1906. 3246.

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, ADOLPH MAYER, CARL NEUMANN, MAX NOETHER
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther v. Dyck
in München.

David Hilbert
in Göttingen.

Otto Blumenthal
in Aachen.

63. Band. 1. Heft.

Mit 5 Figuren im Text.

Ausgegeben am 12. Oktober 1906.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1906.

Allgemeiner Existenzbeweis für den Klassenkörper eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers.

Von

Philipp Furtwängler in Bonn.

Inhaltsübersicht.

§ 1.

Einleitung. Gang des Beweises.

In drei Mitteilungen, die in den Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen erschienen sind*), habe ich allgemein den Nachweis geführt, daß zu jedem algebraischen Zahlkörper ein

*) Math.-physik. Klasse 1903, Heft 4 und Heft 5, 1904, Heft 3.

Klassenkörper existiert. Ich gebe im folgenden auf Wunsch der Redaktion dieser Zeitschrift eine zusammenfassende Bearbeitung dieser Entwicklungen, bei der einzelne Abschnitte wörtlich der genannten Stelle entnommen sind.

Die ersten Andeutungen über eine Theorie des Klassenkörpers finden sich wohl bei L. Kronecker, dem die Frage der „zu assoziierenden Gattungen" als ein „erstrebenswertes höchstes Ziel der Theorie der algebraischen Zahlen" erschien.*) Kronecker war durch die Beschäftigung mit der komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen, die für die imaginären quadratischen Bereiche $\sqrt{-n}$ die zu assoziierenden Gattungen liefert, zu der allgemeinen Fragestellung geführt. Er scheint auch über dieses spezielle Beispiel hinaus Einsicht in charakteristische Eigenschaften der zu assoziierenden Gattungen, d. h. des Klassenkörpers, gewonnen zu haben, hat jedoch keine bestimmten Angaben darüber gemacht.**) Den entscheidenden Schritt nach vorwärts hat dann D. Hilbert getan.***) Er hat, vorbereitet durch das Studium der Reziprozitätsgesetze in beliebigen algebraischen Zahlkörpern, das sowohl inhaltlich wie methodisch mit der Theorie des Klassenkörpers auf das engste zusammenhängt, die allgemeinen Eigenschaften des Klassenkörpers aufgedeckt und sie in dem einfachsten Falle, daß die Klassenzahl des Grundkörpers gleich 2 und der Grundkörper nebst sämtlichen konjugierten imaginär ist, bewiesen.

Der Klassenkörper eines beliebigen Grundkörpers k ist ein Oberkörper desselben, der folgende charakteristische Eigenschaften aufweist:

1. Seine Relativgruppe in bezug auf k ist zur Gruppe der Idealklassen in k holoedrisch isomorph, er ist also relativ-Abelsch in bezug auf k.

2. Er ist unverzweigt in bezug auf k, d. h. seine Relativdiskriminante ist gleich 1.

3. Alle Ideale des Grundkörpers werden im Klassenkörper Hauptideale, sie werden also durch wirkliche Zahlen des Klassenkörpers dargestellt.

4. Alle Primideale derselben Klasse des Grundkörpers werden im Klassenkörper gleichartig zerlegt oder genauer: Ist die Klassenzahl des Grundkörpers h und ist g der kleinste Exponent, für den die Äquivalenz

*) Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen, Journal für die reine und angew. Math. 92 (1882), p. 1; speziell sei auf p. 65—68 verwiesen.

**) Er sagt (l. c. p. 68), daß er zur aprioristischen Erkenntnis, nämlich zu einer von der analytischen Entstehung unabhängigen Auffassung der Natur jener den Gattungen $\sqrt{-n}$ assoziierten Gattungen gelangt sei und damit Gesichtspunkte für das Studium der allgemeinen Frage dieser Art der Assoziation gewonnen habe.

***) Über die Theorie der relativ-Abelschen Zahlkörper. Nachr. v. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-physik. Kl. 1898, p. 370; abgedruckt in Acta Math., Bd. 26.

$\mathfrak{p}^g \sim 1$ in k erfüllt ist, so zerfällt das Primideal $\mathfrak{p}$ aus k im Klassenkörper in $\frac{h}{g}$ verschiedene Primfaktoren.

Die beiden Eigenschaften 1. und 2. definieren den Klassenkörper vollständig und werden deshalb im folgenden zur Konstruktion desselben benutzt werden. Das Problem, das uns beschäftigen soll, läßt sich daher so formulieren:

Es sei ein beliebiger algebraischer Zahlkörper k mit der Klassenzahl h gegeben. Es soll dann ein relativ-Abelscher unverzweigter Oberkörper von k gefunden werden, dessen Relativgruppe mit der Gruppe der Idealklassen in k holoedrisch isomorph ist.

Der Gang der Untersuchung ist kurz folgender. Ebenso wie der Klassenkörper der Gesamtheit der Klassen in k entspricht, so entsprechen jeder Untergruppe der Klassengruppe bestimmte unverzweigte Körper in bezug auf k, die ebenfalls relativ-Abelsch sind, da jede Untergruppe einer Abelschen Gruppe selbst eine Abelsche Gruppe ist. Wie man daher die Klassenzahl h in Potenzen verschiedener Primzahlen zerlegen kann

$$h = l_1^{h_1} \cdot l_2^{h_2} \cdots,$$

so kann man den gesamten Klassenkörper dadurch aufbauen, daß man sukzessive unverzweigte relativ-Abelsche Körper von den Relativgraden $l_1^{h_1}, l_2^{h_2}, \cdots$ in bezug auf k konstruiert. Es genügt, die Konstruktion eines solchen Körpers zu zeigen, da sie für die übrigen analog verläuft. Man setzt daher $h = l^{h'} \cdot q$, wo l eine beliebige Primzahl bedeutet und $q \not\equiv 0(l)$ ist, und betrachtet nur die in der Klassengruppe von k enthaltene Untergruppe vom Grade $l^{h'}$, die alle q^{ten} Potenzen von Idealklassen enthält. Es läuft das auf dasselbe hinaus, als ob die Klassenzahl von k genau gleich $l^{h'}$ wäre, was wir um der einfachen Ausdrucksweise willen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen können.

Es sei also das Klassensystem von k in der Gestalt darstellbar:

$$(c)_k = c_1^{x_1} c_2^{x_2} \cdots c_e^{x_e} (x_i = 0, 1, \cdots, l^{h_i'} - 1), \quad h_1' + h_2' + \cdots + h_e' = h',$$

so daß die Klassengruppe in k genau e Basisklassen enthält. Es läßt sich dann der Klassenkörper von k durch Zusammensetzung von e Körpern erzeugen, die relativ zyklisch in bezug auf k von den Relativgraden $l^{h_1'}, \cdots, l^{h_e'}$ sind. Jeder dieser Körper besitzt einen Unterkörper vom Relativgrad l in bezug auf k, so daß im ganzen genau e unabhängige unverzweigte Körper vom Relativgrad l in bezug auf k existieren, die zuerst konstruiert werden müssen.

Ein relativzyklischer Körper vom Primzahlrelativgrad l läßt sich aber am einfachsten definieren, wenn der Grundkörper eine l^{te} Einheitswurzel enthält, da in diesem Falle der Oberkörper durch Adjunktion der Wurzel einer reinen Gleichung $x^l = \omega$ zu k erzeugt wird.

Wir machen daher zuerst die Voraussetzung, daß der Grundkörper k eine primitive l^{te} Einheitswurzel enthalte, und bestimmen unter dieser Voraussetzung e Zahlen $\omega_1, \cdots, \omega_e$ in k, die wir als singuläre Primärzahlen bezeichnen, so daß durch Adjunktion von $\sqrt[l]{\omega_1}, \cdots, \sqrt[l]{\omega_e}$ zu k e voneinander unabhängige unverzweigte Körper vom Relativgrad l in bezug auf k entstehen (§ 2 bis § 7). Um die Unverzweigtheit der entstehenden Körper zu beweisen, ist eine obere Grenze für die Anzahl ihrer ambigen Komplexe zu ermitteln, die sich gleich $e - 1$ ergibt, wenn e, wie oben angegeben, die Anzahl der Basisklassen der Klassengruppe von k bedeutet (§ 3 bis § 5). Auf dieser Grundlage ergibt sich, daß alle Primideale, von denen eine bestimmte singuläre Primärzahl ω l^{ter} Potenzrest ist, in einer Untergruppe der Klassengruppe vom Grade $l^{h'-1}$ liegen, wodurch der Zusammenhang der Zahlen ω mit der Klasseneinteilung der Ideale von k hervortritt (§ 6). Diese Tatsache führt in Verbindung mit einem Satze über gewisse Dirichletsche Reihen (§ 2) zum Nachweis der Unverzweigtheit der Körper $(\sqrt[l]{\omega}, k)$ (§ 7).

Um die unverzweigten Körper vom Relativgrad l zu konstruieren, wenn der Grundkörper k keine l^{te} Einheitswurzel ζ enthält (§ 9), adjungieren wir zu k eine solche und erhalten dadurch einen Körper $k' = (k, \zeta)$, dessen Klassensystem in der Form

$$(c)_k \cdot d$$

darstellbar ist, wo $(c)_k$ das System der Idealklassen von k bedeutet und d alle Klassen aus k', deren Relativnorm in bezug auf k in die Hauptklasse fällt, bezeichnet. Wir konstruieren nun in k' das System der e unabhängigen unverzweigten Körper vom Relativgrad l, die zu der Klassengruppe $(c)_k$ gehören. Es zeigt sich dann, daß jeder dieser Körper nicht nur in bezug auf k', sondern auch in bezug auf k relativ-Abelsch ist. Suchen wir daher diejenigen Unterkörper der konstruierten Körper auf, die zu der Relativgruppe von k' in bezug auf k gehören, so erhalten wir dadurch e unverzweigte unabhängige relativ-Abelsche Körper vom Relativgrad l in bezug auf k.

Eine besondere Behandlung erfordert der Fall $l = 2$, wenn der Körper k oder einer seiner konjugierten reell ist (§ 10). Man muß dann, um sämtliche unverzweigten relativquadratischen Körper in bezug auf den Grundkörper zu erhalten, einen schärferen Äquivalenzbegriff zugrunde legen, nach dem zwei Ideale nur dann äquivalent heißen, wenn ihr Quotient eine total positive Körperzahl ist.

Auf Grund der so geschilderten Entwicklungen gelingt dann der vollständige Aufbau des Klassenkörpers (§ 11).

Die letzten beiden Paragraphen bilden einen Anhang, der mit dem eigentlichen Existenzbeweis in keinem Zusammenhange steht. Im § 12 ist der Nachweis erbracht, daß die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen für die imaginären quadratischen Körper den zugehörigen Klassenkörper liefert, wobei die Zerlegung der Primideale des Grundkörpers im Klassenkörper den springenden Punkt des Beweises bildet. Im letzten Paragraphen endlich ist aus der Existenz des Klassenkörpers auf Grund der Untersuchungen von H. Weber*) über Zahlengruppen in algebraischen Zahlkörpern gefolgert, daß in jeder Idealklasse eines solchen unendlich viele Primideale existieren.

Es sei hier zum Schluß noch diejenige Literatur angegeben, die für die folgenden Entwicklungen von Wichtigkeit ist, wobei in Klammern die Abkürzung angegeben ist, unter der die betreffende Abhandlung hier zitiert ist:

D. Hilbert, Über die Theorie der relativ-Abelschen Zahlkörper. Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wiss. in Göttingen 1898. (Hilbert, Rel. Abelsche Zahlk.)

D. Hilbert, Über die Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers. Math. Ann. 51 (1898). (Hilbert, Rel. quadr. Zahlk.)

Ph. Furtwängler, Über das Reziprozitätsgesetz der l^{ten} Potenzreste in algebraischen Zahlkörpern, wenn l eine ungerade Primzahl bedeutet. Abhandlungen der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, math.-phys. Klasse. Neue Folge, Bd. II, Nr. 3 (1902). (Furtwängler, Reziprozitätsgesetz.)

Ein Auszug aus dieser Arbeit ist in den Math. Ann. 58 (1903), p. 1 erschienen.

D. Hilbert, Die Theorie der algebraischen Zahlkörper. Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 189˙. (Hilbert, Algebr. Zahlk.)

§ 2.

Ein Hilfssatz transzendenter Natur.

Wir haben in diesem Paragraphen zunächst einen Satz über die Summe einer unendlichen Reihe zu entwickeln, der eine der Grundlagen der folgenden Ausführungen bildet.

Satz 1: *Es sei k ein algebraischer Zahlkörper mit der Klassenzahl $q \cdot l^h$, wo l eine beliebige Primzahl bedeutet und $q \not\equiv 0(l)$ ist. Es bezeichne ferner G_{l^h} die Gruppe, welche die q^{ten} Potenzen der Idealklassen aus k enthält, und $G_{l^{h-1}}$ eine Untergruppe von G_{l^h} vom Grade l^{h-1}. Läßt man dann $\mathfrak{w}^{(+)}$ alle Primideale durchlaufen, deren q^{te} Potenzen einer Klasse aus $G_{l^{h-1}}$ angehören, so gilt:*

$$(1) \qquad \sum_{(\mathfrak{w}^{(+)})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(+)})^s} \leqq \frac{1}{l} \log \frac{1}{s-1} + f(s), \qquad (s > 1),$$

*) Math. Ann. 49 (1897), p. 83.

wo $f(s)$ eine Funktion der reellen Veränderlichen s bedeutet, die endlich bleibt, wenn sich s der Grenze 1 nähert.

Beweis: Bedeutet C das System aller Klassen aus k, deren q^{te} Potenz in G_{lh-1} liegt, so läßt sich das System sämtlicher Klassen von k in der Gestalt:

(2) $$Cc^x, \quad (x = 0, 1, \cdots, l-1)$$

darstellen, wo c eine Klasse bedeutet, deren q^{te} Potenz nicht in G_{lh-1} liegt.

Bezeichnet man nun mit T die Anzahl aller Ideale einer bestimmten Klasse aus k, deren Normen $\leqq t$ sind, unter t eine reelle positive Größe verstanden, so gilt*):

(3) $$T = t\varkappa + Rt^{1-\frac{1}{m}},$$

wo $\varkappa$ eine nur vom Körper k und nicht von t abhängende Konstante und R eine derart von t abhängige Größe bedeutet, die für unendlich wachsendes t zwischen endlichen Grenzen bleibt. Aus (3) folgt:

(4) $$\sum_{(\mathfrak{j})} \frac{1}{n(\mathfrak{j})^s} = \sum_{(t)} \frac{\varkappa}{t^s} + f(s), \qquad (s > 1),$$

wo die Summe links über alle Ideale einer bestimmten Klasse aus k und die Summe rechts über alle Zahlen $t = 1, 2, \cdots, \infty$ zu erstrecken ist; $f(s)$ bedeutet eine Funktion der reellen Veränderlichen s, die endlich bleibt, wenn s gegen 1 konvergiert.

Ich ordne jetzt allen Klassen aus k l^{te} Einheitswurzeln zu, indem ich der Klasse $C_i c^{x_i}$ die Einheitswurzel ζ^{x_i} zuweise, wo C_i eine beliebige Klasse aus C bedeutet und ζ eine von 1 verschiedene l^{te} Einheitswurzel. Bei dieser Zuordnung entspricht dem Produkt zweier Klassen auch das Produkt der zugeordneten Einheitswurzeln. Bezeichne ich nun mit $\zeta_{\mathfrak{j}}$ diejenige Einheitswurzel, die der durch $\mathfrak{j}$ repräsentierten Idealklasse zugeordnet ist, so bleibt die Summe

(5) $$\sum_{(\mathfrak{j})} \sum_{(e)} \zeta_{\mathfrak{j}}^e \frac{1}{n(\mathfrak{j})^s} \; (e = 1, 2, \cdots, l-1), \qquad (s > 1),$$

in der $\mathfrak{j}$ alle Ideale der l Klassen $c_i = C_i c^{x_i}$, $c_i^2, \cdots, c_i^l$ $(x_i \not\equiv 0(l))$ durchläuft, stets endlich, wenn sich s der Grenze 1 nähert; dies folgt aus (4). Das gleiche gilt dann offenbar, wenn ich in (5) $\mathfrak{j}$ alle Ideale aus k durchlaufen lasse.

Andererseits ist, wenn $\mathfrak{w}$ alle Primideale aus k durchläuft:

(6) $$\log \sum_{(\mathfrak{j})} \sum_{(e)} \zeta_{\mathfrak{j}}^e \frac{1}{n(\mathfrak{j})^s} = \sum_{(\mathfrak{w})} \sum_{(e)} \zeta_{\mathfrak{w}}^e \frac{1}{n(\mathfrak{w})^s} + f_1(s), \; (e = 1, 2, \cdots, l-1), \; (s > 1).$$

*) Hilbert, Rel. quadr. Zahlk., § 22, p. 53.

Versteht man daher unter $\mathfrak{w}^{(+)}$ alle Primideale aus k, deren q^{te} Potenz in einer Klasse aus $G_{l^{h}-1}$ liegt, unter $\mathfrak{w}^{(-)}$ alle übrigen Primideale aus k, so folgt aus (5) und (6):

$$(7) \qquad (l-1)\sum_{(\mathfrak{w}^{(+)})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(+)})^s} - \sum_{(\mathfrak{w}^{(-)})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(-)})^s} \leqq f_2(s), \qquad (s>1).$$

Ferner ist:

$$(8) \qquad \sum_{(\mathfrak{w}^{(+)})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(+)})^s} + \sum_{(\mathfrak{w}^{(-)})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(-)})^s} = \log\frac{1}{s-1} + f_3(s), \qquad (s>1).$$

Durch Addition von (7) und (8) folgt die zu beweisende Ungleichung:

$$\sum_{(\mathfrak{w}^{(+)})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(+)})^s} \leqq \frac{1}{l}\log\frac{1}{s-1} + f(s), \qquad (s>1).$$

Im vorstehenden bedeuten $f_i(s)$ Funktionen der reellen Veränderlichen s, die endlich bleiben, wenn s gegen 1 konvergiert.

§ 3.

Die singulären Primärzahlen.

Wir setzen in diesem und den folgenden Paragraphen von dem Grundkörper k voraus, daß er eine primitive l^{te} Einheitswurzel ζ enthalte, daß er also ein Oberkörper des Kreiskörpers der l^{ten} Einheitswurzeln und zwar vom Relativgrad m sei. Unter l verstehen wir eine ungerade Primzahl; es sei indessen gleich bemerkt, daß die folgenden Entwicklungen auch für den Fall $l=2$ gelten, vorausgesetzt, daß der Körper k samt seinen sämtlichen konjugierten imaginär ist. Die Klassenzahl des Körpers k sei gleich $ql^{h'}$, wo $q \not\equiv 0(l)$ ist. Da uns im folgenden zunächst nur die Untergruppe der Klassengruppe vom Grade $l^{h'}$ interessiert, so wollen wir das System aller Klassen, deren q^{te} Potenz in die Hauptklasse fällt, mit 1 bezeichnen; wir drücken uns also so aus, als ob die Klassenzahl des Körpers k genau gleich $l^{h'}$ wäre. Eine Beschränkung liegt darin nicht. Die Klassengruppe von k möge e Basisklassen enthalten und dementsprechend das Klassensystem von k durch folgendes Schema dargestellt werden:

$$(1) \qquad c_1^{x_1} c_2^{x_2} \cdots c_e^{x_e} \quad (x_i = 0, 1, \cdots, l^{h_i}-1), \quad h_1 + h_2 + \cdots + h_e = h'.$$

Ich bezeichne nun mit $\mathfrak{r}_1, \cdots, \mathfrak{r}_e$ Ideale aus den Klassen $c_1, \cdots, c_e$ und setze:

$$(2) \qquad \mathfrak{r}_1^{l^{h_1}} = (\varrho_1), \cdots, \mathfrak{r}_e^{l^{h_e}} = (\varrho_e),$$

wo $\varrho_1, \cdots, \varrho_e$ ganze Zahlen aus k bedeuten. Es sei ferner $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{m'-1}$ ein volles System von Grundeinheiten für k $\left(\text{also } m' = \frac{m(l-1)}{2}\right)$ und ε_m

eine in k liegende Einheitswurzel, deren l^{te} Wurzel nicht in k liegt. Wir setzen dann:

$$\varepsilon_{m'+1} = \varrho_1, \cdots, \varepsilon_{m'+e} = \varrho_e \tag{3}$$

und bestimmen ein System von $m' + e$ Primidealen $\mathfrak{q}$, das die Bedingungen:

$$\left(\frac{\varepsilon_i}{\mathfrak{q}_i}\right)_l \neq 1, \left(\frac{\varepsilon_j}{\mathfrak{q}_i}\right)_l = 1, \ (i \neq j), \ (i, j = 1, 2, \cdots, m' + e) \tag{4}$$

befriedigt, was stets möglich ist.*)

Weiter wählen wir die Exponenten w so, daß

$$\begin{gathered}\mathfrak{q}_1 \mathfrak{r}_1^{w_1^{(1)}} \cdots \mathfrak{r}_e^{w_e^{(1)}} = (\varkappa_1), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{q}_{m'+e} \mathfrak{r}_1^{w_1^{(m'+e)}} \cdots \mathfrak{r}_e^{w_e^{(m'+e)}} = (\varkappa_{m'+e})\end{gathered} \tag{5}$$

wird, wo $\varkappa_1, \cdots, \varkappa_{m'+e}$ ganze Zahlen aus k bedeuten. Bildet man dann das System der Zahlen:

$$\varepsilon_1^{u_1} \cdots \varepsilon_{m'+e}^{u_{m'+e}} \varkappa_1^{v_1} \cdots \varkappa_{m'+e}^{v_{m'+e}}, \quad (u, v = 0, 1, \cdots, l-1), \tag{6}$$

indem man die Exponenten v den Bedingungen:

$$\begin{gathered}v_1 w_1^{(1)} + \cdots + v_{m'+e} w_1^{(m'+e)} \equiv 0(l), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_1 w_e^{(1)} + \cdots + v_{m'+e} w_e^{(m'+e)} \equiv 0(l),\end{gathered} \tag{7}$$

unterwirft, so erhält man dadurch sicher $l^{2m'+e}$ verschiedene Zahlen, die die Eigenschaft haben, daß sie die Ideale $\mathfrak{r}_1, \cdots, \mathfrak{r}_e$ nur in l^{ten} Potenzen als Faktoren enthalten.

Wir nennen jetzt nach D. Hilbert**) zwei Zahlen α, β aus k von *gleicher Art*, wenn sie eine Kongruenz:

$$\alpha \equiv \beta \gamma^l (\mathfrak{l}^l) \tag{8}$$

befriedigen, wo γ eine Zahl aus k bedeutet und $\mathfrak{l} = (1 - \zeta)$ ist. Die Primärzahlen in k, die zu $\mathfrak{l}$ prim und der l^{ten} Potenz einer Zahl aus k nach $\mathfrak{l}^l$ kongruent sind, bilden für sich eine Art. Die Gesamtheit der zu $\mathfrak{l}$ primen ganzen Zahlen in k liefert genau $l^{2m'}$ verschiedene Arten, wie leicht nachzuweisen ist.

Bedeutet nämlich α_i ein System von Zahlen, das die sämtlichen Arten der zu $\mathfrak{l}$ primen Zahlen repräsentiert, und β_k ein volles Restsystem von ganzen zu $\mathfrak{l}$ primen nach $\mathfrak{l}$ inkongruenten Zahlen, so bildet $\alpha_i \beta_k^l$ ein

---

*) Hilbert, Algebr. Zahlk., Satz 152, p. 426. $(-)_l$ bedeutet das l^{te} Potenzrest-symbol.

**) Rel. Abelsche Zahlk., p. 382.

volles Restsystem der zu $\mathfrak{l}$ primen nach $\mathfrak{l}^l$ inkongruenten Zahlen. Denn ist α eine beliebige ganze Zahl aus k, so gilt zunächst eine Kongruenz

$$\alpha \equiv \alpha_i \beta^l (\mathfrak{l}^l),$$

wo β eine ganze Zahl aus k bedeutet. Genügt diese der Kongruenz

$$\beta \equiv \beta_k (\mathfrak{l}),$$

so ist auch

$$\beta^l \equiv \beta_k^l (\mathfrak{l}^l),$$

folglich

$$\alpha \equiv \alpha_i \beta_k^l (\mathfrak{l}^l).$$

Wäre andererseits:

$$\alpha_i \beta_k^l \equiv \alpha_{i'} \beta_{k'}^l (\mathfrak{l}^l),$$

so müßte zunächst $i = i'$ sein, also auch

$$\beta_k^l \equiv \beta_{k'}^l (\mathfrak{l}^l)$$

und daher

$$\beta_k \equiv \beta_{k'} (\mathfrak{l}), \quad \text{also} \quad k = k'.$$

Da nun das System $\alpha_i \beta_k^l$ im ganzen $\varphi(\mathfrak{l}^l)$ Zahlen enthält und das System β_k $\varphi(\mathfrak{l})$ Zahlen, so bleiben für das System α_i $n(\mathfrak{l}^{l-1}) = l^{2m'}$ Zahlen, was nachzuweisen war.

Wie wir oben gesehen haben, enthält das System (6) sicher $l^{2m'+e}$ verschiedene Zahlen; es müssen daher notwendig unter diesen zwei Zahlen derselben Art ω_1 und ω_2 enthalten sein. Die Zahl $\omega = \omega_1 \omega_2^{l-1}$ ist dann eine Primärzahl von der Gestalt:

$$\omega = \varepsilon_1^{u_1} \cdot \cdot \cdot \varepsilon_{m'+1}^{u_{m'+1}} \varkappa_1^{v_1} \cdot \cdot \cdot \varkappa_{m'+1}^{v_{m'+1}} \alpha^l, \tag{9}$$

bei der nicht sämtliche Exponenten u und v durch l teilbar sind; α bedeutet eine Zahl aus k. Wir nennen ω kurz eine *singuläre Primärzahl.*

Es ist leicht einzusehen, daß man mit Hilfe des Systems (6) sogar e voneinander unabhängige singuläre Primärzahlen erhalten kann, was wir später (§ 7) benutzen werden. Vorläufig genügt uns aber die Existenz einer einzigen solchen Zahl ω, die einen relativzyklischen Körper $K(\sqrt[l]{\omega}, k)$ vom Relativgrad l in bezug auf k definiert. Die Untersuchung dieses Körpers K bildet den Inhalt der nächsten Paragraphen, und speziell der Nachweis, daß er unverzweigt in bezug auf k ist. Dies wird dann und nur dann der Fall sein, wenn die Exponenten v in (9) sämtlich Null sind.*) Um das zu beweisen, müssen wir in den nächsten Paragraphen zunächst die ambigen Komplexe in K betrachten und eine obere Grenze für ihre Anzahl ableiten.

---

*) Furtwängler, Reziprozitätsgesetz, p. 7, Satz 6.

§ 4.

Obere Grenze für die Anzahl der aus ambigen Idealen entspringenden ambigen Komplexe des Körpers $K(\sqrt[l]{\omega}, k)$, wo ω eine singuläre Primärzahl bedeutet.

