durch (A_1) bestimmte Gruppe die alternirende Gruppe der Elemente von (A_1). Zufolge Hilfssatz II enthält dann die durch (A_1), (A_2) bestimmte Gruppe die alternirende Gruppe der Elemente von (A_1), (A_2), nach demselben Satze die durch (A_1), (A_2), (A_3) bestimmte Gruppe die alternirende Gruppe der Elemente von (A_1), (A_2), (A_3) u. s. f., also enthält G die alternirende Gruppe der Elemente von $(A_1) \ldots (A_n)$. Haben (A_1) und (A_2) einen einzigen Buchstaben gemeinsam, so enthält zufolge Hilfssatz I die durch (A_1) und (A_2) bestimmte Gruppe die alternirende der Elemente von (A_1) und (A_2). Zufolge Hilfssatz II enthält daher die durch (A_1), (A_2), (A_3) bestimmte Gruppe die alternirende der Elemente von (A_1), (A_2), (A_3), die durch $(A_1) \ldots (A_4)$ bestimmte Gruppe die alternirende der Elemente von $(A_1) \ldots (A_4)$ u. s. f., also wiederum G die alternirende Gruppe der Elemente von $(A_1) \ldots (A_n)$. Mithin enthält G die alternirende Gruppe sämmtlicher Elemente, wenn $(A_1) \ldots (A_n)$ sämmtliche Elemente von G umfasst und entweder eine Circularsubstitution dritter Ordnung enthält, oder einstufig ist. Damit ist der obige Satz bewiesen.

Bildet man also alle Gruppen, deren jede die Substitutionen einer transitiven, irreductibeln Reihe R von Circularsubstitutionen als erzeugende Substitutionen besitzt, so wird jede solche Gruppe symmetrisch oder alternirend, wenn die Reihe R eine Circularsubstitution dritter Ordnung besitzt, oder einstufig ist. *Unter denjenigen Gruppen, für welche die Reihe R von einer höheren Stufe ist, giebt es aber auch stets solche, welche von der symmetrischen und alternirenden Gruppe verschieden sind*, sodass die erste Stufe die *einzige* ist, deren Reihen *sämmtlich* symmetrischen oder alternirenden Gruppen Entstehung geben. Um dies einzusehen, genügt es, die durch die beiden Circularsubstitutionen

$$(A_1) = (x_1 y_1 x_2 y_2 \ldots x_k y_k)$$

und

$$(A_2) = (x_1 z_1 x_2 z_2 \ldots x_k z_k)$$

bestimmte Gruppe als Beispiel anzuführen, welche imprimitiv ist und die drei Systeme der Imprimitivität $x_1 \ldots x_k$, $y_1 \ldots y_k$, $z_1 \ldots z_k$ enthält. Die Reihe (A_1), (A_2) ist transitiv, irreductibel und von

k^{ter} Stufe. In die Classe der Gruppen, welche durch eine transitive, irreductible Reihe von Circularsubstitutionen bestimmt sind, gehört endlich auch die Gruppe vom Grade 6 und der Ordnung 120, welche nicht mit der symmetrischen Gruppe vom Grade 5 identisch ist, und welche man durch eine transitive, irreductible Reihe dritter Stufe von drei Circularsubstitutionen vierter Ordnung bestimmen kann.

Schnepfenthal, Januar 1895.

Note über die Siebensysteme von Kegelschnitten, welche durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten einer ebenen Curve vierter Ordnung gehen.*)

Von

M. Noether in Erlangen.

Für die 315 Kegelschnitte, welche eine Curve vierter Ordnung in den Berührungspunkten von vier ihrer Doppeltangenten treffen, hat O. Hesse zuerst angegeben (Crelle's J. Bd. 40, S. 260), dass man aus ihnen 7-Systeme bilden kann, die je durch die Berührungspunkte aller 28 Doppeltangenten hindurchgehen; und ein specielles solches System wird von ihm (Cr. J. Bd. 49, S. 332) und eines von Salmon (Higher plane curves, 1. Ausg. 1852) mitgetheilt. Auf die von Ersterem gestellte Frage nach *allen* derartigen 7-Systemen bin ich in Bd. 15 dieser Annalen**) soweit eingegangen, dass ich einmal 135 7-Systeme nachwies, welche je zu irreductibeln Gleichungen mit „Tripeleigenschaft" und mit einer Gruppe von 168 Substitutionen gehören; sodann dass ich 315 . 6 und 315 . 18 „uneigentliche" Systeme construirte, in welchen je *einer* der Kegelschnitte ausgezeichnet auftrat. Aus Anlass der von der bayer. Akad. demnächst erfolgenden Herausgabe der gesammelten Abhandlungen Hesse's will ich die Frage hier vollständig beantworten, indem ich alle möglichen 7-Systeme aufstelle und durch ihre, für die Substitutionsgruppe der Doppeltangenten invarianten Eigenschaften charakterisire. Es ergiebt sich insbesondere eine zweite Art von irreductibeln Systemen, welche je auf eine Galois'sche Gleichung 7^{ten} Grades führen, an Zahl 120 . 288; und — eingeschlossen die schon genannten beiden Arten von uneigentlichen Systemen — im Ganzen fünf verschiedene Arten reductibler Systeme.

---

*) Auszugsweise mitgetheilt in den Sitzungsber. der bayer. Akad. vom 9. Febr. 1895.

**) „Ueber die Gleichungen achten Grades und ihr Auftreten in der Theorie der Curven vierter Ordnung."

1. *Bezeichnungen.* Ich bediene mich für die Doppeltangenten (oder „Dtn") der Hesse'schen Bezeichnung (ik), wo die Indices i und k von $1, 2, \ldots 8$ gehen, $k \neq i$ und $(ki) = (ik)$ ist. Von den in Math. Ann. 15 auseinandergesetzten Rechenregeln gebrauche ich hier folgende: Es werden Combinationen zu irgend einer Ordnung μ gebildet: $i_1 k_1 i_2 k_2 \ldots i_\mu k_\mu$, wobei die Anordnung aller Indices gleichgültig ist und zwei gleiche Indices sich gegegenseitig aufheben. Ist μ gerade, so gelangt man hierbei zu den „Steiner'schen Gruppen" (oder: „St. Gn"), von welchen 63 gleichberechtigte $[ik]$, $[iklm] \equiv [i'k'l'm']$, wo $iklmi'k'l'm'$ irgend eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots 8$ vorstellt, existiren; die Combination $[12345678]$ ist hierbei als $\equiv 0$ betrachtet. Ist μ ungerade, so gelangt man zu den 28 obigen Zeichen: (ik), und zu den 36 unter einander gleichberechtigten Zeichen (für Schaaren von Berührungscurven 3ter Ordnung erster Art): $(iklm)$, (12345678).

Irgend eine St. G. $[a]$ lässt sich auf sechs Arten in Paare der Art $i_1 k_1 . i_2 k_2$ zerlegen; und jede der $2 . 6$ entstehenden Dtn $(i_1 k_1), \ldots$ heisst: „in $[a]$ enthalten", insofern eben $a i_1 k_1 \equiv i_2 k_2$ wieder von der Form ik wird. Zwei St. Gn $[a]$, $[b]$ heissen „syzygetisch" (Ausdruck von Frobenius), wenn $[b]$ sich gegen die beiden Dtn eines (und dann eines jeden) Paars von $[a]$ gleichmässig verhält, d. h. beide enthält oder beide nicht enthält. Drei syzygetische St. Gn $[a]$, $[b]$, $[c]$, für welche die Combination $[abc] \equiv 0$, also $[c] \equiv [ab]$ ist, mögen ein „Steiner'sches Tripel" heissen; sie enthalten vier Dtn

$$(i_1 k_1), \quad (i_2 k_2), \quad (i_3 k_3), \quad (i_4 k_4)$$

gemeinsam, für welche die Combination

$$[i_1 k_1 i_2 k_2 i_3 k_3 i_4 k_4] \equiv 0$$

ist, d. h. deren Berührungspunkte auf einem Kegelschnitte

$$\mathfrak{K} = i_1 k_1 . i_2 k_2 . i_3 k_3 . i_4 k_4$$

liegen; und es wird

$$[a] = [i_1 k_1 i_2 k_2], \quad [b] = [i_1 k_1 i_3 k_3], \quad [c] = [i_1 k_1 i_4 k_4].$$

Die 315 gleichberechtigten Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und die 315 gleichberechtigten Steiner'schen Tripel entsprechen einander also ein-eindeutig: zu jedem $\mathfrak{K}$ „gehören" die drei Gruppen des entsprechenden Steiner'schen Tripels.

Die verschiedenen Kegelschnitte und St. Gn lassen sich aus einander ableiten, indem man die Substitutionen der Art $\{ik\}$, $\{iklm\}$, welche die Gruppe der Ordnung $8!\,36$ der Doppeltangentengleichung erzeugen, wiederholt anwendet. Eine solche Substitution $\{a\}$ führt eine Dt. (ik) in (aik) über, oder lässt sie unverändert, je nachdem (ik) in $[a]$ enthalten ist, oder nicht; sie ändert also eine zu $[a]$ syzygetische St. G. $[b]$ nicht, und führt die übrigen St. Gn $[b]$ in $[ab]$ über.

2. *Die beiden Arten von Beziehungen zwischen den Kegelschnitten* $\mathfrak{K}$. Die möglichen Beziehungen zweier Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ gegen einander sind von mir in Math. Ann. 15 gegeben worden, ausführlicher auf demselben Wege von Hrn. Pascal*), der auch die Beziehungen zwischen je dreien der $\mathfrak{K}$ daraus abgeleitet hat. Was davon hier zu benutzen ist, sei zunächst angeführt.

Die Substitutionsgruppe, welche einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ unverändert lässt, besteht aus den 12 . 64 Substitutionen, die durch diejenigen $\{a\}$ erzeugt werden, für welche $[a]$ syzygetisch ist zu den drei zu $\mathfrak{K}$ gehörigen St. Gn, verbunden mit 6 Substitutionen, welche diese drei St. Gn in einander überführen.

Die Gruppirung der Dtn gegenüber einem $\mathfrak{K}$, etwa

$$K = 12\,.\,34\,.\,56\,.\,78,$$

ergiebt sich aus dessen „Zerlegungsschema", welches seinen drei St. Gn entspricht und alle nicht in K vorkommenden Dtn enthält:

$$\begin{aligned}
[1234] &= 13\,.\,24, \quad 14\,.\,23, \quad 57\,.\,68, \quad 58\,.\,67,\\
[1256] &= 15\,.\,26, \quad 16\,.\,25, \quad 37\,.\,48, \quad 38\,.\,47,\\
[1278] &= 17\,.\,28, \quad 18\,.\,27, \quad 35\,.\,46, \quad 36\,.\,45.
\end{aligned}$$

Danach zerfallen die $\mathfrak{K}$, welche keine Dt. mit K gemeinsam haben, in zwei Arten:

1) K', *erster Art gegen* K, in Zeichen $(KK')_1$. Ein K' ist gebildet durch zwei Paare derselben St. G. von K; und solcher K' giebt es 18. Z. B. $K' = 13\,.\,24\,.\,14\,.\,23$.

2) K'', *zweiter Art gegen* K, in Zeichen $(KK'')_2$. Ein K'' entsteht, indem man aus zweien der St. Gn von K je zwei Dtn, von der Gesammtcombination $\equiv 0$, nimmt. Solcher K'' giebt es 144. Z. B. $K'' = 13\,.\,14\,.\,37\,.\,47$.

Vermöge der Substitutionsgruppe von K sind sowohl die 18 K' unter einander, als die 144 K'' unter einander, K gegenüber, gleichwerthig. Die charakterisirende Eigenschaft lässt sich auch so aussprechen:

„Zwei Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$, welche eine Dt. gemeinsam haben, stehen *in Beziehung erster Art* $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1)_1$ oder *zweiter Art* $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1)_2$, je nachdem die beiden zu $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ gehörigen Steiner'schen Tripel eine St. G. gemeinsam haben oder nicht."

Man kann noch hinzufügen, dass für $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1)_1$ die nicht gemeinsamen St. Gn von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ gegeneinander syzygetisch sind; dass aber für $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1)_2$ in $\mathfrak{K}$ eine St. G. ausgezeichnet ist, indem sie gegen alle drei St. Gn von $\mathfrak{K}_1$ syzygetisch ist und keine der vier Dtn von $\mathfrak{K}_1$ enthält, während die übrigen beiden St. Gn von $\mathfrak{K}$ nur gegen *eine* Gruppe von $\mathfrak{K}_1$

*) Rend. d. R. Accad. dei Lincei, 1892, Nr. 11, 12; 1893, Nr. 1.

syzygetisch sind; und umgekehrt ist die letztere Gruppe von $\mathfrak{K}_1$ ebenso $\mathfrak{K}$ gegenüber ausgezeichnet. Im obigen Beispiel ist die gemeinsame St. G. von K und K': [1234]; und die ausgezeichneten St. Gn von K und K'' sind bezw. [1278], [34].

Zwei Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$, für welche $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1)_1$ gilt, lassen sich durch einen bestimmten $\mathfrak{K}_2$ zu einem *Tripel erster Art* $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2)_1$ ergänzen, indem man auch noch die letzten zwei Zerlegungen der gemeinsamen St. Gn von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ zu einem Kegelschnitt $\mathfrak{K}_2$ zusammenfasst. Die drei Glieder eines solchen Tripels sind also einer und derselben St. G. zugeordnet, sie gehen gleichartig ein und stehen gegenseitig in Beziehung erster Art. Umgekehrt gehören zu jeder St. G., den verschiedenen Zusammenfassungen ihrer sechs Zerlegungen entsprechend, 15 verschiedene Tripel erster Art, von denen es daher 63 . 15 giebt. Einem $\mathfrak{K}$ gegenüber bestehen die 18 $\mathfrak{K}'$, wo $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}')_1$ gilt, somit aus 9 *Paaren* erster Art; ein solches Paar zu

$$K = 12 \,.\, 34 \,.\, 56 \,.\, 78$$

ist z. B.

$$K_1' = 13 \,.\, 24 \,.\, 14 \,.\, 23, \quad K_2' = 57 \,.\, 68 \,.\, 58 \,.\, 67.$$

Auch die 144 Kegelschnitte $\mathfrak{K}''$, welche zu einem gegebenen $\mathfrak{K}$ die Beziehung zweiter Art $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}'')_2$ haben, treten $\mathfrak{K}$ gegenüber in 72 *Paaren* auf, $\mathfrak{K}_1''$ und $\mathfrak{K}_2''$, für welche jeweils $(\mathfrak{K}_1''\mathfrak{K}_2'')_1$ gilt; indem nämlich $\mathfrak{K}_2''$ jene vier Dtn enthält, welche die vier Dtn von $\mathfrak{K}_1''$ in den Zerlegungen der beiden St. Gn von $\mathfrak{K}''$, aus denen $\mathfrak{K}_1''$ genommen ist, ergänzen. Z. B.

$$K = 12 \,.\, 34 \,.\, 56 \,.\, 78, \quad K_1'' = 13 \,.\, 14 \,.\, 37 \,.\, 47, \quad K_2'' = 24 \,.\, 23 \,.\, 48 \,.\, 38.$$

Zwei Kegelschnitten $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}''$, für welche $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}'')_2$ gilt, ist ein bestimmter Kegelschnitt $\mathfrak{K}'$ *conjugirt*, nämlich der der vier Dtn, welche in den nach dem Obigen ausgezeichneten, gegen einander syzygetischen, beiden St. Gn von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}''$ gemeinsam enthalten sind. Dieser $\mathfrak{K}'$ hat gegen die beiden $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}''$, zu welchen er conjugirt ist, die Beziehungen $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}')_1$, $(\mathfrak{K}''\mathfrak{K}')_1$; und diese letztere Eigenschaft charakterisirt $\mathfrak{K}'$ ebenfalls eindeutig. Auch hat man die Eigenschaft, dass, wenn $\mathfrak{K}_1''$ und $\mathfrak{K}_2''$ eines der *Paare*, zweiter Art gegenüber $\mathfrak{K}$, bilden, der zu $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1''$ conjugirte Kegelschnitt $\mathfrak{K}'$ identisch ist mit demjenigen Kegelschnitt, welcher $\mathfrak{K}_1''$ und $\mathfrak{K}_2''$ zu einem Tripel erster Art ergänzt.

So ist zu $K = 12 \,.\, 34 \,.\, 56 \,.\, 78$, $K_1'' = 13 \,.\, 14 \,.\, 37 \,.\, 47$ conjugirt: der zu [1278] und [34] gehörige Kegelschnitt $K' = 35 \,.\, 36 \,.\, 45 \cdot 46$; und dieser bildet auch mit K_1'' und $K_2'' = 24 \,.\, 23 \,.\, 48 \,.\, 38$ ein Tripel erster Art, der St. G. [34] entsprechend.

Noch sei bemerkt, dass, wenn man einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ aus zwei St. Gn von $\mathfrak{K}$ zu Tripeln erster Art $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2)_1$ und $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1'\mathfrak{K}_2')_1$ ergänzt, die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ gegen die beiden Kegelschnitte

$\mathfrak{K}_1'\mathfrak{K}_2'$ sich gleichmässig verhalten, d. h. nur zu Beziehungen erster, oder nur zu solchen zweiter Art führen. Durch das erste Tripel ist das zweite im ersten Fall eindeutig, im zweiten Fall zweideutig bestimmt. Im ersten Falle ergänzen sich zwei Kegelschnitte, wie $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_1'$, je durch einen bestimmten aus der dritten St. G. von $\mathfrak{K}$ zu einem Tripel erster Art $(\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_1'\mathfrak{K}_1'')_1$. Im zweiten Falle ist der zu $(\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_1')_2$ conjugirte Kegelschnitt eben $\mathfrak{K}$ selbst.

3. *Die eigentlichen 7-Systeme erster Art* (*Tripelsysteme*). Ein solches System entsteht aus einem Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, indem man $\mathfrak{K}$ aus jeder seiner St. Gn zu einem Tripel erster Art ergänzt, aber so, dass nur Beziehungen erster Art vorkommen. Nach Nr. 2 ist durch das erste Tripel $(\mathfrak{K}\,\mathfrak{K}_1\,\mathfrak{K}_2)_1$ des Quadrupel der vier übrigen Kegelschnitte $(\mathfrak{K}_3\,\mathfrak{K}_4,\ \mathfrak{K}_5\,\mathfrak{K}_6)_1$ eindeutig bestimmt, wenn man von $\mathfrak{K}$ ausgeht; und man gelangt zum selben Quadrupel, nur in anderer Paartheilung, wenn man $\mathfrak{K}_1$ oder $\mathfrak{K}_2$ im Tripel $(\mathfrak{K}\,\mathfrak{K}_1\,\mathfrak{K}_2)_1$ auszeichnet. Umgekehrt führt ein Quadrupel $(\mathfrak{K}_3\mathfrak{K}_4\mathfrak{K}_5\mathfrak{K}_6)_1$ durch Theilung $\mathfrak{K}_3\,\mathfrak{K}_4$, $\mathfrak{K}_5\,\mathfrak{K}_6$ auf zwei syzygetische St. Gn, also auf $\mathfrak{K}$, und durch andere Theilung auf $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$. Somit entsprechen sich die Tripel und Quadrupel gegenseitig eindeutig, und bilden je zusammen ein *Siebentripelsystem*. Solcher giebt es, indem 63 . 15 Tripel erster Art existiren, im Ganzen

$$\frac{63\,.\,15}{7} = 135.$$

So z. B.

$$K = 12.34.56.78, \quad K_1 = 13.24.57.68, \quad K_2 = 14.23.58.67,$$
$$K_3 = 15.26.37.48, \quad K_4 = 16.25.38.47, \quad K_5 = 17.28.35.46,$$
$$K_6 = 18.27.36.45,$$

mit den Tripeln:

$$(KK_1K_2),\ (KK_3K_4),\ (KK_5K_6),\ (K_1K_3K_5),\ (K_1K_4K_6),$$
$$(K_2K_3K_6),\ (K_2K_4K_5).$$

Jedem der sieben $\mathfrak{K}$-Tripel eines Systems gehört *eine* St. G. zu, was sieben gegeneinander syzygetische St. Gn liefert; und zu jeder dieser St. Gn gehört *ein* $\mathfrak{K}$-Tripel des Systems. Ferner entspricht jedem einzelnen der sieben Kegelschnitte des Systems *ein* Steiner'sches Tripel aus diesen sieben Gruppen, und umgekehrt. D. h.

> „Einem Tripelkegelschnittsystem entspricht eindeutig ein Tripelsystem von sieben Steiner'schen, zu einander syzygetischen, Gruppen; und zwar je den Elementen des einen Systems die Tripel des anderen". (Vgl. System S in Math. Ann. 15, pag. 95.)

Im obigen Beispiel besteht das neue System aus den St. Gn

[1234], [1256], [1278], [1357], [1368], [1458], [1467].

Man erhält alle Tripelsysteme von St. Gn, wenn man von irgend drei St. Gn $[a]$, $[b]$, $[c]$ ausgeht, welche in syzygetischer Beziehung zu einander stehen und deren Combination $[abc]$ nicht $\equiv 0$ ist, indem man alle Combinationen derselben bildet, in:

$$[a],\ [b],\ [c],\ [ab],\ [ac],\ [bc],\ [abc],$$

mit den Tripeln:

$$[a],\ [b],\ [ab];\quad [a],\ [c],\ [ac];\quad [b],\ [c],\ [bc];$$
$$[a], [bc], [abc];\quad [b], [ac], [abc];\quad [c], [ab], [abc];\quad [ab][ac][bc].$$

Aus der Gruppe von 64 . 168 Substitutionen, welche die sieben St. Gn des Systems in einander überführen, erhält man diejenige von 64 Substitutionen, welche alle sieben St. Gn unverändert lassen, hier als Product der sechs vertauschbaren Substitutionsgruppen zweiter Ordnung (wobei $\{0\}$ die identische Substitution bedeutet):

$$\{0\},\ \{a\};\quad \{0\},\ \{b\};\quad \{0\},\ \{ab\};$$
$$\{0\},\ \{c\};\quad \{0\},\ \{ac\};\quad \{0\},\ \{bc\};$$

während

$$\{abc\} \equiv \{a\}\{b\}\{c\}\{ab\}\{ac\}\{bc\}$$

ist. Nach Lösung einer Tripelgleichung hat man also zur Aufsuchung der Dtn nur noch sechs quadratische Gleichungen zu lösen. Die Gruppe von 64 . 168 Substitutionen selbst erhält man durch Verbindung der angegebenen 64 mit einem Product $STUVW$, wo man unter S, T, U, V, W im oben angegebenen Beispiel etwa bezw. die Potenzen von folgenden Substitutionen 7^{ter}, 2^{ter}, 3^{ter}, 2^{ter}, 2^{ter} Ordnung verstehen kann:

$$s = \{71\}\{73\}\{72\}\{76\}\{75\}\{74\}, \qquad t = \{12\}\{56\},$$
$$u = \{13\}\{15\}\{24\}\{26\}, \qquad v = \{12\}\{34\},$$
$$w = \{13\}\{24\};$$

eine Substitutionsgruppe, welche aus der von 64 . 168 dadurch herausgenommen ist, dass sie zugleich die Dtn des Aronhold'schen 7-Systems

$$(81),\ (82), \ldots,\ (87)$$

in einander überführt.

