Sul gruppo semplice di 360 collineazioni piane.

Nota di

F. Gerbaldi a Palermo.

I sistemi di 6 coniche due a due armonicamente iscritte e circoscritte (che io chiamo sestuple di coniche *in involuzione*) hanno notevole importanza, come recentemente ha mostrato il Sig. Wiman*), nello studio del gruppo semplice, G_{360}, di 360 collineazioni piane. Sistemi cosifatti di coniche furono considerati da me per la prima volta in una Nota pubblicata nel vol. XVII degli Atti dell' Accad. di Torino. Ivi io ho dimostrato varie proprietà della configurazione, cui danno luogo i 45 vertici ed i 45 lati dei triangoli autopolari rispetto alle 15 coppie di coniche, che si possono formare con una sestupla in involuzione; così ad es. ho dimostrato allora che quei 45 lati concorrono quattro a quattro nei 45 vertici, concorrono inoltre tre a tre nei 60 punti comuni alle dette coppie di coniche ed ancora tre a tre in altri 60 punti. Ora, come si deduce dal citato lavoro del Sig. Wiman, i detti 45 vertici e 45 lati sono i centri e gli assi delle omologie armoniche che stanno in G_{360}: ed i due sistemi di 60 punti, in cui concorrono tre a tre i 45 lati, sono i punti uniti dei due sistemi di collineazioni di 3^0 ordine contenute in G_{360}. Per guisa che la configurazione, che si presenta nel gruppo G_{360}, è precisamente quella di cui io mi sono occupato nel 1882, sette anni prima che il gruppo stesso venisse scoperto dal Sig. Valentiner**).

Occupandomi ora della teoria algebrica di questo gruppo in connessione coll' equazione generale di 6^0 grado, secondo il metodo del Prof. Klein, sono giunto ad alcuni risultati, che riassumo nelle linee seguenti.

Per il gruppo G_{360} di collineazioni piane esistono (come ha trovato il Sig. Wiman) due sestuple di coniche in involuzione tali che le collineazioni del gruppo producono in ogni sestupla le permutazioni del gruppo alternante.

Assumendo un sistema di coordinate proiettive qualunque, siano

$$f_k = 0 \quad \text{ed} \quad f_k' = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, 6)$$

le equazioni delle coniche dell' una e dell' altra di quelle sestuple. I loro primi membri possono essere normalizzati in maniera che, posto

*) Ueber eine einfache Gruppe von 360 Collineationen; *Math. Ann.* 47 (1896).

**) De endelige Transformations-Gruppers Theori; *Kjöb. Skrift* (6) V (1889).

$$\left.\begin{matrix}\varepsilon\\ \varepsilon^2\end{matrix}\right\}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2},\qquad \left.\begin{matrix}c\\ c'\end{matrix}\right\}=\frac{1\pm i\sqrt{15}}{4},$$

i discriminanti delle forma f_k risultano tutti uguali a $-c^2$, quelli delle forme f_k' tutti uguali a $-c'^2$, ed inoltre si hanno le relazioni

$$(1)\qquad \begin{aligned}
2(c-1)f_1' &= f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+f_6,\\
2(c-1)f_2' &= f_1+f_2+\varepsilon(f_3+f_6)+\varepsilon^2(f_4+f_5),\\
2(c-1)f_3' &= f_1+f_3+\varepsilon(f_4+f_2)+\varepsilon^2(f_5+f_6),\\
2(c-1)f_4' &= f_1+f_4+\varepsilon(f_5+f_3)+\varepsilon^2(f_6+f_2),\\
2(c-1)f_5' &= f_1+f_5+\varepsilon(f_6+f_4)+\varepsilon^2(f_2+f_3),\\
2(c-1)f_6' &= f_1+f_6+\varepsilon(f_2+f_5)+\varepsilon^2(f_3+f_4).
\end{aligned}$$