Es sei ω eine singuläre Primärzahl, wie wir sie im vorigen Paragraphen ermittelt haben, von der Gestalt:

$$(1) \qquad \omega = \varepsilon_1^{u_1} \cdots \varepsilon_{m'+e}^{u_{m'+e}} \varkappa_1^{v_1} \cdots \varkappa_{m'+e}^{v_{m'+e}}$$

und es mögen die Exponenten $v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_t}$ die einzigen der Exponenten v sein, die nicht durch l teilbar sind. Es gilt dann, wie wir nachweisen wollen, folgender Satz:

Satz 2: *Ist die Anzahl aller ambigen Ideale des Körpers $K(\sqrt[l]{\omega}, k)$ gleich l^t, und machen die sämtlichen Einheiten in k, die Relativnormen von Einheiten in K sind, l^{v^*} Einheitenverbände aus, so gilt, wenn wir die Anzahl aller ambigen Komplexe, die aus ambigen Idealen entspringen, mit l^{a^*} bezeichnen, die Ungleichung:*

$$(2) \qquad a^* \leqq t + v^* - m' - 1 + e_1.$$

*Die Zahl e_1 ist dadurch bestimmt, daß l^{e_1} Idealklassen aus k in K in die Hauptklasse übergehen.**)

Beweis: Bezeichnet man mit $\mathsf{H}_1, \cdots, \mathsf{H}_{m'}$ ein System relativer Grundeinheiten von K in bezug auf k**) und mit $\eta_1, \cdots, \eta_{m'}$ ihre Relativnormen in k, so ist jede Einheit ε in k, die Relativnorm einer Einheit in K ist, in der Form darstellbar***):

$$(3) \qquad \varepsilon = \eta_1^{r_1} \cdots \eta_{m'}^{r_{m'}} \xi^l,$$

wo ξ eine Einheit aus k und $r_1, \cdots, r_{m'}$ irgend welche Zahlen $0, 1, \cdots, l-1$ bedeuten. Vorausgesetzt ist dabei, daß ω nicht das Produkt einer Einheit mit der l^{ten} Potenz einer Zahl aus k ist, was nach unserer Annahme über die Exponenten v zutrifft.

Da nun zusammen l^{v^*} Einheitenverbände, die Relativnormen von Einheiten aus K enthalten, existieren, so muß man unter den Einheiten $\eta_1, \cdots, \eta_{m'}$ v^* auswählen können, etwa $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{v^*}$, so daß jede Einheit ε in k, die Relativnorm einer Einheit in K ist, sich eindeutig in die Gestalt bringen läßt:

$$(4) \qquad \varepsilon = \eta_1^{r_1} \cdots \eta_{v^*}^{r_{v^*}} \xi^l, \quad (r_1, \cdots, r_{v^*} = 0, 1, \cdots, l-1).$$

---

*) Über die Definition der Komplexe und speziell der ambigen Komplexe vgl. Hilbert, Rel. quadr. Zahlk., § 12, p. 22.

**) Hilbert, Algebr. Zahlk., § 55, p. 272.

***) Hilbert, Algebr. Zahlk., § 146, p. 448, Hilfssatz 32.

Wendet man dies auf die Einheiten $\eta_i (i = v^* + 1, \cdots, m')$ an, so ergibt sich:

$$\eta_i = \eta_1^{r_1^{(i)}} \cdots \eta_{v^*}^{r_{v^*}^{(i)}} (\xi^{(i)})^l, \quad (i = v^* + 1, \cdots, m'), \tag{5}$$

wo $\xi^{(i)}$ eine Einheit aus k ist und die Exponenten r bestimmte Werte $0, 1, \cdots, l-1$ haben. Daraus folgt, daß die $m' - v^*$ Ausdrücke:

$$\mathsf{H}_i' = \mathsf{H}_i \mathsf{H}_1^{-r_1^{(i)}} \cdots \mathsf{H}_{v^*}^{-r_{v^*}^{(i)}} (\xi^{(i)})^{-1}, \quad (i = v^* + 1, \cdots, m') \tag{6}$$

Einheiten in K mit der Relativnorm 1 sind und daß man deshalb:

$$\mathsf{H}_i' = \mathsf{M}_i^{(1-S)} \tag{7}$$

setzen kann, wo M_i eine ganze Zahl aus k und S die Substitution $\sqrt[l]{\omega} \mid \zeta \sqrt[l]{\omega}$ bedeutet. Die Ideale (M_i) und $(\mathsf{M}) = (\sqrt[l]{\omega})$ sind dann mit ihren relativ konjugierten Idealen identisch und darum Produkte aus den ambigen Primidealen in K, die wir mit $\mathfrak{D}_1, \cdots, \mathfrak{D}_t$ bezeichnen, und Idealen aus k:

$$\tag{8} \begin{aligned} \mathsf{M} &= \mathfrak{D}_1^{a_1} \cdots \mathfrak{D}_t^{a_t} \mathfrak{j}, \\ (\mathsf{M}_i) &= \mathfrak{D}_1^{a_1^{(i)}} \cdots \mathfrak{D}_t^{a_t^{(i)}} \mathfrak{j}^{(i)}, \quad (i = v^* + 1, \cdots, m'). \end{aligned}$$

Es ist nun zu untersuchen, wieviel voneinander unabhängige Beziehungen

$$(\mathsf{M})^b \cdot (\mathsf{M}_{v^*+1})^{b_{v^*+1}} \cdots (\mathsf{M}_{m'})^{b_{m'}} = \mathfrak{j}^* \tag{9}$$

bestehen können, wo die Exponenten b irgend welche Werte $0, 1, \cdots, l-1$ haben, die nicht sämtlich Null sind, und $\mathfrak{j}^*$ ein Ideal aus k ist. Es ist zunächst leicht zu erkennen, daß $\mathfrak{j}^*$ nicht Hauptideal in k sein kann, daß also keine Relation:

$$(\mathsf{M})^b (\mathsf{M}_{v^*+1})^{b_{v^*+1}} \cdots (\mathsf{M}_{m'})^{b_{m'}} = iE \tag{10}$$

gelten kann, wo i eine Zahl aus k und E eine Einheit aus K ist. Denn potenziert man (10) symbolisch mit $(1 - S)$, so ergibt sich:

$$\zeta^{-b} (\mathsf{H}_{v^*+1}')^{b_{v^*+1}} \cdots (\mathsf{H}_{m'}')^{b_{m'}} = E^{(1-S)} \tag{11}$$

und hieraus schließt man mit Hilfe der fundamentalen Eigenschaft des Systems relativer Grundeinheiten, daß $b = b_{v^*+1} = \cdots = b_{m'} = 0$ sein muß, wenn man noch beachtet, daß ω nicht das Produkt aus einer Einheit mit der l^{ten} Potenz einer Zahl aus k ist.

Da keine Relation (10) bestehen kann und andererseits das Ideal $\mathfrak{j}^*$ aus (9) in K Hauptideal ist, so können höchstens e_1 voneinander unabhängige Relationen (9) gelten, wenn l^{e_1} Idealklassen aus k in K in die Hauptklasse übergehen. Daraus ergibt sich die Richtigkeit der Ungleichung (2).

Die Ungleichung (2) gilt auch in dem Falle, daß ω eine Einheit aus k ist. Denn in diesem Falle sind die Einheiten $\omega, \eta_1, \cdots, \eta_{m'}$ Relativnormen von Einheiten aus K, und wir können als Repräsentanten der v^* unabhängigen Einheitenverbände, die Relativnormen von Einheiten aus K enthalten, etwa die Einheiten $\omega, \eta_1, \cdots, \eta_{v^*-1}$ wählen. Dadurch, daß man die übrigen $m' - v^* + 1$ Einheiten $\eta_{v^*}, \cdots, \eta_{m'}$ durch diese ausdrückt, gelangt man zu $m' - v^* + 1$ Relationen von der Art (8). Da jetzt wieder zwischen $\mathsf{M}_{v^*}, \mathsf{M}_{v^*+1}, \cdots, \mathsf{M}_{m'}$ höchstens e_1 Relationen von der Art (9) bestehen können, gilt auch jetzt die Ungleichung (2).

§ 5.

Obere Grenze für die Anzahl aller ambigen Komplexe in K.

Satz 3: *Ist a die Anzahl der unabhängigen ambigen Komplexe in K und e die Anzahl der Basisklassen der Klassengruppe von k, so gilt:*

(1) $$a \leqq e - 1.$$

Beweis: Ist l^v die Anzahl aller Einheiten, die Relativnormen von ganzen oder gebrochenen Zahlen aus K sind, so gibt es $v - v^*$ unabhängige Einheiten in k, die Relativnormen von gebrochenen Zahlen sind. Diese definieren $v - v^*$ ambige Idealklassen in K, die wir mit $A_1, \cdots, A_{v-v^*}$ bezeichnen. Der Weg, auf dem man dieselben erhält, ist genau derselbe wie in dem Beweise zu Satz 20 meiner Abhandlung über die Reziprozitätsgesetze.*) Bedeuten $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_{v-v^*}$ diejenigen Ideale, welche die ambigen Klassen $A_1, \cdots, A_{v-v^*}$ definieren, und ist $\mathfrak{A}$ ein beliebiges Ideal eines ambigen Komplexes A aus K, so ist zu untersuchen, ob $\mathfrak{A}$ einem Produkt aus Potenzen von $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_{v-v^*}$ mit Potenzen der a^* unabhängigen ambigen Ideale aus K und einem Ideal aus k äquivalent ist.

Es gilt:

(2) $$\mathfrak{A}^{(1-S)} = \Theta \mathfrak{j},$$

wo Θ eine Zahl aus k und $\mathfrak{j}$ ein Ideal aus k bedeutet. S bezeichnet eine erzeugende Substitution der Relativgruppe von K in bezug auf k.

Wir wollen nun zunächst sehen, welchen Bedingungen die Ideale $\mathfrak{j}$, die eine Beziehung (2) erfüllen, unterworfen sind. Wir stellen zu diesem Zweck die Klassen in k, deren l^{te} Potenz in k die Hauptklasse ergibt, in der Gestalt dar:

(3) $$(c_1^*)^{x_1} \cdots (c_e^*)^{x_e} \begin{pmatrix} x_1 = 0, 1, \cdots l-1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_e = 0, 1, \cdots l-1 \end{pmatrix},$$

indem wir:

(4) $$c_1^* = c_1^{l^{h_1-1}}, \cdots c_e^* = c_e^{l^{h_e-1}}$$

setzen. Gehört nun $\mathfrak{j}$ der Klasse c' an und ist:

---

*) Furtwängler, Reziprozitätsgesetz, p. 23.

(5) $$c' = (c_1^*)^{x_1'} \cdots (c_e^*)^{x_e'},$$

so kann man setzen:

(6) $$\mathfrak{j} = \alpha\, \mathfrak{r}_1^{x_1' l^{h_1 - 1}} \cdots \mathfrak{r}_e^{x_e' l^{h_e - 1}},$$

wo α eine Zahl aus k bedeutet. Andererseits ist nach (2)

$$\mathfrak{j}^l = N_k(\Theta^{-1}),$$

wenn N_k die Relativnorm in bezug auf k bedeutet; folglich

(7) $$N_k(\Theta\alpha)^{-1} = \varepsilon' \varrho_1^{x_1'} \cdots \varrho_e^{x_e'},$$

wenn ε' eine geeignete Einheit aus k bezeichnet.

Aus (7) folgt*):

(8) $$\left(\frac{\varepsilon' \varrho_1^{x_1'} \cdots \varrho_e^{x_e'}}{\mathfrak{q}_{i_1}}\right) = 1, \cdots \left(\frac{\varepsilon' \varrho_1^{x_1'} \cdots \varrho_e^{x_e'}}{\mathfrak{q}_{i_t}}\right) = 1.$$

Unter den Indizes $i_1, \cdots i_t$ mögen nun aus der Reihe der Indizes $m'+1, \cdots m'+e$ genau f vorkommen und zwar mögen dies die Indizes

(9) $$m' + e^{(1)}, \cdots m' + e^{(f)}$$

sein. Es folgt dann, wenn man die Bedingungen (4) in § 3 beachtet, denen die $\mathfrak{q}$ genügen müssen, daß:

(10) $$x'_{e^{(1)}} \equiv 0(l), \cdots x'_{e^{(f)}} \equiv 0(l)$$

sein muß; d. h. es gibt höchstens $e - f$ unabhängige Klassen in k, die in K der $(1-S)^{\text{ten}}$ Potenz einer Klasse gleich werden. Unter diesen sind e_1 Klassen, die in K in die Hauptklasse übergehen; geht aber $\mathfrak{j}$ in K in ein Hauptideal über, so folgt genau wie an der zitierten Stelle**), daß sich $\mathfrak{A}$ in der oben angegebenen Weise ausdrücken läßt. Es kann demnach in K höchstens $e - f - e_1$ unabhängige Klassen aus ambigen Komplexen geben, die sich nicht aus den Klassen $A_1, \cdots A_{v-v^*}$ und den aus den ambigen Idealen in K entspringenden Klassen zusammensetzen lassen. Es ist also

(11) $$a \leqq a^* + v - v^* + e - f - e_1.$$

Alle Einheiten ε in k nun, die Relativnormen von Zahlen aus K sind, müssen die Bedingungen:

(12) $$\left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{q}_{i_1}}\right) = 1, \cdots \left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{q}_{i_t}}\right) = 1$$

befriedigen. Da unter den Indizes $i_1, \cdots i_t$ f Indizes aus der Reihe $m'+1, \cdots, m'+e$ vorkommen, folgt aus (12)

(13) $$v \leqq m' - t + f. = m' - (t - f)$$

Addiert man jetzt endlich (2) des vorigen Paragraphen und (11) und (13) aus diesem Paragraphen, so ergibt sich $a \leqq e - 1$.

---

*) Furtwängler, Reziprozitätsgesetz, Satz 15, p. 16.

**) Furtwängler, Reziprozitätsgesetz, p. 24.

§ 6.

Für welche Primideale in k hat eine singuläre Primärzahl den Restcharakter 1?

Von ausschlaggebender Bedeutung für die folgenden Entwicklungen ist die Beziehung, welche die singulären Primärzahlen in K zur Einteilung der Ideale in Klassen besitzen. Es zeigt sich nämlich, daß eine bestimmte singuläre Primärzahl ω nur von solchen Primidealen l^{ter} Potenzrest sein kann, die einer bestimmten Untergruppe der Klassengruppe von K angehören. Die Entscheidung über die Frage, ob ω Rest oder Nichtrest eines gegebenen Primideals $\mathfrak{p}$ ist, hängt also davon ab, welcher Idealklasse $\mathfrak{p}$ angehört.

Um den angedeuteten Zusammenhang aufdecken zu können, müssen wir zunächst noch einige Festsetzungen treffen. Es sei P ein beliebiger ambiger Komplex in K, der nicht der Hauptkomplex ist, und es möge in K die Äquivalenz gelten:

$$P \sim Q^{(1-S)^p},$$

wo Q einen Komplex aus K bedeutet. Dagegen möge es keinen Komplex R in K geben, der die Äquivalenz:

$$P \sim R^{(1-S)^{p+1}}$$

befriedigt. Ich nenne dann kurz p den Exponenten des ambigen Komplexes P. Die Möglichkeit einer solchen Definition ist ersichtlich, wenn man bedenkt, daß nicht für beliebig hohe Werte von p eine Äquivalenz der angegebenen Art erfüllt sein kann, weil die $(1-S)^{\text{te}}$ symbolische Potenz eines Komplexes immer auch die l^{te} wirkliche Potenz eines Komplexes ist. Ich bestimme in K jetzt a unabhängige Komplexe in folgender Weise:

Ich wähle zunächst einen ambigen Komplex P_1 in K, dessen Exponent p_1 von keinem Exponenten eines anderen ambigen Komplexes übertroffen wird, darauf einen von P_1 unabhängigen ambigen Komplex P_2, dessen Exponent von keinem Exponenten eines von P_1 unabhängigen Komplexes übertroffen wird usf. Der letzte so auszuwählende Komplex ist mit P_a zu bezeichnen; er hat einen Exponenten p_a, der von keinem Exponenten eines ambigen Komplexes unterschritten wird.

Es gelten dann in K Äquivalenzen folgender Art:

$$P_i \sim Q_i^{(1-S)^{p_i}}, \quad (i = 1, 2, \cdots a) \tag{1}$$

wo Q_i gewisse Komplexe aus K bedeuten, und die Exponenten p_i erfüllen die Bedingungen:

$$p_1 \geqq p_2 \cdots \geqq p_a.$$

Mit Hilfe der vorstehenden Festsetzungen können wir folgenden Satz aussprechen:

Satz 4: *Ist $\mathfrak{J}$ ein Ideal aus K und $\mathfrak{J}^{(1-S)}$ einem Idealquotienten von der Gestalt:*

$$\mathfrak{j}\,\mathfrak{Q}_1^{F_1(S)}\cdots\mathfrak{Q}_a^{F_a(S)} \tag{2}$$

äquivalent, wo $F_1(S), \cdots F_a(S)$ ganze ganzzahlige Funktionen von S sind, so ist auch $\mathfrak{J}$ einem Idealquotienten dieser Gestalt äquivalent. Dabei bedeutet $\mathfrak{j}$ ein Ideal aus k, $\mathfrak{Q}_1, \cdots, \mathfrak{Q}_a$ Ideale aus Klassen in K, die resp. den Komplexen $Q_1, \cdots, Q_a$ angehören; diese sind, wie im vorstehenden erläutert ist, durch (1) bestimmt.

Beweis: Wir betrachten zunächst den Fall, daß für sämtliche Funktionen F gilt:

$$F_i(1) \equiv 0(l) \quad (i = 1, \cdots a).$$

Wir können dann auch annehmen, daß die sämtlichen Funktionen $F(S)$ durch $(1-S)$ teilbar seien; denn es gilt

$$\mathfrak{Q}_i^l \sim \mathfrak{q}_i\mathfrak{Q}_i^{(1-S)\,G_i(S)}, \tag{3}$$

wo $\mathfrak{q}_i$ die Relativnorm von $\mathfrak{Q}_i$ und $G_i(S)$ eine ganze, ganzzahlige Funktion von S bedeutet. Die Richtigkeit von (3) erkennt man leicht, wenn man die Funktion

$$l-(1+S+\cdots S^{l-1})$$

nach Potenzen von $(1-S)$ entwickelt. Wir setzen daher jetzt:

$$F_i(S) = -(1-S)F'_i(S),$$

wo die Funktionen $F'_i(S)$ wieder ganze, ganzzahlige Funktionen von S sind.

Bezeichnet man dann den Ausdruck:

$$\mathfrak{Q}_1^{F'_1(S)}\cdots\mathfrak{Q}_a^{F'_a(S)}$$

mit $\mathfrak{J}'$, so gilt offenbar:

$$(\mathfrak{J}\mathfrak{J}')^{(1-S)} \sim \mathfrak{j}$$

d. h. $\mathfrak{J}\mathfrak{J}'$ gehört einem ambigen Komplex an, woraus sich ohne weiteres die Richtigkeit unserer Behauptung in dem betrachteten Falle ergibt.

Wir nehmen zweitens an, daß nicht sämtliche Funktionen $F_i(1)$ durch l teilbar sind und zwar sei F_b die erste unter den nicht teilbaren; ich setze dann wieder voraus, daß sämtliche Funktionen $F_1(S), \cdots F_{b-1}(S)$ durch $(1-S)$ teilbar sind, was nach (3) gestattet ist. Ich potenziere jetzt die vorausgesetzte Äquivalenz:

$$\mathfrak{J}^{(1-S)} \sim \mathfrak{j}\,\mathfrak{Q}_1^{F_1(S)}\cdots\mathfrak{Q}_{b-1}^{F_{b-1}(S)}\mathfrak{Q}_b^{F_b(S)}\cdots\mathfrak{Q}_a^{F_a(S)}$$

symbolisch mit $(1-S)^{p_b}$. Ich erhalte dadurch eine Äquivalenz von folgender Gestalt:

$$(\mathfrak{J}\mathfrak{J}')^{(1-S)^{p_b+1}} \sim \mathfrak{j}_1\,\mathfrak{A}_b^{c_b}\mathfrak{A}_{b+1}^{c_{b+1}}\cdots\mathfrak{A}_a^{c_a}, \tag{4}$$

wo $\mathfrak{j}_1$ ein Ideal aus k, $\mathfrak{J}'$ einen leicht angebbaren Idealquotienten aus K und $\mathfrak{A}_b, \mathfrak{A}_{b+1}, \cdots, \mathfrak{A}_a$ Ideale aus Klassen der ambigen Komplexe $P_b, \cdots, P_a$ bedeuten. Da der Exponent c_b wegen $F_b(1) \not\equiv 0\,(l)$ nicht durch l teilbar ist, so steht die Äquivalenz (4) in Widerspruch mit unserer Festsetzung über die Auswahl der Komplexe P_i. Denn sie lehrt, daß es einen von den Komplexen $P_1, \cdots, P_{b-1}$ unabhängigen ambigen Komplex gibt, dessen Exponent größer als p_b ist. Der angenommene zweite Fall ist deshalb unmöglich; hiermit ist unser Satz vollständig bewiesen.

Satz 5: *Ist* $\mathfrak{p}$ *ein Primideal aus* k *mit der Eigenschaft* $\left(\frac{\omega}{\mathfrak{p}}\right)_l = 1$, *so gehört* $\mathfrak{p}$ *einer durch* ω *völlig bestimmten Untergruppe der Klassengruppe von* k *an, deren Grad den Betrag* l^{h-1} *nicht übersteigt.*

Beweis: Ich bezeichne die Klassen in k, in die die Relativnormen von $\mathfrak{Q}_1, \cdots, \mathfrak{Q}_a$ hineinfallen, mit $c_1, \cdots, c_a$. Bezeichne ich dann die kleinste Gruppe, der diese Klassen und außerdem sämtliche l^{ten} Potenzen von Klassen in k angehören, mit G, so hat G höchstens den Grad l^{h-1}. Denn da $a \leqq e-1$ ist, so können höchstens $e-1$ Basisklassen von k durch Produkte aus Potenzen von $c_1, \cdots, c_a$ dargestellt werden; es muß daher sicher eine Basisklasse in G fehlen und der Grad von G ist daher höchstens l^{h-1}. Das Primideal $\mathfrak{p}$ gehört aber, wie leicht einzusehen ist, zu einer Klasse aus G. Denn wegen $\left(\frac{\omega}{\mathfrak{p}}\right)_l = 1$ ist $\mathfrak{p}$ in $K(\sqrt[l]{\omega}, k)$ zerlegbar. Ist $\mathfrak{P}$ ein Primfaktor von $\mathfrak{p}$, so gibt es sicher einen Exponenten b, so daß die Äquivalenz

$$\mathfrak{P}^{q_1(1-S)^b} \sim 1 \tag{5}$$

in K gilt, wo $q_1 \not\equiv 0(l)$ ist. Daraus folgt nach Satz 4, daß $\mathfrak{P}^{q_1}$ einem Ausdruck von der Gestalt (2) äquivalent ist, woraus man sofort erkennt, daß $\mathfrak{p}$ zu einer Klasse der Gruppe G gehört. Von der Gruppe G, die durch ω vollständig bestimmt ist, wollen wir sagen, daß sie zu ω gehört.

Der Grad der Gruppe G ist genau gleich l^{h-1}. Die Richtigkeit dieser Tatsache wird sich aber erst im nächsten Paragraphen ergeben. Ich trage diesem Umstande dadurch Rechnung, daß ich jede Gruppe, die G enthält und deren Grad nicht größer als l^{h-1} ist, als zu ω gehörig bezeichne.

§ 7.

Die Unverzweigtheit der Körper K.

Wir können nunmehr zu dem Nachweis übergehen, daß in bezug auf den gegebenen Grundkörper k genau e voneinander unabhängige *unverzweigte* Körper vom Relativgrade l existieren. Wir beweisen zu diesem Zweck zunächst, daß sicher *ein* solcher Körper existiert.

Ist der in den vorigen Paragraphen betrachtete Körper $K(\sqrt[l]{\omega}, k)$ nicht unverzweigt in bezug auf k, so wähle man ein zweites System von Primidealen $\mathfrak{q}'_1, \cdots, \mathfrak{q}'_{m'+e}$, das ebenfalls die Bedingungen (4) in § 3 befriedigt. Man gelangt dadurch zu einer primären Zahl ω', die von ω verschieden ist. Ist jetzt der Köper $K(\sqrt[l]{\omega'}, k)$ unverzweigt in bezug auf k, so ist unsere Behauptung bewiesen; ist er verzweigt, so schließen wir aus Satz 5, daß zu ω' eine Untergruppe G' gehört, die von G verschieden sein muß. Wäre nämlich $G = G'$, so würde man dadurch zu einem Widerspruche mit Satz 1 kommen. Denn bezeichnet man alle Primideale, für die

$$\left(\frac{\omega}{\mathfrak{p}}\right)_l = 1,$$

mit $\mathfrak{p}$, und diejenigen, für die

$$\left(\frac{\omega}{\mathfrak{p}'}\right)_l \neq 1, \quad \left(\frac{\omega'}{\mathfrak{p}'}\right)_l = 1, \text{ mit } \mathfrak{p}',$$

so gilt bekanntlich:

$$\sum_{(\mathfrak{p})} \frac{1}{n(\mathfrak{p})^s} = \frac{l}{l^2} \log \frac{1}{s-1} + f(s) \qquad (s>1)$$

$$\sum_{(\mathfrak{p}')} \frac{1}{n(\mathfrak{p}')^s} = \frac{l-1}{l^2} \log \frac{1}{s-1} + f'(s) \qquad (s>1)$$

$$(1) \qquad \sum_{(\mathfrak{p})} \frac{1}{n(\mathfrak{p})^s} + \sum_{(\mathfrak{p}')} \frac{1}{n(\mathfrak{p}')^s} = \frac{2l-1}{l^2} \log \frac{1}{s-1} + f(s) + f'(s). \qquad (s>1)$$

$f(s)$ und $f'(s)$ haben die bekannte Bedeutung. Da die Primideale $\mathfrak{p}$ sämtlich von den Primidealen $\mathfrak{p}'$ verschieden sind und beide Arten zu Klassen aus der Gruppe $G = G'$ gehören, so involviert Gleichung (1) einen Widerspruch gegen Satz 1, weil

$$(2) \qquad \frac{2l-1}{l^2} > \frac{1}{l}, \text{ wenn } l > 1 \text{ ist.}$$

Wir können nun den begonnenen Prozeß beliebig fortsetzen, indem wir immer neue Systeme von Primidealen $\mathfrak{q}$ mit den Eigenschaften (4) in § 3 wählen. Ich behaupte, daß wir dadurch sicher zu einer primären Zahl ω_1 gelangen müssen, welche einen unverzweigten Körper $K(\sqrt[l]{\omega_1}, k)$ in bezug auf k definiert. Denn wäre dies nicht der Fall, so müßten, da nur eine endliche Anzahl Untergruppen der Gruppe der Klassen von k existieren, sicher in der Reihe der erhaltenen primären Zahlen zwei auftreten, zu denen dieselbe Untergruppe der Klassengruppe von k gehört. Dies ist nach den eben gegebenen Ausführungen unmöglich und daher unsere Behauptung bewiesen.

Wir haben jetzt noch zu zeigen, daß genau e voneinander unabhängige unverzweigte relativzyklische Körper vom Relativgrad l in bezug auf k existieren.

Wir nennen ein System von Körpern unabhängig, wenn keiner in dem aus der Gesamtheit der übrigen Körper zusammengesetzten Körper enthalten ist.

Wir haben im vorhergehenden gesehen, daß es in bezug auf k einen unverzweigten Körper $K_1(\sqrt[l]{\omega_1}, k)$ gibt. Es sei:

$$\omega_1 = \varepsilon_1^{u_1} \cdots \varepsilon_{m'+e}^{u_{m'+e}},$$

wo $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{m'+e}$ die früher angegebene Bedeutung haben und es sei der Exponent u_{i_1} von Null verschieden. Es gibt nun in dem früher betrachteten System von Zahlen (6) in § 3 $l^{2m'+e}$ verschiedene Zahlen und deshalb auch, wenn $e \geqq 2$ ist, sicher zwei Zahlen derselben Art, für die der Exponent von ε_{i_1} denselben Wert hat. Der Quotient dieser beiden Zahlen liefert dann eine primäre Zahl $\omega^{(i_1)}$, für die der Exponent von ε_{i_1} Null ist, und die deshalb sicher einen von K_1 unabhängigen Relativkörper in bezug auf k definiert. Ist dieser unverzweigt, so ist der zweite der gesuchten e Körper gefunden; ist er verzweigt, so wiederholen wir die Betrachtungen der ersten Hälfte dieses Paragraphen, indem wir jetzt aber nur solche primäre Zahlen heranziehen, für die der Exponent von ε_{i_1} Null ist.

Wir kommen dadurch sicher zu einer primären Zahl ω_2, die einen von K_1 unabhängigen unverzweigten Körper $K_2(\sqrt[l]{\omega_2}, k)$ definiert. Dies Verfahren können wir fortsetzen, wenn $e \geqq 3$ ist.