4. *Die eigentlichen 7-Systeme zweiter Art.* Man kann irreductible Systeme zweiter Art aufstellen, d. h. solche, deren sieben Kegelschnitte alle in Beziehung zweiter Art zu einander stehen. Ein solches ist z. B.

$$K_0 = 12.34.56.78,\quad K_1 = 14.27.35.68,\quad K_2 = 15.36.47.28,$$
$$K_3 = 16.24.57,38,\quad K_4 = 13.25\cdot 67.48,\quad K_5 = 26.37.45.18,$$
$$K_6 = 17.23.46.58.$$

Um die Eigenschaften dieses Systems zu erkennen, combinire man die sieben Kegelschnitte desselben auf alle Weisen zu Paaren und bestimme zu jedem der Paare die nach Nr. 2 darin ausgezeichneten beiden St. Gn und den conjugirten Kegelschnitt. Dies liefert die Tabelle:

Paar $K_l K_m$	Ausgez. St. G. in K_l	K_m	Conjugirter $K_{l,m}$	Zugeordneter K_n
$K_0 K_1$	[1256]	[1468]	16 . 25 . 37 . 48	K_4
$K_0 K_2$	[1234]	[1457]	14 . 23 . 57 . 68	K_1
$K_0 K_3$	[1278]	[1368]	27 . 36 . 45 . 18	K_5
$K_0 K_4$	[1278]	[1367]	17 . 36 . 45 . 28	K_2
$K_0 K_5$	[1234]	[1458]	14 . 23 . 67 . 58	K_6
$K_0 K_6$	[1256]	[1467]	16 . 25 . 47 . 38	K_3
$K_1 K_2$	[1468]	[1258]	25 . 37 . 46 . 18	K_5
$K_1 K_3$	[1345]	[1567]	15 . 34 . 67 . 28	K_2
$K_1 K_4$	[1247]	[1367]	17 . 24 . 36 . 58	K_6
$K_1 K_5$	[1247]	[1378]	17 . 24 . 38 . 56	K_3
$K_1 K_6$	[1345]	[1578]	15 . 26 . 34 . 78	K_0
$K_2 K_3$	[1258]	[1246]	12 . 37 . 46 . 58	K_6
$K_2 K_4$	[1457]	[1348]	14 . 26 . 57 . 38	K_3
$K_2 K_5$	[1356]	[1378]	13 . 24 . 56 . 78	K_0
$K_2 K_6$	[1356]	[1237]	13 . 27 . 56 . 48	K_4
$K_3 K_4$	[1246]	[1235]	12 . 35 . 46 . 78	K_0
$K_3 K_5$	[1567]	[1458]	15 . 23 . 67 . 48	K_4
$K_3 K_6$	[1368]	[1237]	13 . 27 . 45 . 68	K_1
$K_4 K_5$	[1235]	[1268]	12 . 35 . 47 . 68	K_1
$K_4 K_6$	[1348]	[1578]	26 . 34 . 57 . 18	K_5
$K_5 K_6$	[1268]	[1467]	16 . 35 . 47 . 28	K_2

Hiernach führt jedes Paar $K_l K_m$ zunächst auf einen ganz bestimmten weiteren Kegelschnitt K_n des Systems, nämlich auf den, welcher mit dem zum Paar conjugirten Kegelschnitt $K_{l,m}$ *zwei* Dtn gemeinsam hat. Irgend ein Kegelschnitt K_n wird auf diese Weise aus drei verschiedenen Paaren erhalten; und diese drei Paare sind zugleich den drei St. Gn von K_n einzeln zugeordnet, insofern die Combination aus den beiden ausgezeichneten St. Gn des Paars die zugehörige St. G. von K_n, welche jene zwei Dtn gepaart enthält, liefert. Dieselbe St. G. tritt auch in den Paaren $K_n K_l$ und $K_n K_m$ ausgezeichnet auf.

Weiter zeigt die Tabelle, dass, wenn das Paar $K_l K_m$ auf K_n und das Paar $K_l K_n$ auf K_p führt, das Paar $K_l K_p$ wieder zurück auf K_m führt.

Einem Kegelschnitt K_l des Systems gegenüber ordnen sich also die sechs übrigen Kegelschnitte nicht nur zu drei Paaren, sondern auch zu zwei Ternen, von denen jede *einen* Cykel $K_m K_n K_p$ bildet. Hier treten in den drei Paaren $K_l K_m$, $K_l K_n$, $K_l K_p$ die drei verschiedenen St. Gn von K_l ausgezeichnet auf.

Das Schema dieser Zuordnungen schreibt sich:

$$\left.\begin{matrix} K_1 K_6 \\ K_4 K_3 \\ K_2 K_5 \end{matrix}\right\} K_0, \quad \left.\begin{matrix} K_2 K_0 \\ K_5 K_4 \\ K_3 K_6 \end{matrix}\right\} K_1, \quad \left.\begin{matrix} K_3 K_1 \\ K_6 K_5 \\ K_4 K_0 \end{matrix}\right\} K_2,$$

$$\left.\begin{matrix} K_4 K_2 \\ K_0 K_6 \\ K_5 K_1 \end{matrix}\right\} K_3, \quad \left.\begin{matrix} K_5 K_3 \\ K_1 K_0 \\ K_6 K_2 \end{matrix}\right\} K_4, \quad \left.\begin{matrix} K_6 K_4 \\ K_2 K_1 \\ K_0 K_3 \end{matrix}\right\} K_5, \quad \left.\begin{matrix} K_0 K_5 \\ K_3 K_2 \\ K_1 K_4 \end{matrix}\right\} K_6;$$

d. h.: K_0 gegenüber hat man die drei Paare $K_1 K_6$, $K_4 K_3$, $K_2 K_5$ und die zwei cyklischen Ternen $K_1 K_4 K_2$, $K_6 K_3 K_5$; etc.

Hiernach ist die Gleichung 7^{ten} Grades, welche die sieben $\mathfrak{K}$ des Systems liefert, irreductibel, und aus irgend zwei ihrer Wurzeln ergeben sich alle übrigen eindeutig. Die Gleichung ist eine Galois'sche, mit der metacyklischen Substitutionsgruppe für die Indices l der sieben Kegelschnitte:

$$(l \mid \alpha l + \beta)$$
$$[l = 0, 1, \ldots 6;\ \alpha = 1, 2, \ldots 6;\ \beta = 0, 1, \ldots 6 \ (\text{mod. } 7)],$$

und ist als solche mittelst Ausziehens einer quadratischen, einer cubischen und einer siebenten Wurzel algebraisch lösbar.

In den Substitutionen für die Dtn ausgedrückt, schreibt sich dieselbe Gruppe der Ordnung 7 . 6 als Product der sieben Potenzen der Substitution

$$\sigma = \{76\}\{72\}\{73\}\{74\}\{71\}\{75\}$$

mit den sechs Potenzen der Substitution

$$\tau = \{61\}\{64\}\{65\}\{62\}\{63\},$$

d. h. mit den sechs Substitutionen:

$$\{0\},\ \tau,\ \tau^2 = \{64\}\{62\}\{53\}\{51\},\ \tau^3 = \{12\}\{34\}\{56\},$$
$$\tau^4 = \{62\}\{64\}\{51\}\{53\},\ \tau^{-1}.$$

Während in dem 7-System die drei St. Gn jedes der sieben $\mathfrak{K}$ gleichwerthig auftreten, ist dies mit dessen vier Dtn nicht der Fall, sondern es ist jeweils eine vor den übrigen drei ausgezeichnet. In der That enthalten die drei Kegelschnitte $K_{1,6}$, $K_{4,3}$, $K_{2,5}$, welche zu den drei K_0 zugeordneten Paaren conjugirt sind, sämmtlich die eine Dt. (78) von K_0, aber immer nur *je* eine der übrigen drei Dtn; und ferner kommt in den übrigen achtzehn conjugirten $K_{l,m}$ die Dt. (78) überhaupt nicht vor, die übrigen drei Dtn von K_0 aber je zweimal. Auf diese Weise sind in den sieben Kegelschnitten des Systems bezw. die folgenden Dtn ausgezeichnet:

$$(78), \quad (68), \quad (28), \quad (38), \quad (48), \quad (18), \quad (58).$$

Dieselben bilden ein Aronhold'sches 7-System von Dtn, nämlich eines der acht zur Combination (12345678) gehörigen.

Da durch ein Aronhold'sches 7-System sämmtliche Dtn der Curve bestimmt sind, so schliesst man, dass durch Bestimmung der sieben Kegelschnitte des 7-$\mathfrak{K}$-Systems ebenfalls die 28 Dtn von einander isolirt sind. Indem also hierdurch die Gruppe der Doppeltangentengleichung, von der Ordnung $8!\,36$, auf die identische Substitution reducirt ist, das 7-$\mathfrak{K}$-System aber eine Gruppe von der Ordnung 7.6 hat, so folgt sogleich weiter:

„dass von den charakterisirten Systemen zweiter Art im Ganzen $\frac{8!\,36}{7.6} = 120 \,.\, 8 \,.\, 36$ gleichwerthige existiren, und dass dieselben den 8.36 Aronhold'schen 7-Systemen von Dtn je zu 120 zugeordnet sind."

Man kann dies auch so ausdrücken: Für die allgemeine Gleichung 7ten Grades, welche die sieben Dtn des obigen Aronhold'schen Systems liefert, mit einer Gruppe von der Ordnung $7!$, stellt eine symmetrische Function der Kegelschnitte des 7-$\mathfrak{K}$-Systems eine „metacyklische" Function vor, die noch $5!$ Werthe annehmen kann; die Adjunction eines dieser Werthe bringt jene Gleichung auf die des 7-$\mathfrak{K}$-Systems zurück.

Um aus dem obigen 7-$\mathfrak{K}$-System alle übrigen 7-$\mathfrak{K}$-Systeme abzuleiten, kann man zunächst alle Vertauschungen der Dtn-Indices $1, 2, \ldots 5$ vornehmen, was auf die 120 zu dem obigen Aronhold'schen 7-Dtn-System gehörigen Systeme führt; alsdann die sieben Substitutionen $\{87\}$, $\{86\}, \ldots, \{81\}$ auf dieselben ausüben, was die 120.8 zu $(12\ldots8)$ gehörigen Systeme ergiebt; und endlich auf die letzteren noch die 35 Substitutionen der Art $\{iklm\}$; mit anderen Worten: man hat nur unter dem obigen 7-System (78), (68), (28), ..., (58) irgend eines der Aronhold'schen 7-Systeme, in irgend einer Reihenfolge genommen, zu verstehen.

Bildet man ein 7-$\mathfrak{K}$-System nur nach der Eigenschaft, dass seine Glieder zu einander in Beziehung zweiter Art stehen sollen, indem man etwa aus dem Zerlegungsschema von K_0 successive die möglichen $K_1, K_4, K_2, K_6, K_3, K_5$ dazu aufstellt, so findet man ebenfalls

$$\frac{315.144.8.4}{7.6} = 5!\,8.36$$

Systeme; d. h. auch die bezeichnete Eigenschaft definirt die Systeme vollständig (vgl. Nr. 6, ζ_1).

5. *Die uneigentlichen* 7-*Systeme.* Es mögen zunächst fünf verschiedene Arten solcher, unter sich gleichwerthiger, Systeme aufgestellt, nachher aber bewiesen werden, dass keine weiteren Arten existiren.

a) Man ergänze, wie in Nr. 3, einen Kegelschnitt K aus den Zerlegungen von jeder seiner drei St. Gn zu einem *Tripel erster Art;* aber so, dass die drei Paare

$$(A_1 A_2)_1, \quad (B_1 B_2)_1, \quad (C_1 C_2)_1,$$

gegen einander nur Beziehungen *zweiter* Art bilden. In einem solchen System zeigt dann K ein besonderes Verhalten, tritt also ausgezeichnet vor den sechs übrigen $\mathfrak{K}$ des Systems auf. Nach Schluss von Nr. 2 giebt es zum ersten Tripel KA_1A_2 bei Auswahl von K aus der zweiten St. G. von K dann noch zwei verschiedene der Bedingung genügende Paare für B_1B_2, aus der dritten St. G. von K alsdann nur noch ein Paar für C_1C_2. Es existiren also 315 . 6 derartige Systeme. Z. B.

$$\begin{aligned} K = 12.34.56.78, \quad & A_1 = 13.24.57.68, \quad A_2 = 14.23.67.58, \\ & B_1 = 15.26.47.38, \quad B_2 = 16.25.37.48, \\ & C_1 = 17.28.27.18, \quad C_2 = 35.46.36.45. \end{aligned}$$

c) Man verfahre wie in a), nur dass von den drei Paaren zwei gegeneinander in Beziehung *erster* Art, gegen das dritte in Beziehung *zweiter* Art stehen sollen. Auch in einem solchen System ist dann K ausgezeichnet. Aus K ergeben sich noch 18 Möglichkeiten, die drei übrigen Paare nach den Bedingungen zu wählen, so dass 315 . 18 derartige Systeme existiren. Z. B.

$$\begin{aligned} K = 12.34.56.78, \quad & A_1 = 13.24.57.68, \quad A_2 = 14.23.67.58, \\ & B_1 = 15.26.37.48, \quad B_2 = 16.25.38.47, \\ & C_1 = 17.28.27.18, \quad C_2 = 35.46.36.45. \end{aligned}$$

Hier ist $(A_1A_2B_1B_2)$, eines der am Anfang von Nr. 3 erwähnten Quadrupel, aber nicht das zum Tripel $(KC_1C_2)_1$ gehörige.

In a) und b) hat man die schon in Math. Ann. 15 angegebenen uneigentlichen Systeme.

c) Zu K nehme man sechs Kegelschnitte, welche sämmtlich zu K in Beziehung *zweiter* Art stehen und zugleich, K gegenüber, drei *Paare* bilden (s. Nr. 2): $(A_1A_2)_1$, $(B_1B_2)_1$, $(C_1C_2)_1$. Die drei Paare stehen dann gegeneinander nur in Beziehung zweiter Art; und in dem System tritt wiederum K ausgezeichnet auf.

Man kann dabei das Paar A_1, A_2 aus der zweiten und dritten St. G. von K auf 24 verschiedene Weisen, dann B_1, B_2 aus der ersten und dritten St. G. von K auf vier Weisen, endlich C_1, C_2 aus der ersten und zweiten St. G. auf zwei Weisen wählen. Es existiren also 315 . 24 . 4 . 2 = 315 . 192 derartige Systeme. Zu denselben gehört auch das von Hesse Cr. J. 49 angeführte. Z. B.

$$K = 12.34.56.78,\quad A_1 = 16.38.27.45,\quad A_2 = 18.36.25.47,$$
$$B_1 = 14.67.28.35,\quad B_2 = 17.46.23.58,$$
$$C_1 = 13.57.26.48,\quad C_2 = 15.37.24.68.$$

d) Zu K nehme man ein Paar $(A_1 A_2)_1$, das mit K ein Tripel erster Art bilde; für B_1, B_2 zwei, K gegenüber nicht gepaarte, Kegelschnitte, in Beziehung erster Art zu einander und zu K, zweiter Art zu A_1 und A_2; für C_1, C_2 endlich noch zwei Kegelschnitte, die K gegenüber in Beziehung zweiter Art und gepaart sind, und die alsdann zugleich A_1, A_2, B_1, B_2 gegenüber in Beziehung zweiter Art stehen werden. Auch hierbei ist K ausgezeichnet. Z. B.

$$K = 12.34.56.78,\quad A_1 = 13.24.57.68,\quad A_2 = 14.23.67.58,$$
$$B_1 = 15.26.47 \cdot 38,\quad B_2 = 17.28.36.45,$$
$$C_1 = 16.48.18.46,\quad C_2 = 25.37.27.35.$$

Dabei ist A_1, A_2 auf 3.3, dann B_1, B_2 auf 4.2, C_1, C_2 auf 2 Weisen wählbar; so dass 315 . 144 derartige Systeme existiren.

e) Man verbinde wieder ein Tripel erster Art $(KK_1K_2)_1$ mit einem der am Anfang von Nr. 3 erwähnten Quadrupel $(A_1A_2A_3A_4)_1$, aber mit einem solchen, dessen Kegelschnitte zu denen des Tripels alle in Beziehung *zweiter* Art stehen. In einem solchen System ist dann ein Tripel *erster* Art ausgezeichnet.

Zu jedem Tripel lassen sich hierbei acht der Bedingung genügende Quadrupel aufstellen, so dass 63.15.8 derartige Systeme existiren. Z. B.

$$K = 12.34.56.78,\quad K_1 = 13.24.57.68,\quad K_2 = 14.23.67.58,$$
$$A_1 = 15.38.27.46,\quad A_2 = 18.35.26.47,$$
$$A_3 = 16.37.28.45.\quad A_4 = 17.36.25.48.$$

6. *Sämmtliche 7-Systeme.* Um den Beweis zu führen, dass die in Nr. 3, 4 und 5 angegebenen 7-Systeme sämmtliche existirenden erschöpfen, kann man folgenden Weg einschlagen. Man geht, an der Hand des Zerlegungsschema eines bestimmten Kegelschnitts K, von allen möglichen *Ternen* von drei Kegelschnitten aus und sucht dieselben zu 7-Systemen zu ergänzen; was in systematischer Weise und unter Bezeichnung der Kegelschnitte mit K; A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2, leicht so ausgeführt werden kann:

α) $(KA_1A_2)_1$ und $(KB_1B_2)_1$ bilden Tripel erster Art; führt auf Nr. 3 oder Nr. 5, a), b).

β) $(KA_1A_2)_1$ bilden ein Tripel erster Art:

β_1) B_1, B_2 erster Art, aber nicht gepaart gegen K; dann, wenn nicht Fall α), nur gegenüber A_1 oder A_2, eintreten soll: entweder (B_1B_2) gegenüber $(A_1 A_2)$ in Beziehung zweiter Art, und $(B_1B_2)_1$, was nur zu Nr. 5, d) führt. Oder $(B_1A_1)_1$, $(B_1A_2)_1$, $(B_2A_1)_2$, $(B_2A_2)_2$, was keine C_1, C_2 zulässt.

β_2) B_1 erster, B_2, C_1, C_2 zweiter Art gegen K: existirt nicht.

β_3) B_1, B_2, C_1, C_2 zweiter Art gegen K, A_1 und A_2: giebt nur Nr. 5, e).

γ) K, A_1, A_2 gegeneinander erster Art, aber kein Tripel erster Art bildend, und kein Tripel erster Art kommt im System vor:

γ_1) $(KB_1)_1$, $(A_1B_1)_1$, $(A_2B_1)_1$. Dann bilden die übrigen drei $\mathfrak{K}$ ein Tripel erster Art, gegen die Voraussetzung.

γ_2) $(KB_1)_1$, $(A_1B_1)_1$, $(A_2B_1)_2$: existirt nicht.

γ_3) $(KB_1)_1$, $(A_1B_1)_2$, $(A_2B_1)_1$: die übrigen drei $\mathfrak{K}$, die zweiter Art gegen K sein sollen, existiren nicht.

γ_4) B_1, B_2, C_1, C_2 zweiter Art gegen K: existirt wieder nicht.

δ) $(KA_1)_1$, $(KA_2)_1$, $(A_1A_2)_2$:

δ_1) $(KB_1)_1$. Dann, wenn nicht Fall γ) eintreten soll: $(A_1B_1)_2$, $(A_2B_1)_2$, was keinen B_2 liefert.

δ_2) B_1, B_2, C_1, C_2 zweiter Art gegen K; liefert wieder nichts.

ε) $(KA_1)_1$. Die übrigen fünf $\mathfrak{K}$ zweiter Art gegen K und A_1. Dies führt auf Fall Nr. 5, c); nur wird nicht, wie dort, K, sondern einer der letzteren fünf $\mathfrak{K}$ im System ausgezeichnet.

ζ) Alle sieben $\mathfrak{K}$ des Systems zweiter Art gegen einander:

ζ_1) Wenn vier der $\mathfrak{K}$: $K, A, B, C,$ so gegeben sind, dass B mit dem zu $(KA)_2$ conjugirten $\mathfrak{K}'$ zwei Dtn und C mit dem zu $(KB)_2$ conjugirten $\mathfrak{K}''$ zwei Dtn gemeinsam hat, so gelangt man nur zu drei bestimmten weiteren A_1, B_1, C_1, und das System wird von der Art der in Nr. 4 angegebenen.

ζ_2) Wenn K, A, B so gegeben sind, dass B mit dem zu $(KA)_2$ conjugirten $\mathfrak{K}'$ zwei Dtn gemeinsam hat, während jeder der vier übrigen C, A_1, B_1, C_1 mit dem zu $(KB)_2$ conjugirten $\mathfrak{K}''$ höchstens eine, und dann wirklich je eine, Dt. gemeinsam haben soll, so erhält man kein System.

ζ_3) Wenn K, A gegeben sind und keiner der weiteren fünf $\mathfrak{K}$ des Systems mit dem zu $(KA)_2$ conjugirten $\mathfrak{K}'$ zwei Dtn gemeinsam haben soll, d. h. wenn B, C, A_1, B_1 je eine Dt., C_1 keine Dt. von $\mathfrak{K}'$ enthalten sollen, so können schon die Bedingungen für B, C, A_1, B_1 nicht erfüllt werden.

Erlangen, Februar 1895.

Ueber die allgemeinste Differentialresolvente der homogenen linearen Differentialgleichungen.

Von

Emanuel Beke in Budapest.

Der Grundgedanke des Herrn Picard bei der gruppentheoretischen Behandlung der homogenen linearen Differentialgleichungen liegt darin, dass man — ebenso wie bei der Galois'schen Theorie der algebraischen Gleichungen — eine Function der Fundamentallösungen der Differentialgleichung bildet, welche *nur* die identische Transformation der homogenen linearen Gruppe zulässt.*)

In der Theorie der algebraischen Gleichungen muss man beweisen, dass sich eine Galois'sche Function, d. h. eine rationale Function der Wurzeln einer ganz beliebigen Gleichung, welche bei einer jeden Substitution ihren Werth verändert, immer bilden lässt, wenn nur unter den Wurzeln keine zwei gleichwerthige vorkommen**). Wir stellen uns hier die ähnliche Aufgabe, welche als eine Ergänzung der gruppentheoretischen Auffassung der homogenen linearen Differentialgleichung dienen soll. Wir wollen nämlich beweisen, dass sich immer eine Function der Fundamentallösungen bilden lässt, welche bei einer jeden homogenen linearen Transformation derselben Lösungen ihren Werth verändert. —

Nehmen wir an, dass

(1) $$x_1, x_2, \dots x_n$$

ein System von Fundamentallösungen der homogenen linearen Differentialgleichung

(2) $$x^{(n)} + p_1 x^{(n-1)} + \dots + p_n x = 0$$

darstellen. Wir müssen zeigen, dass man immer solche n Functionen

(3) $$u_1\, u_2 \dots u_n$$

---

*) Picard, Comptes rendus 1883. Annales de Toulouse 1887. Comptes rendus 1894. Annalen Bd. 46.

**) Ein einfacher Beweis dieses Satzes findet sich in H. Webers Algebra p. 457.

der unabhängigen Veränderlichen t findet, dass die, von Herrn Picard benutzte Resolvente*)

$$V = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_n x_n \tag{4}$$

wirklich verschiedene Werthe annimmt, wenn man die Functionen x verschiedenen linearen Substitutionen unterwirft.

