Zum Kontinuum-Problem.*)

Von

J. König in Budapest.

---

1. Es sei $M_1, M_2, M_3, \cdots$ eine abzählbar unendliche Folge beliebiger Mengen, deren Mächtigkeiten wir mit $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3, \cdots$ bezeichnen.

Mit Hilfe dieser Mengenfolge definieren wir zwei neue Mengen.

Die *Summe* der abzählbar unendlichen Mengenfolge, in symbolischer Bezeichnung

$$S = M_1 + M_2 + M_3 + \cdots,$$

bedeute jene Menge, die durch Zusammenfassung aller Elemente von $M_1, M_2, M_3, \cdots$ entsteht, wobei die verschiedenen Mengen angehörigen Elemente immer als voneinander verschieden anzusehen sind. Die Mächtigkeit von S bezeichnen wir mit $\mathfrak{s}$.

Das *Produkt* der abzählbar unendlichen Mengenfolge, in symbolischer Bezeichnung

$$P = M_1 M_2 M_3 \cdots,$$

bedeute jene Menge, deren Elemente alle Komplexe

$$\mu = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots)$$

sind, wo α_i ein beliebiges Element der Menge M_i sein kann; es enthält demnach jedes μ ein und nur ein Element jeder beliebigen Menge der Folge. Es wird bequem sein, α_i als i^{ten} Index des Elementes μ zu bezeichnen. Die Mächtigkeit von P sei $\mathfrak{p}$.

Sind insbesondere alle M_i identisch $= M$, so wird statt P in der gebräuchlichen Bezeichnung $M^{\aleph_0}$ geschrieben.

---

*) Abgedruckt aus den Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses zu Heidelberg 1904.

Für die hier benutzten Begriffe und Sätze sind die Arbeiten Georg Cantors, des Schöpfers der Mengenlehre, einzusehen. Insbesondere: „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, I und II" (Math. Annalen, Bd. 46 und 49).

Vgl. ferner A. Schoenflies: „Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten" (Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. VIII. 2).

Wir beweisen, daß, wenn die Mengen $M_1, \cdots$ transfinit sind), immer die Beziehung*

$$\mathfrak{s} \leqq \mathfrak{p} \leqq \mathfrak{s}^{\aleph_0} \tag{1}$$

besteht.

Eine Teilmenge von P, die $\sim S$ ist, kann in der Tat leicht angegeben werden. Man wähle zu diesem Zweck aus jedem M_i ein bestimmtes Element β_i, und ändere in

$$\mu = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots)$$

immer nur einen Index, z. B. den k^{ten}, für welchen jedes Element von M_k zu setzen ist, mit Ausschluß von β_k. Die durch Mutation des k^{ten} Index entstandene Menge der μ ist augenscheinlich der Menge M_k, mit Ausschluß des Elementes β_k, äquivalent, also, da M_k transfinit ist, auch $\sim M_k$. Die Gesamtheit der so definierten μ ist eine Teilmenge von P und $\sim S$.

Noch leichter ist der zweite Teil der in (1) enthaltenen Behauptung zu erhärten. Wenn man in $S^{\aleph_0}$ als k^{ten} Index nicht alle Elemente von S, sondern nur diejenigen zuläßt, die Elemente von M_k sind, so erhält man unmittelbar eine Teilmenge von $S^{\aleph_0}$, die $\sim P$ ist.

Aus (1) folgt noch, indem man zur $\aleph_0{}^{\text{ten}}$ Potenz erhebt:

$$\mathfrak{s}^{\aleph_0} \leqq \mathfrak{p}^{\aleph_0} \leqq \mathfrak{s}^{\aleph_0},$$

und hieraus infolge des Äquivalenzsatzes:

$$\mathfrak{p}^{\aleph_0} = \mathfrak{s}^{\aleph_0}. \tag{2}$$

2. Es soll nun weiter vorausgesetzt werden, daß *die Mächtigkeiten der Mengen M_i durchweg wachsen*, d. h., daß immer

$$\mathfrak{m}_i < \mathfrak{m}_{i+1}$$

ist. *Wir beweisen, daß in diesem Falle niemals $\mathfrak{p} = \mathfrak{s}$, also wegen* (1) *immer*

$$\mathfrak{p} > \mathfrak{s} \tag{3}$$

ist.

Anders ausgedrückt: Die Äquivalenz $P \sim S$ ist unter den jetzt festgestellten Bedingungen unmöglich. In der Tat führt diese Annahme zu einem Widerspruch.

Soll nämlich zwischen P und S eine ausnahmslos ein-eindeutige Beziehung bestehen, so müssen auch die in S enthaltenen Elemente von M_k entsprechende Elemente von P bestimmen. Die in diesen Elementen zur Verwendung gelangenden $k+1^{\text{ten}}$ Indizes bilden also eine Menge,

---

*) Der Satz ist allgemeiner. Es besteht (1) dann und nur dann, wenn $\mathfrak{p}$ transfinit ist. Wir beschränken uns der Kürze wegen auf den oben angegebenen Fall.

deren Mächtigkeit höchstens $\mathfrak{m}_k$ ist. Die $k+1^{\text{ten}}$ Indizes der Elemente von P sind aber aus der Menge M_{k+1} zu wählen, deren Mächtigkeit $\mathfrak{m}_{k+1} > \mathfrak{m}_k$ ist. Es gibt demnach eine Teilmenge M'_{k+1} von M_{k+1}, die bei der Bildung jener Elemente von P, die Elementen von M_k entsprechen, gar nicht zur Verwendung gelangt.