Ist nämlich in dem Ausdruck für ω_2 der Exponent von ε_{i_2} von Null verschieden, so bestimmen wir in der geschilderten Weise eine primäre Zahl ω_3, die einen unverzweigten Körper $K(\sqrt[l]{\omega_3}, k)$ in bezug auf k definiert und bei der die Exponenten von ε_{i_1} und ε_{i_2} Null sind; K_3 ist dann von K_2 und K_1 unabhängig. So können wir offenbar fortfahren, bis wir e unabhängige, in bezug auf k unverzweigte Körper vom Relativgrad l erhalten haben, da das Zahlensystem (6) in § 3 $l^{2m'+e}$ verschiedene Zahlen enthält.

Wir haben jetzt noch nachzuweisen, daß es nicht mehr derartige unabhängige Körper gibt. Wir müssen zu diesem Zweck die Untergruppen der Klassengruppe von k vom Grade l^{h-1} und ihre Zusammengehörigkeit mit den im vorigen betrachteten primären Zahlen ω etwas näher untersuchen.

Die Klassengruppe von k war:

$$(3) \qquad c_1^{x_1} \cdots c_e^{x_e} \; (x_i = 0, 1, \cdots, l^{h_i} - 1), \qquad h_1 + h_2 + \cdots + h_e = h'.$$

Jede Untergruppe von k vom Grade l^{h-1} läßt sich dann durch eine bestimmte Kongruenz

$$f_1 x_1 + \cdots + f_e x_e \equiv 0\,(l) \tag{4}$$

charakterisieren, wo die $f_1, \cdots, f_e$ feste ganze rationale Zahlen bedeuten, die nicht sämtlich durch l teilbar sind; d. h. man erhält alle Klassen der Untergruppe und jede nur einmal, wenn man die Exponenten $x_1, \cdots, x_e$ in (3) alle Werte durchlaufen läßt, welche der Kongruenz (4) genügen. Man erkennt dies leicht, wenn man bedenkt, daß die Untergruppe als Abelsche Gruppe selbst eine Basis besitzt, und dann die Klassen dieser Basis durch $c_1, \cdots, c_e$ darstellt.

Eine leichte Abzählung vermittelst (4) lehrt dann, daß es $\frac{l^e - 1}{l - 1}$ verschiedene Untergruppen vom Grade l^{h-1} in der Klassengruppe gibt; andererseits folgt aus der Existenz der Zahlen $\omega_1, \cdots, \omega_e$, daß es mindestens $\frac{l^e - 1}{l - 1}$ verschiedene unverzweigte Körper vom Relativgrade l in bezug auf k gibt. Da nun aber zu zwei verschiedenen Körpern nicht zwei gleiche Untergruppen gehören können, weil man sonst in der zu Anfang dieses Paragraphen ausgeführten Weise zu einem Widerspruch mit Satz 1 kommen würde, so lassen sich die verschiedenen unverzweigten Körper und die Untergruppen eindeutig zuordnen. Daraus folgt zugleich, daß weiter keine unverzweigten relativzyklischen Körper vom Relativgrad l in bezug auf k existieren können und daß zu jedem solchen Körper eine Untergruppe der Klassengruppe von k gehört, die genau den Grad l^{h-1} hat.

§ 8.

Die genaue Anzahl der ambigen Komplexe und die Einheiten in den Körpern K.

Satz 6: *Die Anzahl der unabhängigen ambigen Komplexe in*

$$K_j(\sqrt[l]{\omega_j}, k) \qquad (j = 1, 2, \cdots, e)$$

ist gleich $e - 1$.

Beweis: Wir werden im folgenden den Index j immer fortlassen, da die Ausführungen gleichmäßig für die e Körper $K_1, \cdots, K_e$ gelten, und die in den vorigen Paragraphen gebrauchten Bezeichnungen anwenden. Es mögen $Q_1, \cdots, Q_a$ die durch (1) in § 6 definierten Komplexe aus K sein und $A_1, \cdots, A_a$ mögen Idealklassen aus den Komplexen $Q_1, \cdots, Q_a$ sein. Es sind dann sämtliche Idealklassen aus K in der Gestalt darstellbar:

$$c A_1^{F_1(S)} \cdots A_a^{F_a(S)}, \tag{1}$$

wo c eine Klasse aus k und $F_1(S), \cdots, F_a(S)$ ganze, ganzzahlige Funktionen von S bedeuten. S ist die Substitution, durch die $\sqrt[l]{\omega}$ in $\zeta\sqrt[l]{\omega}$ übergeführt wird. Bezeichnet man nun die Klassen in k, in welche die Relativnormen der Ideale aus $A_1, \cdots, A_a$ hineinfallen, mit $c_1, \cdots, c_a$, so muß die Gruppe der Klassen in k, die $c_1, \cdots, c_a$ und außerdem sämtliche l^{ten} Potenzen von Klassen enthält, vom Grade l^{h-1} sein.

Wäre aber $a < e - 1$, so wäre dies offenbar unmöglich; es ist also notwendig

$$a \geqq e - 1$$

und folglich wegen Satz 3:

$$a = e - 1. \tag{2}$$

Auch die Anzahlen v und v^* lassen sich jetzt leicht bestimmen, wie folgender Satz lehrt:

Satz 7: *Haben v, v^*, e, e_1 und m' dieselbe Bedeutung wie in den Sätzen 2 und 3, so gilt*

$$v^* = m' - e_1 + 1, \tag{3}$$

$$v = m' \tag{4}$$

oder in Worten:

Jede Einheit in k ist Relativnorm einer Zahl aus $K(\sqrt[l]{\omega}, k)$, dagegen sind nur $l^{m'-e_1+1}$ Einheiten Relativnormen von Einheiten aus K.

Beweis: Aus den Ungleichungen (2) in § 4 und (11) in § 5 folgt, wenn man beachtet, daß a^*, t und f den Wert Null haben, und $a = e - 1$ ist:

$$v^* \geqq m' + 1 - e_1, \tag{5}$$

$$v \geqq v^* + e_1 - 1, \tag{6}$$

also auch

$$v \geqq m'.$$

Da v nicht größer als m' sein kann, muß $v = m'$ sein. Aus (6) folgt dann:

$$v^* \leqq m' + 1 - e_1,$$

also wegen (5)

$$v^* = m' - e_1 + 1.$$

Aus der letzten Gleichung schließt man noch, daß e_1 mindestens den Wert 1 haben muß, d. h. *daß es sicher eine Klasse in k geben muß, die in k nicht Hauptklasse ist, aber in K in die Hauptklasse übergeht.*

§ 9.

Konstruktion des unverzweigten Körpers vom Relativgrad l, wenn der Grundkörper keine l^{te} Einheitswurzel enthält.

Wir haben in den vorhergehenden Paragraphen immer vorausgesetzt, daß der Grundkörper k eine l^{te} Einheitswurzel enthalte. Von dieser beschränkenden Voraussetzung haben wir uns jetzt zu befreien, indem wir folgenden Satz beweisen:

Satz 8: *Es sei k ein beliebiger algebraischer Zahlkörper mit der Klassenzahl $ql^{h'}$, wo l eine ungerade Primzahl bedeutet und q zu l prim ist. Ist dann das System der q^{ten} Potenzen der Idealklassen aus k in der Gestalt darstellbar:*

$$(c)_k = c_1^{x_1} \cdots c_e^{x_e} \quad (x_i = 0, 1, \cdots, l^{h_i} - 1), \quad h_1 + \cdots + h_e = h',$$

so existieren in bezug auf k genau e unabhängige unverzweigte relativzyklische Körper vom Relativgrad l. Dasselbe gilt für $l = 2$, wenn der Körper K samt seinen konjugierten imaginär ist.

Beweis: Ich erinnere zunächst daran, daß wir wieder das System aller Klassen, deren q^{te} Potenz in die Hauptklasse fällt, mit 1 bezeichnen und in diesem Sinne die Äquivalenz $\mathfrak{a} \sim 1$ verstehen. Ist dann l^{h_i} der kleinste Exponent, für den die Äquivalenz

$$\mathfrak{b}^{l^{h_i}} \sim 1$$

gilt, so soll l^{h_i} der zum Ideal $\mathfrak{b}$ oder zu der betreffenden Idealklasse gehörige Exponent heißen. Ferner sei noch auf folgende Bezeichnungsweise hingewiesen, die weiterhin benutzt wird. Ist K ein beliebiger Oberkörper von k nnd fallen die Relativnormen der Ideale aus einer Klasse C in K in die Klasse c in k, so werde ich kurz c die Relativnorm von C nennen und schreiben:

$$C = N_k^K(\mathfrak{c}).$$

Wenn die Deutlichkeit nicht darunter leidet, kann bei N der obere oder der untere Index fortbleiben.

Ich adjungiere jetzt zu dem Körper k die l^{te} Einheitswurzel ζ und bezeichne den Körper (k, ζ) mit k', dessen Relativgrad l' in bezug auf k als Faktor von $l - 1$ zu l prim ist. Aus dieser Tatsache folgt leicht, daß jede Idealklasse aus k' in der Form cC darstellbar ist, wo c eine Klasse aus k bedeutet und C eine solche Klasse aus k', die der Bedingung:

$$N_k^{k'}(C) = 1 \tag{2}$$

genügt. Das gesamte Klassensystem von k' ist also in der Gestalt:

$$(c)_k\, C \tag{3}$$

darstellbar, wo C eine beliebige Klasse mit der Eigenschaft (2) bedeutet.

Zwischen den Klassen $c_1, \cdots, c_e$ kann in k' keine Äquivalenz von der Gestalt:

$$c_1^{a_1} \cdots c_e^{a_e} \sim C_i B^l \tag{4}$$

bestehen, wo C_i eine beliebige Klasse aus dem System C, und B eine beliebige Klasse aus k' bedeutet, außer wenn sämtliche a_i durch l teilbar sind. Die Unmöglichkeit von (4) erkennt man, wenn man auf beiden Seiten die Relativnorm in bezug auf k bildet. Es folgt daher aus § 7, daß e unabhängige primäre Zahlen $\omega_1, \cdots, \omega_e$ in k' existieren, welche unverzweigte relativzyklische Körper vom Relativgrad l in bezug auf k' definieren und respektive zu den durch die Kongruenzen:

$$x_i \equiv 0\,(l)$$

definierten Untergruppen der Klassengruppe von k' gehören. Ich betrachte jetzt den Körper $(k', \sqrt[l]{\omega_1})$ und will zunächst zeigen, daß er in bezug auf k relativ-Abelsch ist. Bezeichnet man die erzeugende Substitution der Relativgruppe von k' in bezug auf k mit

$$s = \zeta \,|\, \zeta^r,$$

so gilt:

$$s^{l'} = 1, \quad r^{l'} \equiv 1\,(l). \tag{5}$$

Da nun die Untergruppe der Klassengruppe von k', zu der ω_1 gehört, gegenüber s invariant ist, so muß dasselbe von dem Körper $(k', \sqrt[l]{\omega_1})$ gelten, d. h. es muß eine Beziehung:

$$s\,\omega_1 = \omega_1^a \beta^l \tag{6}$$

bestehen, wo a eine rationale ganze Zahl und β eine Zahl aus k' bedeutet. Um zu zeigen, daß $(k', \sqrt[l]{\omega_1})$ in bezug auf k relativ-Abelsch ist, hat man nachzuweisen, daß die Kongruenz:

$$a \equiv r\,(l) \tag{7}$$

gilt. Wir setzen zu diesem Zweck:

$$l' = p_1^{q_1} r_1 = p_2^{q_2} r_2 = \cdots, \tag{8}$$

wo $p_1^{q_1}, p_2^{q_2}, \cdots$ die verschiedenen in l' aufgehenden Primzahlpotenzen bedeuten, und beweisen, daß die Kongruenzen

$$\begin{aligned} a^{r_1} &\equiv r^{r_1}\,(l), \\ a^{r_2} &\equiv r^{r_2}\,(l), \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{aligned} \tag{9}$$

gelten. Aus der Gesamtheit derselben folgt leicht die Richtigkeit von (7). Denn da die Zahlen $r_1, r_2, \cdots$ nicht sämtlich einen gemeinsamen Teiler haben, so läßt sich die Gleichung:

$$y_1 r_1 + y_2 r_2 + \cdots = 1$$

durch ganze rationale y erfüllen und es folgt dann aus (9)

$$a^{y_1 r_1 + y_2 r_2 + \cdots} \equiv r^{y_1 r_1 + y_2 r_2 + \cdots}\,(l),$$

d. h.

$$a \equiv r\,(l).$$

Es genügt, von den Kongruenzen (9) die Richtigkeit der ersten nachzuweisen, da der Beweis für die übrigen sich analog gestaltet. Zu diesem Nachweis müssen wir uns ein Primideal $\mathfrak{P}_1$ in k' verschaffen, das folgende beiden Eigenschaften besitzt: 1) es muß in einer Idealklasse liegen, die der Bedingung $x_1 \not\equiv 0\,(l)$ genügt, wo x_1 den Exponenten von c_1 in der Klassengruppe von k' bedeutet; 2) es muß $s'\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_1$ sein, wenn wir mit s' die Substitution s^{r_1} bezeichnen. Haben wir ein solches Primideal gefunden, so ist die Richtigkeit der Kongruenz:

$$(10) \qquad a^{r_1} \equiv r^{r_1}\,(l)$$

in folgender Weise einzusehen. Nach den Annahmen über $\mathfrak{P}_1$ gilt:

$$(11) \qquad \left(\frac{\omega_1}{\mathfrak{P}_1}\right)_l = \zeta^* \neq 1$$

und folglich, wenn wir die Substitution s' auf (11) anwenden:

$$(12) \qquad \left(\frac{\omega_1^{a^{r_1}}}{\mathfrak{P}_1}\right)_l = (\zeta^*)^{r^{r_1}}.$$

Daraus ergibt sich die Gültigkeit von (10).

Wir haben also jetzt nur noch, um den Beweis vollständig zu machen, zu zeigen, daß ein Primideal $\mathfrak{P}_1$ in k' mit den oben angegebenen Eigenschaften existiert. Wir betrachten zu diesem Zweck den Oberkörper k_1 von k, der zu der Gruppe $\left(s^{p_1^{q_1}}\right)^x$ $(x = 0, 1, \cdots, r_1 - 1)$ gehört. Derselbe ist relativzyklisch in bezug auf k vom Relativgrad $p_1^{q_1}$ und besitzt einen Unterkörper Uk_1, der relativzyklisch vom Relativgrad p_1 in bezug auf k ist. Ich behaupte nun, daß es in einer Klasse von k, die der Bedingung $x_1 \not\equiv 0\,(l)$ genügt, ein Primideal gibt, das in Uk_1 und folglich dann auch in k_1 Primideal bleibt. Bezeichnet nämlich $\mathfrak{P}_i$ ein beliebiges Primideal aus Uk_1, so gilt

$$\sum \frac{1}{n(\mathfrak{P}_i)^s} = \log \frac{1}{s-1} + f_1(s) \qquad (s > 1)$$

und daher

$$\sum \frac{1}{n(\mathfrak{p}_i)^s} = \frac{1}{p_1} \cdot \log \frac{1}{s-1} + f_2(s), \qquad (s > 1)$$

wenn

$$\mathfrak{p}_i = N_k^{Uk_1}(\mathfrak{P}_i)$$

gesetzt wird. Bezeichne ich andererseits alle Primideale in k, die in einer Klasse mit $x_1 \not\equiv 0\,(l)$ liegen, mit $\mathfrak{q}_i$, so folgt aus Satz 1:

$$\sum \frac{1}{n(\mathfrak{q}_i)^s} \geqq \frac{l-1}{l} \log \frac{1}{s-1} + f_3(s) \qquad (s > 1).$$

Die Funktionen $f(s)$ bleiben endlich, wenn sich s der Grenze 1 nähert. Da $\frac{l-1}{l} > \frac{1}{p_1}$ ist, so ergibt sich somit, daß unendlichviele Primideale aus einer Klasse, die der Bedingung $x_1 \not\equiv 0\,(l)$ genügt, in Uk_1 und deshalb in k_1 Primideale bleiben. Ist $\mathfrak{p}_1$ ein solches Primideal und $\mathfrak{P}_1$ ein Primfaktor desselben in k', so erfüllt $\mathfrak{P}_1$ die beiden oben angegebenen Bedingungen.

Wir haben damit bewiesen, daß der Körper $(k', \sqrt[l]{\omega_1})$ in bezug auf k relativ Abelsch vom Relativgrad $l'l$ ist. Die Relativgruppe besitzt deshalb eine ausgezeichnete Untergruppe vom Grade l', zu der der Körper K_1 gehören möge. K_1 ist dann relativzyklisch vom Relativgrad l in bezug auf k und unverzweigt, wie sich leicht zeigen läßt. Ginge nämlich das Primideal $\mathfrak{p}$ aus k in der Relativdiskriminante von K_1 in bezug auf k auf, so müßte $\mathfrak{p}$ in K_1 in l gleiche Primfaktoren zerfallen. Wenn man dann $\mathfrak{p}$ in $(k', \sqrt[l]{\omega_1})$ zerlegt, so müßten sich die Primfaktoren in Systeme von je l gleichen anordnen lassen. Daraus würde folgen, daß es ein Primideal $\mathfrak{P}$ in k' geben müßte, das in $(k', \sqrt[l]{\omega_1})$ in l gleiche Primfaktoren zerfällt, was unmöglich ist. Es ist also K_1 in bezug auf k unverzweigt.

Verfährt man jetzt in derselben Weise mit $(k', \sqrt[l]{\omega_2})$, $(k', \sqrt[l]{\omega_3})$, $\cdots$, wie wir es eben mit $(k', \sqrt[l]{\omega_1})$ getan haben, so erhält man die Körper $K_2, K_3, \cdots$. Das System der Körper

$$K_1, K_2, \cdots, K_e$$

liefert dann e unverzweigte unabhängige relativzyklische Körper vom Relativgrad l in bezug auf k, womit unser Satz bewiesen ist.

§ 10.

Konstruktion der unverzweigten relativquadratischen Körper, wenn unter den konjugierten Körpern des Grundkörpers k reelle vorhanden sind.

Die bisherigen Entwicklungen bezogen sich auf den Fall, daß l eine ungerade Primzahl ist; sie gelten, wie bereits erwähnt ist, auch für $l=2$, wenn noch die weitere Voraussetzung erfüllt ist, daß der Grundkörper nebst allen konjugierten imaginär ist. Ist das nicht der Fall, so sind besondere Entwicklungen nötig, die in diesem Paragraphen gegeben werden sollen. Es genügt jetzt, wenn man alle unverzweigten relativquadratischen Körper erhalten will, nicht mehr der gewöhnliche Äquivalenzbegriff, sondern es ist der von D. Hilbert*) eingeführte schärfere Äquivalenzbegriff zugrunde zu legen, nach dem zwei Ideale nur dann äquivalent heißen, wenn ihr Quotient als total positive**) Körperzahl darstellbar ist.

*) Rel. Abelsche Zahlk., § 5.

**) Eine Körperzahl heißt total positiv, wenn ihre sämtlichen konjugierten Zahlen, soweit sie reell sind, positiv sind.

Es sei noch bemerkt, daß im folgenden, wenn von den zu k konjugierten Körpern die Rede ist, immer der Körper k einbegriffen ist.

Wir nehmen an, daß der Grad des Körpers k gleich m sei und daß sich unter den konjugierten Körpern s reelle befinden. Wir haben dann zunächst noch eine für k charakteristische Zahl p zu definieren, wobei wir festsetzen, daß die zu einer Zahl α aus k konjugierte Zahl, die in dem mit k konjugierten Körper $k^{(i)}$ liegt, mit $\alpha^{(i)}$ bezeichnet werden soll.

Es sei ε_1^* eine Einheit aus k, unter deren konjugierten sich wenigstens eine negative befindet und zwar sei dies $\varepsilon_1^{*(z_1)}$ in $k^{(z_1)}$; es sei dann ε_2^* eine solche Einheit, daß $\varepsilon_2^{*(z_1)}$ positiv und $\varepsilon_2^{*(z_2)}$ negativ ist; weiter sei ε_3^* eine solche Einheit, daß $\varepsilon_3^{*(z_1)}$ und $\varepsilon_3^{*(z_2)}$ positiv sind und $\varepsilon_3^{*(z_3)}$ negativ usw. Die letzte auf solche Weise zu wählende Einheit sei ε_p^*; es folgt dann, daß jede Einheit ε in k, deren konjugierte in $k^{(z_1)}, \cdots, k^{(z_p)}$ positiv sind, auch in den noch übrigen reellen Körpern $k^{(z_{p+1})}, \cdots, k^{(z_s)}$ positive konjugierte Einheiten hat. Die Zahl p läßt sich auch in folgender Weise charakterisieren. Die Anzahl der Grundeinheiten von k ist $m'-1$, wo $m' = \frac{m+s}{2}$ ist. Nimmt man zu diesen noch eine Einheitswurzel aus k hinzu, deren Quadratwurzel nicht in k liegt, so erhält man $2^{m'}$ Einheitenverbände in k, unter denen sich mindestens $2^{m'-s}$ Verbände von total positiven Einheiten finden. Ist $s-p=p'>0$, so wird diese Minimalzahl überschritten und es gibt in k genau $2^{m'-p}$ Verbände von total positiven Einheiten.

Aus den im vorstehenden für den Körper k gemachten Annahmen, die keine Beschränkung enthalten, folgt, daß man zu jeder Zahl α in k eine Einheit ε so bestimmen kann, daß die Zahlen $(\varepsilon\alpha)^{(z_1)}, \cdots, (\varepsilon\alpha)^{(z_p)}$ positiv werden. Daraus folgt, daß zwischen den Klassenzahlen 2^h und $2^{h'}$ von k, von denen die erste im engeren, die zweite im weiteren Sinne verstanden sei, die Beziehung besteht:

$$2^h = 2^{h'} \cdot 2^{p'}, \quad p' = s - p.$$

Es möge nun das Klassensystem von k, wenn der engere Äquivalenzbegriff zugrunde gelegt wird, in der Gestalt:

$$c_1^{x_1} \cdots c_e^{x_e} d_1^{y_1} \cdots d_{e'}^{y_{e'}} (x_i = 0, 1, \cdots, 2^{h_i}-1;\ y_i = 0, 1);\ h_1 + \cdots + h_e + e' = h,$$

darstellbar sein, wo $d_1, \cdots, d_{e'}$ solche Klassen bedeuten, die bei Zugrundelegung des weiteren Äquivalenzbegriffes in die Hauptklasse fallen. Die Erhöhung der Klassenzahl in k bei der schärferen Fassung des Äquivalenzbegriffes kommt also dadurch zustande, daß erstens e' neue Basisklassen zur Klassengruppe hinzutreten und daß zweitens $e'' = p' - e'$ Basisklassen in k eine Verdoppelung ihres Exponenten erfahren. Die Bezeichnung der Klassen möge so gewählt sein, daß dies die Klassen $c_1, \cdots, c_{e''}$ sind.

Wir behaupten jetzt, daß genau $e+e'$ unabhängige unverzweigte relativ-quadratische Körper in bezug auf k existieren.

Zum Beweise bezeichnen wir die Grundeinheiten in k, zu denen noch eine Einheitswurzel, deren Quadratwurzel nicht in k liegt, hinzugenommen ist, mit $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{m'}$, wo $m' = \frac{m+s}{2}$ ist. Die Gesamtheit der Einheitenverbände ist dann in der Gestalt:

$$\varepsilon_1^{u_1} \cdots \varepsilon_{m'}^{u_{m'}} \xi^2 \tag{1}$$

darstellbar, wo ξ alle Einheiten aus k durchläuft; wir wollen uns dabei die Bezeichnung so gewählt denken, daß $\varepsilon_{p+1}, \cdots, \varepsilon_{m'}$ total positive Einheiten sind. Wir bezeichnen ferner mit $\mathfrak{r}_1, \cdots, \mathfrak{r}_e$ Ideale aus den Klassen $c_1, \cdots, c_e$ und setzen

$$\mathfrak{r}_1^{2^{h_1-1}} = \varrho_1, \cdots, \mathfrak{r}_{e''}^{2^{h_{e''}-1}} = \varrho_{e''}, \quad \mathfrak{r}_{e''+1}^{2^{h_{e''}+1}} = \varrho_{e''+1}, \cdots, \mathfrak{r}_e^{2^{h_e}} = \varrho_e,$$

wo die Größen $\varrho_1, \cdots, \varrho_e$ Zahlen aus k bedeuten, die nicht Quadrate von Zahlen sind. Wir schreiben nun:

$$\varepsilon_{m'+1} = \varrho_1, \cdots, \varepsilon_{m'+e} = \varrho_e$$

und bestimmen $m'+e-p$ Primideale $\mathfrak{q}_i$ derart, daß:

$$\left(\frac{\varepsilon_i}{\mathfrak{q}_i}\right)_2 = -1, \quad \left(\frac{\varepsilon_j}{\mathfrak{q}_i}\right)_2 = 1, \quad \begin{pmatrix} i = p+1, \cdots, m'+e; & \\ j = 1, 2, \cdots, m'+e; & i \neq j \end{pmatrix}.$$

Man wähle darauf die Exponenten w so, daß

$$\mathfrak{q}_{p+1}\mathfrak{r}_1^{w_{p+1}^{(1)}} \cdots \mathfrak{r}_e^{w_{p+1}^{(e)}} = (\varkappa_{p+1}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathfrak{q}_{m'+e}\mathfrak{r}_1^{w_{m'+e}^{(1)}} \cdots \mathfrak{r}_e^{w_{m'+e}^{(e)}} = (\varkappa_{m'+e})$$

wird, wo $\varkappa_{p+1}, \cdots, \varkappa_{m'+e}$ Zahlen aus k bedeuten. Bildet man jetzt das System von Zahlen

$$\omega = \varepsilon_1^{u_1} \cdots \varepsilon_{m'+e}^{u_{m'+e}} \varkappa_{p+1}^{v_{p+1}} \cdots \varkappa_{m'+e}^{v_{m'+e}}, \tag{2}$$

indem man die v den bekannten e Bedingungen unterwirft, damit kein Faktor der Ideale $\mathfrak{r}_1, \cdots, \mathfrak{r}_e$ in der Relativdiskriminante von $(k, \sqrt{\omega})$ in bezug auf k aufgeht, so enthält dasselbe im ganzen $2^{2m'+e-p}$ Zahlen. Da nun im ganzen nur $2^{2m'-s}$ Arten von Zahlen in k existieren, so gibt es $e+p'$ unabhängige primäre Zahlen von der Gestalt (2).*) Wir bezeichnen mit:

---

*) Primär nennen wir eine zu 2 prime Zahl, wenn sie dem Quadrat einer Zahl aus k nach dem Modul 4 kongruent ist; dagegen fordern wir nicht, daß sie total positiv sei, wie D. Hilbert für die Aufstellung der Reziprozitätsgesetze im Körper k definiert hat. In diesem Sinne sind auch seine Ausführungen auf p. 378 der Rel. Abelschen Zahlk., speziell Satz 9, zu berichtigen, da an dieser Stelle ebenfalls die obige Definition der primären Zahl anzuwenden ist.

$$\omega_1 = \varepsilon_1^{u_1} \cdots \varepsilon_{m'+e}^{u_{m'+e}} \varkappa_{p+1}^{v_{p+1}} \cdots \varkappa_{m'+e}^{v_{m'+e}}$$

eine solche und untersuchen jetzt den Körper $K_1 = (k, \sqrt{\omega_1})$. Es mögen die Exponenten $v_{i_1}, \cdots, v_{i_t}$ von Null verschieden sein, ferner möge ω_1 in n der reellen Körper $k^{(z_1)}, \cdots, k^{(z_s)}$ negativ werden und es mögen l^{e_1} Idealklassen aus k in weiterem Sinne in K in die Hauptklasse (in weiterem Sinne) übergehen.*) Haben dann a^*, a, v^*, v dieselbe Bedeutung wie früher, so gilt die Ungleichung:

$$a^* \leqq t - m' + v^* + n + e_1 - 1. \tag{3}$$

Man erhält dieselbe, wenn man zunächst in analoger Weise, wie es D. Hilbert**) für ungerades l ausgeführt hat, ein System von $\frac{m+s}{2} - n$ relativen Grundeinheiten von K_1 in bezug auf k konstruiert und dann ebenso wie in § 4 verfährt.