Wenn man die Functionen $x_1 x_2 \ldots x_n$ zuerst der homogenen linearen Transformation

$$\bar{x}_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{in} x_n$$
$$(i = 1, 2, \ldots n),$$

dann der Transformation

$$\bar{\bar{x}}_i = a'_{i1} x_1 + a'_{i2} x_2 + \cdots + a'_{in} x_n$$

unterwirft, erhalten wir aus V zuerst die bilineare Form:

$$\bar{V} = \sum_1^n{}_{i,k}\, a_{ik} u_i x_k \tag{5}$$

dann wieder die Form:

$$\bar{\bar{V}} = \sum_1^n{}_{i,k}\, a'_{ik} u_i x_k.$$

Wir müssen also beweisen, dass sich die Functionen (3) so bestimmen lassen, dass die Gleichung:

$$\sum u_i x_k (a_{ik} - a'_{ik}) = 0 \tag{6}$$

nur dann bestehen kann, wenn einzeln:

$$a_{ik} = a'_{ik} \tag{7}$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots n).$$

Nehmen wir an, dass der Punkt $t = 0$ ein gewöhnlicher Punkt der Differentialgleichung (2) sei, was wir, wie bekannt, durch eine Transformation der Gleichung (2) immer erreichen können. Dann ist bekanntlich eine jede Lösung der Differentialgleichung in der Umgebung des Punktes $t = 0$ in eine gewöhnliche Potenzreihe entwickelbar in der Form:

$$x_k = r_{k0} + r_{k1} t + r_{k2} t^2 + \cdots \tag{8}$$
$$(k = 1, 2, \ldots n).$$

Nehmen wir die Functionen u auch in Gestalt von Potenzreihen an:

$$u_i = m_{i0} + m_{i1} t + m_{i2} t^2 + \cdots \tag{9}$$
$$(i = 1, 2, \ldots n).$$

---

*) Eigentlich kommt die Resolvente in dieser Gestalt zuerst bei Herrn Vessiot vor. Annales de l'École normal 1892. Herr Picard betrachtet auch die Differentialquotienten der Fundamentallösungen.

Dann erhalten wir aus der Gleichung (6) ein unendliches lineares Gleichungssystem für die n^2 Grössen:

(10) $$a_{ik} - a'_{ik}.$$

Nehmen wir an, dass nicht sämmtliche

$$r_{k0}$$

verschwinden, dann sind die ersten n^2 Gleichungen:

(11) $$\begin{gathered}\sum m_{i0} r_{k0}(a_{ik} - a'_{ik}) = 0, \\ \sum (m_{i0} r_{k1} + m_{i1} r_{k0})(a_{ik} - a'_{ik}) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum (m_{i0} r_{ks} + m_{i1} r_{ks} + \cdots + m_{is} r_{k0})(a_{ik} - a'_{ik}) = 0,\end{gathered}$$

wo wir statt $n^2 - 1$ der Kürze halber s setzten. —

Um den angezeigten Satz zu beweisen, d. h. um zu zeigen, dass dieses Gleichungssystem nur die Lösung

$$a_{ik} - a'_{ik} = 0$$

zulässt, müssen wir zeigen, dass die Determinante von (11) nicht identisch d. h. nicht für eine jede Wahl der Grössen m verschwinden kann. Zu diesem Zwecke zeigen wir, dass diese Determinante bei einer bestimmten Wahl der Grösse m nicht verschwindet.

Wir setzen sämmtliche Coefficienten von u_i gleich 0, ausgenommen $m_{i,(i-1)n}$ welche wir von 0 verschieden annehmen.

Es sind also von 0 verschieden angenommen:

(12 $$m_{10},\ m_{2n};\ m_{3\,2n}, \ldots, m_{n,n^2-n}.$$

Wenn wir der Einfachheit halber diese Coefficienten gleich 1 setzen, dann reducirt sich die Determinante des Gleichungssystems (11) auf die n^{te} Potenz von

(13) $$\begin{vmatrix} r_{10}, & r_{20}, & \ldots & r_{n0} \\ r_{11}, & r_{21}, & \ldots & r_{n1} \\ r_{12}, & r_{22}, & \ldots & r_{n2} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ r_{1n-1}, & r_{2n-1}, & \ldots & r_{n,n-1} \end{vmatrix}.$$

Nun ist aber diese Determinante von einem Zahlenfactor abgesehen, die Determinante des Fundamentalsystems, d. h.:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1' & x_2' & \ldots & x_n' \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \ldots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

bei $t = 0$. Da aber der Punkt $t = 0$ ein gewöhnlicher Punkt der Gleichung (2) ist, so kann die Determinante, welche den Werth

$$C e^{-\int p_1 dt}$$

hat, nur dann verschwinden, wenn $C = 0$ ist. Dann wäre aber das System (1) kein Fundamentalsystem. Die Determinante R ist also von 0 verschieden. Damit haben wir bewiesen, dass die n^2 Gleichungen (7) bestehen müssen. —

Die Functionen u haben in diesem speciellen Falle eine sehr einfache Form, da

$$u_k = t^{(k-1)n}$$

ist. —

Wenn wir die Functionen u in dieser Gestalt wählen, dann können wir die homogene lineare Differentialgleichung $n^{2\text{ter}}$ Ordnung, der die Function V genügt, und welche wir nach der, von Herrn F. Klein in seinen Vorlesungen benutzten Bezeichnung *Differentialresolvente* nennen, wenigstens in den einfachsten Fällen, leicht bilden. So ist diese Differentialresolvente im Falle $n = 2$, wenn die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung diese Gestalt:

$$x'' = qx$$

hat, die Folgende:

$$\begin{vmatrix} V & 1 & t^2 & 0 & 0 \\ V' & 0 & 2t & 1 & t^2 \\ V'' & q & 2+t^2 q & 0 & 4t \\ V''' & q' & 6tq + t^2 q' & q & 6 + t^2 q \\ V^{\text{IV}} & q'' + q^2 & 12q + 8tq' + t^2 q^2 + t^2 q'', & 2q', & 8tq + 2t^2 q' \end{vmatrix} = 0,$$

oder ausgerechnet:

$$P_0 V^{\text{IV}} + P_1 V''' + P_2 V'' + P_3 V' + P_4 V = 0$$

wo:

$$\begin{aligned} P_0 &= 3' - 4t^2 q, \\ P_1 &= 4(2tq + t^2 q'), \\ P_2 &= 4(t^2 q^2 - 9q - 3tq'), \\ P_3 &= 2t^2 q q' - 4tq^2 - 3q', \\ P_4 &= 6q^2 - 5tqq' - 4t^2 q'^2 - 3q'' + 4t^2 q q''. \end{aligned}$$

Budapest, im März 1895.

On the Automorphic Linear Transformation of an Alternate Bilinear Form.

By

Henry Taber of Worcester, Mass.

---

§ 1.

In the *Philosophical Transactions* for 1858 Cayley gave the coefficients of the general linear substitution which transforms automorphically an alternate bilinear form of two sets of $2n$ cogrediant variables and of non-zero determinant as rational functions of the coefficients of the form and of the minimum number of parameters.*)

This representation was given in the form of a symbolic expression for such substitutions, namely

$$(\Omega - Y)^{-1}(\Omega + Y),$$

in which Ω denotes the matrix (that is, the square array of coefficients) of the form and Y denotes an arbitrary symmetric linear substitution or matrix, but such that the determinant of $\Omega - Y$ is not zero.**)

Of the group of linear substitutions satisfying the conditions stated above, all are given by Cayley's expression for finite values of the parameters (that is for Y finite), except those whose characteristic equation has -1 as a root. These substitutions of the group are not given by Cayley's representation for finite values of the parameters. Nevertheless, as shown by Frobenius in *Crelle's Journal* for 1878, the limit of Cayley's expression, as one or more of the parameters tends to infinity, gives every substitution of the group whose characteristic

---

*) "Memoir on the Automorphic Linear Transformation of a Bipartite Quadric Function."

**) Or in the nomenclature of Frobenius, in which Ω is the form in question and Y an arbitrary symmetric form. This symbolic expression for Cayley's representation is put here in a somewhat simpler form than as given by Cayley. But Cayley proves the identity between this expression and the one given by him, namely $\Omega^{-1}(\Omega + Y)(\Omega - Y)^{-1}\Omega$. The above expression was given by Frobenius (see note p. 2).

equation has -1 as a root.*) That is, if φ is a substitution of the group whose characteristic equation has -1 as a root, we can always find a symmetric linear substitution Y_ϱ whose coefficients (the parameters of the substitution) are rational functions of a parameter ϱ, of which one at least is infinite for $\varrho = 0$, such that for ϱ sufficiently small the several coefficients of the substitution

$$(\Omega - Y_\varrho)^{-1} (\Omega + Y_\varrho)$$

can be made as nearly as we please equal to the corresponding coefficients of φ.

Designating a linear substitution of the group as of the first or second kind according as it is or is not the square (or second power) of a linear substitution of the group, I show in what follows that every substitution given by Cayley's expression, for finite values of the parameters, is of the first kind; further that every linear substitution of the first kind is given by the square of Cayley's expression (the parameters being all finite), can be generated by the repetition of an infinitesimal substitution of the group, and is the m^{th} power of a substitution of the group for any index m. Whereas, I shall show that no linear substitution of the second kind can be generated by the repetition of one and the same infinitesimal substitution of the group, nor can it be the m^{th} power of any substitution of the group for an even index m; nevertheless, corresponding to any linear substitution φ of the second kind can always be found a linear substitution ψ_ϱ of the group whose coefficients are algebraic functions of a parameter ϱ, such that for ϱ sufficiently small, the $(2m)^{\text{th}}$ power of ψ_ϱ may be made as nearly as we please equal to φ. Since we then have $\lim. (\psi_\varrho)^{2m} = \varphi$, and φ is not an even power of any linear substitution of the group, a discontinuity exists in the case of linear substitutions of the group which are of the second kind.

Finally, I show that every real linear substitution which transforms automorphically a real alternate bilinear form of two sets of congrediant variables and of non zero determinant is given by the composition or product of two of Cayley's expressions the parameters being all finite.**)

The symbolic notation mentioned above, employed by Cayley in his memoir, Cayley terms the "notation of matrices". The notation

---

*) Frobenius gives the representation at which Cayley had arrived twenty-one years earlier (Cayley's memoir was presented to the *Royal Society* in 1857) without reference to Cayley, and was of course unaware of Cayley's priority. Many of the theorems given by Frobenius in 1878 were given by Cayley in the memoir above referred to, and in his "Memoir on Matrices", also contained in the *Philosophical Transactions* for 1858.

**) See *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, vol. 29, p. 379.

employed by Frobenius is substancially identical with the notation of matrices. This notation will be employed in what follows.

In accordance with the notation of matrices, two linear substitutions are regarded as susceptible of being added or subtracted. Let $(\varphi)_{rs}$ denote the coefficient of the linear substitution φ which is the constituent in the r^{th} row and s^{th} column of its square array or matrix. Then the *sum* or *difference* of two linear substitutions φ and ψ is defined as follows:

$$(\varphi \pm \psi)_{rs} = (\varphi)_{rs} \pm (\psi)_{rs}.$$

As a linear substitution is determined by its matrix or square array of coefficients, I shall in what follows use the term matrix interchangeably with the term linear substitution.

Multiplication is taken as equivalent to the composition of linear substitutions. Consequently, multiplication is associative and distributive, but not in general commutative. That is, for any three linear substitutions φ, ψ, χ, we have

$$\varphi(\psi\chi) = (\varphi\psi)\chi,$$

and

$$\varphi(\psi + \chi) = (\varphi\psi) + (\varphi\psi),$$
$$(\varphi + \psi)\chi = (\varphi\chi) + (\psi\chi).$$

But in general we do not have

$$\varphi\psi = \psi\varphi.^{*)}$$

Multiplication of a linear substitution or matrix by a *scalar* g (that is, a real or imaginary of ordinary algebra) is defined as follows:

$$(g\varphi)_{rs} = g(\varphi)_{rs}.$$

We have

$$g\varphi = \varphi g.$$

The *reciprocal* of a linear substitution is, of course, that linear substitution which multiplied by or into the given substitution gives the identical substitution. We have

$$(\varphi\psi)^{-1} = \psi^{-1}\varphi^{-1}.$$

Following Cayley, the *identical substitution* will be denoted by 1. If g is a scalar, for the linear substitution $g1$, we have

$$(g1)_{rr} = g, \quad (g1)_{rs} = 0, \quad (r \neq s).$$

And following Cayley this substitution will be denoted simply by g. In particular, the substition whose coefficients are all zero (the substitution or *matrix zero*) will be denoted simply by 0.

Powers of a linear substitution or matrix are defined as follows:

*) If ψ is a polynomial in integer powers of φ, then $\varphi\psi = \psi\varphi$. Further, if $\varphi\psi = \psi\varphi$, and if $f(\varphi)$ and $F(\psi)$ are polynomials in φ and ψ respectively, we have $f(\varphi) \cdot F(\psi) = F(\psi) \cdot f(\varphi)$.

if m is any positive integer $\varphi^{m+1} = \varphi . \varphi^m$. We have $(\varphi^m)^{-1} = (\varphi^{-1})^m$. Consequently either member of this equation may be denoted by φ^{-m}; in which case the indexial law will be found to hold for integer powers of φ. If the linear substitution ψ satisfies the equation $\psi^m = \varphi$, in which m is a positive integer, ψ will be termed an m^{th} root of φ. Every linear substitution whose determinant does not vanish has an m^{th} root for any index m. A formula for the m^{th} root of the linear substitution φ as a polynomial in φ was given by Sylvester in the *Contes Rendus*, vol. 94, pp. 55, 396. This formula Sylvester afterwards extended to any function of φ expressable as a polynomial in φ*); and φ^m for any scalar m can be defined in accordance with this formula.

The linear substitution *transverse* or *conjugate* to φ (obtained by interchanging the rows and columns of the matrix or square array of coefficients of φ) will be denoted by $\breve{\varphi}$. We have

$$\breve{(\breve{\varphi})} = \varphi,$$

$$\overbrace{(\varphi + \psi)} = \breve{\varphi} + \breve{\psi},$$

$$\overbrace{(\varphi\psi)} = \breve{\psi}\breve{\varphi},$$

$$(\breve{\varphi}^{-1}) = (\breve{\varphi})^{-1}.$$

In particular if g is a scalar, $\breve{g} = g$. Finally, if $f(\varphi)$ denotes any polynomial in powers of φ, the tranverse of $f(\varphi)$ is $f(\breve{\varphi})$.

The linear substitution or matrix φ is *symmetric* if $(\varphi)_{rs} = (\varphi)_{sr}$, for which the necessary and sufficient condition is $\breve{\varphi} = \varphi$. The linear substitution φ is *skew symmetric* or *alternate* if $(\varphi)_{rs} = -(\varphi)_{sr}$, for which the necessary and sufficient condition is $\breve{\varphi} = -\varphi$. A polynomial in powers of a symmetric matrix is symmetric, and a polynomial in odd powers of a skew symmetric matrix is skew symmetric. If

$$\sum_1^{2n}{}^i (\varphi)_{ir}^2 = 1, \qquad \sum_1^{2n}{}^i (\varphi)_{ir} (\varphi)_{is} = 0,$$

for $r, s = 1, 2, \ldots (2n)$, but $r \neq s$ is *orthogonal*, for which the necessary and sufficient condition is $\breve{\varphi}\varphi = 1$.

The *determinant* of a linear substitution φ may be denoted by $|\varphi|$. If g is a scalar, the determinant of the linear substitution

$$\varphi - g = \varphi - g\,1$$

will then be denoted by $|\varphi - g|$; and the *characteristic equation* of φ is then

$$|\varphi - g| = 0.$$

---

*) *Johns Hopkins University Circulars*, 1884, p. 34.

We have

$$|\varphi\psi| = |\varphi| \cdot |\psi|,$$
$$|\breve{\varphi}| = |\varphi|,$$
$$|\varphi^{-1}| = \frac{1}{|\varphi|}.$$

By a theorem of Cayley's if the roots of the characteristic equation of the linear substitution φ of $2n$ variables are $g_1, g_2, \ldots g_{2n}$, we have

$$(\varphi - g_1)(\varphi - g_2) \cdots (\varphi - g_{2n}) = 0.$$

This is termed by Cayley the "identical equation" to φ. If the roots of the characteristic equation of φ are not all distinct, there may be syzygies between powers of φ of lower order than $2n$. The syzygy between powers of φ of lowest order may be termed the *fundamental syzygy*. Every syzygy between powers of φ contains the factor $\varphi - g$ for each distinct root of the characteristic equation of φ.*)

§ 2.

Cayley's notation for the bilinear form

$$\sum_1^{2n}{}^r \sum_1^{2n}{}^s (\Omega)_{rs} x_s y_r$$

is

$$(\Omega \between x_1, x_2, \ldots x_{2n} \between y_1, y_2, \ldots y_{2n}),$$

in which Ω denotes the matrix or square array of coefficients of the form. Throughout this paper it will be assumed that the form is alternate, that is, that

$$(\Omega)_{rr} = 0, \quad (\Omega)_{rs} = -(\Omega)_{sr};$$

for which the necessary and sufficient condition is

$$\breve{\Omega} = -\Omega.$$

If the x's and y's are cogrediant; and are transformed by the linear substitution φ so that

$$x_r = \sum{}^i (\varphi)_{ri}\xi_i, \qquad y_r = \sum{}^i (\varphi)_{ri}\eta_i,$$

substituting we have

$$(\Omega \between x_1, x_2, \ldots x_{2n} \between y_1, y_2, \ldots, y_{2n})$$
$$= (\breve{\varphi}\Omega\varphi \between \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{2n} \between \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{2n}).^{**)}$$

Since Ω is skew symmetric, the matrix of the new form is also skew symmetris, and this form is therefore alternate.

*) Frobenius: Crelle, vol. 84, p. 12.

**) *Philosophical Transactions*, 1858, p. 41.

The necessary and sufficient condition that the transformation shall be automorphic is

$$\breve{\varphi}\Omega\varphi = \Omega.$$

It is assumed throughout this paper that the determinant of the alternate bilinear form does not vanish, that is that $|\Omega| \neq 0$. But then, since $|\breve{\varphi}| = |\varphi|$, and therefore

$$|\varphi|^2 |\Omega| = |\breve{\varphi}\Omega\varphi| = |\Omega|,$$

we have

$$|\varphi|^2 = 1.$$

Since the square root of the determinant of the alternate bilinear form, that is the square root of $|\Omega|$, is a rational skew invariant of the form, we must have $|\varphi| = +1$.

If -1 is not a root of the characteristic equation of φ, then $1 + \varphi$ has a reciprocal. We may therefore, in this case, put

$$Y = \Omega(1 - \varphi)(1 + \varphi)^{-1};$$

whence we obtain

$$\begin{aligned}\breve{Y} &= \quad (1 + \breve{\varphi})^{-1}(1 - \breve{\varphi})\breve{\Omega} \\ &= -(1 - \breve{\varphi})\ \ (1 + \breve{\varphi})^{-1}\Omega.\end{aligned}$$

But, from the equation

$$\breve{\varphi}\Omega\varphi = \Omega,$$

since $|\varphi| \neq 0$, we derive

$$\breve{\varphi}\,\Omega = \Omega\varphi^{-1};$$

therefore

$$(1 \pm \breve{\varphi})\Omega = \Omega(1 \pm \varphi^{-1}).$$

Whence it follows that

$$\begin{aligned}\breve{Y} &= -\Omega(1 - \varphi^{-1})(1 + \varphi^{-1})^{-1} \\ &= -\Omega.(\varphi - 1)\varphi^{-1}.\varphi(\varphi + 1)^{-1} \\ &= \quad Y.\end{aligned}$$

That is, Y is symmetric.

We also have

$$(\Omega + Y)\varphi = (\Omega - Y).$$

And since

$$\Omega \pm Y = 2\Omega(1 + \varphi)^{-1} \quad \text{or} \quad 2\Omega(1 + \varphi)^{-1}\varphi,$$

according as we take the upper or lower sign, therefore

$$|\Omega \pm Y| \neq 0.$$

Consequently,

$$\varphi = (\Omega + Y)^{-1}(\Omega - Y).$$

This is substancially Cayley's expression for the linear substitution which automorphically transforms the alternate bilinear form whose matrix is Ω.

Conversely, if φ can be expressed thus in terms of a symmetric linear substitution Y, for which $|\Omega + Y| \neq 0$, it will satisfy the equation $\breve{\varphi}\Omega\varphi = \Omega$ *); and therefore transform automorphically the alternate bilinear form

$$(\Omega \between x_1, x_2, \ldots x_{2n} \between y_1, y_2, \ldots y_{2n}).$$

From the expression for φ in terms of Y, or the reverse, we obtain

$$(1 + \varphi)(1 + \Omega^{-1} Y) = 2;$$

whence follows

$$\begin{aligned} \frac{|1+\varphi| \cdot |\Omega + Y|}{|\Omega|} &= |1 + \varphi| \cdot |1 + \Omega^{-1} Y| \\ &= |2| \\ &= 2^{2n}. \end{aligned}$$

Therefore if -1 is a root of the characteristic equation of φ, this linear substitution is not given by Cayley's expression, at least for finite values of the coefficients of the symmetric matrix Y. Nevertheless, in this case by the theorem of Frobenius above referred to, a symmetric linear substitution Y_ϱ can always be found whose coefficients are rational functions of a parameter ϱ of which one at least is infinite for $\varrho = 0$, such that $(\Omega + Y_\varrho)^{-1}(\Omega - Y_\varrho)$ may be made as nearly as we please equal to φ by taking ϱ sufficiently small.

§ 3.

As in the last section, let φ satisfy the equation

$$\breve{\varphi}\Omega\varphi = \Omega.$$

Let the roots of the characteristic equation of φ be -1 of multiplicity p, g_1 of multiplicity p_1, g_2 of multiplicity p_2, etc., and g_i of multiplicity p_i.**) We then have

---

*) For if $\varphi = (\Omega + Y)^{-1}(\Omega - Y)$ in which Ω is skew symmetric and Y is symmetric, then

$$\breve{\varphi} = (\breve{\Omega} - \breve{Y})(\breve{\Omega} + \breve{Y})^{-1} = (\Omega + Y)(\Omega - Y)^{-1}.$$

Therefore, if

$$A = \Omega + Y, \quad B = (\Omega - Y), \quad \breve{\varphi}\Omega\varphi = AB^{-1}\left(\frac{A+B}{2}\right)A^{-1}B$$

which is identically equal to $\dfrac{A+B}{2}$ or Ω.

**) The roots of the characteristic equation of φ occur in pairs the product of two the same pair being unity. Frobenius, Crelle, vol. 84, p. 34.

Since the determinant of φ is equal to $+1$, p is even.

$$|\varphi - g| = (g+1)^p (g-g_1)^{p_1} (g-g_2)^{p_2} \dots (g-g_i)^{p_i};$$

and the identical equation to φ is

$$(\varphi+1)^p (\varphi-g_1)^{p_1} (\varphi-g_2)^{p_2} \dots (\varphi-g_i)^{p_i} = 0.$$

Corresponding respectively to the distinct roots of the characteristic equation of φ,

$$-1, g_1, g_2, \dots g_i,$$

are certain polynomials in φ which will be denoted by

$$\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots \Phi_i.$$

If

$$G^{(s)}(z) = \frac{\left[(z+1)^p - (g_s+1)^p\right]^{p_s}}{(-1)^{p_s}(g_s+1)^{p p_s}},$$

$$G_r^{(s)}(z) = \frac{\left[(z-g_r)^{p_r} - (g_s-g_r)^{p_r}\right]^{p_s}}{(-1)^{p_s}(g_s-g_r)^{p_r p_s}},$$

and if

$$F_0(z) = G^{(1)}(z) \cdot G^{(2)}(z) \cdots G^{(i)}(z),$$

$$F_r(z) = \frac{\left[(z-g_r)^{p_r} - (-1-g_r)^{p_r}\right]^p}{(-1)^{p(p_r+1)}(1+g_r)^{p_r p}} \cdot G_r^{(1)}(z) \cdot G_r^{(2)}(z) \cdots G_r^{(r-1)}(z) \cdot G_r^{(r+1)}(z) \cdots G_r^{(i)}(z),$$

then

$$\Phi_0 = F_0(\varphi),\ \Phi_1 = F_1(\varphi),\ \Phi_2 = F_2(\varphi), \dots \Phi_i = F_i(\varphi).$$

Since each polynomial contains every factor of the identical equation except that factor belonging to the root to which the polynomial corresponds, the binary products of different polynomials all vanish. But

$$\Phi_0^2 = \Phi_0, \quad \Phi_r^2 = \Phi_r \quad (r = 1, 2, \dots i).$$

Moreover,

$$1 = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_i,$$

and

$$(\varphi+1)^p \Phi_0 = 0, \quad (\varphi-g_r)^{p_r}\Phi_r = 0 \quad (r = 1, 2, \dots i).$$

Finally, if $f(z)$ denotes any rational integral function of z,

$$f(\varphi^{-1}) = \Big[f(z^{-1}) + (\varphi+1)\frac{d}{dz}f(z^{-1}) + \frac{(\varphi+1)^2}{2}\frac{d^2}{dz^2}f(z^{-1}) + \cdots + \frac{(\varphi+1)^{p-1}}{(p-1)!}\frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}f(z^{-1})\Big]_{z=-1}\Phi_0$$
$$+ \sum_1^i {}_r \Big[f(z^{-1}) + (\varphi-g_r)\frac{d}{dz}f(z^{-1}) + \frac{(\varphi-g_r)^2}{2}\frac{d^2}{dz^2}f(z^{-1}) + \cdots + \frac{(\varphi-g^r)^{p_r-1}}{(p_r-1)!}\frac{d^{p_r-1}}{dz^{p_r-1}}f(z^{-1})\Big]_{z=g_r}\Phi_r.\text{*)}$$

*) See paper to appear in a forthcoming number of the *American Journal of Mathematics.*

As a consequence of the last theorem we have

$$F_0(\varphi^{-1}) = \Phi_0;$$

since for $z = -1$,

$$F_0(z^{-1}) = 1, \quad \frac{d}{dz} F_0(z^{-1}) = 0, \quad \cdots \frac{d^{p-1}}{d z^{p-1}} F_0(z^{-1}) = 0,$$

and for

$$z = g_r \quad (r = 1, 2, \ldots i),$$

both $F_0(z^{-1})$ and its first $p_r - 1$ differential coefficients vanish.