Bildet man also solche Elemente von P, in denen vom zweiten Index ab Elemente von $M_2', M_3', \cdots$ benützt werden, so kann ein solches bei der angenommenen Äquivalenzbeziehung keinem, in irgend einem M_i enthaltenen Elemente entsprechen. D. h. die angenommene Äquivalenzbeziehung ist als unmöglich erwiesen.

3. Ist A_μ irgend eine wohlgeordnete Menge von der Mächtigkeit $\aleph_\mu$, so gibt es nach den bekannten Grundsätzen der Cantorschen Theorie eine abzählbar unendliche Folge wohlgeordneter Mengen,

$$A_{\mu+1}, A_{\mu+2}, A_{\mu+3}, \cdots$$

so daß, wenn wir die ihnen entsprechenden Mächtigkeiten mit

$$\aleph_{\mu+1}, \aleph_{\mu+2}, \aleph_{\mu+3}, \cdots$$

bezeichnen,

$$\aleph_\mu < \aleph_{\mu+1} < \aleph_{\mu+2} < \cdots$$

ist.

Wir bilden nun die Mengen S und P in bezug auf diese Folge wohlgeordneter Mengen. S ist jetzt eine abzählbar unendliche Folge wohlgeordneter Mengen, also selbst eine wohlgeordnete Menge, deren Mächtigkeit entsprechend mit $\mathfrak{s} = \aleph_{\mu+\omega}$ bezeichnet wird.

Dann ist wegen $\mathfrak{p} > \mathfrak{s}$ auch

$$\mathfrak{p}^{\aleph_0} = \mathfrak{s}^{\aleph_0} > \mathfrak{s}.$$

Da aber für das Kontinuum

$$(2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0},$$

kann das Kontinuum keiner wohlgeordneten Menge vom Charakter $\aleph_{\mu+\omega}$ *äquivalent sein.*

Man verallgemeinert den Satz leicht dahin, daß das Kontinuum keiner solchen wohlgeordneten Menge äquivalent sein kann, für die eine unmittelbar vorhergehende wohlgeordnete Menge nicht existiert. Der einfachste Fall ergibt die Nichtabzählbarkeit des Kontinuums.

4. Herr Bernstein*) hat den allgemeinen Satz

$$\aleph_x^{\aleph_0} = \aleph_x 2^{\aleph_0}$$

aufgestellt, aus dem, wenn man voraussetzt, daß das Kontinuum irgend

*) Felix Bernstein, Untersuchungen aus der Mengenlehre. Inaug.-Dissertation. Göttingen 1901, pag. 49.

einer wohlgeordneten Menge A_μ von der Mächtigkeit $\aleph_\mu$ äquivalent ist, und $\aleph_x + \aleph_{\mu+\omega}$ gesetzt wird,

$$\aleph_{\mu+\omega}^{\aleph_0} = \aleph_{\mu+\omega}\aleph_\mu = \aleph_{\mu+\omega}$$

folgen würde. Die Annahme, daß das Kontinuum einer wohlgeordneten Menge äquivalent ist, wäre also gewiß falsch, wenn der Bernsteinsche Satz allgemein richtig wäre. Leider hat jedoch dessen Beweis eine wesentliche Lücke, da für $\aleph_\omega$ und jede der oben betrachteten „singulären" wohlgeordneten Mengen die Annahme, daß jede abzählbare Teilmenge in einem *Abschnitte* der ganzen Menge liegt, nicht mehr statthaft ist.

Ich erwähne dies vor allem, um den Schluß, den ich in meinem Kongreßvortrage unter Annahme der Richtigkeit des Bernsteinschen Satzes aus diesem zog, ausdrücklich zurückzunehmen.

Doch glaube ich, daß die Sache noch außer der historischen Treue ein gewisses Interesse bietet.

Wäre nämlich umgekehrt das Kontinuum keiner wohlgeordneten Menge äquivalent und größer als jede wohlgeordnete Menge, so würde aus

$$2^{\aleph_0} > \aleph_x$$

immer auch

(B.) $$\aleph_x^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph_x 2^{\aleph_0},$$

der Bernsteinsche Satz folgen.

Dieser formuliert also geradezu das Kontinuumproblem in neuer und nicht uninteressanter Weise.

Ist (B.) allgemein richtig, so kann das Kontinuum keiner wohlgeordneten Menge äquivalent sein. Kann man aber (B.) auch nur für ein $\aleph$ als falsch erweisen, so muß das Kontinuum einer wohlgeordneten Menge äquivalent sein.

Insbesondere wird das Kontinuum in der abzählbaren Folge

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \cdots$$

enthalten sein oder nicht, je nachdem $\aleph_\omega^{\aleph_0}$ größer oder gleich $2^{\aleph_0}$ ist.