Um eine Ungleichung für a, die Anzahl der unabhängigen ambigen Komplexe in K_1, zu gewinnen (bei ihrer Definition werde der weitere Äquivalenzbegriff zugrunde gelegt), bezeichnen wir die Anzahl negativer unter den Zahlen:

$$\omega_1^{(z_1)}, \omega_1^{(z_2)}, \cdots, \omega_1^{(z_p)}$$

mit n_1; die Anzahl negativer unter den Zahlen:

$$\omega_1^{(z_{p+1})}, \cdots, \omega_1^{(z_s)}$$

ist dann $n - n_1$. Sind ferner unter den Indizes $i_1, \cdots, i_t$ f aus der Reihe $m' + 1, \cdots, m' + e$ vorhanden, so gilt:

$$a \leqq a^* + v - v^* + e - f - e_1. \tag{4}$$

Die Überlegungen zur Ableitung dieser Ungleichung sind völlig analog denen in § 5.

Jede Zahl α nun, die Relativnorm einer Zahl aus K_1 ist, muß die Bedingungen***):

$$\left(\frac{\alpha, \omega_1}{1^{(z_i)}}\right) = 1, \quad (i = 1, 2, \cdots, s)$$

erfüllen. Denn ist $\omega_1^{(z_i)}$ positiv, so ist das Vorzeichensymbol selbstverständlich positiv; ist aber $\omega_1^{(z_i)}$ negativ, so folgt aus:

$$\alpha^{(z_i)} = \left(\alpha_1 + \alpha_2 \sqrt{\omega_1^{(z_i)}}\right)\left(\alpha_1 - \alpha_2 \sqrt{\omega_1^{(z_i)}}\right) = \alpha_1^2 - \alpha_2^2 \omega_1^{(z_i)},$$

*) Für die Konstruktion der ersten e unverzweigten relativquadratischen Körper genügt der weitere Äquivalenzbegriff.

**) Algebr. Zahlk., § 55, p. 572.

***) Vgl. Hilbert, Rel. Abelsche Zahlk., § 6, p. 376.

daß $\alpha^{(z_i)}$ positiv ist; es ist also auch in diesem Falle das Vorzeichensymbol gleich $+1$. Beachtet man dies, so ergibt sich:

(5) $$v \leqq m' - t + f - n_1.$$

Addiert man jetzt die Ungleichungen (3), (4) und (5), so folgt:

(6) $$a \leqq e - 1 + n - n_1.$$

Um jetzt sämtliche Ideale aus K_1 darzustellen, definiert man in analoger Weise wie in § 6 die Ideale $\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2, \cdots, \mathfrak{O}_a$ in K_1 und zeigt wie dort, daß für jedes Ideal $\mathfrak{J}$ in K_1 eine Relation gilt:

(7) $$\mathfrak{J}^q = A\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{O}_1^{F_1(S_1)} \cdots \mathfrak{O}_a^{F_a(S_1)},$$

wo A eine Zahl aus K_1, $\mathfrak{j}$ ein Ideal aus k, q einen ungeraden Exponenten und S_1 die Substitution $\sqrt{\omega_1} \mid -\sqrt{\omega_1}$ bedeutet.

Ist nun $e > 0$, so kann man offenbar, da $e + p'$ unabhängige primäre Zahlen ω zur Verfügung stehen, ω_1 so wählen, daß die sämtlichen Zahlen $\omega_1^{(z_{p+1})}, \cdots, \omega_1^{(z_s)}$ positiv werden. Es ist dann $n = n_1$ und folglich:

$$a \leqq e - 1.$$

Aus der letzten Ungleichung schließt man mit Hilfe von (7), daß alle Primideale $\mathfrak{p}$ in k mit der Eigenschaft $\left(\frac{\omega_1}{\mathfrak{p}}\right)_2 = 1$ in einer Untergruppe vom Grade 2^{h-1} (oder $2^{h'-1}$ bei Zugrundelegung des weiteren Äquivalenzbegriffes) der Klassengruppe von k liegen, die durch eine Kongruenz:

$$a_1 x_1 + \cdots + a_e x_e \equiv 0\,(2)$$

definiert wird. Daraus schließt man in bekannter Weise die Unverzweigtheit von K_1. In gleicher Weise wie K_1 kann man noch $e-1$ unabhängige unverzweigte relativquadratische Körper $K_1, \cdots, K_e$ konstruieren durch Benutzung der primären Zahlen $\omega_2, \cdots, \omega_e$, die ebenso wie ω_1 die Eigenschaft haben, daß ihre konjugierten in den Körpern $k^{(z_{p+1})}, \cdots, k^{(z_s)}$ sämtlich positiv sind.

Wir haben jetzt noch p' unabhängige primäre Zahlen aus (2) zur Verfügung und wollen zeigen, daß man mit ihrer Hilfe noch genau e' unabhängige unverzweigte relativquadratische Körper in bezug auf k konstruieren kann. Ich wähle zu diesem Zweck eine Zahl δ_1 aus der Klasse d_1' des Klassensystems $d_1^{y_1} \cdots d_{e'}^{y_{e'}}$, die nicht Hauptklasse im engeren Sinne ist, und normiere δ_1 durch Multiplikation mit einer Einheit so, daß die zu δ_1 konjugierten Zahlen in den Körpern $k^{(z_1)}, \cdots, k^{(z_p)}$ positiv sind. Es muß dann unter den Zahlen:

(8) $$\delta_1^{(z_{p+1})}, \cdots, \delta_1^{(z_s)}$$

sicher eine negative sein; man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die erste unter ihnen negativ sei. Ferner wollen wir noch voraussetzen, daß die Klasse d_1' so gewählt sei, daß unter den Zahlen (8) möglichst wenige negative vorkommen.

Unter den p' unabhängigen primären Zahlen aus (2), die noch zur Verfügung stehen, gibt es nun keine einzige mehr, deren sämtliche konjugierte in den Körpern $k^{(z_p+1)}, \cdots, k^{(z_s)}$ positiv wären. Denn sonst könnte man noch einen unabhängigen Körper von der Art der Körper $K_1, \cdots, K_e$ konstruieren, was unmöglich ist. Denn es existieren in der Klassengruppe von k im weiteren Sinne nur $2^e - 1$ Untergruppen vom Grade $2^{h'-1}$, denen die $2^e - 1$ konstruierten unverzweigten Körper eindeutig zugeordnet sind. Es folgt daraus, daß man stets eine primäre Zahl ω_{e+1} von der Gestalt (2) angeben kann, so daß $\omega_{e+1}^{(z_p+1)}$ negativ und $\omega_{e+1}^{(z_p+2)}, \cdots, \omega_{e+1}^{(z_s)}$ positiv ausfallen. Wir untersuchen jetzt den Körper $K_{e+1} = (k, \sqrt{\omega_{e+1}})$ und behaupten, daß die Anzahl der ambigen Komplexe in ihm größer als $e-1$ ist. Wäre sie nämlich gleich oder kleiner als $e-1$, so würde folgen, daß der Körper K_{e+1} zu einer Untergruppe der Klassengruppe von k gehört, zu der bereits ein unverzweigter Körper konstruiert ist, was unmöglich ist. Es gilt also für K_{e+1}:

$$a \geqq e,$$

andererseits folgt aus (6), da $n - n_1 = 1$ ist,

$$a \leqq e,$$

es ist also die Anzahl der ambigen Komplexe genau gleich e. Daraus schließt man, daß

$$v = m' - t + f - n_1 \tag{9}$$

ist; denn nach (4) ist v nicht kleiner und nach (5) nicht größer als die rechte Seite von (9). Die Ideale in K_{e+1} lassen sich nun wieder in der Form darstellen:

$$\mathfrak{J}^q = A\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{Q}_1^{F_1(S_1)} \cdots \mathfrak{Q}_e^{F_e(S_1)}, \tag{10}$$

wo die Bezeichnungen die analoge Bedeutung wie in (7) haben. Die Ideale $\mathfrak{Q}_1, \cdots, \mathfrak{Q}_e$ kann man sich so gewählt denken, daß ihre Relativnormen resp. in die Klassen $c_1, \cdots, c_e$ fallen. Ich behaupte jetzt, daß die Relativnormen von Zahlen aus K_{e+1} nicht in die Klasse d'_1 fallen können. Ist nämlich α die Relativnorm einer beliebigen Zahl A aus k, so gilt zunächst für jeden Index i:

$$\left(\frac{\alpha, \omega_{e+1}}{\mathfrak{l}^{(i)}}\right) = 1 \cdot \tag{11}$$

Um unsere Behauptung zu beweisen, normieren wir α, d. h. wir verwandeln α durch Multiplikation mit einer geeignet gewählten Einheit ξ_α aus k in eine Zahl, deren konjugierte in den Körpern $k^{(z_1)}, \cdots, k^{(z_p)}$ positiv sind. Wir wollen zeigen, daß wir dies stets mit Hilfe einer Einheit bewerkstelligen können, die selbst Relativnorm einer Zahl aus K_{e+1} ist.

Bedeuten nämlich $k^{(y_1)}, \cdots, k^{(y_{n_1})}$ diejenigen unter den Körpern $k^{(z_1)}, \cdots, k^{(z_p)}$, in denen die zu ω_{e+1} konjugierten Zahlen negativ werden, so ist zunächst klar, daß alle Einheiten ξ, welche die Bedingungen:

$$(12) \qquad \left(\frac{\xi}{\mathfrak{q}_{i_1}}\right) = 1, \cdots, \left(\frac{\xi}{\mathfrak{q}_{i_t}}\right) = 1$$

$$(13) \qquad \left(\frac{\xi, \omega_{e+1}}{\mathfrak{l}^{(y_1)}}\right) = 1, \cdots, \left(\frac{\xi, \omega_{e+1}}{\mathfrak{l}^{(y_{n_1})}}\right) = 1$$

befriedigen, Relativnormen von Zahlen aus K_{e+1} sind. Denn alle Einheiten, welche diese Eigenschaft haben, müssen (12) und (13) erfüllen. Es kann daher höchstens $m' - t + f - n_1$ unabhängige Einheitenverbände geben, deren Einheiten Relativnormen von Zahlen aus K_{e+1} sind; daraus folgt in Verbindung mit (9), daß alle Einheiten, welche die Bedingungen (12) und (13) erfüllen, Relativnormen von Zahlen aus K_{e+1} sind.

Es mögen nun unter den Zahlen $\alpha^{(z_1)}, \cdots, \alpha^{(z_p)}$ im ganzen n' negative vorhanden sein, die mit:

$$(14) \qquad \alpha^{(x_1)}, \cdots, \alpha^{(x_{n'})}$$

bezeichnet seien. Die gesuchte Einheit ξ_α hat dann außer den Bedingungen (12) und (13) noch die weiteren:

$$(15) \qquad \xi_\alpha^{(x_1)}, \cdots, \xi_\alpha^{(x_{n'})} \text{ negativ}$$

zu erfüllen. Um die Einheit ξ_α bequemer darstellen zu können, wollen wir noch über die Einheiten $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ in (1) eine besondere Verfügung treffen. Wir wollen uns ε_i so gewählt denken, daß

$-1, \left(\frac{\varepsilon_i}{\mathfrak{q}_j}\right) = 1;$

$$\varepsilon_i^{(z_i)} < 0, \ \varepsilon_i^{(z_j)} > 0 \qquad \left(\begin{matrix} i, j = 1, 2, \cdots, p \\ j \neq i \end{matrix}\right).$$

Daß diese Wahl, durch die die Ideale $\mathfrak{q}_i$ nicht weiter berührt werden, stets möglich ist, erkennt man leicht, wenn man bedenkt, daß die Vorzeichenanordnungen, die sich durch die Reihen:

$$\varepsilon^{(z_1)}, \cdots, \varepsilon^{(z_p)}$$

ergeben, wenn man ε alle Einheiten des Systems:

$$\varepsilon_1^{u_1} \cdot \varepsilon_2^{u_2} \cdots \varepsilon_p^{u_p}, \ (u = 0, 1)$$

durchlaufen läßt, alle überhaupt möglichen sind. Setzt man jetzt:

$$\xi_\alpha = \varepsilon_{x_1} \cdot \varepsilon_{x_2} \cdots \varepsilon_{x_{n'}},$$

so ist ξ_α eine Einheit der gewünschten Art. Denn sie befriedigt die Bedingungen (12) und (15). Daß sie auch (13) befriedigt, folgt daraus, daß alle Indizes $x_1, \cdots, x_{n'}$ von den Indizes $y_1, \cdots, y_{n_1}$ verschieden sind. Denn aus (11) und (14) folgt, daß:

$$\omega^{(x_1)}, \cdots, \omega^{(x_{n'})} \qquad \omega = \omega_{e+1}$$

positiv sind. Damit ist unsere Behauptung bewiesen, daß sich α mit Hilfe einer Einheit normieren läßt, die Relativnorm einer Zahl aus K_{e+1} ist. Ich kann daher direkt annehmen, daß α normiert sei. Fiele nun α in die Klasse d_1', so wäre α mit δ_1 im engeren Sinne äquivalent und folglich $\alpha^{(z_p+1)}$ negativ. Da auch $\omega_{e+1}^{(z_p+1)}$ negativ ist, so widerspricht dies der Relation:

$$\left(\frac{\alpha,\, \omega_{e+1}}{\mathfrak{l}^{(z_p+1)}}\right) = 1 \cdot$$

Damit ist gezeigt, daß α nicht in der Klasse d_1' liegen kann, und deshalb folgt aus (10), daß alle Relativnormen von Idealen aus K_{e+1} in einer Untergruppe der Klassengruppe von k vom Grade 2^{h-1} liegen. Daraus schließt man in bekannter Weise, daß K_{e+1} unverzweigt in bezug auf k ist.

Ist $e' > 1$, so kann man noch einen weiteren unverzweigten relativ-quadratischen Körper in bezug auf k konstruieren. Wir nehmen zu diesem Zweck an, daß K_{e+1} zu der durch die Kongruenz:

$$y_1 \equiv 0\ (2)$$

definierten Untergruppe der Klassengruppe von k gehört, was offenbar durch nachträgliche Abänderung der Bezeichnung der Klassen d stets erreicht werden kann. Es sei nun δ_2 eine Zahl aus einer Klasse d_2' des Systems $d_2^{y_2} \cdots d_{e'}^{y_{e'}}$, die nicht Hauptklasse im engeren Sinne ist, und zwar sei δ_2 normiert. Es muß dann unter den Zahlen:

$$\text{(16)} \qquad \delta_2^{(z_p+2)}, \ldots, \delta_2^{(z_s)}$$

eine negative sein. Denn wären alle Zahlen (16) positiv, so müßten auch alle Zahlen $\delta_1^{(z_p+2)}, \ldots, \delta_1^{(z_s)}$ positiv sein, weil δ_1 so gewählt sein sollte, daß unter den Zahlen (8) möglichst wenige negative vorkommen. Es wäre dann δ_2 mit δ_1 äquivalent, was der Wahl der Klasse d_2' widerspricht. Wir nehmen deshalb an, die erste der Zahlen (16) sei negativ, und setzen außerdem voraus, daß die Klasse d_2' so gewählt sei, daß sich unter den Zahlen (16) möglichst wenige negative befinden. Wir wählen dann unter den $p'-1$ noch zur Verfügung stehenden unabhängigen primären Zahlen aus (2) eine solche ω_{e+2} aus, daß $\omega_{e+2}^{(z_p+2)}$ negativ und $\omega_{e+2}^{(z_p+3)}, \ldots, \omega_{e+2}^{(z_s)}$ positiv ausfallen. Durch Multiplikation mit einer geeigneten Potenz von ω_{e+1} können wir es offenbar auch noch erreichen, daß $\omega_{e+2}^{(z_p+1)}$ positiv wird. Wir wollen also voraussetzen, daß unter den Zahlen:

$$\omega_{e+2}^{(z_p+1)}, \omega_{e+2}^{(z_p+2)}, \ldots, \omega_{e+2}^{(z_s)}$$

nur die zweite negativ sei. Es lassen sich dann für ω_{e+2} die ganz analogen Überlegungen durchführen wie für ω_{e+1}, womit die Existenz eines zweiten unabhängigen unverzweigten relativquadratischen Körpers in bezug auf k bewiesen ist. Den angegebenen Konstruktionsprozeß kann man offenbar fortsetzen und zu den Körpern $K_1, \cdots, K_e$ noch weitere e' Körper $K_{e+1}, \cdots, K_{e+e'}$ konstruieren, so daß damit im ganzen $e+e'$ unabhängige unverzweigte relativquadratische Körper in bezug auf k gewonnen sind, deren Existenz wir beweisen wollten.

§ 11.

Der Aufbau des Klassenkörpers.

Wir haben jetzt durch die Entwicklungen der vorstehenden Paragraphen die Bausteine gewonnen, aus denen wir den vollständigen Klassenkörper aufbauen können.

Es sei die Klassenzahl h von k gleich $l_1^{h'_1} \cdots l_i^{h'_i}$, wo $l_1, \cdots, l_i$ verschiedene Primzahlen sind; bei der Klassenzahlbestimmung ist der schärfere Äquivalenzbegriff zugrunde zu legen, nach dem zwei Ideale nur dann äquivalent heißen, wenn ihr Quotient eine total positive Körperzahl ist. Wir konstruieren dann, wie bereits in der Einleitung angegeben, unverzweigte relativ-Abelsche Körper in bezug auf k von den resp. Relativgraden $l_1^{h'_1}, \cdots, l_i^{h'_i}$. Durch Zusammensetzung dieser Körper entsteht dann der vollständige Klassenkörper. Es genügt, wenn wir hier die Konstruktion eines solchen Körpers angeben. Wir setzen deshalb $h = l_1^{h'_1} \cdot q$, wo q zu l_1 prim sei, und verstehen unter l_1 eine beliebige Primzahl.

Es sei wieder das System der q^{ten} Potenzen der Idealklassen von k in der Gestalt darstellbar:

$$(c)_k = c_1^{x_1} \cdots c_e^{x_e}, \ \left(x_i = 0, 1, \cdots, l_1^{h''_i} - 1\right), \ h''_1 + \cdots + h''_e = h'_1,$$

und es werde wieder, wie früher schon, um der einfacheren Ausdrucksweise willen, das System aller Klassen, deren q^{te} Potenz in die Hauptklasse fällt, mit 1 bezeichnet. Es möge nun $K_1^{(1)}$ derjenige unverzweigte Körper vom Relativgrad l_1 in bezug auf k sein, der zu der durch die Kongruenz $x_1 \equiv 0(l_1)$ definierten Untergruppe der Klassengruppe von k gehört. Ist jetzt $h''_1 > 1$, also $c_1^{l_1} \neq 1$ in k, so ist in $K_1^{(1)}$ die Äquivalenz $c_1 \sim C^{l_1}$, wo C eine beliebige Klasse aus $K_1^{(1)}$ bedeutet, unmöglich. Denn aus der Annahme, daß $K_1^{(1)}$ zu der genannten Untergruppe gehört, folgt, daß

$$N_k(C) \sim c^{l_1} c_2^{a_2} \cdots c_e^{a_e} \quad \text{in} \quad k,$$

wo c eine Klasse aus k und $a_2, \cdots, a_e$ ganze rationale Zahlen bedeuten. Es müßte also auch gelten:

$$c_1^{l_1} \sim N_k(C^{l_1}) \sim c^{l_1} c_2^{a_2 l_1} \cdots c_e^{a_e l_1} \quad \text{in} \quad k,$$

und hieraus würde folgen, daß

$$c_1^{b_1 l_1} c_2^{b_2 l_1} \cdots c_e^{b_e l_1} \sim 1 \quad \text{in} \quad k,$$

wo $b_1, \cdots, b_e$ wieder ganze rationale Zahlen bedeuten, von denen die erste nicht durch l_1 teilbar ist. Da die letzte Äquivalenz unmöglich ist, wenn $c_1^{l_1} \not\sim 1$ in k, so ist auch die Äquivalenz $c_1 \sim C^{l_1}$ in $K_1^{(1)}$ unmöglich.

Führen wir den Begriff des *Klassenverbandes* ein als eines Systems von Klassen, das durch Multiplikation einer fest gegebenen Klasse mit den l_1^{ten} Potenzen aller Klassen des Körpers entsteht, und nennen Hauptklassenverband denjenigen, der die l_1^{ten} Potenzen aller Klassen enthält, so können wir die vorstehenden Entwicklungen dahin zusammenfassen, daß c_1 einen vom Hauptverbande verschiedenen Klassenverband in $K_1^{(1)}$ definiert. Es existiert dann, wie aus den Entwicklungen der vorigen Paragraphen folgt, in bezug auf $K_1^{(1)}$ ein unverzweigter relativzyklischer Körper $K_1^{(2)}$ vom Relativgrad l_1, der zu der durch die Bedingung „Exponent von c_1 durch l_1 teilbar“ definierten Untergruppe der Klassengruppe von $K_1^{(1)}$ gehört. Bezeichnet man jetzt die erzeugende Substitution der Relativgruppe von $K_1^{(1)}$ in bezug auf k mit S_1, so folgt aus dem Umstande, daß die genannte Bedingung gegenüber S_1 invariant ist, daß $K_1^{(2)}$ ein relativ-Galoisscher Körper vom Relativgrad l_1^2 in bezug auf k ist. Daß er auch relativ-Abelsch ist, folgt aus der Darstellung der Substitutionen seiner Relativgruppe, die die Vertauschbarkeit derselben ohne weiteres erkennen läßt. Daß er endlich relativzyklisch sein muß, folgt aus dem Umstande, daß er nur einen relativzyklischen Unterkörper vom Relativgrad l_1 in bezug auf k besitzt. Denn unter den Abelschen Gruppen vom Grade l_1^2 besitzt nur die zyklische die Eigenschaft, daß sie nur *eine* Untergruppe vom Grade l_1 besitzt. Ist nämlich eine Abelsche Gruppe vom Grade l_1^2 nicht zyklisch, so ist sie in der Gestalt

$$S_1^{x_1} S_2^{x_2} (x_i = 0, 1, \cdots, l_1 - 1)$$

darstellbar und besitzt daher mehr als eine Untergruppe vom Grade l_1.

Daß $K_1^{(2)}$ nur einen Unterkörper vom Relativgrad l_1 in bezug auf k, nämlich den Körper $K_1^{(1)}$, besitzt, ist nach der Konstruktion der Körper beinahe selbstverständlich. Besäße nämlich $K_1^{(2)}$ noch einen zweiten Unterkörper K_1', so wäre dieser unverzweigt vom Relativgrad l_1 in bezug auf k und gehörte daher zu einer bestimmten Untergruppe der Klassengruppe von k, die von der durch die Bedingung $x_1 \equiv 0 (l_1)$ definierten Untergruppe verschieden wäre. $K_1^{(2)}$ würde dann durch Zusammensetzung zweier in bezug auf k unverzweigter Körper vom Relativgrad l_1 entstehen, nämlich der Körper $K_1^{(1)}$ und K_1'. Das ist unmöglich, wie aus folgender

Überlegung hervorgeht. Das Klassensystem des Körpers $K_1^{(1)}$ läßt sich nach § 6 in der Gestalt schreiben:

$$C_2^{F_2(S_1)} \ldots C_e^{F_e(S_1)} (c)_k C^{l_1},$$

wo $C_2, \cdots, C_e$ Klassen aus $K_1^{(1)}$ bedeuten, deren Relativnormen in k in die Klassen $c_2, \cdots, c_e$ fallen; $(c)_k$ bedeutet das Klassensystem aus k, und C eine beliebige Klasse aus $K_1^{(1)}$. $F_2(S_1), \cdots, F_e(S_1)$ sind ganze ganzzahlige Funktionen von S_1 vom Grade $l_1 - 2$. Die Körper $K_2^{(1)}, \cdots, K_e^{(1)}$ nun, die unverzweigt vom Relativgrad l_1 in bezug auf k sind und zu den Untergruppen $x_2 \equiv 0(l_1), \cdots, x_e \equiv 0(l_1)$ resp. gehören, sind natürlich auch in bezug auf $K_1^{(1)}$ unverzweigt und gehören in $K_1^{(1)}$ resp. zu den durch folgende Bedingungen definierten $e-1$ Untergruppen der Klassengruppe von $K_1^{(1)}$:

$$F_2(1) \equiv 0(l_1), \cdots, F_e(1) \equiv 0(l_1).$$

Denn die Relativnormen aller Klassen aus $K_1^{(1)}$, die z. B. der Bedingung $F_2(1) \equiv 0(l_1)$ entsprechen, liefern in k die durch die Bedingung $x_2 \equiv 0(l_1)$ charakterisierte Untergruppe der Klassengruppe von k, und analog für die übrigen Indizes. Daraus folgt, daß K_1' in dem Körper $(K_1^{(1)}, K_2^{(1)}, \cdots, K_e^{(1)})$ nicht enthalten sein kann, weil K_1' in bezug auf $K_1^{(1)}$ zu der durch die Bedingung „Exponent von c_1 durch l_1 teilbar" definierten Untergruppe der Klassengruppe von $K_1^{(1)}$ gehört. Damit ist gezeigt, daß $K_1^{(2)}$ relativzyklisch vom Relativgrad l_1^2 in bezug auf k ist.

Ist h_1'' auch größer als 2, also $c_1^{l_1^2} \neq 1$ in k, so kann man das Verfahren fortsetzen, und es gelingt auf dem angegebenen Wege, einen relativzyklischen Körper vom Relativgrad $l_1^{h_1''}$ in bezug auf k zu konstruieren. In analoger Weise konstruiert man die unverzweigten relativzyklischen Körper $K_2^{(h_2'')}, \cdots, K_e^{(h_e'')}$ in bezug auf k, die resp. die Relativgrade $l_1^{h_2''}, \cdots, l_1^{h_e''}$ besitzen, indem man mit den Klassen $c_2, \cdots, c_e$ ebenso operiert wie oben mit c_1. Durch Zusammensetzung der e Körper entsteht ein unverzweigter relativ-Abelscher Körper vom Relativgrad $l_1^{h_1'}$ in bezug auf k.

In entsprechender Weise erhält man unverzweigte, relativ-Abelsche Körper von den Relativgraden $l_2^{h_2'}, \cdots, l_i^{h_i'}$ in bezug auf k. Durch Zusammensetzung aller dieser Körper erhält man einen unverzweigten relativ-Abelschen Körper vom Relativgrad h in bezug auf k, dessen Relativgruppe offenbar seiner Entstehungsweise nach mit der Klassengruppe von k holoedrisch isomorph ist. Wir haben damit folgenden fundamentalen Satz bewiesen:

Satz 9: Es sei k ein beliebiger algebraischer Zahlkörper, dessen Klassenzahl gleich h ist, wenn wir zwei Ideale als äqui-

valent betrachten, deren Quotient als total positive Körperzahl dargestellt werden kann. Es existiert dann in bezug auf k ein unverzweigter relativ-Abelscher Körper vom Relativgrad h, dessen Relativgruppe mit der Gruppe der Idealklassen in k holoedrisch isomorph ist. Dieser Körper heiße der Klassenkörper von k.

§ 12.

Zusammenhang mit der komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen.