Since

$$\breve{\varphi} \Omega \varphi = \Omega,$$

and since the determinant of φ is not zero,

$$\breve{\varphi} \; \Omega = \Omega \varphi^{-1},$$

$$\breve{\varphi}^2 \Omega = \Omega \varphi^{-2},$$

etc.,

finally

$$f(\breve{\varphi}) \Omega = \Omega f(\varphi^{-1}).$$

Therefore by what has just been stated

$$\breve{\Phi}_0 \Omega = F_0(\breve{\varphi}) \Omega = \Omega F_0(\varphi^{-1}) = \Omega \Phi_0.$$

If now we put

$$\varphi_0 = 1 - 2\Phi_0,$$

and

$$\varphi_1 = \varphi \varphi_0 = \varphi_0 \varphi,$$

we have

$$\varphi_0{}^2 = (1 - 2\Phi_0)^2 = 1,$$

$$\breve{\varphi}_0 \Omega = (1 - 2\breve{\Phi}_0) \Omega = \Omega (1 - 2\Phi_0) = \Omega \varphi_0.$$

Consequently

$$\breve{\varphi}_0 \Omega \varphi_0 = \Omega \varphi_0{}^2 = \Omega,$$

$$\breve{\varphi}_1 \Omega \varphi_1 = \breve{\varphi}_0 \breve{\varphi} \Omega \varphi \varphi_0 = \breve{\varphi}_0 \Omega \varphi_0 = \Omega.$$

Let

$$H(g) \equiv \frac{|\varphi - g|}{(g+1)^p} = (g - g_1)^{p_1} (g - g_2)^{p_2} \cdots (g - g_i)^{p_i}.$$

Then any rational symmetric function of the roots of the equation $H(g) = 0$ can be expressed rationally in terms of the coefficients of the equation $|\varphi - g| = 0$, the characteristic equation of φ. The coefficients of this equation are rational functions of the coefficients of φ; and since the coefficients of the powers of g in $F_0(g)$ are rational symmetric functions of the roots of the equation $H(g) = 0$, these coefficients can be expressed rationally in terms of the coefficients of φ. Consequently the coefficients of the linear subtitution $F_0(\varphi)$ are rational functions of the coefficients of φ.

From this it follows that the coefficients of the linear substitution $\varphi_0 = 1 - 2\Phi_0$ and $\varphi_1 = \varphi\varphi_0$ are rational functions of the coefficients of φ.

Moreover, if φ is real, Φ_0 is real, since, if φ is real, the imaginary roots of the characteristic equation of φ occur in pairs which are conjugate imaginary. Therefore, if φ is real, both φ_0 and φ_1 are real.

The characteristic equation of φ_1 has not -1 as a root. For

$$\varphi_1 = \varphi(1-2\Phi_0) = -\varphi\Phi_0 + \varphi\Phi_1 + \varphi\Phi_2 + \cdots + \varphi\Phi_i.$$

Therefore,

$$(\varphi_1 - 1)\Phi_0 = -(\varphi+1)\Phi_0,$$

and for $r = 1, 2, \ldots i$

$$(\varphi_1 - g_r)\Phi_r = (\varphi - g_r)\Phi_r;$$

and consequently

$$(\varphi_1 - 1)^p\,\Phi_0 = (-1)^p\,(\varphi+1)^p\,\Phi_0 = 0,$$
$$(\varphi_1 - g_r)^{p_r}\,\Phi_r = (\varphi - g_r)^{p_r}\,\Phi_r = 0.$$

Whence we obtain

$$(\varphi_1 - 1)^p = (\varphi_1 - 1)^p(1 - \Phi_0)$$

and for $r = 1, 2, \ldots i$,

$$(\varphi_1 - g_r)^{p_r} = (\varphi_1 - g_r)^{p_r}\,(1 - \Phi_r);$$

and therefore

$$(\varphi_1 - 1)^p(\varphi_1 - g_1)^{p_1}(\varphi_1 - g_2)^{p_2}\ldots(\varphi_1 - g_i)^{p_i}$$
$$= [(\varphi_1 - 1)^p(\varphi_1 - g_1)^{p_1}(\varphi_1 - g_2)^{p_2}\cdots(\varphi_1 - g_i)^{p_i}][1 - \Phi_0 - \Phi_1 - \Phi_2 - \cdots - \Phi_i]$$
$$= 0.$$

But $\varphi_1 + 1$ is not a factor of this syzygy in powers of φ_1, therefore -1 cannot be a root of the characteristic equation of φ_1.

Since -1 is not a root of the characteristic equation of φ_1, we may put

$$Y_1 = \Omega(1-\varphi_1)(1+\varphi_1)^{-1};$$

whence we obtain as in § 2

$$\breve{Y}_1 = Y_1,$$

and

$$\varphi_1 = (\Omega + Y_1)^{-1}(\Omega - Y_1).$$

The coefficients of Y_1 are rational functions of the coefficients of Ω and of φ. For they are rational functions of the coefficients of Ω and of the coefficients of φ_1; and the latter are rational functions of the coefficients of φ. Since if φ is real, φ_1 is also real; therefore, if φ and Ω are real, Y_1 is also real.

§ 4.

In this and in the next two sections it will be assumed that the matrix Ω of the alternate bilinear form is real, and that the linear substitution φ satisfying the equation $\breve{\varphi}\,\Omega\,\varphi = \Omega$ is also real. But then since φ is real, both φ_0 and φ_1 are real.

If now Ω is not only skew symmetric, but is also orthogonal, that is, if $\breve{\Omega}\Omega = 1$ (whence we derive $\Omega^2 = -1$), let

$$X = \breve{\varphi}_0 \Omega = \Omega \varphi_0 .$$

We then have

$$\breve{X} = \breve{\Omega}\varphi_0 = -\Omega\varphi_0 = -X,$$

and

$$\Omega^{-1} X \Omega^{-1} X = \varphi_0{}^2 = 1;$$

and therefore

$$\breve{X}\Omega X = X(-\Omega)X = X\Omega^{-1}X = \Omega .$$

Since φ_0 and Ω are real, X is a real skew symmetric matrix. Therefore -1 is not a root of the characteristic equation of X. Consequently we may put

$$Y_0 = \Omega(1-X)\,(1+X)^{-1};$$

whence we obtain

$$\breve{Y}_0 = Y_0,$$

and

$$X = (\Omega + Y_0)^{-1}(\Omega - Y_0).$$

Since the coefficients of Y_0 are rational functions of the coefficients of Ω and of φ_0, they are therefore rational functions of the coefficients of Ω and of φ.

We have now

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_0\varphi_1 \\ &= \Omega^{-1} X \varphi_1 \\ &= \Omega^{-1}(\Omega + Y_0)^{-1}(\Omega - Y_0)(\Omega + Y_1)^{-1}(\Omega - Y_1).\end{aligned}$$

If -1 is not a root of the characteristic equation of φ, this linear substitution can also be thus expressed. For, if in the above expression, we put $Y_0 = 1$, it reduces to

$$(\Omega + Y_1)^{-1}(\Omega - Y_1),$$

since

$$\begin{aligned}\Omega^{-1}(\Omega+1)^{-1}(\Omega-1) &= (\Omega^2+\Omega)^{-1}(\Phi-1) \\ &= (\Omega-1)^{-1}(\Omega-1) \\ &= 1;\end{aligned}$$

and we have only to put

$$Y_1 = \Omega(1-\varphi)(1+\varphi)^{-1},$$

which is now possible.

In this case, that is, if -1 is not a root of the characteristic equation of φ, $p=0$, and therefore $\Phi_0 = 0$; consequently $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1 = \varphi$, $X = \Omega$, and

$$Y_1 = \Omega(1-\varphi)(1+\varphi)^{-1},$$
$$Y_0 = \Omega(1-\Omega)(1+\Omega)^{-1} = 1.$$

We have therefore the following theorem:

Every real linear substitution φ which transforms automorphically the real alternate and orthogonal bilinear form

$$(\Omega \between x_1, x_2, \ldots x_{2n} \between y_1, y_2, \ldots y_{2n}),$$

the x's and y's being cogredient, is given by the expression

$$\Omega^{-1}(\Omega+Y_0)^{-1}(\Omega-Y_0)(\Omega+Y_1)^{-1}(\Omega-Y_1),$$

in which Y_0 and Y_1 are real symmetric linear substitutions such that

$$|\Omega+Y_0| \neq 0, \quad |\Omega+Y_1| \neq 0.$$

Moreover, the coefficients of Y_0 and Y_1 can be expressed as rational functions of the coefficients of φ and the coefficients of the bilinear form. Thus if -1 is a root of the characteristic equation of φ of multiplicity p (which may be zero), and if the roots of the characteristic equation of φ, other than -1, are

$$g_1, g_2, \ldots g_N, \qquad (N = 2n - p)$$

and if

$$F(z) = \frac{[(z+1)^p - (g_1+1)^p][(z+1)^p - (g_2+1)^p] \cdots [(z+1)^p - (g_N+1)^p]}{(-1)^N (g_1+1)^p (g_2+1)^p \cdots (g_N+1)^p},$$

we may put

$$Y_0 = [\Omega+1) - 2F(\varphi)][(\Omega+1) - 2\Omega F(\varphi)]^{-1},$$
$$Y_1 = \Omega[(1-\varphi) + 2\varphi F(\varphi)][(1+\varphi) - 2\varphi F(\varphi)]^{-1}.^{*})$$

§ 5.

Now if φ is a solution of the equation $\breve{\varphi}\Omega\varphi = \Omega$, in which $\Omega^2 = -1$, then $\psi = \Omega^{-1}\varphi$ is also a solution of this equation. For then

$$\breve{\psi}\Omega\psi = \breve{\varphi}\breve{\Omega}^{-1}\,.\,\Omega\,.\,\Omega^{-1}\varphi = \breve{\varphi}\Omega\varphi = \Omega.$$

Since it is assumed that φ and Ω are real, ψ also is real.

Let -1 be a root of the characteristic equation of ψ of multiplicity p' (which may be equal to zero), and let the roots of the characteristic equation of ψ other than -1 be

$$g_1', g_2', \ldots g'_{N'} \qquad (N' = 2n - p').$$

---

*) $F(\varphi)$ now replaces $\Phi_0 = F_0(\varphi)$.

Further, let

$$F(z) = \frac{\left[(z+1)^{p} - (g_1'+1)^{p'}\right]\left[(z+1)^{p'} - (g_2'+1)^{p'}\right]\cdots\left[(z+1)^{p'} - (g_{N'}'+1)^{p'}\right]}{(-1)^{N'}(g_1'+1)^{p'}(g_2'+1)^{p'}\cdots(g_{N'}'+1)^{p'}}.$$

Then as shown in the last section, if

$$Y_0' = [(\Omega+1) - 2F(\psi)]\,[(\Omega+1) - 2\Omega F(\psi)]^{-1},$$
$$Y_1' = \Omega[(1-\psi) + 2\psi F(\psi)]\,[(1+\psi) - 2\psi F(\psi)],$$

Y_0' and Y_1' are symmetric, and we have

$$\Omega^{-1}\varphi = \psi = \Omega^{-1}(\Omega+Y_0')^{-1}(\Omega-Y_0')\,(\Omega+Y_1')^{-1}(\Omega-Y_1').$$

Therefore

$$\varphi = (\Omega+Y_0')^{-1}(\Omega-Y_0')\,(\Omega+Y_1')\,(\Omega-Y_1').$$

In this expression for φ the coefficients of Y_0', Y_1' are rational functions of the coefficients of Ω and of $\psi = \Omega^{-1}\varphi$, and are therefore rational functions of the coefficients of Ω and of φ.

The roots of the characteristic equation of ψ, namely the roots of the equation

$$|\psi - g| = 0,$$

are identical with the roots of the equation

$$|\varphi - g\Omega| = 0.$$

For

$$|\psi - g| = |\Omega^{-1}\varphi - g| = |\Omega^{-1}(\varphi - g\Omega)| = \frac{1}{|\Omega|}\,|\varphi - g\Omega|.$$

We have therefore the following theorem:

Every real linear substitution φ which transforms automorphically the real alternate and orthogonal bilinear form

$$(\Omega \between x_1, x_2, \ldots x_{2n} \between y_1, y_2, \ldots y_{2n}),$$

the x's and y's being cogrediant, is given by the expression

$$(\Omega+Y_0')^{-1}(\Omega-Y_0')\,(\Omega+Y_1')^{-1}\,(\Omega-Y_1'),$$

in which Y_0' and Y_1' are real symmetric linear substitutions such that

$$|\Omega + Y_0'| \neq 0, \quad |\Omega + Y_1'| \neq 0.$$

Moreover, if -1 is a root of multiplicity p' (which may be zero) of the equation

$$|\varphi - g\Omega| = 0,$$

and if the root of the equation, other than -1, are

$$g_1', g_2', \ldots g_N', \qquad (N' = 2n - p')$$

and if

$$F(z) = \frac{\left[(z+1)^{p'} - (g_1'+1)^{p'}\right]\left[(z+1)^{p'} - (g_2'+1)^{p'}\right]\cdots\left[(z+1)^{p'} - (g_{N'}'+1)^{p'}\right]}{(-1)^{N'}(g_1'+1)^{p'}(g_2'+1)^{p'}\cdots(g_{N'}'+1)^{p'}},$$

we may put

$$Y_0' = [(1+\Omega) - 2F(\Omega^{-1}\varphi)]\,[(1+\Omega) - 2\Omega F(\Omega^{-1}\varphi)]^{-1},$$
$$Y_1' = [(\Omega-\varphi) + 2\varphi F(\Omega^{-1}\varphi)]\,[(\Omega+\varphi) - 2\varphi F(\Omega^{-1}\varphi)]^{-1}\Omega.$$

The coefficients of Y_0' and Y_1' are then rational functions of the coefficients of φ and of Ω.

§ 6.

If Ω is real but is not orthogonal, we may proceed as follows. Since Ω is real and skew symmetric, the roots of its characteristic equation are purely imaginary. Therefore, the roots of the characteristic equation of the real symmetric matrix $-\Omega^2$ are all positive; and consequently there are real symmetric fourth roots of $-\Omega^2$.*) Let ω denote any real symmetric fourth root of $-\Omega^2$ expressable as a polynomial in $-\Omega^2$. Then ω is commutative with Ω; and if

$$\Omega' = \frac{\Omega}{\omega^2}$$

we have

$$\Omega'^2 = \left(\frac{\Omega}{\omega^2}\right)^2 = \frac{\Omega^2}{\omega^4} = -1.$$

Let now φ be any real solution of the equation

$$\breve{\varphi}\Omega\varphi = \Omega.$$

This equation may be written

$$\breve{\varphi}\omega \cdot \frac{\Omega}{\omega^2} \cdot \omega\varphi = \omega\frac{\Omega}{\omega^2}\omega,$$

that is

$$\omega^{-1}\breve{\varphi}\omega \cdot \Omega' \cdot \omega\varphi\omega^{-1} = \Omega',$$

which if

$$\psi = \omega\varphi\omega^{-1},$$

becomes,

$$\breve{\psi}\Omega'\psi = \Omega'.$$

Conversely, if ψ satisfies this equation,

$$\varphi = \omega^{-1}\psi\omega$$

will satisfy the equation

$$\breve{\varphi}\Omega\varphi = \Omega.$$

Since φ and ω are real, ψ is also real. Therefore by § 5 we may put

$$\psi = (\Omega' + Y_0')^{-1}(\Omega' - Y_0')\,(\Omega' + Y_1')^{-1}(\Omega' - Y_1'),$$

in which Y_0' and Y_1' are real and symmetric.

---

*) *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 22, p. 461.

In this expression for ψ substituting for Ω' its equal $\omega^{-1}\Omega\omega^{-1}$, and putting

$$Y_0' = \omega^{-1} Y_0 \omega^{-1},$$
$$Y_1' = \omega^{-1} Y_1 \omega^{-1},$$

we have

$$\begin{aligned}
\omega\varphi\omega^{-1} = \psi & \\
&= (\omega^{-1}\Omega\omega^{-1} + \omega^{-1} Y_0 \omega^{-1})^{-1}(\omega^{-1}\Omega\omega^{-1} - \omega^{-1} Y_0 \omega^{-1}) \\
&\qquad \times (\omega^{-1}\Omega\omega^{-1} + \omega^{-1} Y_1 \omega^{-1})^{-1}(\omega^{-1}\Omega\omega^{-1} - \omega^{-1} Y_1 \omega^{-1}) \\
&= \omega(\Omega + Y_0)^{-1}\omega \cdot \omega^{-1}(\Omega - Y_0)\omega^{-1} \\
&\qquad \times \omega(\Omega + Y_1)^{-1}\omega \,.\, \omega^{-1}(\Omega - Y_1)\omega^{-1} \\
&= \omega(\Omega + Y_0)^{-1}(\Omega - Y_0)(\Omega + Y_1)^{-1}(\Omega - Y_1)\omega^{-1}.
\end{aligned}$$

Therefore

$$\varphi = (\Omega + Y_0)^{-1}(\Omega - Y_0)(\Omega + Y_1)^{-1}(\Omega - Y_1).$$

Since

$$Y_0 = \omega Y_0' \omega,$$
$$Y_1 = \omega Y_1' \omega,$$

both Y_0 and Y_1 are real and symmetric.

We thus obtain the following theorem:

Every real linear substitution which transforms automorphically the real alternate bilinear form

$$(\Omega \between x_1, x_2, \dots x_{2n} \between y_1, y_2, \dots y_{2n})$$

of non-zero determinant, the x's and y's being cogrediant, is given by the expression

$$(\Omega + Y_0)^{-1}(\Omega - Y_0)(\Omega + Y_1)^{-1}(\Omega - Y_1)$$

in which Y_0 and Y_1 are real and symmetric and such that

$$|\Omega + Y_0| \neq 0, \quad |\Omega + Y_1| \neq 0.$$

§ 7.

Let e^{Θ} denote the infinite series $\sum_0^\infty {}_r \frac{\Theta^r}{r!}$, convergent for any matrix or linear substitution. We then have

$$(e^{\Theta})^{-1} = e^{-\Theta},$$
$$(\breve{e^{\Theta}}) = e^{\breve{\Theta}},$$

and for any integer m

$$(e^{\Theta})^m = e^{m\Theta};$$

moreover if Θ and Θ' are commutative,

$$e^{\Theta} e^{\Theta'} = e^{\Theta + \Theta'}.$$

Finally, for any linear substitution φ whose determinant is not zero, a polynomial Θ in integer powers of φ can be found such that

$$\varphi = e^{\Theta}.$$

Let now Ω be any skew symmetric matrix real or imaginary whose determinant is not zero, and let φ be any solution of the equation

$$\breve{\varphi}\,\Omega\,\varphi = \Omega$$

real or imaginary given by Cayley's expression; that is, let

$$\varphi = (\Omega + Y)^{-1}(\Omega - Y) = (1 + \Omega^{-1}Y)^{-1}(1 - \Omega^{-1}Y),$$

in which Y is symmetric, and such that $|\Omega + Y| \neq 0$. But then, since $|1 + \Omega^{-1}Y| \neq 0$, it follows from what precedes that a polynomial in $\Omega^{-1}Y$, namely $\vartheta_1 = f(\Omega^{-1}Y)$ can be found such that

$$1 + \Omega^{-1}Y = e^{\vartheta_1}.$$

If $\vartheta_2 = f(-\Omega^{-1}Y)$, we then have

$$1 - \Omega^{-1}Y = e^{\vartheta_2};\text{*)}$$

and therefore, (since ϑ_1 and ϑ_2 are both polynomials in $\Omega^{-1}Y$ and consequently commutative) if $\Theta\Omega = -\vartheta_1 + \vartheta_2$,

$$\varphi = (e^{\vartheta_1})^{-1}e^{\vartheta_2} = e^{-\vartheta_1}e^{\vartheta_2} = e^{\Theta\Omega}.$$

For any integer r, $(\Omega^{-1}Y)^{2r+1}\Omega^{-1}$ is symmetric; and therefore, since

$$-\vartheta_1 + \vartheta_2 = -f(\Omega^{-1}Y) + f(-\Omega^{-1}Y)$$

is a polynomial in odd powers of $\Omega^{-1}Y$,

$$\Theta = (-\vartheta_1 + \vartheta_2)\Omega^{-1}$$

is symmetric. Consequently, if m is any positive integer, and if

$$\psi = e^{\frac{1}{m}\Theta\Omega},$$

then

$$\breve{\psi} = e^{-\frac{1}{m}\Omega\Theta};$$

*) Equating the transverse of both members of equation

$$1 + \Omega^{-1}Y = e^{\vartheta_1},$$

we have

$$1 - Y\Omega^{-1} = e^{\breve{\vartheta}_1}.$$

But

$$\breve{\vartheta}_1 = f(\widetilde{\Omega^{-1}Y}) = f(-Y\Omega^{-1}) = f(-\Omega\,.\,\Omega^{-1}Y\,.\,\Omega^{-1}) = \Omega\, f(-\Omega^{-1}Y)\,.\,\Omega^{-1}$$
$$= \Omega\,\vartheta_2\,\Omega^{-1}.$$

Therefore

$$\Omega(1 - \Omega^{-1}Y)\Omega^{-1} = 1 - Y\Omega^{-1} = e^{\breve{\vartheta}_1} = e^{\Omega\vartheta_2\Omega^{-1}} = \Omega e^{\vartheta_2}\Omega^{-1};$$

and consequently

$$1 - \Omega^{-1}Y = e^{\vartheta_2}.$$

and we have

$$\breve{\psi}\Omega\psi = e^{-\frac{1}{m}\Omega\Theta}\,\Omega e^{\frac{1}{m}\Theta\Omega}$$
$$= \Omega e^{-\frac{1}{m}\Theta\Omega}\, e^{\frac{1}{m}\Theta\Omega} \,{}^{*)}$$
$$= \Omega.$$

We also have

$$\varphi = e^{\Theta\Omega} = \left(e^{\frac{1}{m}\Theta\Omega}\right)^m = \psi^m.$$

Whence it follows that any solution of the equation

$$\breve{\varphi}\Omega\varphi = \Omega$$

given by Cayley's expression has an m^{th} root which is also a solution of this equation. The coefficients of this m^{th} root ψ can be expressed as algebraic functions of the coefficients of the substitution φ.