Ciò premesso, pongasi

$$\sum f_k^3 = 6(c+1)A,\quad \text{si deduce}\quad \sum f_k'^3 = 6(c'+1)A.$$

Pongasi ancora

$$f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 f_6 = \frac{1}{2}c\Phi,\qquad f_1'f_2'f_3'f_4'f_5'f_6' = \frac{1}{2}c'\Phi',$$

e si denotino con

$$-\frac{\Psi}{(c+1)^5}\quad \text{e}\quad -\frac{\Psi'}{(c'+1)^5}$$

le somme dei prodotti cinque a cinque delle f_k^3 e delle $f_k'^3$. Si hanno le identità

$$(2)\qquad \begin{aligned}
&\Phi+\Phi' = A^2,\\
&c^5\Psi+\Psi'+\frac{6}{25}A\left[c^5\Phi^2-\frac{15}{32}(c+1)^5\Phi\Phi'+\Phi'^2\right]=0.
\end{aligned}$$

Come invarianti fondamentali dei gradi 6, 12, 30 per il gruppo G_{360} si possono assumere A, Φ, Ψ.

Ogni gruppo di 360 punti, trasformato in sè da G_{360} e non situato sulla curva $A=0$, è l' intersezione di una curva del fascio

$$\Phi-\lambda A^2=0$$

con una curva del fascio

$$\Psi-\mu A^5=0.$$

Si tratta, per risolvere il problema delle forme, di trovare quei 360 punti, dati che siano i parametri λ e μ.

A questo scopo, se si prendono come incognite le sei quantità x_i, e le sei x_i', definite da

$$(c+1)x_i = f_i^3,\qquad (c'+1)x_i' = f_i'^3,$$

e si costruiscono le equazioni di cui esse sono le radici, si trova che la prima di queste equazioni è

$$(3)\qquad \begin{aligned}
&x^6-6Ax^5+\frac{1}{5}\left[63\Phi+3(c'+22)\Phi'\right]x^4-\frac{1}{5}A\left[52\Phi+\frac{1}{5}(39c'+314)\Phi'\right]x^3\\
&+\frac{1}{25}\left[63\Phi^2+3(7c'+58)\Phi\Phi'+\frac{3}{8}(67c'+290)\Phi'^2\right]x^2+\Psi x+\frac{1}{125}\Phi^3=0
\end{aligned}$$

e la seconda si deduce da questa scambiando c con c', Φ con Φ', e Ψ con Ψ'.

Se ora, supposto $A \neq 0$, in queste equazioni si pone

$$x = Ay, \qquad x' = Ay',$$

e si tengono presenti le identità (2), i coefficienti si esprimono direttamente nei parametri λ e μ, e si hanno così due risolventi di 6^0 grado per il problema delle forme. Dalle relazioni (1) si deduce che, scegliendo opportunamente le determinazioni delle radici cubiche, si ha

$$\sqrt[3]{12(1-c)x_k'} = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2} + \cdots + \sqrt[3]{x_6}.$$

Sono notevoli alcuni casi particolari. Nel fascio di curve di 12^0 grado $\Phi - \lambda A^2 = 0$, oltre alla curva $A = 0$ doppia, si hanno quattro curve dotate di punti doppi. Due di esse $\Phi = 0$, $\Phi' = 0$ sono degenerate nelle due sestuple di coniche ed hanno per punti doppi i due gruppi di 60 punti uniti per le collineazioni di 3^0 ordine; una terza ha per equazione

$$B = \Phi - 2cA^2 = 0$$

ed ha per punti doppi i 45 centri delle omologie armoniche; una quarta ha per equazione

$$C = \Phi + \frac{1}{5}(26c - 9)A^2 = 0$$

ed ha per punti doppi il gruppo di 36 punti uniti per le collineazioni di 5^0 ordine*). In corrispondenza a queste particolari curve del fascio si hanno le seguenti risolventi speciali.