Ist der Grundkörper k ein imaginärer quadratischer Körper, so liefert die Theorie der komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen einen Relativkörper $\overline{K}$ in bezug auf k, dessen Relativgruppe ebenfalls mit der Gruppe der Idealklassen von k holoedrisch isomorph ist.*) Es soll im folgenden kurz gezeigt werden, daß dieser Körper $\overline{K}$, den wir als Klassenkörper der komplexen Multiplikation bezeichnen, identisch ist mit dem arithmetisch konstruierten Klassenkörper K in bezug auf k. Die Eigenschaft von $\overline{K}$, auf die wir uns bei dem Identitätsbeweise stützen, ist folgende: Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus k, das nicht in der Relativdiskriminante von $\overline{K}$ aufgeht, und ist g der niedrigste Exponent, für den die Äquivalenz:

$$(1) \qquad \mathfrak{p}^g \sim 1$$

in k gilt, so zerfällt $\mathfrak{p}$ in $\overline{K}$ in $\frac{h}{g}$ verschiedene Primfaktoren, wenn mit h die Klassenzahl von k bezeichnet wird.**)

Wir können wieder ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Klassenzahl von k gleich $l^{h'}$ sei, wo l eine Primzahl bedeutet; denn man kann, wie auch bei der Konstruktion des Klassenkörpers ausgeführt wurde, die einzelnen Untergruppen der Klassengruppe von k, deren Grade Potenzen verschiedener Primzahlen sind, für sich betrachten. Es sei also das Klassensystem von k in der Gestalt darstellbar:

$$c_1^{x_1} c_2^{x_2} \cdots c_e^{x_e} \quad (x_i = 1, 2, \cdots, l^{h_i})$$

und dementsprechend das Klassensystem von $k' = (k, \zeta)$ in der Gestalt:

$$c_1^{x_1} c_2^{x_2} \cdots c_e^{x_e}\, d,$$

wo d das System von Klassen bedeutet, deren Relativnormen in k in die Hauptklasse fallen. Es bedeute wie oben K den arithmetischen Klassen-

*) Vgl. H. Weber, Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen, Braunschweig 1891, III. Teil.

**) H. Weber, l. c., p. 444 u. 445.

körper und $\overline{K}$ den Klassenkörper der komplexen Multiplikation und es sei:

$$(K, \zeta) = K', \quad (\overline{K}, \zeta) = \overline{K}'.$$

Die Körper K' und $\overline{K}'$ setzen sich dann jeder aus e relativzyklischen Körpern in bezug auf k' zusammen, deren Relativgrade $l^{h_1}, \cdots, l^{h_e}$ sind. Wir nehmen an, daß die Bezeichnung der Klassen c so gewählt sei, daß $h_1 \geqq h_2 \cdots \geqq h_e$ sei. Es gibt dann in K' e unabhängige relativzyklische Körper vom Relativgrad l in bezug auf k', die durch Adjunktion von $\sqrt[l]{\omega_1}, \cdots, \sqrt[l]{\omega_e}$ erzeugt werden mögen, und zwar möge ω_i zu der durch die Kongruenz $x_i \equiv 0\,(l)$ definierten Untergruppe der Klassengruppe von k' gehören. Ebenso enthält $\overline{K}'$ e unabhängige relativzyklische Körper vom Relativgrad l in bezug auf k', die durch Adjunktion von $\sqrt[l]{\overline{\omega}_1}, \cdots, \sqrt[l]{\overline{\omega}_e}$ erzeugt werden mögen, und zwar möge die Bezeichnung so gewählt sein, daß $(\sqrt[l]{\overline{\omega}_i}, k')$ als Unterkörper in einem in $\overline{K}'$ enthaltenen relativzyklischen Körper vom Relativgrad l^{h_i} liegt.

Es möge jetzt $h_1 = h_2 = \cdots = h_{e'}$ sein und $h_{e'+1} < h_{e'}$. Ich fasse dann ein Primideal $\mathfrak{p}$ aus k' ins Auge mit den Eigenschaften:

$$(1) \qquad \left(\frac{\omega_1}{\mathfrak{p}}\right)_l = 1, \cdots, \left(\frac{\omega_{e'}}{\mathfrak{p}}\right)_l = 1,$$

wobei die Primideale, die in der Relativdiskriminante von $\overline{K}$ in bezug auf k aufgehen, ausgeschlossen bleiben. Es gilt dann offenbar:

$$\mathfrak{p}^{l^{h_1-1}} \sim 1 \text{ in } k',$$

wo diese Äquivalenz wieder die Bedeutung haben soll, daß $\mathfrak{p}^{l^{h_1-1}}$ in einer Klasse des Systems d liegt. Denn $\mathfrak{p}$ liegt nach (1) in einer Klasse, die der durch die Kongruenzen:

$$x_1 \equiv 0, \cdots, x_{e'} \equiv 0\,(l)$$

definierten Untergruppe der Klassengruppe von k' angehört. Es zerfällt daher $\mathfrak{p}$ in $\overline{K}'$ in mindestens l^{h-h_1+1} verschiedene Primfaktoren; daraus folgt, daß auch

$$(2) \qquad \left(\frac{\overline{\omega}_1}{\mathfrak{p}}\right)_l = 1, \cdots, \left(\frac{\overline{\omega}_{e'}}{\mathfrak{p}}\right)_l = 1$$

sein muß. Wenn aber die Gleichungen (1) für alle Primideale aus k' (mit Ausnahme einer endlichen Anzahl) die Gleichungen (2) zur Folge haben, so muß:

$$K_1' = (k', \sqrt[l]{\omega_1}, \cdots, \sqrt[l]{\omega_{e'}}) = (k', \sqrt[l]{\overline{\omega}_1}, \cdots, \sqrt[l]{\overline{\omega}_{e'}})$$

sein.*) Operiert man jetzt mit K_1' so weiter, wie wir eben mit k' operiert haben, so ergibt sich dadurch die Identität von K' mit $\overline{K}'$. Daß dann auch K und $\overline{K}$ identisch sind, ergibt sich wieder daraus, daß

*) Furtwängler, Reziprozitätsgesetz, Satz 26, p. 28.

diese Körper zu derselben Untergruppe der Relativgruppe von K' in bezug auf k gehören. Hiermit ist folgender Satz bewiesen:

Satz 10: *Ist k ein beliebiger imaginärer quadratischer Körper, so ist der auf arithmetischem Wege zu k konstruierte Klassenkörper identisch mit dem zu k gehörigen Klassenkörper aus der Theorie der komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen. Der letzte ist daher unverzweigt in bezug auf k.*

§ 13.

Existenz von unendlich vielen Primidealen in jeder Klasse eines Zahlkörpers.

Auf Grund des Existenzbeweises für den Klassenkörper eines beliebigen Zahlkörpers k kann man den Nachweis führen, daß in jeder Idealklasse von k unendlich viel Primideale liegen. Wir zeigen es zunächst für die Hauptklasse von K. Ist K der Klassenkörper von k und h die Klassenzahl von k, so zerfallen nur solche Primideale aus k in K in h verschiedene Primfaktoren, die in k in der Hauptklasse liegen. Ist $\mathfrak{P}_i$ ein beliebiges Primideal aus K, so gilt:

$$(1) \qquad \sum_{(\mathfrak{P}_i)} \frac{1}{n(\mathfrak{P}_i)^s} = \log \frac{1}{s-1} + f(s) \qquad (s > 1).$$

Daraus folgt, wenn man mit $\mathfrak{p}_i$ ein beliebiges Primideal der Hauptklasse in k bezeichnet:

$$(2) \qquad \sum_{(\mathfrak{p}_i)} \frac{1}{n(\mathfrak{p}_i)^s} \geqq \frac{1}{h} \log \frac{1}{s-1} + f_1(s) \qquad (s > 1).$$

$f(s)$ und $f_1(s)$ bedeuten Funktionen der reellen Veränderlichen s, die für $s = 1$ endlich bleiben. Aus (2) folgt sofort unsere Behauptung.

Daß auch in jeder Klasse von k unendlich viele Primideale liegen, folgt durch einen ganz analogen Beweis, wie ihn Herr H. Weber in seinen Untersuchungen über Zahlengruppen in algebraischen Körpern (Zweite Abhandlung, § 1) gegeben hat.*) Wir können auf Grund der Weberschen Entwickelungen, da alle wesentlichen Voraussetzungen hier erfüllt sind, ohne weiteres folgendes Theorem aussprechen:

Satz 11: *Durchläuft $\mathfrak{p}_i$ alle Primideale einer bestimmten Idealklasse des Körpers k, dessen Klassenzahl gleich h ist, so gilt:*

$$\sum_{(\mathfrak{p}_i)} \frac{1}{n(\mathfrak{p}_i)^s} = \frac{1}{h} \log \frac{1}{s-1} + f(s), \qquad (s > 1)$$

wo $f(s)$ eine Funktion der reellen Veränderlichen s bedeutet, die endlich bleibt, wenn sich s der 1 nähert. In jeder Idealklasse von k liegen daher unendlich viele Primideale.

*) H. Weber, Über Zahlengruppen in algebraischen Körpern. Math. Ann. 49 (1897), p. 83.

Die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie.

Von

EMIL HILB in Augsburg.

Herr Bôcher gibt in seinem Buche: „Über die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie" (Leipzig 1894) im Anschlusse an eine von Prof. Klein im Winter 1889—90 gehaltene Vorlesung eine zusammenfassende Ableitung der wichtigsten Reihenentwicklungen, welche hier in Betracht kommen. Die verschiedenen in der Potentialtheorie benutzten Orthogonalsysteme erscheinen dabei als Spezialfälle des Systems konfokaler Zykliden. Die einzelnen Reihenglieder bez. die Konstanten in den die einzelnen Reihenglieder definierenden Differentialgleichungen werden durch das von Herrn Klein aufgestellte Oszillationstheorem*) festgelegt. Dadurch ist das formale Gesetz der Reihenentwicklung gegeben; doch findet sich bei Bôcher kein Beweis für die Möglichkeit und Konvergenz der Entwicklungen. Der Konvergenzbeweis wurde später von Herrn Jaccottet in seiner Doktordissertation: „Über die allgemeine Reihenentwicklung nach Laméschen Produkten" (Göttingen 1895) in Angriff genommen, aber nicht zu Ende geführt. In dieser Arbeit sollen nun die von Herrn Prof. Hilbert geschaffenen Methoden der Integralgleichungen**) auf diese Probleme angewendet werden. Es wird sich dabei der *Konvergenzbeweis* nahezu von selbst ohne jede Rechnung aus den viel allgemeineren Sätzen der obigen Theorie ergeben, ebenso läßt sich jetzt auch die *Möglichkeit der Entwicklungen* streng beweisen. Es handelt sich nämlich nur mehr darum, zu zeigen, daß die bisher hier bekannten Eigenfunktionen***) oder die ausgezeichneten Lösungen†), welche sich durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen ergaben, alle überhaupt möglichen erschöpfen. Für eine Anzahl von Fällen ist dieses nun schon längst streng bewiesen, und

---

*) Der Name findet sich zuerst bei Klein in den Göttinger Nachrichten 1890, S. 90.

**) Göttinger Nachrichten 1904, S. 49—91 u. S. 213—259.

***) Hilbert, ib. S. 67.

†) Pockels, $\Delta u + k^2 u = 0$, S. 33.

wenn das von Klein ausgesprochene Kontinuitätsprinzip*), welches aussagt, daß bei stetiger Abänderung irgend welcher in diesem Probleme auftretender Parameter kein Eigenwert verloren geht, richtig ist, so gilt der Satz in allen Fällen. Da aber die Theorie der Integralgleichungen uns in den Stand setzt, die Abhängigkeit der Eigenwerte von den Parametern zu untersuchen, so läßt sich jetzt tatsächlich das Kontinuitätsprinzip wenigstens für die in Betracht kommenden Fälle streng beweisen, nachdem gewisse von H. A. Schwarz**) zuerst aufgestellte Sätze über die Eigenwerte verallgemeinert sind.

In Verfolgung dieses Gedankenganges wird in dieser Arbeit zunächst von der Möglichkeit der Entwicklung nach Kugelfunktionen ausgegangen, und es werden die Reihenentwicklungen nach den gewöhnlichen Laméschen Funktionen und den Eigenfunktionen behandelt, welche zu Gebieten auf der Kugel gehören, die von vier konfokalen sphärischen Kegelschnitten begrenzt sind. Durch diese Beispiele soll nur die allgemeine Lösungsmethode***) vorbereitet werden, welche aber nicht von der Differentialgleichung der Kugelfunktionen ausgeht, sondern von einer anderen, neuen Differentialgleichung, welche wir Normalgleichung nennen wollen. Mit dieser lassen sich in der Tat alle vorkommenden Differentialgleichungen leicht in Verbindung bringen, und sie hat ferner die ausgezeichnete Eigenschaft, daß man ohne weiteres ersieht, daß alle ihre Eigenfunktionen sich aus gewöhnlichen Differentialgleichungen ergeben. In bezug auf ihre weiteren Eigenschaften ist auf die Arbeit zu verweisen. Es ist dann eine Leichtigkeit, die Möglichkeit der von Bôcher gegebenen Reihenentwicklungen für das Zyklidensechsflach und das von 6 konfokalen Flächen 2. Grades begrenzte Sechsflach zu erweisen; alle anderen Fälle lassen sich auf analoge Weise behandeln.

§ 1.

Die Laméschen Polynome.

In seiner 2. Abhandlung über Integralgleichungen gibt Herr Prof. Hilbert†) eine ausführliche Ableitung für die Entwicklung nach Kugelfunktionen. Die hier gegebene Ableitung für die Laméschen Polynome schließt sich auf das engste daran an.

---

*) Pockels, S. 95.

**) H. A. Schwarz, Gesammelte Abhandlungen I, S. 260.

***) Die für die allgemeine Lösungsmethode selbst wesentlichen Sätze sind durch Kursivdruck hervorgehoben.

†) Hilbert l. c. S. 241.

Es sei

$$(1)\qquad \begin{aligned} & x^2+y^2+z^2=1, \\ & \frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}-\frac{z^2}{c^2-\mu^2}=0, \\ & \frac{x^2}{\nu^2}-\frac{y^2}{b^2-\nu^2}-\frac{z^2}{c^2-\nu^2}=0 \end{aligned}$$

und

$$-b<\nu<b<\mu<c.$$

Man hat also eine Kugel und zwei Systeme von Kegeln 2. Ordnung. Die von den Kegeln auf der Kugel ausgeschnittenen Kurven $\mu=C_1$, $\nu=C_2$ führen wir als krummlinige Koordinaten ein und bilden den Ausdruck:

$$(2)\qquad L(u)=\frac{p}{\sqrt{eg-f^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{g\frac{\partial u}{\partial\mu}-f\frac{\partial u}{\partial\nu}}{\sqrt{eg-f^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{e\frac{\partial u}{\partial\nu}-f\frac{\partial u}{\partial\mu}}{\sqrt{eg-f^2}}\right)\right\},$$

wobei

$$ds^2=e\,d\mu^2+2f\,d\mu\,d\nu+g\,d\nu^2,$$

p irgend eine Funktion von ξ, η ist. Also hat man in unserem Falle:

$$(3)\qquad \begin{aligned} ds^2 &= (\mu^2-\nu^2)\left(\frac{d\mu^2}{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}+\frac{d\nu^2}{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}\right) \\ &= (\mu^2-\nu^2)\left(\frac{d\mu^2}{R(\mu)}+\frac{d\nu^2}{R_1(\nu)}\right) \end{aligned}$$

und

$$(4)\qquad L(u)=\frac{p}{\mu^2-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right),$$

wenn

$$(5)\qquad d\xi=\frac{d\mu}{\sqrt{R(\mu)}},\quad d\eta=\frac{d\nu}{\sqrt{R_1(\nu)}}$$

ist. Führt man aber in bekannter Weise Polarkoordinaten für die Kugel ein, so erhält man, wenn man noch $p=\frac{1}{2\pi}$ setzt:

$$(6)\qquad L_1(u)=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right\}.$$

Die Greensche Funktion ist in bekannter Weise definiert. Es seien μ, ν irgend welche orthogonale Koordinaten auf einem singularitätenfreien Flächenstücke; μ^*, ν^* sei ein beliebiger Punkt, in welchem e^* und g^* im Linienelemente nicht verschwinden und nicht unendlich werden, dann ist die Greensche Funktion, für welche $L(u)=0$ ist, von der Form:

$$(7)\qquad g(\mu,\nu;\mu^*,\nu^*)=-\frac{1}{2}\log\left(e^*(\mu-\mu^*)^2+g^*(\nu-\nu^*)^2\right)+\gamma_1(\mu,\nu;\mu^*,\nu^*),$$

wobei γ_1 auf dem ganzen Flächenstücke regulär ist und so bestimmt werden muß, daß gewisse vorgegebene Randbedingungen erfüllt sind. In Punkten, wo e^* und g^* nicht die obigen Bedingungen erfüllen, ist die obige Form etwas zu modifizieren, wie die kommenden Beispiele*) zeigen. Bei der Kugel führen wir als Randbedingung ein, daß γ_1 auf der ganzen Kugel regulär ist. Eine solche Greensche Funktion gibt es aber unter Zugrundelegung von $L_1(u) = 0$ nicht, wohl aber eine solche, für welche $L_1(u) = \frac{1}{4\pi}$ ist, und diese Funktion $G(\vartheta, \varphi; \vartheta^* \varphi^*)$ nennt man die erweiterte Greensche Funktion**), und zwar muß

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} G(\vartheta, \varphi; \vartheta^*, \varphi^*) \frac{1}{2\pi} \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta = 0$$

sein. Man findet dann

$$(8) \quad \begin{aligned} G &= -\left[\pi + \pi \log\left(\frac{1 - \cos\vartheta\cos\vartheta^* - \sin\vartheta\sin\vartheta^*\cos(\varphi - \varphi^*)}{2}\right)\right], \\ &= -\pi\left[\log\left(\frac{1-\cos\varrho}{2}\right) + 1\right] = -\pi\left[\log\sin^2\frac{\varrho}{2} + 1\right], \end{aligned}$$

wobei ϱ die kleinste sphärische Entfernung der zwei Punkte $\vartheta, \varphi; \vartheta^*, \varphi^*$ bedeutet.

Die Eigenfunktionen von $L_1(u) + \lambda u = 0$ sind dann identisch mit den Eigenfunktionen, welche zu der Integralgleichung gehören:

$$(9) \quad \lambda^{(n)} \int \varphi(\vartheta^*, \varphi^*) \, G(\vartheta, \varphi; \vartheta^*, \varphi^*) \, dK = \varphi(\vartheta, \varphi).$$

Dabei ergeben sich die $\lambda^{(n)}$ als Wurzeln einer transzendenten Gleichung. Man bestimmt sie leicht direkt (z. B. vergl. Pockels, $\Delta u + k^2 u = 0$, S. 106) und findet

$$(10) \quad \lambda^{(n)} = \frac{n(n+1)}{2\pi} \quad \text{für} \quad n = 0, 1 \cdots,$$

wobei $\lambda^{(n)}$ ein $2n+1$-facher Eigenwert ist. Daraus folgt aber dann, nach der Hilbertschen Theorie, daß jede zweimal stetig differenzierbare Funktion auf der Kugel nach den obigen Eigenfunktionen, den Kugelflächenfunktionen, entwickelbar ist.

Der Übergang zu den zu der Gleichung

$$(11) \quad L(u) + \lambda u = \frac{2\pi}{\mu^2 - \nu^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) + \lambda u = 0$$

gehörigen Eigenfunktionen, den Laméschen Polynomen, ist jetzt leicht.

---

*) Vergl. z. B. Formel (12) für die den Nabelpunkten auf dem Ellipsoide entsprechenden Punkte, welche im übrigen die Anwendbarkeit der Hilbertschen Theorie nicht stören, wie man leicht durch Grenzübergang zeigt, nachdem man die vier Punkte durch kleine Kurven umgeben hat.

**) Hilbert l. c. S. 238.

Aus

$$x = \cos\vartheta = \frac{\mu\nu}{bc},$$

$$y = \cos\varphi\sin\vartheta = \frac{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}},$$

$$z = \sin\varphi\sin\vartheta = \frac{\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}$$

folgt, daß die erweiterte Greensche Funktion gegeben ist durch:

$$\begin{aligned}(12)\qquad G = -\Bigg[\pi + \pi\log\frac{1}{2}\Bigg(1 - \frac{\mu\mu^*\nu\nu^*}{b^2c^2} - \frac{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{\mu^{*2} - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^{*2}}}{b^2(c^2 - b^2)} \\ - \frac{\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \mu^{*2}}\sqrt{c^2 - \nu^{*2}}}{c^2(c^2 - b^2)}\Bigg)\Bigg].\end{aligned}$$

Die Oktanten unterscheiden sich durch die Vorzeichen der Wurzeln. Die Eigenwerte sind dann dieselben wie oben, und man erhält bekanntlich alle Eigenfunktionen wenn man setzt:

$$(13)\qquad u = E_s^n(\mu)\cdot E_s^n(\nu),$$

wobei $E_s^n(\mu)$ der Gleichung*) genügt:

$$\begin{aligned}(14)\qquad (\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)\frac{d^2E(\mu)}{d\mu^2} + \mu(2\mu^2 - b^2 - c^2)\frac{dE(\mu)}{d\mu} \\ + [(b^2 + c^2)v_s^n - n(n+1)\mu^2]E(\mu) = 0.\end{aligned}$$

Es besteht dann ein analoger Satz wie oben über die Entwickelbarkeit von Funktionen nach diesen Laméschen Produkten.

§ 2.

Die Eigenfunktionen für Gebiete auf der Kugel, welche von vier konfokalen Kegeln 2. Grades ausgeschnitten werden.

Gegeben ist ein Rechteck auf der Kugel, welches von den Linien $\mu = \mu_1$, $\nu = \nu_1$, $\mu = \mu_2$, $\nu = \nu_2$ begrenzt ist, wobei noch die Lage der Seiten in bezug auf die verschiedenen Oktanten festgelegt ist. Wir bilden dann eine Funktion, welche jetzt der Gleichung $L(u) = 0$ genügt, für μ^*, ν^* logarithmisch unendlich wird und auf dem Rande verschwindet.

Um diese Funktion zu erhalten, denken wir unseren Bereich auf die $\xi\eta$-Ebene abgebildet, wobei wir die verschiedenen Oktanten durch passende Vermehrung von ξ und η um Perioden unterscheiden. Dem Bereiche entspricht dann in der $\xi\eta$-Ebene ein von geraden Linien begrenztes Rechteck, dessen Seiten die Längen a und b haben sollen. Unsere Gleichung geht dann über in:

$$(15)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = 0.$$

---

*) v_s^n ist bekanntlich durch eine algebraische Gleichung zu bestimmen (siehe z. B. Heine, Kugelfunktionen, Bd. 1).

Die Greensche Funktion, welche also jetzt die Form hat:

$$(16)\qquad G(\xi, \eta; \xi^*, \eta^*) = -\frac{1}{2}\log\left((\xi - \xi^*)^2 + (\eta - \eta^*)^2\right) + g(\xi, \eta; \xi^* \eta^*),$$

läßt sich für unseren Fall in expliziter, wenn auch etwas komplizierter Form vermittelst elliptischer Funktionen darstellen.*) Gehen wir nun von unserem Rechtecke zu benachbarten über, indem wir a durch $a(1 + \sigma)$ ersetzen, so kann man durch Potenzreihenentwicklung der Formel für $G(\xi, \eta; \xi^*, \eta^*)$ zeigen, daß $G(\xi, \eta; \xi^*, \eta^*)$ eine analytische Funktion von σ ist, daraus folgt aber, daß auch die Koeffizienten**) δ_h von λ in $\delta(\lambda)$ analytische Funktionen von σ sind. Dasselbe gilt dann aber, da $\delta(\lambda)$ gleichmäßig konvergiert, von jeder gerade ins Auge gefaßten endlichen Wurzel λ von $\delta(\lambda) = 0$, und es folgt der Satz, daß, wenn $\delta(\lambda) = 0$ eine m-fache Wurzel $\lambda^{(n)}$ hat, $\delta(\lambda)$ für genügend kleine Werte von σ m benachbarte Wurzeln zu $\lambda^{(n)}$ hat, die, ebenso wie die zu ihnen gehörigen Eigenfunktionen, sich als Potenzreihen in bezug auf σ darstellen lassen. Der Konvergenzbereich dieser Reihen ist natürlich von dem Anfangswert $\lambda^{(n)}$ abhängig, und es kann vorkommen, daß, wenn wir σ geeignet verändern, eine solche Wurzel in das Unendliche wächst, wobei dann die dazugehörige Eigenfunktion verloren geht. Wenn also auch in einem Falle alle Eigenfunktionen sich beispielshalber als Lamésche Produkte bestimmen lassen, so dürfen wir nicht ohne weiteres schließen, daß dieses nun für alle anderen Rechtecke auch der Fall sein muß, denn wir dürfen zunächst die Möglichkeit nicht aus dem Auge lassen, daß gerade in dem betrachteten Spezialfalle alle anderen Eigenfunktionen verloren gegangen sein könnten. Und in der Tat werden wir im folgenden auch auf solche Fälle stoßen, in denen Eigenwerte verloren gehen, bezüglich gewonnen werden. Es kommt also darauf an, zu zeigen, daß bei der vorliegenden Fragestellung in allen Fällen die bekannten Eigenfunktionen alle erschöpfen. Die bekannten Eigenfunktionen lassen sich nun in der Form $E'(\mu) \cdot E''(\nu)$ darstellen und zwar ist

$$(17)\qquad \frac{d^2 E}{dt^2} = -(\lambda z^2 + B)E;$$

wobei $z = \mu$ bezüglich ν, $t = \xi$ bez. ηi ist. Um mit der Literatur in volle Übereinstimmung zu kommen, setzen wir $z^2 = z_1$; ferner wählt man $E'(\mu_1) = 0$, $E''(\nu_1) = 0$ und bestimmt λ und B so, daß

$$(18)\qquad \begin{aligned} E'(\mu_2; \lambda, B) &= 0, \\ E''(\nu_2; \lambda, B) &= 0. \end{aligned}$$

*) Harnack, Theorie des logarithmischen Potentials, S. 78.

**) Hilbert, l. c. S. 58.

Das Oszillationstheorem zeigt dann, daß man zu jedem Wertepaare m, n λ und B auf eine und nur auf eine Weise so bestimmen kann, daß $E'(\mu)$ m mal, $E''(\nu)$ n mal in dem betreffenden Intervalle verschwindet.

Ein einfacher Fall, in welchem diese Eigenfunktionen alle möglichen erschöpfen, ist der Kugeloktant. Wenn wir nämlich diesen Bereich an den ihn begrenzenden Kreisen spiegeln, bleibt die Differentialgleichung unverändert, es folgt also: Die Eigenfunktionen für den Kugeloktanten, welche auf der Begrenzung verschwinden, sind unter den vorher besprochenen Eigenfunktionen enthalten, welche sich auf der ganzen Kugel regulär verhalten, und es folgt in diesem Falle leicht, daß die durch das Oszillationstheorem gelieferten Eigenfunktionen alle möglichen erschöpfen. Um nun auf andere Rechtecke übergehen zu können, benützen wir folgenden wichtigen Satz, den wir im nächsten Paragraphen beweisen wollen: *Wenn wir eine Rechteckseite nach außen verschieben, so nimmt ein jedes gerade ins Auge gefaßte λ ab; jedenfalls nimmt es nie zu.* Nun muß λ immer größer sein als Null. Wenn wir also für ein Rechteck im Inneren des Oktanten Eigenwerte hätten, zu denen Eigenfunktionen gehören, die von den Laméschen Produkten wesentlich verschieden, d. h. linear unabhängig sind, so hätten diese Eigenwerte auch für den Oktanten einen endlichen Wert und wir hätten für den Oktanten Eigenfunktionen, die von den Laméschen Produkten wesentlich verschieden sind, was nach obigem nicht der Fall ist. Damit ist gezeigt, daß die Laméschen Produkte alle Eigenfunktionen erschöpfen, die zu Rechtecken gehören, die kleiner sind als der Oktant, und es gilt ein dem obigen analoges Entwicklungstheorem.

§ 3.

Einige Sätze über Eigenwerte.

Wir haben im letzten Paragraphen den Satz erwähnt, daß die Eigenfunktionen analytische Funktionen des Verschiebungsparameters sind, wenn wir dem Punkte $\xi\eta$ des 1. Rechtecks den Punkt $\xi(1+\sigma)$, η zuordnen (vergl. Fig. 1). Desgleichen folgt aus einem allgemeinen Satze der Integralgleichungen, daß unsere Eigenfunktionen im Inneren beliebig oft differenzierbar und ebenso auch auf dem Rande nach der Normalen stetig differenzierbar sind. Auf den Beweis dieses Satzes komme ich bei

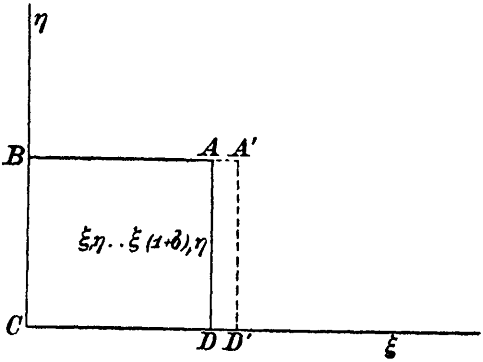


Fig. 1.

anderer Gelegenheit zurück; er läßt sich mit elementaren Hilfsmitteln führen.