By taking m sufficiently great the coefficients of the linear substitution or matrix $\frac{1}{m}\Theta\Omega$ may all be made as nearly as we please equal to zero, and thus $e^{\frac{1}{m}\Theta\Omega}$ may be made to approach as near as we please to the identical substitution. But since, however great m may be,

$$\varphi = \psi^m,$$

and

$$\breve{\psi}\Omega\psi = \Omega,$$

it follows that every solution of the equation

$$\breve{\varphi}\Omega\varphi = \Omega$$

given by Cayley's expression can be generated by the repetition of an infinitesimal linear substitution (that is, a linear substitution differing infinitesimally from the identical substitution) which is also a solution of this equation.

A-fortiori, if φ is a solution of the equation

$$\breve{\varphi}\Omega\varphi = \Omega$$

given by the square of Cayley's expression, a symmetric linear substitution Θ can be found such that

$$\varphi = e^{\Theta\Omega};$$

and then if

$$\psi = e^{\frac{1}{m}\Theta\Omega},$$

*) For any positive integer r, we have

$$(\Omega\Theta)^r\Omega = \Omega(\Theta\Omega)^r.$$

Therefore

$$e^{-\frac{1}{m}\Omega\Theta}\,\Omega = \Omega e^{-\frac{1}{m}\Theta\Omega}.$$

ψ is also a solution of the equation, and

$$\varphi = \psi^m.$$

Consequently every solution of the equation

$$\breve{\varphi}\Omega\varphi = \Omega$$

given by the square of Cayley's expression has an m^{th} root which is a solution of this equation, and can be generated by the repetition of an infinitesimal substitution which also satisfies this equation.

In § 3 it was shown that if φ is any solution of the equation

$$\breve{\varphi}\Omega\varphi = \Omega,$$

we may put

$$\varphi = \varphi_0\varphi_1,$$

in which φ_0 and φ_1 are commutative; and

$$\varphi_0^2 = 1,$$

$$\varphi_1 = (\Omega + Y)^{-1}(\Omega - Y)$$

(Y being symmetric and such that $|\Omega + Y| \neq 0$). We therefore have

$$\varphi^2 = \varphi_0^2\varphi_1^2 = \varphi_1^2 = [(\Omega + Y)^{-1}(\Omega - Y)]^2.$$

Consequently every solution of the equation

$$\breve{\varphi}\Omega\varphi = \Omega$$

which is the second power of a solution of this equation is given by the square of Cayley's expression.

But not every solution of this equation is the second power of a linear substitution satisfying the equation. We are therefore led to designate a solution of this equation, that is a substitution of the group of linear substitutions which transform automorphically the alternate bilinear form

$$(\Omega \between x_1, x_2, \ldots x_{2n} \between y_1, y_2, \ldots y_{2n})$$

as of the first or second kind according as it is or is not the second power of a substitution of the group. From what precedes, we see that every substitution of the group given by Cayley's expression is of the first kind; and that every linear substitution of the first kind is given by the square of Cayley's expression, has an m^{th} root belonging to the group, and can be generated by the repetition of an infinitesimal substitution of the group.

The characteristic equation of an infinitesimal linear substitution cannot have -1 as a root. Therefore every infinitesimal substitution of the group is given by Cayley's expression (the coefficients of Y

being all infinately near to zero)*), and is consequently of the first kind. Since the repetition of a linear substitution of the first kind gives a substitution of that kind, it follows that no linear substitution of the second kind can be generated by the repetition of an infinitesimal substitution of the group.**)

Every linear substitution of the second kind has a $(2m+1)^{\text{th}}$ root belonging to the group, for any positive integer m. For if φ is any solution of the equation

$$\breve{\varphi}\Omega\varphi = \Omega,$$

(and therefore, *a-fortiori*, if φ is a solution of this equation of the second kind), we may put

$$\varphi = \varphi_0\varphi_1,$$

in which φ_0 and φ_1 are solution of the equation, are commutative, and

$$\varphi_0^2 = 1;$$

whereas, -1 is not a root of the characteristic equation of φ_1, so that we may put

$$\Omega^{-1} Y = (1-\varphi_1)(1+\varphi_1)^{-1}$$

(in consequence of which Y is symmetric), and have

$$\varphi_1 = (1+\Omega^{-1} Y)^{-1}(1-\Omega^{-1} Y).$$

Proceedings as before, if

$$\vartheta_1 = f(\Omega^{-1} Y)$$

is a polynomial in $\Omega^{-1} Y$ such that

$$1 + \Omega^{-1} Y = e^{\vartheta_1},$$

then, if

$$\vartheta_2 = f(-\Omega^{-1} Y),$$
$$1 - \Omega^{-1} Y = e^{\vartheta_2};$$

and if

$$\Theta = (-\vartheta_1 + \vartheta_2)\Omega^{-1},$$

*) If -1 is not a root of the characteristic equation of φ, then

$$\varphi = (\Omega + Y)^{-1}(\Omega - Y),$$

and

$$Y = \Omega(1-\varphi)(1+\varphi)^{-1}.$$

If φ is infinately near to the identical substitution, the coefficients of $1-\varphi$ are all infinitesimal, and the linear substitution $1+\varphi$ is infinately near to the substitution $2 . 1$; therefore, since Ω is finite, the coefficients of the linear substitution $\Omega(1-\varphi)(1+\varphi)^{-1}$ are all infinitesimal, that is the coefficients of Y are all infinately near to zero.

**) That is, no linear substitution of the second kind can be generated by the repetition of *one and the same* infinitesimal substitution of the group. Every linear substitution of the group can be generated by infinitesimal substitutions of the group.

Θ is symmetric, and

$$\varphi_1 = e^{\Theta\Omega}.$$

Since $\Theta\Omega$ is a polynomial in $\Omega^{-1}Y$, it can be expressed as a polynomial in φ_1. Therefore $\Theta\Omega$ is commutative with φ_0, and $e^{\frac{1}{2m+1}\Theta\Omega}$ is also commutative with φ_0. If now

$$\psi = \varphi_0 e^{\frac{1}{2m+1}\Theta\Omega},$$

we then have

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0\varphi_1 \\ &= \varphi_0 e^{\Theta\Omega} \\ &= \left(\varphi_0 e^{\frac{1}{2m+1}\Theta\Omega}\right)^{2m+1} \\ &= \psi^m, \end{aligned}$$

and, moreover,

$$\begin{aligned} \psi\Omega\psi &= e^{-\frac{1}{2m+1}\Omega\Theta}\breve{\varphi}_0\Omega\varphi_0 e^{\frac{1}{2m+1}\Theta\Omega} \\ &= e^{-\frac{1}{2m+1}\Omega\Theta}\Omega e^{\frac{1}{2m+1}\Theta\Omega} \\ &= \Omega e^{-\frac{1}{2m+1}\Theta\Omega} e^{\frac{1}{2m+1}\Theta\Omega} \\ &= \Omega. \end{aligned}$$

By definition no linear substitution of the second kind can have a $(2m)^{\text{th}}$ root which is a substitution of the group. But from the theorem of Frobenius referred to in § 1, it follows that a substitution of the first kind (itself an even power of a substitution of the group) can be found which shall be as nearly as we please equal to the substitution of the second kind in question. Thus, if φ is any substitution of the second kind, by the theorem of Frobenius, a symmetric linear substitution Y_ϱ can be found whose coefficients are rational functions of a parameter ϱ, one of which at least is infinite for $\varrho = 0$, such that the several coefficients of the substitution

$$\varphi_\varrho = (\Omega + Y_\varrho)^{-1}(\Omega - Y_\varrho)$$

can be made as nearly as we please equal to the corresponding coefficients of φ by taking ϱ sufficiently small. Thus we have

$$\varphi = \lim_{\varrho=0}[(\Omega + Y_\varrho)^{-1}(\Omega - Y_\varrho)].$$

Since φ_ϱ is given by Cayley's expression, a linear substitution ψ_ϱ which also belongs to the group can be found whose coefficients are algebraic functions of the coefficients of φ_ϱ (and therefore algebraic functions of the parameter ϱ) such that

$$\varphi_\varrho = \psi_\varrho^{2m}.$$

Therefore, by taking ϱ sufficiently small, ψ_ϱ^{2m} can be made as nearly as we please equal to φ. So long as $\varrho \neq 0$, φ_ϱ is a linear substitution of the first kind, that is, it is an even power of a linear substitution of the group; but the limit of φ_ϱ, for $\varrho = 0$, namely the linear substitution φ, is of the second kind, that is φ is not an even power of any linear substitution of the group. A discontinuity therefore exists is the case of linear substitutions of the second kind.

These results may be summarized as follows. *Any linear substitution (real or imaginary) belonging to the group of linear substitutions which transform automorphically the alternate bilinear form*

$$(\Omega \between x_1, x_2, \ldots x_{2n} \between y_1, y_2, \ldots y_{2n})$$

of non-zero determinant, the x's and y's being cogrediant is of the first or second kind according as it is or is not the second power of a linear substitution of the group. All linear substitutions given by Cayley's expression (including all infinitesimal linear substitutions of the group) are of the first kind. And every linear substitution of the first kind has an m^{th} *root belonging to the group for any index* m, *can be generated by the repetition of an infinitesimal substitution of the group, and is given by the square of Cayley's expression. No linear substitution of the second kind can be generated by the repetition of one and the same infinitesimal substitution of the group. Every linear substitution of the second kind has a* $(2m+1)^{th}$ *root belonging to the group for any integer* m; *but no linear substitution of the second kind has a* $(2m)^{th}$ *root belonging to the group. Nevertheless, corresponding to any linear substitution* φ *of the second kind, a linear substitution* ψ_ϱ *belonging to the group, whose coefficients are algebraic functions of a parameter* ϱ, *can always be found such that* $(\psi_\varrho)^{2m}$ *can be made as nearly as we please equal to* φ *by taking* ϱ *sufficiently small.*

§ 8.

If φ is a linear substitution of the first kind which transforms automorphically the alternate bilinear form

$$(\Omega \between x_1, x_2, \ldots x_{2n} \between y_1, y_2, \ldots y_{2n}),$$

then, as shown in the preceeding section, a linear substitution ψ belonging to the group can be found such that

$$\varphi = \psi^2.$$

Since ψ belongs to the group, we have

$$\breve{\psi} \Omega \psi = \Omega.$$

Therefore

$$\psi = \Omega\psi^{-1}\Omega^{-1};$$

that is, $\breve{\psi}$ und ψ^{-1} are equivalent*).

If -1 is a root of the characteristic equation of φ, then both $\pm\sqrt{-1}$ are roots of the characteristic equation of ψ. For the roots of the characteristic equation of φ are the squares of the roots of the characteristic equation of ψ; and if $\sqrt{-1}$ is a root of the characteristic equation of ψ, that is if

$$|\psi - \sqrt{-1}| = 0,$$

then the determinant of the transverse of $\psi - \sqrt{-1}$ is zero, that is

$$|\breve{\psi} - \sqrt{-1}| = 0.$$

But since the substitutions ψ and ψ^{-1} are equivalent, the substitutions $\breve{\psi} - \sqrt{-1}$ and $\psi^{-1} - \sqrt{-1}$ are also equivalent. Therefore

$$|\psi^{-1} - \sqrt{-1}| = 0;$$

and since

$$-\sqrt{-1}\,\psi^{-1}(\psi + \sqrt{-1}) = \psi^{-1} - \sqrt{-1},$$

consequently

$$|\psi + \sqrt{-1}| = 0,$$

since $|\psi^{-1}| \neq 0$.

If the nullity**) of $\psi - \sqrt{-1}$ is m (that is, if the $(m-1)^{\text{th}}$ minors of the determinant of $\psi - \sqrt{-1}$ all vanish, but not all the m^{th} minors), then the nullity of the transverse of this substitution, namely $\breve{\psi} - \sqrt{-1}$, which only differs from it by the interchange of the rows and columns of its square array of coefficients, is also m. But since $\breve{\psi} - \sqrt{-1}$ and $\psi^{-1} - \sqrt{-1}$ are equivalent, the nullity of $\psi^{-1} - \sqrt{-1}$ is then m; and therefore the nullity of

$$\psi + \sqrt{-1} = \sqrt{-1}\,\psi\,(\psi^{-1} - \sqrt{-1})$$

is m. Whence it follows from the corollary of the law of nullity***) that the nullity of

$$\varphi + 1 = (\psi - \sqrt{-1})\,(\psi + \sqrt{-1})$$

---

*) Two substitutions φ and ψ are equivalent if we can find a substitution χ of non-zero determinant such that

$$\varphi = \chi\psi\chi^{-1}.$$

**) The term nullity is due to Sylvester. Nullity of order m is equivalent to *rank* (*Rang*) $2n - m$, the number of variables of the substitution being $2n$.

***) See *Johns Hopkins University Circularo,* vol 3, p. 10.

is $2m$, — that is the $(2m-1)^{\text{th}}$ minors of the determinant of $\varphi+1$ all vanish but not all the $(2m)^{\text{th}}$ minors.

We have therefore the following theorem:

If φ is a linear substitution of the first kind belonging to the group of linear substitutions which transform automorphically the alternate bilinear form

$$(\Omega \between x_1, x_2, \ldots x_2 \between y_1, y_2, \ldots y_{2n}),$$

of non-zero determinant, then if the $(2m)^{th}$ minors of $\varphi+1$ (the minors of order $2n-2m$) all vanish, the $(2m+1)^{th}$ minors of $\varphi+1$ (the minors of order $2n-2m-1$) all vanish also. That is, the order of the minor of $\varphi+1$ of highest order that does not vanish is even.

Further we may show in like manner that the nullity of $(\varphi+1)^2$ is even; that is that the order of the non-vanishing minor of $(\varphi+1)^2$ of highest order is even. Similarly with respect to $(\varphi+1)^3$ and the successive powers of $\varphi+1$.

Worcester, Mass., February 6^{th}, 1895.

Ueber die Differentialgleichungen der F-Reihen dritter Ordnung.

Von

L. Pochhammer in Kiel.

§ 1.

Die Differentialgleichung der allgemeineren F-Reihe

$$(1)\quad \begin{cases} x^{n-1}\dfrac{d^n y}{dx^n} + L_1 x^{n-2}\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + L_2 x^{n-3}\dfrac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} \\ \qquad + \cdots + L_{n-2} x \dfrac{d^2 y}{dx^2} + L_{n-1}\dfrac{dy}{dx} \\ = x^m \dfrac{d^m y}{dx^m} + K_1 x^{m-1}\dfrac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + K_2 x^{m-2}\dfrac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} \\ \qquad + \cdots + K_{m-2}x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + K_{m-1}x\dfrac{dy}{dx} + K_m y, \end{cases}$$

die vom Verfasser im 38ten Bande dieser Annalen*) aufgestellt worden ist ($K_1, \ldots K_m$, $L_1, \ldots L_{n-1}$ constant, $m < n$), lässt sich, wie er in einer weiteren Arbeit**) gezeigt hat, sowohl durch die Substitution

$$(2)\qquad y = \int_g^h (t-x)^{-\alpha}\, t^\lambda\, T\, dt$$

als auch durch die Substitution

$$(3)\qquad y = \int_g^h e^{\frac{x}{t}}\, t^\lambda\, T\, dt$$

auf eine analog gebildete Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung zurückführen. Die letztere Gleichung dient zur Bestimmung von T als Function von t. Durch Wiederholung des Verfahrens gelangt man bis zu einer durch einfache bestimmte Integrale lösbaren Differentialgleichung 2^{ter} Ordnung. Die letztgenannte Arbeit (in Crelle's J. Bd. 112) beschränkt sich darauf, die Reductionsmethode zu entwickeln. In nach-

---

*) „Ueber die Differentialgleichung der allgemeineren F-Reihe", Bd. 38, pag. 587.

**) „Ueber die Reduction der Differentialgleichung der allgemeineren F-Reihe", Crelle's Journal für Math. Bd. 112, pag. 58.

stehendem Aufsatze soll nun auf den *Fall* $n=3$ der Gleichung (1) näher eingegangen und eine Uebersicht der bestimmten Doppelintegrale, welche dann particuläre Lösungen von (1) sind, gegeben werden*).

Der Gleichung (1) genügt eine eindeutige Potenzreihe

$$(4)\left\{\begin{aligned}&F(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m;\ \varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_{n-1};\ x)\\ &= 1 + \frac{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}{1.\ \varrho_1\varrho_2\dots\varrho_{n-1}}\,x + \frac{\alpha_1(\alpha_1+1)\,\alpha_2(\alpha_2+1)\dots\alpha_m(\alpha_m+1)}{1.2.\varrho_1(\varrho_1+1)\,\varrho_2(\varrho_2+1)\dots\varrho_{n-1}(\varrho_{n-1}+1)}\,x^2+\cdots,\end{aligned}\right.$$

deren Parameter $\alpha_1, \dots \alpha_m, \varrho_1, \dots \varrho_{n-1}$ mit den Constanten $K_1, \dots K_m$, $L_1, \dots L_{n-1}$ durch algebraische Gleichungen verbunden sind**). Die $n-1$ mehrdeutigen Hauptlösungen von (1) sind Producte aus je einer Potenz von x und einer Reihe von der Form (4). Die Constanten ϱ_i, $\varrho_i - \varrho_k$ werden als nicht ganzzahlig vorausgesetzt.

Die bestimmten Doppelintegrale, welche hier als Lösungen der Gleichung (1) im Fall $n=3$ abgeleitet werden sollen, entstehen aus den soeben genannten Reihen durch Multiplication mit transcendenten Constanten. Als solche Constanten treten einerseits Euler'sche Integrale, andererseits die analog gebildeten Integrale mit complexem Integrationsweg auf. Mit Rücksicht auf das Folgende mögen zunächst einige Bemerkungen Platz finden, die sich auf die Integration gewisser Reihen beziehen.

Hat ein nach t genommenes bestimmtes Integral

$$\int (t-x)^{q-p-1}\,t^{p-1}\,(l_0 + l_1 t + l_2 t^2 + \cdots + l_\nu t^\nu + \cdots)\,dt,$$

in welchem $p, q, l_0, l_1, \dots$ als constant, x als unabhängig von t und die Reihe $l_0 + l_1 t + \cdots$ als convergent angenommen wird, zum Integrationsweg eine geschlossene Curve, welche im Nullpunkt beginnt und endigt und aus einem einmaligen positiven Umlauf um den Punkt x besteht, so liefert die Substitution

$$t = xz, \qquad dt = x\,dz,$$

als Weg der Variable z einen im Nullpunkt beginnenden Umlauf um den Punkt 1. Für die geschlossenen Integrationswege wird hier, wie in den früheren Arbeiten des Verfassers, die abgekürzte Bezeichnung angewendet, welche in § 1 der Abhandlung „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf" (Bd. 35 dieser Annalen, pag. 472) angegeben ist.

---

*) Für $m=n$ entsteht aus (1) die Differentialgleichung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe mit 2 endlichen singulären Punkten, welche im 102ten Bande des Crelle'schen Journals vom Verfasser ausführlicher behandelt worden ist. In vorliegender Arbeit bleibt der Fall $m=n$ von der Betrachtung ausgeschlossen.

**) Cfr. Bd. 38 dieser Annalen, pag. 588—594.

Man erhält dann die Gleichung

$$\int_0^{\overline{(x)}} (t-x)^{q-p-1} t^{p-1} (l_0 + l_1 t + \cdots + l_\nu t^\nu + \cdots)\, dt$$

$$= x^{q-1} \int_0^{\overline{(1)}} (z-1)^{q-p-1} z^{p-1} (l_0 + l_1 x z + \cdots + l_\nu x^\nu z^\nu + \cdots)\, dz,$$

auf deren rechter Seite ausser den Constanten l_ν auch die Potenzen von x vor die Integralzeichen treten. Nennt man nach Bd. 35 dieser Annalen, pag. 510, $\overline{E}(a, b)$ das geschlossene Integral

$$\overline{E}(a, b) = \int_0^{\overline{(1)}} z^{a-1} (z-1)^{b-1}\, dz, \tag{5}$$

so ergiebt sich nach Anwendung der Reductionsformel

$$\overline{E}(a+\nu, b) = \frac{a(a+1)\ldots(a+\nu-1)}{(a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+\nu-1)} \overline{E}(a, b)$$

(ν positiv und ganzzahlig) die Gleichung

$$\left\{\begin{aligned} &\int_0^{\overline{(x)}} (t-x)^{q-p-1} t^{p-1} (l_0 + l_1 t + l_2 t^2 + \cdots + l_\nu t^\nu + \cdots)\, dt \\ &= x^{q-1} \overline{E}(p, q-p) \left[\begin{aligned} &l_0 + \frac{p}{q} l_1 x + \frac{p(p+1)}{q(q+1)} l_2 x^2 + \cdots \\ &\cdots + \frac{p(p+1)\ldots(p+\nu-1)}{q(q+1)\ldots(q+\nu-1)} l_\nu x^\nu + \cdots \end{aligned}\right], \end{aligned}\right. \tag{6}$$

in der, mit Rücksicht auf die Integralgrenze 0, der reelle Theil von p positiv sein muss.

Beschreibt die Variable t statt des in (6) vorausgesetzten Weges einen Doppelumlauf um die Punkte x und 0, in der Art dass zuerst x, dann 0 im positiven Sinne, hierauf x im negativen und endlich 0 im negativen Sinne umkreist werden, so entsteht durch die Substitution $t = xz$ die zu (6) analoge Gleichung

$$\begin{aligned} &\int_c^{\overline{(x,0,x-,0-)}} (t-x)^{q-p-1} t^{p-1} (l_0 + l_1 t + \cdots + l_\nu t^\nu + \cdots)\, dt \\ &= e^{\pi i (p-1)} x^{q-1} \mathfrak{E}(p, q-p) \left[l_0 + \frac{p}{q} l_1 x + \cdots + \frac{p(p+1)\ldots(p+\nu-1)}{q(q+1)\ldots(q+\nu-1)} l_\nu x^\nu + \cdots \right], \end{aligned} \tag{7}$$

woselbst die Integralgrenze c beliebig bleibt, und $\mathfrak{E}(a, b)$ nach Band 35 dieser Annalen, pag. 499, das Integral

$$\mathfrak{E}(a, b) = e^{-\pi i (a+b)} \int_c^{\overline{(1,0,1-,0-)}} z^{a-1} (1-z)^{b-1}\, dz \tag{8}$$

bedeutet. In (7) kommt die Reductionsformel

$$\mathfrak{E}(a+\nu, b) = (-1)^\nu \frac{a(a+1)\ldots(a+\nu-1)}{(a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+\nu-1)} \mathfrak{E}(a, b)$$

zur Anwendung. Für die Potenzen z^{a-1} und $(1-z)^{b-1}$ werden die in Band 35, pag. 498 und 510, bezeichneten Zweige vorausgesetzt.

Für das entsprechende Integral mit geradlinigem, von 0 bis x erstrecktem Integrationswege gilt, wenn unter $E(a, b)$ das Euler'sche Integral erster Art

$$E(a, b) = \int_0^1 z^{a-1}(1-z)^{b-1}\,dz \tag{9}$$

verstanden wird, die Formel

$$\int_0^x (t-x)^{q-p-1}t^{p-1}(l_0+l_1t+\cdots+l_\nu t^\nu+\cdots)\,dt = \tag{10}$$

$$(-1)^{q-p-1}x^{q-1}E(p,q-p)\left(l_0+\frac{p}{q}l_1x+\cdots+\frac{p(p+1)\ldots(p+\nu-1)}{q(q+1)\ldots(q+\nu-1)}l_\nu x^\nu+\cdots\right),$$

in der die reellen Theile von p und $q-p$ positiv sein sollen.