Per un gruppo di 360 punti situato sulle coniche $\Phi' = 0$, una risolvente si può scrivere

$$(4) \qquad \left(y^2 - 2y + \frac{1}{5}\right)^3 + \left(\mu + \frac{6}{25}\right)y = 0,$$

e, posto

$$\xi = 5y, \quad \mu + \frac{6}{25} = \frac{1728}{3125}Z,$$

diventa

$$(\xi^2 - 10\xi + 5)^3 + 1728Z\xi = 0,$$

che è la più semplice risolvente di 6^0 grado dell' equazione icosaedrica**). — L'altra risolvente ha una radice nulla, e si riduce ad un' equazione di 5^0 grado, che si può scrivere

$$(4') \qquad \left[y' - \frac{1}{5}(c+6)\right]^3 \left[y' + \frac{3}{5}(c+4)\right]y' + \mu' = 0;$$

questa, ponendo

$$y' = -\frac{1}{5}cr + \frac{2}{5}(2c+3)$$

e osservando che ora si ha

*) L'altro gruppo di 72 punti uniti per le collin. di 5^0 ordine, ed il gruppo di 90 punti uniti per le collin. di 4^0 ordine giacciono sulla curva doppia $A = 0$.

**) F. Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder, pag. 111.

$$\mu' = -c^5\left(\mu + \frac{6}{25}\right),$$

diventa

$$(r-3)^3(r^2 - 11r + 64) + 1728Z = 0,$$

che è la *risolvente delle r* dell' equazione icosaedrica*). — Tra i valori, che competono all' espressione

$$\sqrt[3]{\xi_1} + \sqrt[3]{\xi_2} + \cdots + \sqrt[3]{\xi_6}$$

vi è sempre il valor zéro, e vi sono inoltre i valori

$$2(1-c)\sqrt[3]{r_k + 8c^2} \qquad (k = 1, 2, \ldots 5).$$

Per un gruppo di 360 punti situato sulla curva $B = 0$, si ha la risolvente

$$\left[y - \frac{1}{5}(c' + 1)\right]^4 \left[y - \frac{1}{5}(13 - 2c')\right]^2 + \left[\mu + \frac{6}{125}(18c' - 7)\right] y = 0, \tag{5}$$

e questa, se si pone $y = \frac{1}{25}(c' + 1)\tau$, coincide coll' equazione di 6^0 grado, che è stata incontrata dal Sig. Fricke nello studio da lui fatto dal punto di vista trascendente del gruppo G_{360}**).

Per un gruppo di 360 punti situato sulla curva $C = 0$, si ha la risolvente

$$\left(y + \frac{4}{5}c'^2\right)^5 [y - 2(c' + 1)] + \left[\mu - \frac{12}{3125}(1755c' - 718)\right] y = 0, \tag{6}$$

che, posto

$$y = -\frac{4}{5}c'^2\tau,$$

è della forma

$$(\tau - 1)^5 [\tau + (c+1)^3] = Z\tau.$$

Finalmente per il caso, sopra escluso, in cui si consideri un gruppo di 360 punti sulla curva $A = 0$, la (3) si può scrivere

$$\left(x^2 - \frac{1}{10}c'\Phi\right)^2 \left(x^2 + \frac{4}{5}c^2\Phi\right) + \Psi x = 0;$$

a determinare un siffatto gruppo di punti basta tagliare la curva $A = 0$ con una curva del fascio $\Psi^2 - \varrho\Phi^5 = 0$; allora, posto $x = \sqrt{\Phi}\, z$, si ha la risolvente

$$\left(z^2 - \frac{1}{10}c'\right)^2 \left(z^2 + \frac{4}{5}c^2\right) + \sqrt{\varrho}\, z = 0. \tag{7}$$

Fossano, 25 agosto 1897.

---

*) F. Klein, ibid., pag. 102.

**) Ueber eine einfache Gruppe von 360 Operationen. — *Göttinger Nachr* 1896.