Sei nun:

$$(19)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\lambda(\mu-\nu)u=L(u)+\lambda(\mu-\nu)u=0.$$

Dann hat man:

$$(20)\qquad \int (v\,L(u)-u\,L(v))\,d\xi\,d\eta=\int\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds.$$

Dabei ist das linke Integral über das geradlinige Rechteck in der $\xi\eta$-Ebene zu nehmen, das rechte Integral über die Randlinien; $\frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial v}{\partial n}$ bedeuten die Ableitungen nach der in das Innere gerichteten Normalen. u verschwindet auf dem Rande des kleineren Rechtecks, v auf dem des daraus durch Verschiebung entstandenen. Wir umgeben die Nulllinien*) von u und v mit Streifen, so daß außerhalb derselben u und v dasselbe Vorzeichen haben. Wenn σ klein genug gewählt wird, können diese Streifen beliebig schmal gemacht werden. v gehöre nun zum Eigenwerte λ'. Dann hat man

$$-(\lambda-\lambda')\int vu\,(\mu-\nu)d\xi\,d\eta=-\int v\frac{du}{\partial n}\,ds,$$

$$v(\xi,\eta)=u\left(\frac{\xi}{1+\sigma},\eta\right)+\sigma^\alpha u_1(\xi,\eta);$$

$$u\left(\frac{\xi}{1+\sigma},\eta\right)=u(\xi,\eta)+\sigma^\beta u_2(\xi,\eta)=\sigma^\beta u_2(\xi,\eta),$$

wenn ξ, η auf der Rechteckseite AD liegt. Ferner ist noch

$$\lambda=\lambda'+\sigma^{\gamma_1}\lambda_1+\sigma^{\gamma_2}\lambda_2+\cdots.$$

Also hat man:

$$-\sigma^{\gamma_1}\lambda_1\int u^2(\mu-\nu)d\xi\,d\eta+\cdots=-\sigma^\alpha\int u_1\frac{\partial u}{\partial n}\,ds-\sigma^\beta\int u_2\frac{\partial u}{\partial n}\,ds.$$

Nun ist entweder $\lambda'=\lambda$ oder $\lambda_1 \neq 0$; dann aber ist entweder α oder $\beta=\gamma_1$. Sei z. B. $\alpha<\beta$; dann ist entweder $\alpha=\gamma_1$; oder

$$\int u_1\frac{\partial u}{\partial n}\,ds=0,\quad \text{und}\quad \gamma_1=\beta.$$

Nehmen wir z. B. den ersten Fall, dann ist

$$\lambda_1\int u^2(\mu-\nu)d\xi\,d\eta=\int\left[u_1+\sigma^{\beta-\alpha}u_2\right]\frac{\partial u}{\partial n}\,ds+\varepsilon;$$

die linke Seite hat einen endlichen, von Null verschiedenen Wert, die rechte Seite ist ihr gleich, abgesehen von Größen ε, die mit σ beliebig klein werden. Außerhalb der Streifen hat die eckige Klammer dasselbe Zeichen

*) Mit Ausnahme des Randes.

wie $\frac{\partial u}{\partial n}$; da wir die Streifen beliebig verkleinern können, so folgt, daß die rechte Seite >0 wird für sehr kleine σ, also ist auch $\lambda_1 > 0$, $\lambda' \leqq \lambda$. λ nimmt also mit wachsendem Bereiche immer ab.

Es soll nebenbei bemerkt werden, daß dieser Satz durch dieselben *geometrisch-physikalischen Anschauungen* evident wird, wie das Kleinsche Oszillationstheorem*), jedoch nur für die *dabei auftretenden* Eigenfunktionen, während der obige analytische Beweis zeigt, daß der Satz für *alle überhaupt möglichen Eigenfunktionen* gilt, woraus dann erst aus den Untersuchungen des letzten Paragraphen folgt, daß die durch das Oszillationstheorem gelieferten Eigenfunktionen eben alle möglichen sind.

Um uns also den Satz nachträglich noch plausibel zu machen, gehen wir aus von:

$$\frac{d^2E'(\mu)}{d\xi^2} = -(\mu\lambda + B)E'(\mu); \quad \frac{d^2E''(\nu)}{d\eta^2} = (\nu\lambda + B)E''(\nu). \tag{21}$$

Dann erhält man für die Oszillationszahlen m, n zwei Hüllkurven, welche uns Fig. 2 schematisch zeigt. Diese Kurven sind eingehüllt von den Geraden: $y = \mu\lambda + B$ bez. $y = \nu\lambda + B$, die beiden gemeinsame Tangente liefert das zu m, n gehörige Wertepaar λ, B. Wird nun eine Rechteckseite nach außen verschoben, so rückt entweder die untere Hüllkurve nach oben oder die obere Hüllkurve nach unten, gerade wie bei einer Verkleinerung der Oszillationszahlen m bezüglich n**); in beiden Fällen wird die gemeinsame Tangente flacher liegen als vorher, d. h. λ nimmt ab.

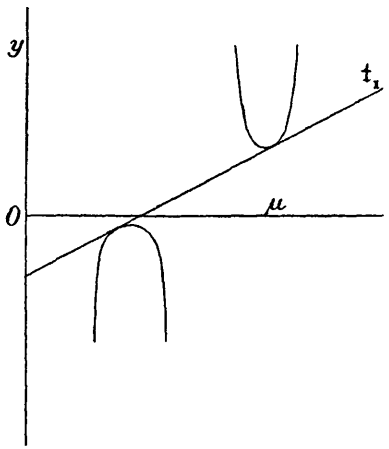


Fig. 2.

Wir behandeln einen anderen Fall. Wir lassen das Rechteck fest und betrachten die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + [-\tau k^2(\xi, \eta) + \lambda(\mu - \nu)]f = 0. \tag{22}$$

Es sei $k^2(\xi, \eta)$ überall positiv, $0 \leqq \tau \leqq 1$. Dann ist die zu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \tau k^2(\xi, \eta)f = 0 \tag{23}$$

---

*) Eine ausführliche Darstellung davon siehe Bôcher l. c. S. 120, das dort Gebrachte wird als bekannt vorausgesetzt.

**) Das letztere siehe Bôcher S. 128.

gehörige Greensche Funktion, die bekanntlich in diesem Falle immer existiert, eine analytische Funktion von τ, was man wie oben vermittelst der Theorie der Integralgleichungen leicht zeigt, und es folgt dasselbe für die Eigenwerte λ und die dazu gehörigen Eigenfunktionen. Wir setzen $\tau = \tau_0 + \alpha$ und es sei $\alpha > 0$; ferner sei

$$(24) \qquad \lambda = \lambda_0 + \alpha^\varrho \lambda_2 + \cdots, \quad u_1 = u_0 + \alpha^\sigma u_2 + \cdots,$$

wobei u_0 die zu einem beliebigen Wertepaar λ_0 und τ_0, u_1 die zu λ und τ gehörige Eigenfunktion von (22) ist. Dann folgt:

$$(25) \qquad \alpha \int k^2(\xi\eta) u_0^2 d\xi\, d\eta - \alpha^\varrho \lambda_2 \int (\mu - \nu) u_0^2 d\xi\, d\eta = 0,$$

also ist $\varrho = 1$; $\lambda_2 > 0$. Wir haben also den für die Verwertung der im nächsten Paragraphen eingeführten Normalgleichung fundamentalen Satz:

I. *Wenn in der Differentialgleichung*

$$(22) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + [-\tau k^2(\xi, \eta) + \lambda(\mu - \nu)] f = 0$$

das 1. *Glied in der eckigen Klammer verkleinert wird, wächst* λ.

Wir beweisen noch einen andern Satz. Sei

$$(26) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \lambda k_\alpha(\xi\eta) f = 0,$$

wobei $k_\alpha(\xi, \eta)$ eine Funktion ist, die immer positiv sein soll und regulär in bezug auf α, sowie auch der Kürze wegen in bezug auf ξ und η. Sei $\gamma(\xi, \eta; \xi^*\eta^*)$ die Greensche Funktion für $\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = 0$, so ist die zu unserer Gleichung gehörige Integralgleichung

$$F(\xi, \eta) = \varphi(\xi\eta) + \lambda \int \gamma(\xi, \eta; \xi^*\eta^*)\, k_\alpha(\xi^*\eta^*) \varphi(\xi^*, \eta^*) d\xi^* d\eta^*,$$

also ist der Kern eine analytische Funktion von α und dasselbe gilt von den Eigenwerten und den dazu gehörigen Eigenfunktionen. Es ist also

$$k_\alpha(\xi, \eta) = k_0(\xi\eta) + \alpha k_1(\xi\eta) + \cdots,$$
$$\lambda = \lambda_0 + \alpha^\varrho \lambda_1 + \cdots; \quad u_1 = u_0 + \alpha^\sigma u_2 + \cdots,$$

wenn u_0 die zu λ_0 und k_0, u_1 die zu λ und k_α gehörige Eigenfunktion von (26) ist, und wir finden:

$$\alpha^\varrho \lambda_1 \int u_0^2 k_0(\xi\eta) d\xi\, d\eta + \alpha \lambda \int u_0^2 k_1(\xi\eta) d\xi\, d\eta = 0.$$

Ist nun überall $k_1(\xi, \eta) > 0$, so folgt, da $\lambda > 0$ ist, daß $\lambda_1 < 0$ ist. Wir haben also den Satz:

II. *Wird in der Differentialgleichung:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \lambda k_\alpha(\xi\eta) f = 0 \tag{26}$$

$k_\alpha(\xi, \eta)$ *vergrößert, so nimmt* λ *ab.*

§ 4.

Aufstellung einer Normalform, auf welche die vorkommenden Differentialgleichungen zurückgeführt werden können.

Wir gehen jetzt zu der Untersuchung der Differentialgleichung über:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \lambda \mu f = 0. \tag{27}$$

Wir versuchen, diese Gleichung durch Funktionen zu integrieren, die die Form $u(\xi)v(\eta)$ haben. Wir finden dann:

$$\frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} + (\lambda\mu + B)u(\xi) = 0. \tag{28}$$

$$\frac{\partial^2 v(\eta)}{\partial \eta^2} - Bv(\eta) = 0. \tag{29}$$

Als Randbedingungen nehmen wir wieder die des Verschwindens auf dem Rande. Die Eigenfunktionen von (29) lassen sich dann sofort als einfache trigonometrische Funktionen angeben, die Eigenwerte B sind dadurch völlig bestimmt und zwar so, daß man in (28) zu jedem Eigenwerte B von (29) λ auf unendlich viele Weisen so bestimmen kann, daß man Eigenlösungen von (28) erhält.

Sei nun $f(\mu, \nu)$ eine Funktion, die der Einfachheit halber als beliebig oft nach μ und ν differenzierbar angenommen wird. Dann ist

$$f(\mu, \nu) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n(\eta); \tag{30}$$

wobei

$$a_n = \int f(\mu, \nu) v_n(\eta)\, d\eta; \tag{31}$$

a_n ist also noch abhängig von μ und nach den Voraussetzungen über $f(\mu, \nu)$ in eine Reihe*) nach Eigenfunktionen von (28) entwickelbar, wenn man in (28) B durch B_n ersetzt. Wir finden dann:

$$f(\mu, \nu) = \sum_n \sum_m \int f(\mu, \nu) v_n(\eta) \mu u_{m,n}(\xi)\, d\xi\, d\eta \cdot v_n(\eta) u_{m,n}(\xi), \tag{32}$$

eine Reihe, die absolut und gleichmäßig konvergiert und welche wir

*) Hilbert l. c. S. 226.

also beliebig umordnen können. Da $v_n(\eta)u_{m,n}(\xi)$ auch Eigenfunktionen von (27) sind, da ferner nach dem in Fourierscher Weise gebildeten Koeffizientengesetze gleichmäßig konvergierende Nullentwicklungen unmöglich sind, so folgt noch bei geeigneter Spezialisierung von $f(\mu, \nu)$, daß (27) überhaupt keine wesentlich anderen Eigenfunktionen haben kann. Es folgt also der Satz:

III. *Alle Eigenfunktionen der Normalgleichung*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \lambda \mu f = 0 \tag{27}$$

lassen sich durch das Oszillationstheorem bestimmen.

Wir können aber jetzt leicht diesen Satz auf die Eigenfunktionen der Gleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \lambda (\mu - \nu) f = 0 \tag{33}$$

übertragen. In der Tat, wir setzen $\mu - \nu = \mu + a - \nu - a$; und führen den Parameter σ ein, so daß wir erhalten:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \lambda(\mu + a - \sigma(\nu + a))f = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \lambda(\mu' - \sigma \nu')f. \tag{34}$$

Wir richten a so ein, daß $\nu + a > 0$; dann nehmen nach dem II. Satze des § 3 die λ, welche immer reell und größer als Null sind, mit wachsendem σ zu; ein für $\sigma = 0$ unendlicher Eigenwert ist also auch für $\sigma = 1$ unendlich; (33) kann also keine anderen Eigenfunktionen haben, als die durch das Oszillationstheorem gelieferten.

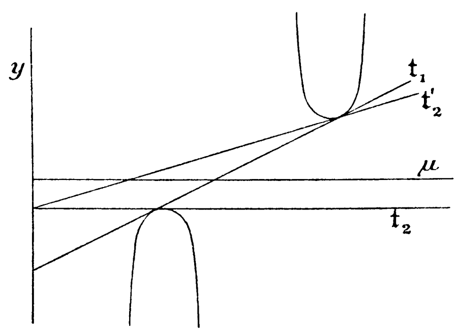


Fig. 3.

Von (33) gehen wir schließlich über auf:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + [-\varrho(\mu^3 - \nu^3) + \lambda(\mu - \nu)] f = 0. \tag{35}$$

Nach Satz I des § 3 nimmt λ mit wachsendem ϱ zu und wir haben den grundlegenden Satz:

IV. *Alle Eigenfunktionen der Differentialgleichung:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + [-\varrho(\mu^3 - \nu^3) + \lambda(\mu - \nu)] f = 0 \tag{35}$$

lassen sich durch das Kleinsche Oszillationstheorem bestimmen.

Wir wollen jetzt noch die verschiedenen oben erwähnten *Oszillationstheoreme durch Zeichnungen erörtern.* In Fig. 3 ist t_1 die sich aus dem Kleinschen Oszillationstheorem für $\sigma = 1$ zu (34) ergebende gemeinsame Tangente der beiden Kurven. Für $\sigma < 1$ erhält man jedoch 2 verschiedene Tangenten an beide Kurven, die sich auf der y-Achse schneiden, für $\sigma = 0$ t_2 und t'_2. Fig 4 entspricht dem vorher vermiedenen Falle $\mu > 0$, $\nu < 0$. Bewegt man die y-Achse nach rechts, so zeigt Fig. 5, daß man statt der einen Tangente t'_2 zwei Tangenten t'_2 und t''_2 erhält, also statt des Tangentenpaares t_2, t'_2 zwei Paare t_2, t'_2, und t_2, t''_2. Das bedeutet einen Gewinn von Eigenwerten. Fig. 5 führt bei der analytischen Unter-

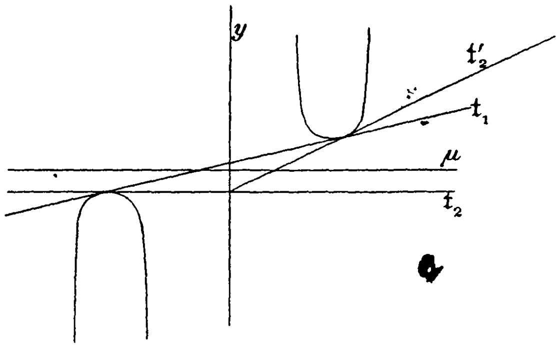


Fig. 4.

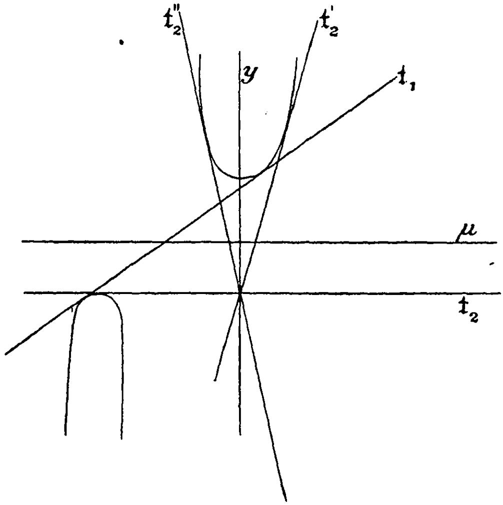


Fig. 5.

suchung auf die von Herrn Professor Hilbert in seinen Vorlesungen behandelten Integralgleichungen 3. Art. Alle diese Fälle bestätigen unsere Sätze über die Eigenwerte.

§ 5.

Die Integration der Potentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ für ein von sechs konfokalen Flächen 2. Ordnung begrenztes Gebiet. Ausdehnung auf Zyklidensechsflache.

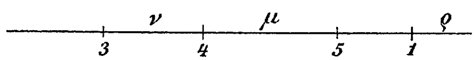
Wir haben jetzt nur noch das in der Literatur gegebene Formelmaterial für unser Problem, welches von Herrn Prof. Klein*) in dem in der Einleitung auseinandergesetzten Sinne ausführlich behandelt wurde, zusammenzustellen und umzuformen, um die Sätze des § 4 anwenden zu können.

Es sei in einem rechtwinkligen Koordinatensysteme:

$$
(36)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{x^2}{\frac{1}{\varrho-e_1}-\frac{1}{e_3-e_1}}+\frac{y^2}{\frac{1}{\varrho-e_1}-\frac{1}{e_4-e_1}}+\frac{z^2}{\frac{1}{\varrho-e_1}-\frac{1}{e_5-e_1}}=1,\\
&\frac{-x^2}{\frac{1}{e_3-e_1}-\frac{1}{\mu-e_1}}-\frac{y^2}{\frac{1}{e_4-e_1}-\frac{1}{\mu-e_1}}+\frac{z^2}{\frac{1}{\mu-e_1}-\frac{1}{e_5-e_1}}=1,\\
&\frac{-x^2}{\frac{1}{e_3-e_1}-\frac{1}{\nu-e_1}}+\frac{y^2}{\frac{1}{\nu-e_1}-\frac{1}{e_4-e_1}}+\frac{z^2}{\frac{1}{\nu-e_1}-\frac{1}{e_5-e_1}}=1,
\end{aligned}
$$

wobei wir nebenstehendes Schema zugrunde legen, in welchem die Zahlen die Indizes der e bedeuten.

I



Statt der Potentialfunktion führt man die Potentialform ein:

$$
(37)\qquad V(\mu,\nu,\varrho)=\sqrt[4]{(e_1-\mu)(e_1-\nu)(\varrho-e_1)}\;\psi(\mu,\nu,\varrho).
$$

Setzt man nun

$$
(38)\qquad
\begin{aligned}
d\xi&=\frac{d\mu}{2\sqrt{(e_1-\mu)^2(e_5-\mu)(\mu-e_4)(\mu-e_3)}};\\
d\eta&=\frac{d\nu}{2\sqrt{(e_1-\nu)^2(e_5-\nu)(e_4-\nu)(\nu-e_3)}};\\
d\zeta&=\frac{d\varrho}{2\sqrt{(\varrho-e_1)^2(\varrho-e_5)(\varrho-e_4)(\varrho-e_3)}};\\
dt&=\frac{d\tau}{2\sqrt{(\tau-e_1)^2(\tau-e_3)(\tau-e_4)(\tau-e_5)}},
\end{aligned}
$$

---

*) Klein, Annalen Bd. 18. Unsere Bezeichnung ist analog der von Bôcher für das Zyklidensechsflach benützten, das in der allgemeinen Theorie auftretende e_2 fällt hier mit e_1 zusammen, welches doppelt zählt.

so geht die Potentialgleichung über in

$$
(39) \quad \begin{aligned}
&(\varrho-\nu)\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+(\mu-\varrho)\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}+(\nu-\mu)\frac{\partial^2\psi}{\partial\zeta^2}\\
&+(\mu-\nu)(\nu-\varrho)(\varrho-\mu)\left[\frac{5}{4}(\mu+\nu+\varrho)-\frac{3}{4}\,\Sigma' e_i\right]\psi=0,
\end{aligned}
$$

wobei $\Sigma'(e_i) = 2e_1 + e_3 + e_4 + e_5$ ist.

Die Gleichung (39) bleibt bekanntlich unverändert, wenn man die zugrunde gelegte Fläche durch eine beliebige Kreisverwandtschaft transformiert.

Wir haben dann als Aufgabe, eine Potentialform zu bestimmen, welche auf fünf Flächen verschwindet, auf der sechsten vorgegebene Werte*) annimmt.

Wir zerlegen versuchsweise $\psi(\mu, \nu, \varrho)$ in Faktoren, $E(\mu)$, $E'(\nu)$, $E''(\varrho)$, wobei dann

$$
(40) \qquad \frac{d^2E}{dt^2} = \left[-\frac{5}{4}\tau^3 + \frac{3}{4}\Sigma'(e_i)\tau^2 + A\tau + B\right]E,
$$

wenn $\tau = \mu, \nu, \varrho$ ist.

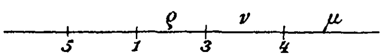
Sei die sechste Fläche $\varrho = \varrho_0$, so bilden wir die Gleichung:

$$
(41) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2} + \left[-\frac{5}{4}(\mu^3-\nu^3) + \frac{3}{4}\Sigma' e_i(\mu^2-\nu^2) + A(\mu-\nu)\right]f = 0,
$$

welche durch $E(\mu)\cdot E'(\nu)$ befriedigt wird. Setzen wir, was immer erlaubt ist, $\Sigma e_i' = 0$, so hat unsere Gleichung die Form (35) und die $E(\mu)\cdot E'(\nu)$ erschöpfen alle Eigenfunktionen von (41). Man kann also jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $f(\mu, \nu)$, welche die Randbedingungen erfüllt, in eine Reihe nach Laméschen Produkten entwickeln.

Um dieses Resultat auf die anderen Fälle ausdehnen zu können, ist wesentlich, daß auch hier die ξ entsprechende Größe die Form it, die η entsprechende die Form t hat. Anderenfalls könnte man sich wohl dadurch helfen, daß man B das eine Mal durch $-B$ ersetzt. Allein wir können die obige Forderung immer erreichen auf Grund folgenden Satzes.**) Unsere Flächenschar geht, abgesehen von einer Kreisverwandtschaft, in sich über, wenn man statt τ $\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}$ statt e_i $\frac{\alpha e_i+\beta}{\gamma e_i+\delta}$ setzt. Unter Zugrundelegung dieses Satzes wählen wir für das zweischalige Hyperboloid das Schema:

II

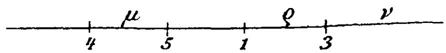


*) Auf den Fall, daß die vorgegebenen Werte auf dem Rande verschwinden, läßt sich der allgemeine Fall durch wiederholte Anwendung des Verfahrens bringen.

**) Klein bei Bôcher, S. 58.

wobei die μ-Schar zweischalige Hyperboloide, die ν-Schar einschalige Hyperboloide, die ϱ-Schar Ellipsoide darstellt. Um die einschaligen Hyperboloide auszuzeichnen, wählen wir das Schema:

III



Bei dem Zyklidensechsflach geht die Untersuchung analog, man hat nur statt des doppelt zu zählenden e_1 je einfach zählend e_1 und e_2 einzuführen, die auch konjugiert imaginär sein können. Für alle diese Fälle gilt also der Satz: *Sei $f(\mu, \nu)$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, welche auf dem Rande des Rechtecks verschwindet. Das Rechteck liege auf der Fläche $\varrho = r_2$. Dann konvergiert die Reihe:*

$$f(\mu, \nu) = \sum_1^\infty {}^m \sum_1^\infty {}^n A_{m,n} E'''_{m,n}(r_2)\, E'_{m,n}(\mu)\, E''_{m,n}(\nu),$$

absolut und gleichmäßig, wobei

$$B_{m,n} = \frac{\iint (\mu - \nu) f(\mu, \nu) E'_{m,n}(\mu) E''_{m,n}(\nu)\, d\xi\, d\eta}{\iint (\mu - \nu) \left[E'_{m,n}(\mu) E''_{m,n}(\nu)\right]^2 d\xi\, d\eta} = A_{m,n} E'''_{m,n}(r_2). \tag{42}$$

Wir bilden daraus die Reihe:

$$\psi = \sum_1^\infty {}^m \sum_1^\infty {}^n \frac{\iint (\mu - \nu) f(\mu, \nu) E'_{m,n}(\mu) E''_{m,n}(\nu)\, d\xi\, d\eta}{E'''_{m,n}(r_2) \iint (\mu - \nu) \left[E'_{m,n}(\mu) E''_{m.n}(\nu)\right]^2 d\xi\, d\eta} \cdot E'_{m,n}(\mu)\, E''_{m,n}(\nu)\, E'''_{m,n}(\varrho).$$

Wir gehen nun vorübergehend zu der Potentialfunktion V zurück, indem wir die linke und rechte Seite mit einem Faktor multiplizieren, der im allgemeinen die Form*) hat:

$$\left(\frac{\sum_1^5 {}^i \dfrac{x_i}{R_i}}{\sqrt{\sum_1^5 {}^i e_i x_i^2}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

wobei wir uns das System so eingerichtet denken, daß der Faktor innerhalb des Gebietes einen endlichen Wert hat, der von Null verschieden ist. Es sind dann alle Bedingungen des Harnackschen Satzes**) erfüllt, und es folgt, daß die durch die Reihe dargestellte Funktion im Inneren der Potentialgeichung $\Delta V = 0$ genügt und gleichmäßig in die Randwerte übergeht. Analog verhält sich die Sache in den anderen fünf Einzelproblemen.

Augsburg, Juli 1905.

*) Vergl. wegen der Bezeichnung Bôcher, S. 146.

**) Berichte der Sächs. Ges. 1886.

Sulla risoluzione apiristica delle congruenze binomie secondo un modulo primo.

Di

MICHELE CIPOLLA a Palermo.

1. Il problema che ci proponiamo di risolvere nella presente nota, è il seguente: *Data una congruenza binomia*

(1) $$x^n \equiv a \pmod{p},$$

essendo p un numero primo dispari ed a un numero intero arbitrario non divisibile per p, determinare un polinomio in a, che fornisca una soluzione della congruenza (1) *per ogni residuo n-ico del modulo p.*

La questione risoluta da recente per il caso in cui n sia una potenza di 2*) non è stata finora trattata in generale.

Si può supporre, senza ledere la generalità, che il grado n della congruenza (1) sia un divisore di $p-1$, nel quale caso perchè la (1) sia possibile occorre e basta che sia

(2) $$a^{\frac{p-1}{n}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Diremo che un polinomio della forma

(3) $$A_0 + A_1 a + A_2 a^2 + \cdots + A_{\frac{p-1}{n}-1} a^{\frac{p-1}{n}-1}$$

è una *soluzione apiristica* della (1), quando, per ogni numero a soddisfacente alla condizione (2), esso è una soluzione della congruenza (1).

*) Tonelli, Rend. della R. Acc. dei Lincei, a. 1892, 1° sem., p. 116; a. 1893, 1° sem., p. 259. Si veggano anche le nostre note nel Rend. della R. Acc. di Napoli, a. 1903, fasc. 5°; a. 1904, fasc. 3° e 4°; a. 1905, fasc. 1° e fasc. 5°. — Per il caso di $n = 2$ una formola non diversa da quella da noi comunicata alla R. Accademia di Napoli (Rendiconti, fasc. 1°, gennaio 1905; v. formola (8) della presente nota) hanno dato in questi »Annalen« (v. 62, p. 409—412) i Sigg. Tamarkine e Friedmann. Anche per questo caso noi qui daremo formole molto più vantaggiose. — Per la letteratura sulla teoria delle congruenze si vegga la nostra monografia: *Theoria de congruentias intra numeros integro,* Revue de Math., publiée par G. Peano, Torino 1905.