Man nehme ferner an, dass die Variable t vom Nullpunkte in einer Richtung, welcher der zum Punkte x führenden entgegengesetzt ist, ausgeht, einen positiven Umlauf um den Nullpunkt macht und zu letzterem längs der zuerst durchlaufenen Strecke zurückkehrt (Fig. 1). Wird die Function

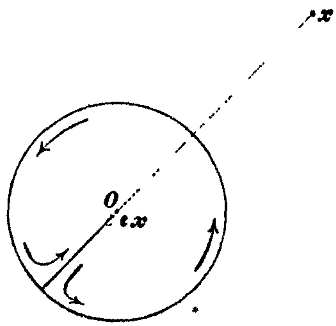


Fig. 1.

$$e^{\frac{x}{t}}t^{p-1}(l_0+l_1t+\cdots l_\nu t^\nu+\cdots)$$

nach t längs dieser Curve integrirt, so ergiebt nach Band 41 dieser Annalen, pag. 171, die Substitution $t=xz$ die Gleichung

$$\overline{\int}_{-\varepsilon x}^{(0)} e^{\frac{x}{t}}t^{p-1}(l_0+l_1t+\cdots+l_\nu t^\nu+\cdots)\,dt \tag{11}$$

$$= x^p\,\bar{\Gamma}(-p)\left(l_0+\frac{l_1x}{p+1}+\cdots+\frac{l_\nu x^\nu}{(p+1)(p+2)\ldots(p+\nu)}+\cdots\right).$$

In derselben wird durch ε eine unendlich kleine positive reelle Constante, und durch $\bar{\Gamma}(a)$ das Integral (Band 35, pag. 514)

$$\bar{\Gamma}(a) = \overline{\int}_{-\infty}^{(0)} e^u u^{a-1}\,du, \tag{12}$$

welches durch die Substitution $u=\frac{1}{z}$ die Form

$$\bar{\Gamma}(a) = \overline{\int}_{-\varepsilon}^{(0)} e^{\frac{1}{z}} z^{-a-1}\,dz \tag{12a}$$

annimmt (Band 41, pag. 158), bezeichnet.

Die Gleichung (1) geht für $m = n = 2$ in die Differentialgleichung der Gauss'schen hypergeometrischen Reihe

$$(13)\qquad x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} + [(\alpha+\beta+1)x - \varrho]\frac{dy}{dx} + \alpha\beta y = 0$$

über. Im Falle $n = 2$, $m = 1$ entsteht aus (1) die Gleichung

$$(14)\qquad x\frac{d^2y}{dx^2} = (x-\varrho)\frac{dy}{dx} + \alpha y,$$

der die Reihe

$$(15)\qquad F(\alpha;\varrho;x) = 1 + \frac{\alpha}{1.\varrho}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2.\varrho(\varrho+1)}x^2 + \cdots \text{inf.}$$

und eine analoge mit $x^{1-\varrho}$ multiplicirte Reihe genügen. Für die nachstehenden Rechnungen kommt ausserdem noch eine dritte Differentialgleichung 2ter Ordnung in Betracht, welche dem Falle $n = 2$, $m = 0$ der Gleichung (1) entspricht, nämlich die Gleichung

$$(16)\qquad x\frac{d^2y}{ax^2} + \varrho\frac{dy}{dx} - y = 0.$$

Um das Folgende übersichtlicher zu machen, wird es nothwendig, die bestimmten Integrale, welche die Lösungen der Differentialgleichungen (13), (14), (16) darstellen, in Kürze anzugeben. Nennt man Φ die Function

$$(17)\qquad \Phi = (u-x)^{-\beta}u^{\beta-\varrho}(u-1)^{\varrho-\alpha-1}$$

und $C_1, \ldots C_6$ die Constanten

$$\begin{aligned}
C_1 &= e^{\pi i(1-\varrho)}\mathfrak{E}(1-\varrho,\ \varrho-\alpha),\\
C_2 &= e^{\pi i(1-\alpha-\beta)}\mathfrak{E}(\beta-\varrho+1,\ 1-\beta),\\
C_3 &= e^{\pi i(\beta-\varrho)}\mathfrak{E}(\beta-\varrho+1,\ \varrho-\alpha-\beta),\\
C_4 &= e^{\pi i(1-\beta)}\mathfrak{E}(\varrho-\alpha,\ 1-\beta),\\
C_5 &= e^{-\pi i\varrho}\mathfrak{E}(\beta-\varrho+1,\ \varrho-\alpha),\\
C_6 &= e^{-\pi i(\alpha+\beta)}\mathfrak{E}(\beta-\alpha,\ 1-\beta),
\end{aligned}$$

so sind die Hauptlösungen von (13) im allgemeinen Falle gleich den Ausdrücken (Band 35 dieser Annalen, pag. 517—526):

$$(18)\quad\begin{cases}\displaystyle\overline{\int_c}^{(\mathfrak{A},1,\mathfrak{A}-,1-)}\Phi\,du = C_1F(\alpha,\beta;\varrho;x),\\[2ex]
\displaystyle\overline{\int_c}^{(x,0,x-,0-)}\Phi\,du = C_2x^{1-\varrho}F(\alpha-\varrho+1,\beta-\varrho+1;2-\varrho;x),\end{cases}$$

$$(19)\quad\begin{cases}\displaystyle\overline{\int_c}^{(\mathfrak{B},0,\mathfrak{B}-,0-)}\Phi\,du = C_3F(\alpha,\beta;\alpha+\beta-\varrho+1;1-x),\\[2ex]
\displaystyle\overline{\int_c}^{(x,1,x-,1-)}\Phi\,du = C_4(1-x)^{\varrho-\alpha-\beta}F(\varrho-\alpha,\varrho-\beta;\varrho-\alpha-\beta+1;1-x),\end{cases}$$

$$(20)\quad\begin{cases}\displaystyle\bar{\int_c}^{(1,0,1-,0-)} \Phi\, du = C_5 x^{-\beta} F\left(\beta, \beta-\varrho+1; \beta-\alpha+1; \frac{1}{x}\right),\\ \displaystyle\bar{\int_c}^{(\mathfrak{C}, x, \mathfrak{C}-, x-)} \Phi\, du = C_6 x^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha-\varrho+1; \alpha-\beta+1; \frac{1}{x}\right).\end{cases}$$

Unter $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ werden Linien verstanden, die von 0 zu x, resp. von 1 zu x und von 0 zu 1 gezogen sind; c ist ein beliebiger, jedoch von 0 und 1 verschiedener Punkt der u-Ebene. Die Umkreisung der Linien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ wird in derselben Weise wie die der einzelnen singulären Punkte bezeichnet. Die Integrale (18), (19), (20) behalten für beliebige Werthe der Constanten α, β, ϱ einen bestimmten Sinn. In den speciellen Fällen, wo eins oder mehrere dieser Integrale identisch verschwinden, hat man statt des Doppelumlaufs eine einfache geschlossene Curve, resp. eine geradlinige Strecke als Integrationsweg zu wählen.

Die Differentialgleichung (14) wird im allgemeinen Falle durch die bestimmten Integrale

$$(21)\quad\begin{cases}\displaystyle\bar{\int_{-\infty}}^{(\mathfrak{A})} e^u (u-x)^{-\alpha} u^{\alpha-\varrho}\, du = \bar{\Gamma}(1-\varrho) F(\alpha; \varrho; x),\\ \displaystyle\bar{\int_c}^{(x, 0, x-, 0-)} e^u (u-x)^{-\alpha} u^{\alpha-\varrho}\, du\\ \qquad = e^{\pi i(\alpha-\varrho)} \mathfrak{E}(\alpha-\varrho+1, 1-\alpha) x^{1-\varrho} F(\alpha-\varrho+1; 2-\varrho; x)\end{cases}$$

(Band 36 dieser Annalen, pag. 84—96) befriedigt, wo $\mathfrak{A}$, wie in (18), die Verbindungslinie der Punkte 0 und x bezeichnet. Sind die Constanten $1-\alpha$ und $\alpha-\varrho+1$ (im reellen Theil) positiv, so kann man statt des letzteren Integrals das Integral mit geradlinigem Integrationsweg

$$(22)\quad \int_0^x e^u (u-x)^{-\alpha} u^{\alpha-\varrho} du$$
$$= (-1)^\alpha E(\alpha-\varrho+1, 1-\alpha) x^{1-\varrho} F(\alpha-\varrho+1; 2-\varrho; x)$$

nehmen. Ist nur eine dieser Constanten positiv, so wird ein einfacher Umlauf als Integrationsweg angewendet.

Die Differentialgleichung (16), der die unendlichen Reihen

$$(23)\quad\begin{cases}\mathfrak{F}(\varrho; x) = 1 + \frac{x}{1.\varrho} + \frac{x^2}{1.2.\varrho(\varrho+1)} + \cdots,\\ x^{1-\varrho}\mathfrak{F}(2-\varrho; x) = x^{1-\varrho}\left\{1 + \frac{x}{1.(2-\varrho)} + \frac{x^2}{1.2.(2-\varrho)(3-\varrho)} + \cdots\right\}\end{cases}$$

genügen, gestattet zwei wesentlich von einander verschiedene Lösungen durch bestimmte Integrale. Einerseits hat man die Gleichungen (Band 38 dieser Annalen, pag. 228—237)

$$(24)\qquad \int_{\infty}^{\overline{(\mathfrak{A},\mathfrak{A})}} e^{-2\sqrt{u}}(u-x)^{\frac{1}{2}-\varrho}\frac{du}{\sqrt{u}} = 2^{2\varrho-1}e^{-2\pi i\varrho}\,\overline{\Gamma}(2-2\varrho)\,\mathfrak{F}(\varrho;x),$$

woselbst die Variable u die Verbindungslinie $\mathfrak{A}$ der Punkte 0 und x zweimal hintereinander im positiven Sinne umkreist, und

$$(25)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\overline{(x)}} \left(e^{2\sqrt{u}}+e^{-2\sqrt{u}}\right)(u-x)^{\frac{1}{2}-\varrho}\frac{du}{\sqrt{u}} = \\ \displaystyle\int_0^{\overline{(x,0,x-,0-)}} e^{-2\sqrt{u}}(u-x)^{\frac{1}{2}-\varrho}\frac{du}{\sqrt{u}} = 2\,\overline{E}\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2}-\varrho\right)x^{1-\varrho}\mathfrak{F}(2-\varrho;x). \end{cases}$$

Andererseits bestehen die Identitäten*)

$$(26)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\overline{(0)}} e^{\frac{x}{u}+u}\,u^{-\varrho}\,du = \overline{\Gamma}(1-\varrho)\,\mathfrak{F}(\varrho;x), \\ \displaystyle\int_{-\epsilon x}^{\overline{(0)}} e^{\frac{x}{u}+u}\,u^{-\varrho}\,du = \overline{\Gamma}(\varrho-1)\,x^{1-\varrho}\,\mathfrak{F}(2-\varrho;x). \end{cases}$$

Unter ϵ wird, wie in (11) und (12a), eine unendlich kleine positive reelle Constante verstanden. Statt des in (25) angegebenen Integrals kann man, wenn der reelle Theil von $\frac{3}{2}-\varrho$ positiv ist, das geradlinige Integral

$$(27)\qquad \int_0^x \left(e^{2\sqrt{u}}+e^{-2\sqrt{u}}\right)(x-u)^{\frac{1}{2}-\varrho}\frac{du}{\sqrt{u}} = 2\,E\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2}-\varrho\right)x^{1-\varrho}\mathfrak{F}(2-\varrho;x)$$

anwenden.

In den nachstehenden §§ 2 und 3 wird der *Fall* $n=3$, $m=1$, und in § 4 der *Fall* $n=3$, $m=2$ der Differentialgleichung (1) behandelt. Auf den Fall $n=3$, $m=0$ dieser Gleichung ist der Verfasser bereits in Band 41 dieser Annalen, pag. 199—208, näher eingegangen.

§ 2.

Für $n=3$, $m=1$ entsteht aus (1) die Differentialgleichung

$$(28)\qquad x^2\frac{d^3y}{dx^3}+(\varrho+\sigma+1)\,x\frac{d^2y}{dx^2}+(\varrho\sigma-x)\frac{dy}{dx}-\alpha y=0,$$

welche durch die eindeutige Reihe

*) Cfr. „Ueber eine specielle lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten", Band 41 dieser Annalen, pag. 174—178.

Ich bin darauf aufmerksam gemacht worden, dass die Darstellung der Bessel'schen Function als geschlossenes Integral, welche sich am Schluss der ebengenannten Arbeit findet, bereits von Herrn N. Sonine in seiner Abhandlung „Recherches sur les fonctions cylindriques et le développement des fonctions continues en séries" im 16ten Bande dieser Annalen (Abschnitt II) angegeben worden ist, was zu erwähnen ich nicht unterlassen möchte.

$$(29)\quad F(\alpha;\varrho,\sigma;x)=1+\frac{\alpha}{1.\varrho\sigma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2.\varrho(\varrho+1)\sigma(\sigma+1)}x^2+\cdots$$

und durch die Producte

$$(30)\quad\begin{cases} x^{1-\varrho}F(\alpha-\varrho+1;2-\varrho,\sigma-\varrho+1;x) \\ \qquad =x^{1-\varrho}\left(1+\frac{\alpha-\varrho+1}{1.(2-\varrho)(\sigma-\varrho+1)}x+\cdots\right), \\ x^{1-\sigma}F(\alpha-\sigma+1;2-\sigma,\varrho-\sigma+1;x) \\ \qquad =x^{1-\sigma}\left(1+\frac{\alpha-\sigma+1}{1.(2-\sigma)(\varrho-\sigma+1)}x+\cdots\right) \end{cases}$$

befriedigt wird. Die Constanten ϱ, σ, $\varrho-\sigma$ sind nach der Voraussetzung nicht ganzzahlig.

Indem man auf die Gleichung (28) nach einander eine Substitution von der Form (2) und eine Substitution von der Form (3) anwendet, findet man zwei verschiedene Systeme von bestimmten Doppelintegralen, welche die Hauptlösungen von (28) darstellen. Das erstere dieser Systeme enthält selbst noch wesentlich verschiedene Ausdrücke für die einzelnen Hauptlösungen, in Folge der (in § 1 angegebenen) doppelten Auflösung der Gleichung (16) durch bestimmte Integrale.

Man führt in (28) zunächst den Ausdruck

$$(31)\qquad y=\int_g^h (v-x)^{-\alpha}v^{\alpha-\sigma}V\,dv$$

ein, in welchem V nur von v abhängt, und die Grenzen g, h entweder constant oder gleich x sind. Dann wird V (cfr. Crelle's Journal, Band 112, pag. 65) ein particuläres Integral der Differentialgleichung

$$v\frac{d^2V}{dv^2}+(\varrho-\sigma+1)\frac{dV}{dv}-V=0,$$

die sich von (16) nur dadurch unterscheidet, dass v, V, $\varrho-\sigma+1$ an die Stelle von x, y, ϱ getreten sind. Nach § 1 kommen für V sowohl Integrale von der Form (24) und (25), resp. (27), als auch Integrale von der Form (26) in Betracht. Die Reihen, die der Gleichung für V genügen, sind

$$\mathfrak{F}(\varrho-\sigma+1;\,v),\qquad v^{\sigma-\varrho}\mathfrak{F}(\sigma-\varrho+1;\,v).$$

Um aus (31) die mehrdeutigen Hauptlösungen von (28) zu erhalten, wählt man als Weg der Variable v entweder die geradlinige Strecke von 0 bis x oder einen Doppelumlauf um die Punkte x und 0, resp. einen einfachen Umlauf um x oder 0. Nach (24) ist

$$\overline{\int_\infty^{(\mathfrak{A}',\mathfrak{A}')}} e^{-2\sqrt{u}}(u-v)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\frac{du}{\sqrt{u}}$$
$$=2^{2\varrho-2\sigma+1}e^{2\pi i(\sigma-\varrho)}\overline{\Gamma}(2\sigma-2\varrho)\,\mathfrak{F}(\varrho-\sigma+1;\,v),$$

wenn unter $\mathfrak{A}'$ die Verbindungslinie der Punkte 0 und v verstanden wird. Man lasse hierin die u-Curve aus einem Kreise, der den ganzen Weg der Variable v $\big($in (31)$\big)$ umschliesst, und aus einem Abschnitte

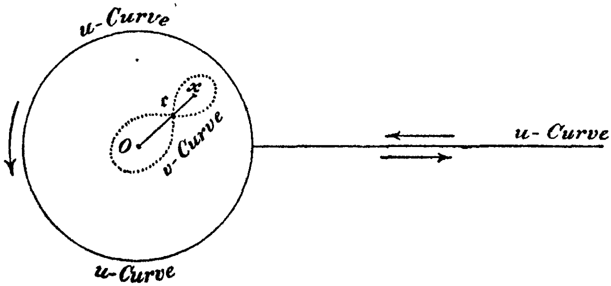


Fig. 2.

der positiven reellen Axe bestehen (Fig. 2). Die Anwendung der Formel (10), in welcher t durch v, und die Reihe $l_0 + l_1 t + \cdots$ durch

$$2^{2\varrho-2\sigma+1} e^{2\pi i(\sigma-\varrho)} \Gamma(2\sigma - 2\varrho) \left\{1 + \frac{v}{1.(\varrho-\sigma+1)} + \frac{v^2}{1.2.(\varrho-\sigma+1)(\varrho-\sigma+2)} + \cdots\right\}$$

ersetzt wird, führt dann zu der Gleichung

$$(32) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^x (v-x)^{-\alpha} v^{\alpha-\sigma} dv \int_\infty^{(\mathfrak{A}',\mathfrak{A}')} e^{-2\sqrt{u}} (u-v)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{u}} \\ \quad = \mathfrak{N}_1 x^{1-\sigma} F(\alpha-\sigma+1; 2-\sigma, \varrho-\sigma+1; x), \end{cases}$$

woselbst $\mathfrak{N}_1$ die Constante

$$\mathfrak{N}_1 = 2^{2\varrho-2\sigma+1} e^{\pi i(2\sigma-2\varrho-\alpha)} \Gamma(2\sigma-2\varrho) E(\alpha-\sigma+1, 1-\alpha)$$

bedeutet.

Zur Convergenz des Doppelintegrals (32) ist erforderlich, dass die reellen Bestandtheile der Constanten $\alpha - \sigma + 1$ und $1 - \alpha$ positiv seien. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so wird statt der Formel (10) die Formel (7), resp. (6), benutzt. Im allgemeinen Falle, wo die Formel (7) zur Anwendung gelangt, findet man die Gleichung

$$(33) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_c^{(x,0,x-,0-)} (v-x)^{-\alpha} v^{\alpha-\sigma} dv \int_\infty^{(\mathfrak{A}',\mathfrak{A}')} e^{-2\sqrt{u}} (u-v)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{u}} \\ \quad = \mathfrak{N}_2 x^{1-\sigma} F(\alpha-\sigma+1; 2-\sigma, \varrho-\sigma+1; x), \end{cases}$$

in der

$$\mathfrak{N}_2 = 2^{2\varrho-2\sigma+1} e^{\pi i(\alpha+\sigma-2\varrho)} \Gamma(2\sigma-2\varrho) \mathfrak{E}(\alpha-\sigma+1, 1-\alpha)$$

gesetzt ist. Die analoge aus (6) folgende Entwicklung soll hier nicht besonders angeführt werden.

Man substituire ferner, gemäss (27), für V den Ausdruck

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_0^v \left(e^{2\sqrt{u}}+e^{-2\sqrt{u}}\right)(v-u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\frac{du}{\sqrt{u}}\\ &=2E\left(\tfrac{1}{2},\,\sigma-\varrho+\tfrac{1}{2}\right)v^{\sigma-\varrho}\,\mathfrak{F}(\sigma-\varrho+1;\;v).\end{aligned}\right.$$

Die Convergenz des links stehenden Integrals erfordert, dass der reelle Theil von $\sigma-\varrho+\frac{1}{2}$ positiv sei. Aber die Differentialgleichung (28) ist nach ϱ und σ symmetrisch. Wird also σ als diejenige der zwei Constanten ϱ, σ definirt, die den grösseren reellen Bestandtheil hat, so ist der obigen Bedingung genügt. Indem man in (31) den Doppelumlauf um die Punkte x und 0 als Integrationsweg von v nimmt und für V das bezeichnete Integral einsetzt, erhält man mit Hülfe von (7) die Gleichung

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned}&\overline{\int_c}^{(x,0,x-,0-)}(v-x)^{-\alpha}v^{\alpha-\sigma}\,dv\int_0^v\left(e^{2\sqrt{u}}+e^{-2\sqrt{u}}\right)(v-u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\frac{du}{\sqrt{u}}\\ &=\mathfrak{N}_3\,x^{1-\varrho}F(\alpha-\varrho+1;\;2-\varrho,\;\sigma-\varrho+1;\;x),\end{aligned}\right.$$

wo unter $\mathfrak{N}_3$ die Constante

$$\mathfrak{N}_3=2e^{\pi i(\alpha-\varrho)}E\left(\tfrac{1}{2},\,\sigma-\varrho+\tfrac{1}{2}\right)\mathfrak{E}(\alpha-\varrho+1,\;1-\alpha)$$

verstanden wird.

Es ist ferner nach (26)

$$\overline{\int}_{-\infty}^{(0)} e^{\frac{v}{u}+u}\,u^{\sigma-\varrho-1}\,du=\overline{\Gamma}(\sigma-\varrho)\,\mathfrak{F}(\varrho-\sigma+1;\,v),$$

$$\overline{\int}_{-ev}^{(0)} e^{\frac{v}{u}+u}\,u^{\sigma-\varrho-1}\,du=\overline{\Gamma}(\varrho-\sigma)\,v^{\sigma-\varrho}\,\mathfrak{F}(\sigma-\varrho+1;\,v).$$

Werden diese Functionen nach einander an Stelle von V in (31) eingeführt, so liefert die Formel (7) die Gleichungen

$$(36)\quad \overline{\int_c}^{(x,0,x-,0-)}(v-x)^{-\alpha}v^{\alpha-\sigma}\,dv\,\overline{\int}_{-\infty}^{(0)}e^{\frac{v}{u}+u}\,u^{\sigma-\varrho-1}\,du$$
$$=e^{\pi i(\alpha-\sigma)}\overline{\Gamma}(\sigma-\varrho)\,\mathfrak{E}(\alpha-\sigma+1,\;1-\alpha)\,x^{1-\sigma}F(\alpha-\sigma+1;\,2-\sigma,\;\varrho-\sigma+1;\;x),$$

und

$$(37)\quad \overline{\int_c}^{(x,0,x-,0-)}(v-x)^{-\alpha}v^{\alpha-\sigma}\,dv\,\overline{\int}_{-ev}^{(0)}e^{\frac{v}{u}+u}\,u^{\sigma-\varrho-1}\,du$$
$$=e^{\pi i(\alpha-\varrho)}\overline{\Gamma}(\varrho-\sigma)\,\mathfrak{E}(\alpha-\varrho+1,\;1-\alpha)\,x^{1-\varrho}F(\alpha-\varrho+1;\,2-\varrho,\;\sigma-\varrho+1;\;x).$$

Die Doppelintegrale (33) und (36) stellen die eine, die Integrale (35) und (37) die andere mehrdeutige Hauptlösung der Differentialgleichung

(28) für beliebige Werthe der Constanten α, ϱ, σ dar. Auszunehmen sind nur die speciellen Werthe dieser Constanten, für welche die Grössen $\mathfrak{E}(\alpha-\varrho+1,\ 1-\alpha)$, $\mathfrak{E}(\alpha-\sigma+1,\ 1-\alpha)$ verschwinden. In letzteren Fällen wird statt des Doppelumlaufs ein einfacher Umlauf um x oder 0, resp. die geradlinige Strecke von 0 bis x als Weg von v genommen.

Man lasse sodann in (31) die Variable v einen geschlossenen Integrationsweg durchlaufen, der im unendlich entfernten Punkte der negativen reellen Axe beginnt und endigt und sowohl den Nullpunkt als auch den Punkt x umschliesst, und zwar möge dieser Weg aus einem (in beiden Richtungen durchlaufenen) Abschnitte der negativen reellen Axe und aus einem um den Nullpunkt beschriebenen Kreise, innerhalb dessen der Punkt x liegt, bestehen. Da mod. v hiernach stets grösser als mod. x ist, so kann die Potenz $(v-x)^{-\alpha}$ in die convergente Reihe

$$v^{-\alpha}\left(1-\frac{x}{v}\right)^{-\alpha}=v^{-\alpha}\left\{1+\frac{\alpha}{1}\frac{x}{v}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{1\,.\,2}\frac{x^2}{v^2}+\cdots\right\}$$

entwickelt werden. Also ist für den genannten Integrationsweg

$$\overline{\int_{-\infty}^{)\mathfrak{A})}}(v-x)^{-\alpha}\,v^{\alpha-\sigma}\,V\,dv$$
$$=\mathfrak{G}_0+\frac{\alpha}{1}\,\mathfrak{G}_1\,x+\cdots+\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu-1)}{1\,.\,2\ldots\nu}\,\mathfrak{G}_\nu\,x^\nu+\cdots,$$

wo durch $\mathfrak{A}$ die Verbindungslinie der Punkte 0 und x, und durch $\mathfrak{G}_\nu$ (für $\nu=0,1,2,\ldots$) das constante Integral

$$\mathfrak{G}_\nu=\overline{\int_{-\infty}^{(0)}}v^{-\sigma-\nu}\,V\,dv$$

bezeichnet wird. Man setze nun für V das in (34) genannte Integral

$$\int^{v}\left(e^{2\sqrt{u}}+e^{-2\sqrt{u}}\right)(v-u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\frac{du}{\sqrt{u}}$$

ein, welches durch die Substitution $u=v u_1^2$, $du=2 v u_1\,du_1$, die Gestalt

$$2v^{\sigma-\varrho}\int_0^1\left(e^{2u_1\sqrt{v}}+e^{-2u_1\sqrt{v}}\right)(1-u_1^2)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\,du_1$$

annimmt. Dann wird

$$\mathfrak{G}_\nu=2\overline{\int_{-\infty}^{(0)}}v^{-\varrho-\nu}\,dv\int_0^1\left(e^{2u_1\sqrt{v}}+e^{-2u_1\sqrt{v}}\right)(1-u_1^2)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\,du_1.$$

Dieses Doppelintegral ist aber, wenn die reellen Theile von $\varrho-1$ und $\sigma-\varrho+\frac{1}{2}$ als positiv vorausgesetzt werden, nach § 3 (Formel (24)) des Aufsatzes des Verfassers „Ueber fünf Doppelintegrale"*) gleich dem Ausdruck

$$2^{2\varrho+2\nu-1}\,E\left(\varrho-\tfrac{1}{2}+\nu,\ \sigma-\varrho+\tfrac{1}{2}\right)\overline{\Gamma}(2-2\varrho-2\nu),$$

wofür, wegen der Reductionsformeln der Integrale E und $\overline{\Gamma}$,

$$\frac{2^{2\varrho-1}\,E\left(\varrho-\frac{1}{1},\ \sigma-\varrho+\frac{1}{2}\right)\overline{\Gamma}(2-2\varrho)}{\varrho(\varrho+1)\ldots(\varrho+\nu-1)\ \sigma(\sigma+1)\ldots(\sigma+\nu-1)}$$

geschrieben werden kann. Man gelangt somit zu der Gleichung

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} &\overline{\int}_{-\infty}^{(\mathfrak{A})}(v-x)^{-\alpha}v^{\alpha-\sigma}\,dv\int_0^v\left(e^{2\sqrt{u}}+e^{-2\sqrt{u}}\right)(v-u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\frac{du}{\sqrt{u}}\\ &\quad=2^{2\varrho-1}\,E\left(\varrho-\tfrac{1}{2},\ \sigma-\varrho+\tfrac{1}{2}\right)\overline{\Gamma}(2-2\varrho)\,F(\alpha;\ \varrho,\sigma;\ x),\end{aligned}\right.$$

deren rechte Seite gleich dem Producte aus der Reihe (29) und einer Constanten ist.**)

---

*) Band 41 dieser Annalen, pag. 191.

**) Die obige (zur Gleichung (38) führende) Rechnung ist derjenigen analog, welche am Schluss des § 5 der Abhandlung des Verfassers „Ueber die Differentialgleichungen der Reihen $\mathfrak{F}(\varrho,\sigma;\ x)$ und $\mathfrak{F}(\varrho,\sigma,\tau;\ x)$", Band 41 dieser Annalen, pag. 204, angestellt wird. Auch die übrigen in §§ 5 und 6 der genannten Arbeit enthaltenen Entwickelungen übertragen sich auf die hier behandelte Differentialgleichung 3ter Ordnung. Man bemerke, dass auf diese Weise noch die Formeln

$$(38\text{a})\quad \left\{\begin{aligned} &\overline{\int}_{-\infty}^{(\mathfrak{A})}(v-x)^{-\alpha}v^{\alpha-\sigma}\,dv\int_{-\infty i}^{+\infty i}e^{\frac{v}{u}+u}\,u^{\sigma-\varrho-1}\,du\\ &\quad=\overline{\Gamma}(1-\varrho)\,\overline{\Gamma}(1-\sigma)\,F(\alpha;\ \varrho,\sigma;\ x),\end{aligned}\right.$$

$$(38\text{b})\quad \left\{\begin{aligned} &\overline{\int}_{\infty}^{(\mathfrak{A},\mathfrak{A})}(v-x)^{-\alpha}v^{\alpha-\sigma}\,dv\int_0^v e^{-2\sqrt{u}}(v-u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\frac{du}{\sqrt{u}}\\ &\quad=2^{2\varrho-1}\,e^{-2\pi i\varrho}\,E\left(\varrho-\tfrac{1}{2},\ \sigma-\varrho+\tfrac{1}{2}\right)\overline{\Gamma}(2-2\varrho)\,F(\alpha;\ \varrho,\sigma;x),\end{aligned}\right.$$

$$(38\text{c})\quad \left\{\begin{aligned} &\overline{\int}_{\infty}^{(\mathfrak{A},\mathfrak{A})}(v-x)^{-\alpha}v^{\alpha-\sigma}\,dv\,\overline{\int}_0^{(v)}e^{-2\sqrt{u}}(v-u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\frac{du}{\sqrt{u}}\\ &\quad=2^{2\varrho-1}\,e^{\pi i\left(\sigma-3\varrho-\frac{1}{2}\right)}\,\overline{E}\left(\varrho-\tfrac{1}{2},\ \sigma-\varrho+\tfrac{1}{2}\right)\overline{\Gamma}(2-2\varrho)\,F(\alpha;\ \varrho,\sigma;\ x)\end{aligned}\right.$$

erhalten werden. Hierbei ist vorausgesetzt, dass der reelle Theil von $\varrho-1$ positiv sei; ausserdem werden in (38a) die reellen Theile von $\sigma-1$ und $\varrho-\sigma$, in (38b) der reelle Theil von $\sigma-\varrho+\frac{1}{2}$ als positiv angenommen. Die Variable v geht in den Integralen (38b) und (38c) vom unendlich entfernten Punkte der positiven reellen Axe aus und umkreist die Linie $\mathfrak{A}$ (welche die Punkte 0 und x verbindet) zweimal

§ 3.

Die zweite Substitution, die auf die Gleichung (28) angewendet wird, ist

$$(39)\qquad y = \int_g^h e^{\frac{x}{v}}\, v^{-\sigma}\, V_1\, dv.$$

Die Function V_1 befriedigt in diesem Falle (cfr. Crelle's Journal, Band 112, pag. 79) die Differentialgleichung

$$(40)\qquad v\frac{d^2V_1}{dv^2} = \{v-(\varrho-\sigma+1)\}\frac{dV_1}{dv} + (\alpha-\sigma+1)\,V_1,$$

die aus der Gleichung (14) entsteht, wenn die Grössen x, y, α, ϱ durch $v, V_1, \alpha-\sigma+1, \varrho-\sigma+1$ ersetzt werden. Gemäss (21) nimmt man für V_1, indem man durch $\mathfrak{A}'$ wiederum die Verbindungslinie der Punkte 0 und v bezeichnet, nach einander die Integrale

$$\bar{\int}_{-\infty}^{(\mathfrak{A}')} e^u (u-v)^{\sigma-\alpha-1} u^{\alpha-\varrho}\, du = \bar{\Gamma}(\sigma-\varrho)\, F(\alpha-\sigma+1;\varrho-\sigma+1;v),$$

$$\bar{\int}_c^{(v,0,v-,0-)} e^u (u-v)^{\sigma-\alpha-1} u^{\alpha-\varrho}\, du$$

$$= e^{\pi i(\alpha-\varrho)}\,\mathfrak{E}(\alpha-\varrho+1,\sigma-\alpha)\, v^{\sigma-\varrho} F(\alpha-\varrho+1;\ \sigma-\varrho+1;\ v).$$

Dann ergeben sich aus der Formel (11), in der l_ν den Werth

$$\bar{\Gamma}(\sigma-\varrho)\frac{(\alpha-\sigma+1)(\alpha-\sigma+2)\ldots(\alpha-\sigma+\nu)}{1.2\ldots\nu.(\varrho-\sigma+1)(\varrho-\sigma+2)\ldots(\varrho-\sigma+\nu)},$$

resp.

$$e^{\pi i(\alpha-\varrho)}\,\mathfrak{E}(\alpha-\varrho+1,\sigma-\alpha)\frac{(\alpha-\varrho+1)(\alpha-\varrho+2)\ldots(\alpha-\varrho+\nu)}{1.2\ldots\nu.(\sigma-\varrho+1)(\sigma-\varrho+2)\ldots(\sigma-\varrho+\nu)},$$

und p den Werth $1-\sigma$, resp. $1-\varrho$ erhält, die für beliebige Werthe von α, ϱ, σ gültigen Gleichungen

$$(41)\qquad \bar{\int}_{-\varepsilon x}^{(0)} e^{\frac{x}{v}} v^{-\sigma}\, dv \bar{\int}_{-\infty}^{(\mathfrak{A}')} e^u (u-v)^{\sigma-\alpha-1} u^{\alpha-\varrho}\, du$$

$$= \bar{\Gamma}(\sigma-\varrho)\bar{\Gamma}(\sigma-1)x^{1-\sigma} F(\alpha-\sigma+1;2-\sigma,\varrho-\sigma+1;x),$$

$$(42)\qquad \bar{\int}_{-\varepsilon x}^{(0)} e^{\frac{x}{v}} v^{-\sigma}\, dv \bar{\int}_c^{(v,0,v-,0-)} e^u (u-v)^{\sigma-\alpha-1} u^{\alpha-\varrho}\, du$$

$$= e^{\pi i(\alpha-\varrho)}\,\mathfrak{E}(\alpha-\varrho+1,\sigma-\alpha)\bar{\Gamma}(\varrho-1)x^{1-\varrho} F(\alpha-\varrho+1;2-\varrho,\sigma-\varrho+1;x).$$

---

hinter einander in positiver Drehungsrichtung. Bei dem Integral (38a), wo der Weg von v der nämliche wie (38) ist, durchläuft die Variable u im Uebrigen die imaginäre Axe, umgeht aber den Nullpunkt auf der Seite der positiven reellen Werthe.

Die Gleichung (41) wird niemals illusorisch. Denn da $\overline{\Gamma}(\alpha)$ nur für ein positives ganzzahliges α verschwindet, und ϱ, σ, $\varrho-\sigma$ hier als nicht ganzzahlig vorausgesetzt werden, so sind $\overline{\Gamma}(\sigma-\varrho)$ und $\overline{\Gamma}(\sigma-1)$, wie auch $\overline{\Gamma}(\varrho-1)$, von Null verschieden. Das auf der rechten Seite der Gleichung (42) stehende Integral $\mathfrak{E}(\alpha-\varrho+1,\ \sigma-\alpha)$ nimmt den Werth Null an, wenn $\alpha-\varrho+1$ oder $\sigma-\alpha$ eine positive ganze Zahl ist; zugleich verschwindet dann das auf der linken Seite von (42) befindliche Doppelintegral. In diesen speciellen Fällen hat man die Gleichung (42) durch die einfachere analoge Gleichung zu ersetzen, auf deren linker Seite die Variable u (statt des Doppelumlaufs) einen einmaligen Umlauf um v, resp. 0 (bei 0, resp. v beginnend) ausführt oder die Verbindungslinie der Punkte 0 und v durchläuft (cfr. (22)).

Ist der reelle Theil von $\alpha-\varrho+1$ positiv, so genügt der Differentialgleichung (40) das particuläre Integral

$$\overline{\int_0^{(v)}} e^u (u-v)^{\sigma-\alpha-1} u^{\alpha-\varrho}\, du,$$

das durch die Substitution $u=vu_1$, $du=v\,du_1$, die Gestalt

$$v^{\sigma-\varrho}\overline{\int_0^{(1)}} e^{u_1 v}(u_1-1)^{\sigma-\alpha-1} u_1^{\alpha-\varrho}\, du_1$$

annimmt. Man setze den letzteren Ausdruck an Stelle von V_1 in (39) ein und lasse die Variable v von $-\infty$ aus einen positiven Umlauf um den Nullpunkt machen. Das hierdurch entstehende Doppelintegral

$$\overline{\int_{-\infty}^{(0)}} e^{\frac{x}{v}} v^{-\varrho}\, dv \overline{\int_0^{(1)}} e^{u_1 v}(u_1-1)^{\sigma-\alpha-1} u_1^{\alpha-\varrho}\, du_1$$

ergiebt, wenn $e^{\frac{x}{v}}$ in $1+\frac{1}{v}\frac{x}{1}+\frac{1}{v^2}\frac{x^2}{1.2}+\cdots$ entwickelt wird, die Reihe

$$\mathfrak{H}_0+\mathfrak{H}_1\frac{x}{1}+\mathfrak{H}_2\frac{x^2}{1.2}+\cdots+\mathfrak{H}_\nu\frac{x^\nu}{1.2\ldots\nu}+\cdots,$$

wo $\mathfrak{H}_\nu$ das constante Doppelintegral

$$\mathfrak{H}_\nu=\overline{\int_{-\infty}^{(0)}} v^{-\varrho-\nu}\, dv \overline{\int_0^{(1)}} e^{u_1 v}(u_1-1)^{\sigma-\alpha-1} u_1^{\alpha-\varrho}\, du_1$$

bezeichnet. Für $\mathfrak{H}_\nu$ gilt aber, wenn angenommen wird, dass der reelle Theil von α positiv sei, die Gleichung*)

$$\mathfrak{H}_\nu=\overline{\Gamma}(1-\varrho-\nu)\,\overline{E}(\alpha+\nu,\ \sigma-\alpha).$$

---

*) Cfr. § 3 des Aufsatzes des Verfassers „Ueber ein vielfaches, auf Euler'sche Integrale reducirbares Integral" im 107ten Bande des Crelle'schen Journals, p. 246. Die dort abgeleitete Formel:

Indem man dann mittelst der für die Integrale $\overline{E}$ und $\overline{\Gamma}$ geltenden Reductionsformeln die Grösse $\mathfrak{H}_\nu$ in den Quotienten

$$\mathfrak{H}_\nu = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu-1)}{\varrho(\varrho+1)\ldots(\varrho+\nu-1)\,\sigma(\sigma+1)\ldots(\sigma+\nu-1)}\,\overline{\Gamma}(1-\varrho)\,\overline{E}(\alpha,\,\sigma-\alpha)$$

umformt, findet man

$$(43)\qquad \begin{cases} \overline{\int}_{-\infty}^{(0)} e^{\frac{x}{v}}\, v^{-\varrho}\, dv \overline{\int}_0^{(1)} e^{u_1 v}(u_1-1)^{\sigma-\alpha-1}\, u_1{}^{\alpha-\varrho}\, du_1 \\ \quad = \overline{\Gamma}(1-\varrho)\,\overline{E}(\alpha,\,\sigma-\alpha)\,F(\alpha;\;\varrho,\,\sigma;\;x). \end{cases}$$

Das betrachtete Doppelintegral stellt also, wie das Doppelintegral (38), resp. (38a), (38b), (38c), die eindeutige particuläre Lösung der Differentialgleichung (28) dar.

§ 4.

Die Differentialgleichung

$$(44)\qquad \begin{cases} x^2\dfrac{d^3y}{dx^3} + (\varrho+\sigma+1)\,x\dfrac{d^2y}{dx^2} + \varrho\sigma\dfrac{dy}{dx} \\ = x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + (\alpha+\beta+1)\,x\dfrac{dy}{dx} + \alpha\beta y, \end{cases}$$

$$\overline{\int}_{-\infty}^{(0)} s^{-a}\, ds \int_0^1 e^{st}\, t^b\,(1-t)^{c-1}\, dt = \overline{\Gamma}(1-a)\,E(a+b,\,c)$$

lässt sich leicht auf den Fall ausdehnen, wo die Variable t vom Nullpunkte aus den Punkt 1 umkreist. Giebt man dem Doppelintegral

$$H = \overline{\int}_{-\infty}^{(0)} s^{-a}\, ds \overline{\int}_0^{(1)} e^{st}\, t^b\,(t-1)^{c-1}\, dt$$

die Form

$$H = \overline{\int}_{-\infty}^{(0)} e^s\, s^{-a}\, ds \overline{\int}_0^{(1)} e^{s(t-1)}\, t^b\,(t-1)^{c-1}\, dt$$

und setzt für $e^{s(t-1)}$ die Reihe $1 + \frac{s(t-1)}{1} + \cdots$ ein, so entsteht für H eine Reihenentwickelung, in welcher der allgemeine Term

$$\overline{\Gamma}(1-a-\nu)\,\overline{E}(b+1,\,c+\nu),$$

lautet. Eine Rechnung von derselben Art, wie sie in dem genannten Aufsatze enthalten ist, führt dann zu der Gleichung

$$H = \overline{\Gamma}(1-a)\,\overline{E}(a+b,\,c),$$

durch welche das obige Integral $\mathfrak{H}_\nu$ bestimmt wird.

die sich aus (1) im Falle $n=3$, $m=2$ ergiebt, und deren Hauptlösungen in Reihenform

$$(45)\qquad \begin{cases} F(\alpha,\beta;\ \varrho,\sigma;\ x), = 1+\frac{\alpha\beta}{1\,.\,\varrho\sigma}x+\cdots, \\ x^{1-\varrho}F(\alpha-\varrho+1,\ \beta-\varrho+1;\ 2-\varrho,\ \sigma-\varrho+1;\ x), \\ x^{1-\sigma}F(\alpha-\sigma+1,\ \beta-\sigma+1;\ 2-\sigma,\ \varrho-\sigma+1;\ x) \end{cases}$$

lauten, ist vom Verfasser bereits in § 1 und § 2 der Abhandlung „Ueber eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit einem endlichen singulären Punkte" (Crelle's Journal, Band 108, pag. 50) behandelt worden. Die Gleichung wird daselbst durch Doppelintegrale gelöst, zu denen man durch eine Substitution von der Form (2) gelangt. Im Folgenden soll, als Ergänzung dieser Rechnung, die Substitution (cfr. 3)

$$(46)\qquad y=\int_g^h e^{\frac{x}{v}}\,v^{-\sigma}\,V_2\,dv$$

auf die Gleichung (44) angewendet werden. Man erhält hierdurch (nach zweimaliger theilweiser Integration) für die Function V_2 die Differentialgleichung

$$(47)\qquad \begin{aligned} v(v-1)\frac{d^2V_2}{dv^2}+\{(\alpha+\beta-2\sigma+3)\,v-(\varrho-\sigma+1)\}\frac{dV_2}{dv}& \\ +(\alpha-\sigma+1)(\beta-\sigma+1)\,V_2=0,& \end{aligned}$$

die aus (13) entsteht, wenn die Grössen v, V_2, $\alpha-\sigma+1$, $\beta-\sigma+1$, $\varrho-\sigma+1$ statt $x, y, \alpha, \beta, \varrho$ gesetzt werden.

Um die mehrdeutigen Hauptlösungen der Gleichung (44) aus dem Integral (46) abzuleiten, nimmt man $g=h=-\varepsilon x$ und lässt $\big($wie in (41) und (42)$\big)$ die Variable v den in (11) für die Variable t angegebenen Weg durchlaufen. Sind die reellen Bestandtheile der Constanten $\beta-\varrho+1$ und $\sigma-\beta$ positiv, so kann für V_2 zunächst das Integral

$$\int_0^v (v-u)^{\sigma-\beta-1}\,u^{\beta-\varrho}(1-u)^{\varrho-\alpha-1}\,du$$

gewählt werden, das durch die Substitution $u=vu_1$, $du=v\,du_1$, in das Product

$$v^{\sigma-\varrho}\int_0^1 u_1{}^{\beta-\varrho}\,(1-u_1)^{\sigma-\beta-1}(1-u_1v)^{\varrho-\alpha-1}\,du_1$$

übergeht. Das auf diese Weise erhaltene Doppelintegral

$$\int_{-\varepsilon x}^{\overline{(0)}} e^{\frac{x}{v}} v^{-\varrho}\, dv \int_0^1 u_1^{\beta-\varrho}(1-u_1)^{\sigma-\beta-1}(1-u_1 v)^{\varrho-\alpha-1}\, du_1$$

verwandelt sich durch die Substitution $v = x v_1$, $dv = x\, dv_1$, in den Ausdruck

$$x^{1-\varrho} \int_{-\varepsilon}^{\overline{(0)}} e^{\frac{1}{v_1}} v_1^{-\varrho}\, dv_1 \int_0^1 u_1^{\beta-\varrho}(1-u_1)^{\sigma-\beta-1}(1-u_1 v_1 x)^{\varrho-\alpha-1}\, du_1,$$

in welchem die Potenz $(1-u_1 v_1 x)^{\varrho-\alpha-1}$ nach dem binomischen Satze in die Reihe

$$1 + \frac{\alpha-\varrho+1}{1} u_1 v_1 x + \cdots + \frac{(\alpha-\varrho+1)(\alpha-\varrho+2)\ldots(\alpha-\varrho+\nu)}{1.2\ldots\nu} u_1^\nu v_1^\nu x^\nu + \cdots$$

entwickelt wird. Diese Reihe ist im vorliegenden Falle für einen beliebigen Werth von x anwendbar; denn die v-Curve, welche in ihren Dimensionen beliebig bleibt, kann so klein genommen werden, dass mod. $(u_1 v_1 x)$, d. h. mod. $(u_1 v)$ die Einheit nicht erreicht. Somit gewinnt man, nach Berücksichtigung von (9) und (12a), für das genannte Doppelintegral die Entwickelung

$$x^{1-\varrho} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(\alpha-\varrho+1)\ldots(\alpha-\varrho+\nu)}{1.2\ldots\nu} \overline{\Gamma}(\varrho-1-\nu)\, E(\beta-\varrho+1+\nu, \sigma-\beta).$$

Da nun

$$E(\beta-\varrho+1+\nu, \sigma-\beta) = \frac{(\beta-\varrho+1)\ldots(\beta-\varrho+\nu)}{(\sigma-\varrho+1)\ldots(\sigma-\varrho+\nu)} E(\beta-\varrho+1, \sigma-\beta).$$

und (cfr. Band 35 dieser Annalen, pag. 515)

$$\overline{\Gamma}(\varrho-1-\nu) = \frac{\overline{\Gamma}(\varrho-1)}{(2-\varrho)(3-\varrho)\ldots(\nu+1-\varrho)}$$

ist, so entsteht die Gleichung

$$(48)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{-\varepsilon x}^{\overline{(0)}} e^{\frac{x}{v}} v^{-\sigma}\, dv \int_0^v (v-u)^{\sigma-\beta-1} u^{\beta-\varrho}(1-u)^{\varrho-\alpha-1}\, du \\ &= \overline{\Gamma}(\varrho-1)\, E(\beta-\varrho+1, \sigma-\beta)\, x^{1-\varrho} F(\alpha-\varrho+1, \beta-\varrho+1; 2-\varrho, \\ &\qquad\qquad \sigma-\varrho+1; x). \end{aligned}\right.$$

Erfüllen die Constanten β, ϱ, σ die oben erwähnte Bedingung $(\beta-\varrho+1>0,\ \sigma-\beta>0)$ nicht, so wird die vorstehende Rechnung in der Art modificirt, dass ein Doppelumlauf (cfr. das zweite Integral (18)), resp. ein einfacher Umlauf um 0 oder v den Weg der Variable u bildet. Im allgemeinen Falle findet man die zu (48) analoge Gleichung

$$(49)\quad \overline{\int}_{-\epsilon x}^{(0)} e^{\frac{x}{v}}\, v^{-\sigma}\, dv \overline{\int}_{c}^{(v,0,v-,0-)} (v-u)^{\sigma-\beta-1} u^{\beta-\varrho} (1-u)^{\varrho-\alpha-1}\, du$$
$$= \mathfrak{N}' x^{1-\varrho} F(\alpha-\varrho+1, \beta-\varrho+1;\ 2-\varrho, \sigma-\varrho+1;\ x),$$

in der die Constante $\mathfrak{N}'$ den Werth

$$\mathfrak{N}' = e^{\pi i(\sigma-\varrho+1)}\, \overline{\Gamma}(\varrho-1)\, \mathfrak{G}(\beta-\varrho+1, \sigma-\beta)$$

hat.