La determinazione dei coefficienti A_i di una soluzione apiristica è fondata sul seguente concetto.

2. In un sistema completo di resti secondo il modolo p, possono scegliersi $\frac{p-1}{n}$ numeri, e non più, le cui potenze n^{ime} siano tutte incongrue fra loro (mod. p): un tal sistema lo diremo *un sistema completo di n^{imo} grado (mod. p).*

Per determinare un sistema completo di n^{imo} grado distribuiamo in quadro i numeri di un sistema completo di resti (mod. p), (i quali formano un gruppo secondo il modolo p) rispetto ai numeri

$$(A)\qquad 1,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\cdots,\ \gamma_{n-1},$$

formanti un sistema completo (gruppo) di soluzioni della congruenza

$$(4)\qquad x^n \equiv 1 \pmod{p},$$

nella maniera seguente:

$$(B)\qquad \left\{\begin{array}{llll} 1, & \gamma_1, & \gamma_2,\cdots, & \gamma_{n-1}, \\ a_1, & a_1\gamma_1, & a_1\gamma_2,\cdots, & a_1\gamma_{n-1}, \\ a_2, & a_2\gamma_1, & a_2\gamma_2,\cdots, & a_2\gamma_{n-1}, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\frac{p-1}{n}-1}, & a_{\frac{p-1}{n}-1}\gamma_1, & a_{\frac{p-1}{n}-1}\gamma_2,\cdots, & a_{\frac{p-1}{n}-1}\gamma_{n-1}. \end{array}\right.$$

È chiaro che per ottenere un sistema completo di n^{imo} grado basterà scegliere un numero e uno solo di ciascuna riga del quadro B. Ne risulta anche che *in un sistema completo di resti (mod. p), esistono $n^{\frac{p-1}{n}}$ sistemi completi di n^{imo} grado.*

Per $n=2$, risulta subito che *i numeri*

$$(C)\qquad 1,\ 2,\ 3,\cdots,\ \frac{p-1}{2}$$

formano un sistema completo di 2° grado, qualunque sia p.

3. Qual parte rappresentino i numeri di un sistema completo di n^{imo} grado nella risoluzione delle congruenze binomie di grado n, apparisce subito dal seguente teorema fondamentale:

Se i numeri

$$(D)\qquad r_1,\ r_2,\cdots,\ r_{\frac{p-1}{n}}$$

formano un sistema completo di n^{imo} grado (mod. p), posto

$$(5)\qquad A_k \equiv -n\left(r_1^{nk-1} + r_2^{nk-1} + \cdots + r_{\frac{p-1}{n}}^{nk-1}\right) \pmod{p},$$

il polinomio

$$A_0 + A_1 a + A_2 a^2 + \cdots + A_{\frac{p-1}{n}-1}\, a^{\frac{p-1}{n}-1} \tag{6}$$

è una soluzione apiristica della congruenza binomia (1). *Inoltre, per ogni a residuo n-ico di p, esso è congruo all' associato*) di quel numero del sistema* (D) *che soddisfa alla congruenza*

$$x^n \equiv \frac{1}{a} \pmod{p}.$$

Sia r_0 quel numero del sistema (D) che verifica la (1) e poniamo

$$x_0 \equiv \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{n}-1} A_k a^k \pmod{p}.$$

Per l'ipotesi (5) si ha

$$x_0 \equiv -n \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{n}-1} r_0^{nk} \sum_{h=1}^{\frac{p-1}{n}} r_h^{nk-1} \equiv -n \sum_{h=1}^{\frac{p-1}{n}} \frac{1}{r_h} \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{n}-1} (r_0 r_h)^{nk}$$

$$\equiv -n \sum_{h=1}^{\frac{p-1}{n}} \frac{1}{r_h}\, \frac{(r_0 r_h)^{p-1} - 1}{(r_0 r_h)^n - 1}. \tag{7}$$

Quando h percorre il sistema degl' indici $1, 2, 3, \cdots, \frac{p-1}{n}$, il prodotto $r_0 r_h$ percorre un sistema completo di n^{imo} grado, e incontrerà quindi uno e un sol numero h_0 tale che sia

$$(r_0 r_{h_0})^n \equiv 1 \pmod{p}.$$

Per tal valore h_0 si ha

$$r_{h_0}^n \equiv \frac{1}{a}, \quad \frac{(r_0 r_{h_0})^{p-1} - 1}{(r_0 r_{h_0})^n - 1} \equiv \frac{p-1}{n} \pmod{p},$$

mentre i termini della somma (7), corrispondenti agli altri valori di h, sono divisibili per p, onde si ottiene

$$x_0 \equiv \frac{1}{r_{h_0}} \pmod{p}.$$

Innalzando ambo i membri di questa congruenza a potenza n^{ima}, si ottiene

$$x_0^n \equiv a \pmod{p}.$$

Il teorema è dunque dimostrato.

*) Due numeri α, α_1 si dicono *associati* (*mod. p*), quando sia $\alpha\alpha_1 \equiv 1 \pmod{p}$. L'associato di un numero $\alpha \not\equiv 0 \pmod{p}$ si indica anche con $\frac{1}{\alpha}$ (Gauss).

4. Per $n = 2$, indicando con s_r la somma delle potenze r^{ime} dei numeri del sistema (C), si ottiene la seguente soluzione apiristica della congruenza binomia quadratica:

$$(8) \qquad x_0 \equiv -2\left(s_{-1} + s_1 a + s_3 a^2 + s_5 a^3 + \cdots + s_{p-4} a^{\frac{p-3}{2}}\right) \pmod{p}.$$

Se poi s'introducono i numeri B_r di Bernoulli, definiti dall' eguaglianza simbolica

$$(B+1)^r - B^r = r,$$

osservando che, per note proprietà di questi numeri, si ha

$$1^r + 2^r + \cdots + \left(\frac{p-1}{2}\right)^r \equiv -2\left(1 - \frac{1}{2^{r+1}}\right)\frac{B_{r+1}}{r+1} \pmod{p},$$

la (8) si esprimerà in modo elegante, ed introducendo i numeri di Genocchi $G_r = (2^r - 1)B_r$, i quali sono interi, si potrà dire in forma concisa *che lo sviluppo simbolico secondo le potenze di* $\sqrt{a}$ *dell' espressione*

$$4 \log\left(1 - \frac{1}{2} G\sqrt{a}\right) + \sqrt{a},$$

arrestato alla potenza di esponente $p-1$, *è una soluzione apiristica della congruenza binomia quadratica.*

5. Col teorema del n. 3 si può dire risoluta la questione di trovare una soluzione apiristica di una congruenza binomia, anzi, potendo ricondursi la risoluzione di una congruenza binomia qualunque a quella di congruenze binomie di grado primo, può anche dirsi che per risolvere col nostro metodo una congruenza binomia qualunque *non occorrono tentativi.* Difatti, quando n è primo, le soluzioni della congruenza (4), che servono alla costruzione di un sistema completo di n^{imo} grado, sono tutte, tranne quelle congrue a 1, le soluzioni della congruenza

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

che è riducibile a congruenze binomie di grado inferiore a n.

In pratica però il metodo riesce assai lungo e faticoso. Converrà invece applicare le speciali formole di risoluzione dei nn. seguenti assai più semplici nella forma, e sottomettersi alla determinazione per tentativi di alcuni elementi che in dette formole si trovano.

6. È facile dimostrare che, *decomposto* $p-1$ *in due fattori primi tra loro* m *e* $\frac{p-1}{m}$, *il primo dei quali sia multiplo di* n, *se* γ *e* δ *sono due numeri appartenenti rispettivamente agli esponenti* m *e* $\frac{p-1}{m}$ *secondo il modolo* p, *i numeri*

$$\gamma^r \delta^s, \quad \begin{cases} r = 0, 1, 2, \cdots, \frac{m}{n} - 1, \\ s = 0, 1, 2, \cdots, \frac{p-1}{n} - 1 \end{cases}$$

formano un sistema completo di n^{imo} grado.

Applicando allora il teorema del n. 3, si può porre

$$A_k \equiv - n \sum_{r=0}^{\frac{m}{n}-1} \sum_{s=0}^{\frac{p-1}{m}-1} (\gamma^r \delta^s)^{nk-1} \equiv - n \frac{\gamma^{(nk-1)\frac{m}{n}} - 1}{\gamma^{nk} - 1} \cdot \frac{\delta^{\frac{p-1}{m}(nk-1)} - 1}{\delta^{nk} - 1} \pmod{p},$$

donde segue, se è $nk \equiv 1 \left(\text{mod.}\ \frac{p-1}{m}\right)$:

$$A_k \equiv - n \frac{p-1}{m} \frac{\gamma^{(nk-1)\frac{m}{n}} - 1}{\gamma^{nk-1} - 1} \pmod{p},$$

e se non è $nk \equiv 1 \left(\text{mod.}\ \frac{p-1}{m}\right)$:

$$A_k \equiv 0 \pmod{p}.$$

Ne risulta che *se μ è una soluzione della congruenza*

$$nk \equiv 1 \left(\text{mod.}\ \frac{p-1}{m}\right),$$

l'espressione

$$(9) \qquad - \frac{n}{m} a^\mu \left(\gamma^{\frac{m}{n}} - 1\right) \sum_{s=0}^{\frac{m}{n}-1} \frac{\alpha^{s\frac{p-1}{m}}}{\gamma^{\left(\mu + s\frac{p-1}{m}\right)n-1} - 1}$$

è una soluzione apiristica della congruenza binomia di n^{imo} grado.

Per applicare la (9) non occorre che la conoscenza di γ. Giova poi osservare che essendo

$$1, \gamma^{\frac{m}{n}}, \gamma^{2\frac{m}{n}}, \cdots, \gamma^{(n-1)\frac{m}{n}}$$

un sistema completo di soluzioni apiristiche della congruenza $x^n \equiv 1 \pmod{p}$, da una soluzione della congruenza (1) potrà dedursi un sistema completo di soluzioni di essa.

Se n è primo con $\frac{p-1}{n}$, si può assumere $m = n$, e dalla (9) si deduce il risultato noto che *se n è primo con $\frac{p-1}{n}$, è a^μ una soluzione apiristica della congruenza $x^n \equiv a \pmod{p}$.*

Se si assume $m = p - 1$, e quindi $\mu = 0$, si dedurrà dalla (9) che *se g è una radice primitiva di p, una soluzione apiristica della congruenza binomia di n^{imo} grado è*

$$n\left(g^{\frac{p-1}{n}} - 1\right) \sum_{s=0}^{\frac{p-1}{n}-1} \frac{a^s}{g^{ns-1} - 1}.$$

7. L'espressione (9) può essere tuttavia semplificata nella forma quando si osservi che esiste sempre un numero γ_1 appartenente all' esponente m (mod. p), che verifichi la congruenza

$$x^{\frac{p-1}{m}} \equiv \gamma \pmod{p}.$$

Allora, mutando γ in γ_1 nella (9), e notando che, posto

$$\mu n - 1 = \nu \frac{p-1}{m},$$

si ha

$$\gamma_1^{\left(\mu + s\frac{p-1}{m}\right) n - 1} \equiv \gamma^{\nu + sn}, \quad \gamma^{\frac{m}{n}} \equiv \gamma^{-\nu\frac{m}{n}} \pmod{p},$$

risulta dalla (9) quest' altra soluzione apiristica della congruenza binomia di n^{imo} grado

$$\frac{n}{m} a^{\mu}\left(\gamma^{\nu\frac{m}{n}} - 1\right) \sum_{s=0}^{\frac{m}{n}-1} \frac{a^{s\frac{p-1}{m}}}{\gamma^{\nu+sn} - 1}. \tag{10}$$

8. La risoluzione di una congruenza binomia di grado n, (mod. p), si può sempre ridurre alla risoluzione di congruenze binomie di grado primo. Ora se n è un numero primo ed n^r la massima potenza di n, che divide $p - 1$, essendo ω un non residuo n-ico qualunque di p, si può assumere $\gamma \equiv \omega^{\frac{p-1}{n^r}} \pmod{p}$.

La determinazione di un numero ω non presenta difficoltà in pratica.

In particolare, per $n = 2$, si ottiene che *se ω è un non residuo quadratico di p, una soluzione apiristica della congruenza binomia quadratica è*

$$\frac{1}{2^{r-2}} a^{\frac{p+2^r-1}{2^{r+1}}} \sum_{s=0}^{2^r-1} \frac{a^{s\frac{p-1}{2^r}}}{\omega^{(2s+1)\frac{p-1}{2^r}} - 1}. \tag{11}$$

Per esempio, se p è della forma $8m + 5$, si può assumere $\omega = 2$, e però *una soluzione apiristica della congruenza binomia quadratica, secondo un modulo p della forma $8m + 5$, è*

$$\frac{1}{2} a^{\frac{p+3}{8}} \left[2^{\frac{p-1}{4}} + 1 - \left(2^{\frac{p-1}{4}} - 1\right) a^{\frac{p-1}{4}}\right]. \tag{12}$$

9. In pratica, per la determinazione delle soluzioni minime positive (radici) della congruenza binomia, converrà assumere per m il minimo valore possibile, cioè il prodotto delle potenze dei fattori primi di n, con quell' esponente col quale entrano in $p-1$. Se $u, v, w, \cdots$ sono i diversi fattori primi di n, i quali entrano in $p-1$ alle potenze di grado $r, s, t, \cdots$ rispettivamente, si determineranno i numeri $\omega_u, \omega_v, \omega_w, \cdots$ rispettivamente non residui u-ico, v-ico, w-ico, $\cdots$ di p, e si assumerà

$$\gamma \equiv \omega_u^{\frac{p-1}{u^r}} \cdot \omega_v^{\frac{p-1}{v^s}} \cdot \omega_w^{\frac{p-1}{w^t}}, \cdots \pmod{p}.$$

Posto poi

$$a^{\frac{p-1}{m}} \equiv A, \quad \gamma^\nu - 1 \equiv M_0, \quad \gamma^n \equiv N, \quad M_s \equiv \gamma^{\nu+sn} - 1 \pmod{p},$$

i numeri M_s si otterranno con la relazione ricorrente

$$M_s \equiv N(M_{s-1} + 1) - 1 \pmod{p}.$$

Indicando poi con M il minimo comune multiplo dei numeri

$$M_0, \; M_1, \; M_2, \cdots, M_{\frac{m}{n}-1},$$

e con $\overline{M}$ l'associato di M secondo il modolo p, posto

$$U_r \equiv \frac{M}{M_r}\overline{M},$$

la (10) assumerà la forma

$$\frac{n}{m} a^\mu \left[(M_0+1)^{\frac{m}{n}} - 1\right] \sum_{s=0}^{\frac{m}{n}-1} A^s U_s,$$

dalla quale si otterranno le soluzioni minime positive con facile calcolo.

10. Per applicare il metodo ad un esempio, determiniamo una soluzione apiristica della congruenza

$$x^3 \equiv a \pmod{73}.$$

Possiamo assumere $m = 9$, $\mu = 3$, $\nu = 1$. Un non residuo cubico di 73 è 2. Infatti si ha

$$2^3 \equiv 8, \; 2^6 \equiv -9, \; 2^9 \equiv -72 \equiv 1, \; 2^{12} \equiv 8, \; 2^{24} \equiv -9 \pmod{73}.$$

Possiamo quindi porre

$$\gamma \equiv 2^8 \equiv 37 \pmod{73}.$$

Intanto si ha

$$N \equiv 2^{24} \equiv -9,$$

$$M_0 \equiv \gamma^\nu - 1 \equiv 2^8 - 1 \equiv 36, \quad M_1 \equiv -9 \cdot 37 - 1 \equiv -42,$$
$$M_2 \equiv 9 \cdot 41 - 1 \equiv 3 \pmod{73}.$$

Il minimo comune multiplo dei numeri 36, 42, 3 è $M = 252$ e il suo associato è congruo a 31 (mod. 73). Onde si ha

$$U_0 \equiv \frac{M}{M_0} \overline{M} \equiv 7 \cdot 31 \equiv -2, \qquad U_1 \equiv \frac{M}{M_1} \overline{M} \equiv -6 \cdot 31 \equiv 33,$$

$$U_2 \equiv \frac{M}{M_2} \overline{M} \equiv -24 \quad (\text{mod. } 73).$$

Adunque una soluzione apiristica della congruenza data è

$$21a^3(-2 + 33a^8 - 24a^{16}).$$

Per $a = 7$, essendo 7 un residuo cubico di 73, questa espressione, dà subito come radice della congruenza $x^3 \equiv 7$ (mod. 73), il numero 13. Le altre due radici si ottengono prendendo i resti (mod. 73) dei prodotti di questo numero per $\gamma^{\frac{m}{n}} \equiv 2^{24} \equiv -9$, e per $\gamma^{2\frac{m}{n}} \equiv 8$: esse sono 29 e 31.

Palermo, marzo 1906.

Über aufeinander abwickelbare P-Flächen.

Von

B. MLODZIEJOWSKI in Moskau.

1.

In seinen Arbeiten über Differentialgeometrie*) beschäftigte sich Peterson eingehend mit einer Klasse von Flächen, denen nachher A. Voß (Mathematische Annalen 39) den Namen P-Flächen beilegte. Sie werden durch die Eigenschaft gekennzeichnet, ein konjugiertes Liniensystem zu besitzen, dessen Linien zugleich Berührungslinien der der Fläche umbeschriebenen Kegel und Zylinder sind. Solche Linien, längs deren eine Fläche von Kegeln oder Zylindern berührt wird, wollen wir nach Peterson *konische* resp. *zylindrische* Linien dieser Fläche nennen. Somit können wir die P-Flächen als diejenigen Flächen erklären, die ein konjugiertes System konischer oder zylindrischer Linien besitzen.

Nehmen wir die Parameter der beiden Linienfamilien dieses Systems als Gaußsche Koordinaten auf der P-Fläche an, so erhalten nach Peterson die Gleichungen dieser Fläche die Form

$$x = \frac{a+\alpha}{l+\lambda}, \quad y = \frac{b+\beta}{l+\lambda}, \quad z = \frac{c+\gamma}{l+\lambda}, \tag{1}$$

worin a, b, c, l Funktionen von u und $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ Funktionen von v sind. Die Spitzen der Kegel, die die Fläche längs der Linien $u = \text{const.}$ berühren, haben die Koordinaten

$$\frac{\frac{da}{du}}{\frac{dl}{du}}, \quad \frac{\frac{db}{du}}{\frac{dl}{du}}, \quad \frac{\frac{dc}{du}}{\frac{dl}{du}}.$$

Ebenso hat man für die Koordinaten der Spitzen der Berührungskegel längs der Linien $v = \text{const.}$ die Ausdrücke

*) Zeitschrift der Moskauer Mathematischen Gesellschaft, Bd. I, II und die Monographie „Über Kurven und Flächen" (Moskau u. Leipzig, 1868). Über Peterson s. Stäckel in Bibliotheca Mathematica, 3. Folge, Bd. II und meinen Aufsatz in den Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 2. sér., t. V.

$$\frac{\frac{d\alpha}{dv}}{\frac{d\lambda}{dv}}, \quad \frac{\frac{d\beta}{dv}}{\frac{d\lambda}{dv}}, \quad \frac{\frac{d\gamma}{dv}}{\frac{d\lambda}{dv}}.$$

Verschwinden $\frac{dl}{du}$ und $\frac{d\lambda}{dv}$ identisch oder für bestimmte Werte von u und v, so gehen die entsprechenden Kegel in Zylinder über, deren Erzeugende die Richtungen $\frac{da}{du}:\frac{db}{du}:\frac{dc}{du}$ resp. $\frac{d\alpha}{dv}:\frac{d\beta}{dv}:\frac{d\gamma}{dv}$ haben. Alle diese Beziehungen sind in der erwähnten Arbeit von A. Voß angegeben. Beiläufig sei bemerkt, daß die Form der Gl. (1) die geometrisch evidente Tatsache bestätigt, daß die Klasse der P-Flächen gegenüber den kollinearen Transformationen des Raumes invariant ist.

Es ist merkwürdig, daß fast alle bedeutenden Ergebnisse, zu welchen Peterson auf dem Gebiete der Theorie der Biegung der Flächen gelangte, sich auf die Biegungen von P-Flächen beziehen. Aus einer Stelle seiner ersten russischen Abhandlung läßt sich schließen, daß Peterson allgemeine Methoden für das Auffinden solcher Biegungen besaß, und daß diese Methoden in Verbindung mit seinen allgemeineren Untersuchungen über konforme Abbildung stehen; leider sind die bezüglichen Untersuchungen Petersons unveröffentlicht geblieben.

Bei meinen Untersuchungen über die geometrischen Arbeiten Petersons ist es mir gelungen, die Frage nach den aufeinander abwickelbaren P-Flächen vollständig zu beantworten. Da ich aber von der konformen Abbildung keinen Gebrauch mache, so vermute ich, daß meine Methode mit der Petersonschen nicht identisch ist. Ich will hier die von mir erhaltenen Resultate kurz darlegen, als Auszug aus meiner in der „Zeitschrift der Moskauer Mathematischen Gesellschaft", Bd. 24 veröffentlichten Arbeit.

2.

Die acht Funktionen $a, \cdots, \lambda$, die in den Gl. (1) auftreten, lassen Veränderungen zu, bei welchen höchstens die Lage der entsprechenden P-Fläche, nicht aber ihre Form sich ändert. Wir können nämlich alle acht Funktionen mit einer Konstanten multiplizieren; dann können wir zu jeder Funktion, z. B. zu a, eine beliebige Konstante hinzuzufügen und zugleich dieselbe Konstante von der entsprechenden Funktion α abziehen. Diese beiden Transformationen sind ohne Einfluß weder auf die Form der P-Fläche, noch auf ihre Lage.

Übt man ferner zwei gleiche orthogonale Substitutionen mit konstanten Parametern auf a, b, c und α, β, γ aus, so entspricht das einer Drehung der Fläche um den Koordinatenanfang, eventuell verbunden mit einer Spiegelung an demselben. Fügt man endlich zu den beiden Funktionen eines Zählers, z. B. a und α, die Glieder des Nenners l und λ, multipliziert mit einer Konstanten k hinzu, so entspricht das einer Verschiebung der Fläche parallel der λ-Achse um die Länge k.

Bei der Lösung der Frage nach den Biegungen einer Fläche dürfen wir die verschiedenen Lagen dieser Fläche als untereinander identisch ansehen. Daher werden wir in die Gleichungen einer P-Fläche alle die Vereinfachungen einführen können, die durch die hier aufgezählten Transformationen erreichbar sind.

3.

Es ist leicht einzusehen, wie sich eine P-Fläche gestaltet, wenn einige der in (1) auftretenden Funktionen sich in Konstanten verwandeln. Sind Zähler und Nenner in (1) durch eine homogene lineare Relation mit konstanten Koeffizienten verbunden, so geht die P-Fläche in eine Ebene über; das tritt speziell ein, wenn einer der Zähler identisch verschwindet. Dieser Fall soll von unseren Betrachtungen ausgeschlossen werden. Wenn ferner eine der Funktionen, z. B. a, zu einer Konstanten wird, so können wir diese Konstante zu α hinzufügen und a gleich Null setzen, so daß wir allen Funktionen in (1), die konstant sind, den Wert Null beilegen werden.

Unter den P-Flächen können auch abwickelbare Linienflächen vorkommen und zwar nur Zylinder und Kegel. Nehmen wir die geradlinigen Erzeugenden einer solchen Fläche als Linien $v = \text{const.}$ und wählen im ersten Falle die z-Achse parallel den Erzeugenden des Zylinders, so verschwinden a, b, l; ebenso wenn im zweiten Falle der Koordinatenanfang in die Spitze des Kegels verlegt wird, verschwinden a, b, c. Führen wir eine Koordinatentransformation aus, so sehen wir, daß (1) eine abwickelbare P-Fläche darstellt, wenn zwischen a, b, c, l oder $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ drei lineare homogene Relationen bestehen. Da die Biegungen der abwickelbaren Flächen wohlbekannt sind, so werden wir diesen Fall von unserer Betrachtung ausschließen. Wir wollen daher im folgenden voraussetzen, daß von den acht Funktionen in (1) höchstens nur je zwei Funktionen desselben Arguments verschwinden, wobei außerdem zwei zusammengehörige Funktionen, wie a und α, l und λ nicht gleichzeitig verschwinden dürfen.

4.

Da auf einer P-Fläche die Linien (u) und (v) ein konjugiertes System bilden, so genügen die Ausdrücke für x, y, z in (1) der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} = \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \vartheta}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \vartheta}{\partial v}. \tag{2}$$

Eine direkte Berechnung aus (1) liefert

$$(3)\qquad \left\{ {12 \atop 1} \right\} = -\frac{\partial \log(l+\lambda)}{\partial v}, \quad \left\{ {12 \atop 2} \right\} = -\frac{\partial \log(l+\lambda)}{\partial u},$$

woraus beiläufig folgt, daß Gl. (2) für die P-Flächen gleiche Invarianten hat.

Ersetzen wir in (3) die Christoffelschen Symbole durch ihre Ausdrücke in den Koeffizienten des Linienelements der P-Fläche, so bekommen wir nach einer einfachen Rechnung

$$\frac{\partial}{\partial v}[E(l+\lambda)^2] + 2F(l+\lambda)\frac{dl}{du} = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial u}[G(l+\lambda)^2] + 2F(l+\lambda)\frac{d\lambda}{dv} = 0.$$

Daraus folgt, daß E, F, G in der Form dargestellt werden können

$$(4)\qquad E = \frac{\partial(l+\lambda)^{-1}}{\partial u}\frac{\partial N}{\partial u}, \quad G = \frac{\partial(l+\lambda)^{-1}}{\partial v}\frac{\partial N}{\partial v}, \quad F = \frac{1}{2}(l+\lambda)^{-1}\frac{\partial^2 N}{\partial u\,\partial v},$$

wo N eine Funktion von u, v ist, die sich aus (1) leicht bestimmen läßt. Wir haben nämlich für eine P-Fläche

$$(5)\qquad \begin{aligned} E &= \frac{\frac{dl}{\partial u}}{(l+\lambda)^2}\left[\frac{\sum\left(\frac{da}{du}\right)^2}{\frac{dl}{du}} - \frac{\partial}{\partial u}\frac{\sum(a+\alpha)^2}{l+\lambda}\right], \\ G &= \frac{\frac{d\lambda}{dv}}{(l+\lambda)^2}\left[\frac{\sum\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2}{\frac{d\lambda}{dv}} - \frac{\partial}{\partial v}\frac{\sum(a+\alpha)^2}{l+\lambda}\right], \\ F &= \frac{1}{2(l+\lambda)}\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\frac{\sum(a+\alpha)^2}{l+\lambda}, \end{aligned}$$

wobei die Summenzeichen sich auf die drei Koordinaten erstrecken. Aus der Vergleichung dieser Formeln mit den vorangehenden kommt

$$(6)\qquad N = \frac{\sum(a+\alpha)^2}{l+\lambda} - \int\left[\frac{\sum\left(\frac{da}{du}\right)^2}{\frac{dl}{du}}du + \frac{\sum\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2}{\frac{d\lambda}{dv}}dv\right].$$

Die Integrationskonstante ist hier ohne Bedeutung, da sie aus den Formeln (4) wegfällt.

Die Formeln (4)—(6) haben keinen Sinn, wenn l oder λ zu Konstanten werden. Wenn wir jedoch diesen Fall als einen Grenzfall betrachten, so sehen wir, daß die Formeln (5) auch hier bei dem Grenzübergange bestimmte Ausdrücke liefern, die mit den für diesen Fall direkt berechneten selbstverständlich zusammenfallen.

5.