Für V_2 soll ferner der Ausdruck

$$(50)\qquad \overline{\int}_{c}^{(1,\mathfrak{A}',1-,\mathfrak{A}'-)} (u-v)^{\sigma-\beta-1} u^{\beta-\varrho} (1-u)^{\varrho-\alpha-1}\, du,$$

der dem ersten Integral (18) entspricht, in (46) substituirt werden, während v einen Integrationsweg von derselben Art, wie in (48), (49) durchläuft. Unter $\mathfrak{A}'$ wird wiederum die Verbindungslinie der Punkte 0 und v verstanden. Um die Wege von u und v näher zu bestimmen, schlägt man um den Nullpunkt als Mittelpunkt zwei Kreise $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$, von denen der grössere $\mathfrak{K}$ die positive reelle Axe im Punkte c schneiden möge. Die Radien beider Kreise werden kleiner als 1 vorausgesetzt. Man construirt ausserdem um den Punkt 1 als Mittelpunkt einen durch den Punkt c gehenden Kreis $\mathfrak{L}$. Der Kreis $\mathfrak{K}'$ möge zusammen mit der vom Punkte $-\epsilon x$ zum Punkte d (Fig. 3) gezogenen Geraden für den

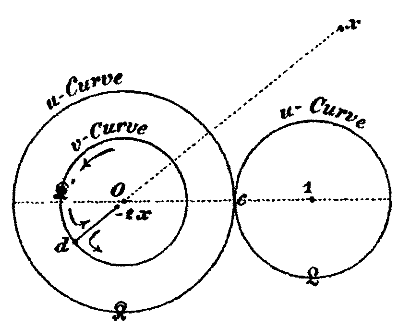


Fig. 3.

Weg der Variable v angewendet werden. Die Variable u soll vom Punkte c ausgehen und die Kreise $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{K}$ zuerst in positiver, dann (in der nämlichen Reihenfolge) in negativer Drehungsrichtung durchlaufen. Da nach diesen Festsetzungen mod. u stets grösser als mod. v ist, so besteht für die Potenz $(u-v)^{\sigma-\beta-1}$ die convergente Entwickelung

$$(u-v)^{\sigma-\beta-1} = u^{\sigma-\beta-1}\left(1-\frac{v}{u}\right)^{\sigma-\beta-1}$$

$$= u^{\sigma-\beta-1}\left\{1+\frac{\beta-\sigma+1}{1}\frac{v}{u}+\cdots+\frac{(\beta-\sigma+1)\ldots(\beta-\sigma+\nu)}{1.2\ldots\nu}\frac{v^\nu}{u^\nu}+\cdots\right\}.$$

Das Doppelintegral

$$\overline{\int}_{-\epsilon x}^{(0)} e^{\frac{x}{v}} v^{-\sigma}\, dv \overline{\int}_{c}^{(1,\mathfrak{A}',1-,\mathfrak{A}'-)} (u-v)^{\sigma-\beta-1} u^{\beta-\varrho}(1-u)^{\varrho-\alpha-1}\, du$$

geht, wenn für $(u-v)^{\sigma-\beta-1}$ die obige Reihe gesetzt, und zugleich $v = xv_1$, $dv = x\, dv_1$ substituirt wird, in die Summe

$$x^{1-\sigma}\left\{\mathfrak{M}_0+\frac{\beta-\sigma+1}{1}\mathfrak{M}_1 x+\cdots+\frac{(\beta-\sigma+1)\ldots(\beta-\sigma+\nu)}{1.2\ldots\nu}\mathfrak{M}_\nu x^\nu+\cdots\right\}$$

über, in der $\mathfrak{M}_\nu$ (für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$) das Product

$$\mathfrak{M}_\nu = \overline{\int}_{-\epsilon}^{(0)} e^{\frac{1}{v_1}} v_1^{-\sigma+\nu}\, dv_1 \overline{\int}_{c}^{(1,0,1-,0-)} u^{\sigma-\varrho-\nu-1}(1-u)^{\varrho-\alpha-1}\, du$$

bedeutet. Nach (8) und (12a) ist

$$\mathfrak{M}_\nu = \overline{\Gamma}(\sigma-1-\nu)\, e^{\pi i(\sigma-\alpha-\nu)}\, \mathfrak{E}(\sigma-\varrho-\nu,\ \varrho-\alpha)$$

$$= e^{\pi i(\sigma-\alpha)}\, \overline{\Gamma}(\sigma-1)\, \mathfrak{E}(\sigma-\varrho,\ \varrho-\alpha)\ \frac{(\alpha-\sigma+1)(\alpha-\sigma+2)\ldots(\alpha-\sigma+\nu)}{(2-\sigma)\ldots(\nu-\sigma)\,(\varrho-\sigma+1)\ldots(\varrho-\sigma+\nu)}.$$

Also gilt, wenn man $\mathfrak{N}''$ die Constante

$$\mathfrak{N}'' = e^{\pi i(\sigma-\alpha)}\, \overline{\Gamma}(\sigma-1)\, \mathfrak{E}(\sigma-\varrho,\ \varrho-\alpha)$$

nennt, die Gleichung

$$(51)\quad \overline{\int}_{-\epsilon x}^{(0)} e^{\frac{x}{v}} v^{-\sigma}\, dv \overline{\int}_{c}^{(1,\mathfrak{A}',1-,\mathfrak{A}'-)} (u-v)^{\sigma-\beta-1} u^{\beta-\varrho}(1-u)^{\varrho-\alpha-1}\, du$$
$$= \mathfrak{N}'' x^{1-\sigma} F(\alpha-\sigma+1,\ \beta-\sigma+1;\ 2-\sigma,\ \varrho-\sigma+1;\ x).$$

Endlich lässt sich auch die eindeutige particuläre Lösung der Differentialgleichung (43)

$$F(\alpha,\beta;\ \varrho,\sigma;\ x)$$

durch ein Integral von der Form (46) darstellen. Als Integrationsweg von v dient dann (wie in (43)) eine von $-\infty$ ausgehende geschlossene Curve, die den Nullpunkt umkreist. Die reellen Theile der Constanten α und β werden hierbei als positiv vorausgesetzt. Für die Durchführung der Rechnung benutzt man eine auf ein Doppelintegral bezügliche Formel. Der Verfasser hat in § 3 der bereits erwähnten Abhandlung

„Ueber die Differentialgleichung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe etc." (Band 102 des Crelle'schen Journals, pag. 91) die Gleichung

$$\int_0^1 v^{k_1+k_2-1}(1-v)^{l_1-1}\,dv\int_0^1 u^{k_2-1}(1-u)^{k_1-1}(1-uv)^{l_2}\,du$$
$$= E(k_1, l_1)\,E(k_2, k_1+l_1+l_2)$$

abgeleitet. Eine ähnliche Formel besteht auch für den Fall, dass die Variablen u und v, statt die Verbindungslinie der Punkte 0 und 1 zu durchlaufen, vom Punkte 1 aus einen Umlauf um den Nullpunkt machen. Man findet bei Anwendung dieser Integrationswege, indem man das Integral (5) durch die Substitution $z = 1 - w$ in

$$\overline{E}(a, b) = e^{-\pi i b}\int_1^{(0)} w^{b-1}(1-w)^{a-1}\,dw$$

(Band 35 dieser Annalen, pag. 513) umformt, die Gleichung*)

---

*) Für die Potenz $(1-uv)^{-a-b}$ gilt, da die Wege der Variablen u und v aus einem kleinen Kreise um den Nullpunkt und aus einem zwischen 0 und 1 liegenden Stücke der reellen Axe zusammengesetzt werden können (so dass mod. $(uv) < 1$ ist), die convergente Entwickelung

$$(1-uv)^{-a-b} = 1 + \frac{a+b}{1}uv + \cdots + \frac{(a+b)\ldots(a+b+p-1)}{1.2\ldots p}u^p v^p + \cdots.$$

Daher ist das in (52) genannte Doppelintegral gleich der Summe

$$\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{(a+b)\ldots(a+b+p-1)}{1.2\ldots p}\int_1^{(0)} v^{b+p-1}(1-v)^{a-1}\,dv\int_1^{(0)} u^{l+p-1}(1-u)^{k-1}\,du,$$
$$= \sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{(a+b)\ldots(a+b+p-1)}{1.2\ldots p}\,e^{\pi i(b+l)}\,\overline{E}(a, b+p)\,\overline{E}(k, l+p)$$

die, wenn man für $\overline{E}(a, b+p)$, $\overline{E}(k, l+p)$ das Product

$$\frac{b(b+1)\ldots(b+p-1)}{(a+b)\ldots(a+b+p-1)}\;\frac{l(l+1)\ldots(l+p-1)}{(k+l)\ldots(k+l+p-1)}\,\overline{E}(a, b)\,\overline{E}(k, l)$$

einsetzt, die Form

$$e^{\pi i(b+l)}\,\overline{E}(a, b)\,\overline{E}(k, l)\left\{1 + \frac{bl}{1.(k+l)} + \frac{b(b+1)\,l(l+1)}{1.2.(k+l)(k+l+1)} + \cdots\right\}$$

annimmt. Der in der Klammer befindliche Ausdruck stellt aber eine Gauss'sche hypergeometrische Reihe mit dem vierten Argument 1 dar, welche den Werth $\frac{\Gamma(k+l)\,\Gamma(k-b)}{\Gamma(k)\,\Gamma(k+l-b)}$ hat. Da nun $\overline{E}(k, l)$ gleich dem Quotienten $\frac{\Gamma(k)\,\overline{\Gamma}(l)}{\Gamma(k+l)}$ ist, so ergiebt sich das Doppelintegral (52) in der That als identisch mit dem Producte

$$e^{\pi i(b+l)}\,\overline{E}(a, b)\,\frac{\Gamma(k-b)\,\overline{\Gamma}(l)}{\Gamma(k-b+l)} = e^{\pi i(b+l)}\,\overline{E}(a, b)\,\overline{E}(k-b, l).$$

$$(52)\quad \begin{cases} \displaystyle\overline{\int_1}^{(0)} v^{b-1}(1-v)^{a-1}\,dv \overline{\int_1}^{(0)} u^{l-1}(1-u)^{k-1}(1-uv)^{-a-b}\,du \\ \qquad = e^{\pi i(b+l)}\,\overline{E}(a,\, b)\,\overline{E}(k-b,\, l). \end{cases}$$

Man bilde, indem man in (46) an Stelle von V_2 das Integral

$$\overline{\int_\infty}^{(1)} (u-v)^{\sigma-\beta-1}\,u^{\beta-\sigma}\,(u-1)^{\varrho-\alpha-1}\,du$$

nimmt, das Doppelintegral

$$(53)\qquad \overline{\int_{-\infty}}^{(0)} e^{\frac{x}{v}}\,v^{-\sigma}\,dv \overline{\int_\infty}^{(1)} (u-v)^{\sigma-\beta-1}\,u^{\beta-\varrho}\,(u-1)^{\varrho-\alpha-1}\,du.$$

Dasselbe liefert, wenn $e^{\frac{x}{v}}$ nach Potenzen von x entwickelt wird, die Reihe

$$\mathfrak{P}_0 + \mathfrak{P}_1\,\frac{x}{1} + \mathfrak{P}_2\,\frac{x^2}{1.2} + \cdots + \mathfrak{P}_\nu\,\frac{x^\nu}{1.2\ldots\nu} + \cdots,$$

in der $\mathfrak{P}_\nu$ die Constante

$$\overline{\int_{-\infty}}^{(0)} v^{-\sigma-\nu}\,dv \overline{\int_\infty}^{(1)} (u-v)^{\sigma-\beta-1}\,u^{\beta-\varrho}\,(u-1)^{\varrho-\alpha-1}\,du$$

bedeutet. Man substituirt

$$u = \frac{1}{1-u_1}, \quad v = \frac{v_1}{v_1-1},$$

so dass $u_1 = \dfrac{u-1}{u}$, $v_1 = \dfrac{v}{v-1}$ ist. Der Weg der Variable u möge aus einem (in beiden Richtungen durchlaufenen) Abschnitte der positiven reellen Axe und einem kleinen Kreise um den Punkt 1 bestehen, der Weg der Variable v aus einem Abschnitt der negativen reellen Axe und einem kleinen Kreise um den Nullpunkt. Dann ergiebt sich sowohl für u_1 als für v_1 ein Weg, der vom Punkte 1 ausgeht und den Nullpunkt in positiver Drehungsrichtung umkreist. Es entsteht auf diese Weise für $\mathfrak{P}_\nu$ die Gleichung

$$(-1)^{\sigma+\nu-1} \overline{\int_1}^{(0)} v_1^{-\sigma-\nu}(1-v_1)^{\beta+\nu-1}dv_1 \overline{\int_1}^{(0)} u_1^{\varrho-\alpha-1}(1-u_1)^{\alpha-\sigma}(1-u_1 v_1)^{\sigma-\beta-1}\,du_1.$$

Die Anwendung der Formel (52) giebt nun

$$\mathfrak{P}_\nu = e^{\pi i(\varrho-\alpha)}\,\overline{E}(\beta+\nu,\, 1-\sigma-\nu)\,\overline{E}(\alpha+\nu,\, \varrho-\alpha),$$

so dass, nach Berücksichtigung der Reductionsformel

$$\overline{E}(a,\, b-\nu) = (-1)^\nu\,\frac{(a+b-1)(a+b-2)\ldots(a+b-\nu)}{(b-1)(b-2)\ldots(b-\nu)}\,\overline{E}(a,\, b)$$

und der analogen in § 1 angegebenen Formel für $\overline{E}(a+v,\ b)$, die Grösse $\mathfrak{P}_\nu$ in den Ausdruck

$$e^{\pi i(\varrho-\alpha)}\,\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu-1)\,\beta(\beta+1)\ldots(\beta+\nu-1)}{\varrho(\varrho+1)\ldots(\varrho+\nu-1)\,\sigma(\sigma+1)\ldots(\sigma+\nu-1)}\,\overline{E}(\beta,\,1-\sigma)\,\overline{E}(\alpha,\,\varrho-\alpha)$$

übergeht. Somit wird für das Doppelintegral (53) die Gleichung

$$(54)\qquad \left\{\begin{aligned}&\overline{\int}_{-\infty}^{(0)} e^{\frac{x}{v}}\,v^{-\sigma}\,dv\,\overline{\int}_{\infty}^{(1)} (u-v)^{\sigma-\beta-1}\,u^{\beta-\varrho}\,(u-1)^{\varrho-\alpha-1}\,du\\ &=e^{\pi i(\varrho-\alpha)}\,\overline{E}(\alpha,\,\varrho-\alpha)\,\overline{E}(\beta,\,1-\sigma)\,F(\alpha,\,\beta;\,\varrho,\,\sigma;\,x)\end{aligned}\right.$$

erhalten.

Ueber unverzweigte lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung auf ebenen Curven vierten Grades.

(Auszug aus einem an F. Klein gerichteten Briefe.)

Von

PAUL GORDAN in Erlangen.

Sind $z_1 z_2 z_3$ durch die Gleichung verbunden

$$f_1 z_1 + f_2 z_2 + f_3 z_3 = 0$$

so lässt sich die ternäre Form

$$r = r_z^2 = (r_1 z_1 + r_2 z_2 + r_3 z_3)^2$$

in eine Form in z_1, z_2 transformiren $R = (R_1 z_1 + R_2 z_2)^2$. Die Invariante $(RR)^2$ dieser binären Form hat dann den Werth:

$$\frac{1}{f_3^2}(r r_1 f)^2.$$

Zwischen den Covarianten einer ternären Form

$$f = a_x^4 = 0$$

besteht u. A. die Relation:

$$a_x a_3 (afu)^2 = \frac{1}{3} u_x u_3 \Delta - \frac{1}{2} f_3 a_x^2 b_x^2 (abu)^2 - \frac{1}{2} u_x^2 \Delta_3$$

in welcher:

$$f_k = a_x^3 a_k; \quad \Delta = \Delta_x^6 = (abc)^2 a_x^2 b_x^2 c_x^2; \quad \Delta_3 = \Delta_x^5 \Delta_3$$

bedeutet. Aus ihr ergeben sich die Formeln:

$$a_x^2(afu)^2 = -\frac{1}{6}u_x^2\Delta; \quad (abf)^2 a_x b_x a_3 b_3 = \frac{1}{3}\Delta f_{33} - \Delta_3 f_3$$

und da:

$$(f_3^2)_{y^2} = f_3 \cdot a_x a_3 a_y^2 - \frac{3}{10} a_x b_x a_3 b_3 (a_y b_x - b_y a_x)^2$$

ist, auch:

$$(f_3^2 f u)^2 = f_3\left(\frac{1}{3}u_x u_3 \Delta - \frac{1}{2}f_3 a_x^2 b_x^2 (abu)^2 - \frac{1}{5}u_x^2\Delta_3\right) - \frac{1}{10}u_x^2 \Delta f_{33}.$$

Bezeichnet man die Differentiale der Variabeln x_i durch

$$dx_i = z_i$$

und ist x_3 durch die Gleichung $f = 0$ als implicite Function der unabhängigen Variabeln $x_1 x_2$ gegeben, so ist $d_2 x_1 = d_2 x_2 = 0$ und z_3 und $d_2 x_3$ sind als Functionen von z_1 und z_2, x durch die Gleichungen bestimmt:

$$a_x^3 a_z = f_1 z_1 + f_2 z_2 + f_3 z_3 = 0, \tag{1}$$

$$3 a_x^2 a_z^2 + f_3 d_2 x_3 = 0. \tag{2}$$

Man kann dieselben dazu benutzen, um die 2ten Differentiale von Functionen von x durch quadratische Functionen von $z_1 z_2$ auszudrücken. Die 2ten Differentiale der Formen:

$$\Pi = p_x^{-\frac{1}{2}}$$

und

$$g = f_3^2 = g_x^6$$

werden nach $F(2)$ die quadratischen Formen in $z_1 z_2 z_3$

$$d_2\Pi = \frac{3}{4} p_x^{-\frac{5}{2}} p_z^2 + \frac{3}{2} a_x^2 a_z^2 \cdot \frac{1}{f_3} p_x^{-\frac{3}{2}} p_3,$$

$$d_2 g = 30 g_x^4 g_z^2 - 18 g_x^5 g_3 \cdot \frac{1}{f_3} a_x^2 a_z^2.$$

Trägt man hier für z_3 seinen Werth aus F. (1) ein, so erhält man 2 binäre quadratische Formen Π, f_3^2 in z_1, z_2; schiebt man sie 2 Mal binär übereinander, so erhält man die Ueberschiebung $(\Pi, f_3^2)^2$, welche sich nach Satz I durch ternäre symbolische Producte so ausdrücken lässt:

$$\frac{9}{2}(\Pi f_3^2)^2 = \begin{cases} \frac{5}{f_3^2} p_x^{-\frac{5}{2}} g_x^4 (pgf)^2 - \frac{3}{f_3^3} g_x^5 g_3 a_x^2 (apf)^2 p_x^{-\frac{3}{2}} \\ + \frac{10}{f_3^3} p_x^{-\frac{3}{2}} p_3 g_x^4 a_x^2 (agf)^2 + \frac{6}{f_3^4} p_x^{-\frac{3}{2}} p_3 g_x^5 g_3 a_x^2 b_x^2 (abf) \end{cases}$$

$$= -\frac{5}{2} p_x^{-\frac{5}{2}} a_x^2 b_x^2 (abp)^2 - \frac{\Delta_3}{f_3}\Pi.$$

Aus dieser Rechnung folgt, dass die von Ihnen im 46ten Band der Annalen pag. 80 gegebene Formel

$$(\Pi, f_3^2)^2 + \left(\frac{-H_3}{f_3} + \Omega\right)\Pi = 0$$

in diese übergeht

$$a_x^2 b_x^2 (a b \Pi)^2 + \Omega \Pi = 0.$$

München, im April 1895.

Berichtigungen zum 45. Bande.

S. 598 Z. 11 v. u. statt $\left(P : \frac{\frac{\partial \Delta}{\partial a_{i\varkappa}}}{\Delta}\right)$ lies $\left(P \cdot \frac{\frac{\partial \Delta}{\partial a_{i\varkappa}}}{\Delta}\right)$

„ 599 „ 3 v. o. statt $p_1(r)$ und $p_2(r)$ lies $p_1(z)$ und $p_2(z)$

„ „ „ 4 v. o. statt r lies z.

Berichtigungen zum 46. Bande.

S. 9 Anm. lies: § 3 statt § 6.

„ 15 Anm. lies: 12 u. 13 statt 27 u. 28.

„ 23 Zeile 12 v. o. lies: $a_4(x+1)^3 + a_5(y+1)^3$.

„ 24 „ 3 v. u. ist das Zeichen — zu streichen.

„ 47 „ 9 v. o. lies 37 statt 7.

„ „ „ 10 „ „ „ $-\frac{A_2^2 B}{27}(2A_2B^2h_2^3 + 27A_1h_4^2)$ statt $+2A_2B^2h_2^3 + 27A_1h_4^2$.

„ „ „ 11 „ „ „ 37 statt 7.

„ 49 Gleichung (36) lies $\overline{F}(\overline{y}, \overline{x})$ statt $\overline{F}(y, \overline{x})$.

„ 55 Zeile 8 v. u. lies 47 statt 17.

„ „ „ 13 „ „ „ 46 „ 16.

INHALT.

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exacten Ausführung stets auf besonderen Blättern, wenn möglich in der gewünschten Grösse und in thunlichst präciser Zeichnung dem Manuscripte beilegen zu wollen

Die Redaction.

☞ Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heften und umfasst 36—38 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.

Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 20 Mark; jährlich erscheinen etwa 4—6 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Verantwortliche Redaction: **W. Dyck**, München, Hildegardstr. $1^1/_2$, **F. Klein**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 3, **A. Mayer**, Leipzig, Königsstr. 1, II.

Hierzu Beilagen von **B. G. Teubner** in Leipzig.