Wir gehen nunmehr zur Untersuchung über, *ob eine P-Fläche sich in der Weise verbiegen läßt, daß das konjugierte System konischer Linien* (u), (v) *nach dem Verbiegen konjugiert bleibt.* Solche konjugierten Systeme, die auf zwei aufeinander abwickelbaren Flächen sich gegenseitig entsprechen, heißen nach Peterson die *Basis* der Biegung.

Es ist leicht einzusehen, daß, wenn bei einer Biegung der P-Fläche das konjugierte konische System (u), (v) konjugiert bleibt, die Linien (u), (v) notwendig konisch resp. zylindrisch bleiben. In der Tat behält Gl. (2) für alle aufeinander abwickelbaren Flächen dieselbe Form, da die Symbole $\left\{\begin{smallmatrix}1\,2\\1\end{smallmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{smallmatrix}1\,2\\2\end{smallmatrix}\right\}$ nur von den Koeffizienten des Linienelements abhängen; ersetzt man diese Symbole durch ihre Werte (3), so läßt sich (2) auf die Form bringen

$$\frac{\partial^2[\vartheta(l+\lambda)]}{\partial u\partial v}=0.$$

Hieraus folgt, daß die Gleichungen einer auf die Fläche (1) mit der Basis (u), (v) abwickelbaren Fläche folgende Form haben müssen

$$(1') \qquad x=\frac{a'+\alpha'}{l+\lambda},\quad y=\frac{b'+\beta'}{l+\lambda},\quad z=\frac{c'+\gamma'}{l+\lambda},$$

wobei a', b', c' neue Funktionen von u, α', β', γ' solche von v sind. Das sind aber Gleichungen einer neuen P-Fläche, auf der die Linien (u), (v) wieder konisch oder zylindrisch bleiben. Soll also eine P-Fläche derart verbogen werden, daß ihr konjugiertes System konischer Linien zur Basis der Biegung werde, so kann diese ihre Biegung nur eine P-Fläche sein.

6.

Untersuchen wir, unter welchen Bedingungen (1) und (1′) zwei aufeinander abwickelbare P-Flächen darstellen. Zuvörderst bemerken wir, daß in diesen Gleichungen derselbe Nenner $l+\lambda$ auftritt. Wir bilden dann die Koeffizienten E', F', G' des Linienelements der Fläche (1′)

$$(5') \qquad \begin{aligned}
E'&=\frac{\frac{dl}{du}}{(l+\lambda)^2}\left[\frac{\sum\left(\frac{da'}{du}\right)^2}{\frac{dl}{du}}-\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{\sum(a'+\alpha')^2}{l+\lambda}\right],\\
G'&=\frac{\frac{d\lambda}{dv}}{(l+\lambda)^2}\left[\frac{\sum\left(\frac{d\alpha'}{dv}\right)^2}{\frac{d\lambda}{dv}}-\frac{\partial}{\partial v}\,\frac{\sum(a'+\alpha')^2}{l+\lambda}\right],\\
F'&=\frac{1}{2(l+\lambda)}\,\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\,\frac{\sum(a'+\alpha')^2}{l+\lambda}.
\end{aligned}$$

Aus der Vergleichung von (5′) mit (5) kommen wir zu den folgenden Bedingungen für die Abwickelbarkeit zweier P-Flächen auf konischer Basis:

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{\sum(a+\alpha)^2-\sum(a'+\alpha')^2}{l+\lambda}=\frac{\sum\left(\frac{d\,a}{d\,u}\right)^2-\sum\left(\frac{d\,a'}{d\,u}\right)^2}{\frac{d\,l}{d\,u}},\\
&\frac{\partial}{\partial v}\,\frac{\sum(a+\alpha)^2-\sum(a'+\alpha')^2}{l+\lambda}=\frac{\sum\left(\frac{d\,\alpha}{d\,v}\right)^2-\sum\left(\frac{d\,\alpha'}{d\,v}\right)^2}{\frac{d\,\lambda}{d\,v}},\\
&\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\,\frac{\sum(a+\alpha)^2-\sum(a'+\alpha')^2}{l+\lambda}=0.
\end{aligned}
$$

Die letzte Gleichung braucht nicht berücksichtigt zu werden, da sie aus den beiden ersten folgt; wir wollen sie jedoch im folgenden beibehalten. Schreibt man sie in der Form

$$
\frac{\partial}{\partial u\,\partial v}\,\frac{\sum x^2-\sum x'^2}{l+\lambda}=0,
$$

so sieht man, daß sie aus dem bekannten Satze von Königs (Comptes Rendus, Bd. 116) folgt.

Wir wollen die dritte Gleichung (7) in der Form schreiben

$$
(8)\qquad \Sigma(a+\alpha)^2-\Sigma(a'+\alpha')^2=(l+\lambda)(m+\mu),
$$

wobei m eine Funktion von u, μ eine Funktion von v ist. Alsdann erhalten die beiden ersten Gleichungen die Gestalt

$$
(9)\qquad
\begin{aligned}
\sum\left(\frac{d\,a}{d\,u}\right)^2-\sum\left(\frac{d\,a'}{d\,u}\right)^2&=\frac{d\,l}{d\,u}\,\frac{d\,m}{d\,u},\\
\sum\left(\frac{d\,\alpha}{d\,v}\right)^2-\sum\left(\frac{d\,\alpha'}{d\,v}\right)^2&=\frac{d\,\lambda}{d\,v}\,\frac{d\,\mu}{d\,v}.
\end{aligned}
$$

Wir schließen hieraus:

Um zwei aufeinander abwickelbare P-Flächen zu finden, muß man acht Funktionen von u und ebenso viele Funktionen von v bestimmen, die den Gleichungen (8), (9) identisch genügen. Die Gleichungen (1), (1′) stellen dann die beiden Flächen dar.

Die Gleichungen (7) gelten nur unter der Bedingung, daß l und λ keine Konstanten sind. Jedoch behalten die Gleichungen (8) und (9) auch in diesem Falle ihre Gültigkeit; man kann sich davon entweder durch einen Grenzübergang oder durch direkte Rechnung überzeugen.

Die Gleichungen (8), (9) geben zu einer interessanten Bemerkung Anlaß. Da dieselben bei der Vertauschung von l mit m, λ mit μ unverändert bleiben, so können wir folgenden Satz aufstellen:

Sind zwei aufeinander abwickelbare P-Flächen gegeben, von denen die eine aus der anderen nicht durch Drehung um den Koordinatenanfang oder durch Spiegelung an demselben entstanden ist, so erhält man zwei im allgemeinen neue aufeinander abwickelbare P-Flächen, indem man in den Gleichungen der gegebenen Flächen den Nenner $l+\lambda$ durch $m+\mu$ ersetzt.

Die hinzugefügte Beschränkung ist nötig, damit $m+\mu$ nicht identisch verschwinde.

Übrigens überzeugt man sich durch eine einfache Rechnung, daß, wenn die beiden gegebenen P-Flächen zueinander kongruent oder symmetrisch sind, dasselbe auch für die beiden abgeleiteten Flächen eintritt. Entsteht dagegen das erste Flächenpaar durch eigentliche Biegung, so gilt dasselbe auch für das zweite Paar.

7.

Die Gleichungen (8), (9) können auf eine symmetrischere Form gebracht werden. Zu diesem Zwecke führen wir je zwei neue Funktionen von u resp. v mittels der Gleichungen

$$\begin{aligned} l &= n' + n, \quad m = n' - n, \\ \lambda &= \nu' + \nu, \quad \mu = \nu' - \nu. \end{aligned} \tag{10}$$

ein. Dann gehen die Gleichungen (8), (9) über in

$$\Sigma(a+\alpha)^2 + (n+\nu)^2 = \Sigma(a'+\alpha')^2 + (n'+\nu')^2,$$

$$\sum\left(\frac{da}{du}\right)^2 + \left(\frac{dn}{du}\right)^2 = \sum\left(\frac{da'}{du}\right)^2 + \left(\frac{dn'}{du}\right)^2,$$

$$\sum\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\nu}{dv}\right)^2 = \sum\left(\frac{d\alpha'}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\nu'}{dv}\right)^2,$$

oder kürzer, wenn wir die Summenzeichen beiderseits auf alle vier Glieder erstrecken, in

$$\Sigma(a+\alpha)^2 = \Sigma(a'+\alpha')^2, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \sum\left(\frac{da}{du}\right)^2 &= \sum\left(\frac{da'}{du}\right)^2, \\ \sum\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2 &= \sum\left(\frac{d\alpha'}{dv}\right)^2. \end{aligned} \tag{12}$$

Dies sind die Fundamentalgleichungen unseres Problems.

Hat man ein Paar aufeinander abwickelbarer P-Flächen, so entspricht demselben eine Lösung der Gleichungen (11), (12). Hat man aber umgekehrt eine Lösung dieser Gleichungen, so kann man daraus nicht nur ein einziges Paar, sondern unendlich viele Paare aufeinander abwickelbarer P-Flächen ableiten. In der Tat, bringen wir alle Glieder jeder dieser Gleichungen auf die linke Seite, so bekommen wir drei kogrediente 8-gliedrige quadratische Formen. Dieselben können durch unendlich viele lineare Substitutionen in sich selbst transformiert werden, wodurch neue Lösungen der Gleichungen (11), (12) entstehen, welche zu neuen Paaren aufeinander abwickelbarer P-Flächen führen.

Man soll jedoch nicht glauben, alle diese Flächenpaare seien von den ursprünglichen wesentlich verschieden. Wenn man z. B. das Vorzeichen eines der Glieder $(a + \alpha)$, $(b + \beta)$, $(c + \gamma)$ abändert, so entspricht dieser Substitution bloß die Spiegelung der ersten Fläche an einer der Koordinatenebenen. Anderen speziellen Substitutionen entsprechen Verschiebungen und Drehungen einer oder beider Flächen. Unwesentlich ist ferner eine lineare Transformation von $n + \nu$ und $n' + \nu'$ mit der Determinante $+ 1$, weil durch dieselbe die beiden aufeinander abwickelbaren P-Flächen durch zwei ihnen ähnliche ersetzt werden, indem der gemeinsame Nenner $l + \lambda$ nur einen konstanten Faktor erhält.

Dagegen gibt der Zeichenwechsel von $n + \nu$ oder $n' + \nu'$ im allgemeinen eine wesentliche Veränderung der P-Flächen, indem dadurch $l + \lambda$ mit $m + \mu$ vertauscht wird. Ebenso werden die Flächen wesentlich verändert durch solche Transformationen, bei denen die ersten drei Glieder der beiden Seiten, z. B. $a + \alpha$ und $a' + \alpha'$, beteiligt sind.

8.

Wir haben in § 3 gesehen, daß, wenn in (1) zwischen den Funktionen a, b, c, l oder $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ mehr als zwei lineare Relationen bestehen, die entsprechende P-Fläche eine abwickelbare Fläche ist. Wir wollen jetzt untersuchen, unter welchen Bedingungen derselbe Umstand bei den Gleichungen (11), (12) auftritt. Dazu ist notwendig, daß diese Gleichungen bei jeder linearen Substitution nur solche Funktionen $a \cdots l$, $\alpha \cdots \lambda$ liefern, die durch mehr als zwei lineare Relationen verbunden sind. Dieser Umstand tritt aber sicher ein, wenn zwischen den acht Funktionen einer Art mindestens sechs lineare Relationen stattfinden. Wir wollen z. B. voraussetzen, daß die acht Funktionen $a \cdots n$, $a' \cdots n'$ sechs linearen Gleichungen genügen. Wenn wir aus diesen Gleichungen sechs Funktionen durch die zwei übrigen ausdrücken und diese Ausdrücke in die erste Gleichung (12) eintragen, so bekommen wir eine homogene quadratische Relation zwischen den Ableitungen dieser beiden Funktionen. Diese quadratische Relation läßt sich in zwei lineare auflösen und liefert dann nach dem Integrieren eine siebente lineare Relation zwischen den beiden Funktionen. Somit lassen sich alle acht Funktionen von u durch eine von denselben ausdrücken, in welchem Falle, wie in § 3 gezeigt worden ist, die entsprechenden P-Flächen auf eine Ebene abwickelbar sind. Es zeigt sich sogar, daß dieser Umstand schon bei fünf Relationen zwischen den acht Funktionen desselben Arguments eintritt, doch ist es mir bisher nicht gelungen, davon einen allgemeinen Beweis zu erbringen. Wir wollen daher auch die Möglichkeit von fünf linearen Relationen voraussetzen.

Differentiieren wir (11) nach u und v, so kommt

$$\sum \frac{da}{du}\frac{d\alpha}{dv} = \sum \frac{da'}{du}\frac{d\alpha'}{dv}. \tag{13}$$

Erteilt man hier der Veränderlichen v verschiedene Werte, so entstehen zwischen den acht Ableitungen nach u, $\frac{da}{du}, \cdots \frac{dn'}{du}$, ebensoviele lineare Relationen; in derselben Weise entstehen lineare Relationen zwischen $\frac{d\alpha}{dv}, \cdots, \frac{d\nu'}{dv'}$, wenn wir u einzelne Werte beilegen. Man überzeugt sich leicht, daß die Gesamtanzahl der unabhängigen Relationen beider Art gleich der Zahl der Glieder der vorstehenden Gleichung, d. h. gleich 8 ist. Da mehr als fünf Relationen einer Art sicher zu den auf die Ebene abwickelbaren P-Flächen führen, welche wir von unserer Betrachtung ausgeschlossen haben, so bleiben nur noch zwei Möglichkeiten übrig: Wir können entweder je vier Relationen zwischen den Funktionen von u und denen von v haben, oder drei Relationen der einen Art und fünf der anderen. Wegen der Gleichwertigkeit der beiden Parameter u und v können wir im letzteren Falle annehmen, daß die Funktionen von u durch drei, die von v durch fünf Relationen verbunden sind.

Wir wollen zuerst den Fall betrachten, daß die Anzahl der Relationen zwischen $\frac{da}{du} \cdots \frac{dn'}{du}$ gleich 4 ist. Wir schreiben dieselben in der Form

$$\begin{aligned}
&p_1 \frac{da}{du} + q_1 \frac{db}{du} + r_1 \frac{dc}{du} + s_1 \frac{dn}{du} = p_1{}' \frac{da'}{du} + q_1{}' \frac{db'}{du} + r_1{}' \frac{dc'}{du} + s_1{}' \frac{dn'}{du},\\
&\cdot\;\cdot\\
&p_4 \frac{da}{du} + \cdots \qquad\qquad\qquad\qquad = p_4{}' \frac{da'}{du} + \cdots,
\end{aligned} \tag{14}$$

mit den 32 konstanten Koeffizienten $p_1, \cdots, s_4'$.

Wir setzen vorläufig voraus, daß diese vier Gleichungen in bezug auf $\frac{da'}{du}, \frac{db'}{du}, \frac{dc'}{du}, \frac{dn'}{du}$ auflösbar sind. Betrachten wir dann die beiden quadratischen Formen

$$\sum \left(\frac{da}{du}\right)^2, \quad \sum \left(\frac{da'}{du}\right)^2$$

und ersetzen in der zweiten die Ableitungen $\frac{da'}{du} \cdots$ durch ihre Ausdrücke in $\frac{da}{du}\cdots$ aus (14), so erhalten wir zwei definite Formen in den nämlichen Veränderlichen $\frac{da}{du}\cdots\frac{dn}{du}$. Diese beiden Formen können bekanntlich durch eine reelle lineare Substitution in Summen von Quadraten verwandelt werden, deren neue Argumente wir mit $\frac{dA}{du}, \frac{dB}{du}, \frac{dC}{du}, \frac{dN}{du}$ bezeichnen wollen. Alsdann verwandeln sich die beiden Summen in

$$\left(\frac{dA}{du}\right)^2+\left(\frac{dB}{du}\right)^2+\left(\frac{dC}{du}\right)^2+\left(\frac{dN}{du}\right)^2$$

und

$$h_1^2\left(\frac{dA}{du}\right)^2+h_2^2\left(\frac{dB}{du}\right)^2+h_3^2\left(\frac{dC}{du}\right)^2+h_4^2\left(\frac{dN}{du}\right)^2,$$

wobei alle h reelle endliche Zahlen sind. Setzen wir

$$(15)\qquad h_1\frac{dA}{du}=\frac{dA'}{du},\quad h_2\frac{dB}{du}=\frac{dB'}{du},\quad h_3\frac{dC}{du}=\frac{dC'}{du},\quad h_4\frac{dN}{du}=\frac{dN'}{du},$$

so nehmen die beiden Formen die Gestalt

$$\sum\left(\frac{dA}{du}\right)^2,\quad \sum\left(\frac{dA'}{du}\right)^2$$

an. Führen wir dieselbe Transformation in Gl. (11), (12) aus, behalten aber statt $A, A'\cdots$ die alten Bezeichnungen $a, a'\cdots$ bei, so ändern diese Gleichungen ihre Form nicht, da unsere Transformation die Quadratsummen auf den beiden Seiten in Quadratsummen überführt. Die Gleichungen (14) werden aber durch die nachstehenden ersetzt

$$(16)\qquad h_1\frac{da}{du}=\frac{da'}{du},\quad h_2\frac{db}{du}=\frac{db'}{du},\quad h_3\frac{dc}{du}=\frac{dc'}{du},\quad h_4\frac{dn}{du}=\frac{dn'}{du}.$$

Bisher hatten wir vorausgesetzt, daß Gl. (14) in bezug auf $\frac{da'}{du}\cdots\frac{dn'}{du}$ auflösbar ist. Sollte diese Bedingung in einzelnen Fällen nicht erfüllt sein, dann können wir die Koeffizienten von (14) etwas abändern und dann zu unserem Falle als zur Grenze übergehen. Man sieht leicht ein, daß bei diesem Grenzübergange unsere orthogonale Substitution nie unmöglich, sondern höchstens unbestimmt werden kann, in welchem Falle wir aus der unendlichen Menge möglicher Substitutionen eine beliebige auswählen können, um den linearen Relationen (14) die Form (16) zu geben. Der einzige Unterschied besteht darin, daß in diesem Falle einige von den Zahlen $h_1, \cdots, h_4$ unendlich oder unbestimmt werden, was übrigens für das Folgende gleichgültig ist. Wird z. B. in der Gleichung $h_1\frac{da}{du}=\frac{da'}{du}$ die Größe h_1 unendlich, so ist die Gleichung durch $\frac{da}{du}=0$ zu ersetzen; wird h_1 aber unbestimmt, so hat man die beiden Gleichungen $\frac{da}{du}=0$, $\frac{da'}{du}=0$.

Ist ferner die Anzahl der Gleichungen (14) bloß gleich 3, so können wir denselben eine beliebige vierte lineare Gleichung hinzufügen, die wir nach Ausführung der orthogonalen Substitution wieder fallen lassen.

9.

Wir können die Bedingungen (16) auf drei verschiedene Formen zurückführen. Betrachten wir eine Relation

$$h\frac{da}{du}=\frac{da'}{du}, \tag{17}$$

so sind drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der absolute Betrag von $h \gtreqless 1$ ist. Ist z. B. $|h|>1$, so können wir in (11), (12) statt $(a+\alpha)$ und $(a'+\alpha')$ folgende Ausdrücke einsetzen

$$\frac{1}{\sqrt{h^2-1}}[h(a+a)-(a'+\alpha')],\quad \frac{1}{\sqrt{h^2-1}}[(a+\alpha)-h(a'+\alpha')],$$

wodurch Gl. (11), (12) keine wesentliche Veränderung erleiden. Bezeichnen wir aber diese Ausdrücke wieder mit $(a+\alpha)$, $(a'+\alpha')$, so nimmt unsere Relation (17) die einfache Form

$$\frac{da}{du}=0$$

an. Ebenso verwandelt sich (17) bei $|h|<1$ in

$$\frac{da'}{du}=0.$$

Ist endlich $|h|=1$, so können wir immer $h=+1$ setzen, da wir in (11) nötigenfalls die Vorzeichen der einzelnen Glieder verändern können. Somit können die Relationen (16) zwischen den Ableitungen der acht Funktionen $a,\cdots,n'$ nach u immer auf die drei Formen zurückgeführt werden:

$$\frac{da}{du}=0,\quad \frac{da'}{du}=0,\quad \frac{da}{du}=\frac{da'}{du}. \tag{18}$$

Wir wollen nun voraussetzen, daß zwischen den Ableitungen der Funktionen $a,\cdots,n'$ tatsächlich eine gewisse Anzahl von Relationen von der Form (18) besteht. Führen wir diese in (13) ein, so bestehen keine weiteren linearen Beziehungen zwischen den übrig gebliebenen Ableitungen nach u; es müssen daher die Koeffizienten dieser Ableitungen identisch verschwinden. Untersuchen wir, welche Beziehungen zwischen den Ableitungen nach v daraus entstehen. Kommt irgend eine Ableitung nach u, z. B. $\frac{da}{du}$, in den Bedingungen (16) nicht vor, so bleibt sie auch in (13) bestehen und ihr Koeffizient muß verschwinden; wir haben somit

$$\frac{d\alpha}{dv}=0.$$

Genügt dagegen a der Bedingung $\frac{d a}{d u} = 0$, so verschwindet diese Ableitung aus (13), und ihr Koeffizient $\frac{d a}{d v}$ in (13) bleibt frei. Sind endlich a und a' durch die Relation

$$\frac{d a}{d u} = \frac{d a'}{d u}$$

verbunden, und eliminieren wir mittels derselben aus (13) die Ableitung $\frac{d a'}{d u}$, so erhält $\frac{d a}{d u}$ den Koeffizienten $\frac{d \alpha}{d v} - \frac{d \alpha'}{d v}$ und es folgt

$$\frac{d \alpha}{d v} = \frac{d \alpha'}{d v}.$$

Folglich können die Beziehungen zwischen den Ableitungen nach v in dreifacher Form dargestellt werden:

$$(19)\qquad \frac{d \alpha}{d v} = 0, \quad \frac{d \alpha'}{d v} = 0, \quad \frac{d \alpha}{d v} = \frac{d \alpha'}{d v}.$$

Von den Beziehungen (18), (19) zwischen den Ableitungen der Funktionen $a, \cdots, \nu'$ können wir zu den Beziehungen zwischen diesen Funktionen selbst übergehen. Aus

$$\frac{d a}{d u} = 0$$

folgt

$$a = k = \text{const.}$$

Da aber a in (11) nur in der Verbindung $a + \alpha$ auftritt, so können wir k zu α hinzufügen und setzen

$$(20)\qquad a = 0.$$

Ebenso führt

$$\frac{d \alpha}{d v} = 0$$

zu

$$(21)\qquad \alpha = 0,$$

wobei die beiden Beziehungen $a = 0$, $\alpha = 0$ niemals zusammen eintreten dürfen.

Bestehen endlich die beiden Relationen

$$(22)\qquad \frac{d a}{d u} = \frac{d a'}{d u}, \quad \frac{d \alpha}{d v} = \frac{d \alpha'}{d v},$$

die, wie wir oben gezeigt haben, immer gleichzeitig vorkommen, so ergeben dieselben

$$a + \alpha = a' + \alpha' + 2k,$$

wobei k eine Konstante ist.

Diese Gleichung kann durch zwei andere ersetzt werden

$$(23)\qquad a + \alpha = \bar{a} + \bar{\alpha} + k, \quad a' + \alpha' = \bar{a} + \bar{\alpha} - k,$$

wo $\bar{a}$, $\bar{\alpha}$ zwei neue Funktionen von u resp. v bezeichnen. Setzen wir diese Ausdrücke in (11), (12) ein, so verschwinden die entsprechenden Glieder aus (12), während in (11) auf den beiden Seiten die Ausdrücke

$$2(\bar{a}+\bar{\alpha})k, \quad -2(\bar{a}+\bar{\alpha})k$$

bleiben. Ist $k=0$, so verschwinden auch diese. Ist aber k von Null verschieden, so können wir in (11) $k\bar{a}$, $k\bar{\alpha}$ durch $\bar{a}$, $\bar{\alpha}$ ersetzen, was dem Werte $k=1$ entsprechen würde. Somit kann man immer in (23) entweder $k=0$ oder $k=1$ setzen und es folgt aus (22) entweder

$$a+\alpha=\alpha'+\alpha'$$

oder

$$a+\alpha-1=a'+\alpha+1.$$

10.

Nunmehr sind wir imstande, alle Lösungen der Gleichungen (11), (12) *und damit alle aufeinander abwickelbaren P-Flächen anzugeben.* Wie wir sahen, können aus jeder Lösung dieser Gleichungen unendlich viele neue Lösungen abgeleitet werden mittels linearer Substitutionen, die diese Gleichungen in sich überführen. Diese Substitutionen setzen sich zusammen aus orthogonalen Substitutionen, welche auf jede Seite dieser Gleichungen ausgeübt werden können, und aus einer Substitution, durch welche Glieder der beiden Seiten miteinander verbunden werden. Wir können nämlich in (11), (12) die Ausdrücke

$$a+\alpha, \quad a'+\alpha'$$

durch

$$g(a+\alpha)+h(a'+\alpha'), \quad h(a+\alpha)+g(a'+\alpha') \tag{24}$$

ersetzen, wobei die Konstanten g, h durch die Bedingung

$$g^2-h^2=1$$

verbunden sind.

Alle Lösungen der Gleichungen (11), (12), die auseinander durch lineare Transformationen erhalten werden können, wollen wir zu einer Gruppe rechnen, und es genügt, aus jeder Gruppe nur eine Lösung zu finden, um alle übrigen zu haben. Jede Gruppe von Lösungen wird durch die Beschaffenheit der linearen Relationen charakterisiert, die nach § 8 zwischen den Funktionen in (11) stattfinden müssen. Durch geeignete lineare Transformationen können wir diese Relationen auf die Formen (20), (21), (23) bringen, und die Zahl der Relationen jeder Form ist es, die die verschiedenen Gruppen von Lösungen voneinander unterscheidet.

Die Untersuchung aller hier möglichen Fälle bietet keine Schwierigkeiten; wir wollen hier bloß ihr Endergebnis angeben. Es zeigt sich:

wenn wir nur solche P-Flächen haben wollen, die auf die Ebene nicht abwickelbar sind, so ist notwendig, daß zwischen den Funktionen von u und denen von v je vier lineare Relationen bestehen; von diesen darf höchstens ein Paar die Form (23) haben.

Es lassen sich daher alle Lösungen der Gleichungen (11), (12) in zwei Gruppen verteilen, je nachdem in der bezüglichen linearen Relation die Form (23) vorkommt oder nicht. Jede Gruppe zerfällt in Untergruppen, die sich durch die Verteilung der Relationen der Form (20), (21) zwischen den beiden Seiten von (11) unterscheiden. Es wird sich jedoch zeigen, daß diese Untergruppen sich voneinander nicht wesentlich unterscheiden, da sie durch lineare Substitutionen, allerdings mit imaginären Koeffizienten, ineinander übergehen.

11.

Wir wollen nun die erste Gruppe der Lösungen betrachten. Hier hat ein Paar von Relationen die Form (23); wir wollen dieselbe auf die Glieder $n + \nu$, $n' + \nu'$ beziehen und setzen

$$n + \nu - k = n' + \nu' + k = \bar{n} + \bar{\nu},$$

indem wir die Konstante k unbestimmt lassen, um auch den Fall $k = 0$ einbegreifen zu können. Die übrigen sechs Relationen verteilen sich auf die übrigen Glieder der Gleichung (11). Als erste Untergruppe betrachten wir die, bei der unter den drei Relationen von der Form (20) sich zwei auf die eine und eine auf die andere Seite der Gleichung (11) beziehen. Dann müssen die Relationen (21) sich umgekehrt verteilen. Somit haben wir in diesem Falle folgende Beziehungen

$$\begin{gathered} n + \nu = \bar{n} + \bar{\nu} + k, \quad n' + \nu' = \bar{n} + \bar{\nu} - k, \\ a' = 0, \quad b' = 0, \quad c = 0, \\ \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma' = 0. \end{gathered} \tag{I, 1}$$

Die Gleichungen (11), (12) verwandeln sich hier in

$$\begin{gathered} a^2 + b^2 + \gamma^2 + 4k(\bar{n} + \bar{\nu}) = \alpha'^2 + \beta'^2 + c'^2, \\ \left(\frac{da}{du}\right)^2 + \left(\frac{db}{du}\right)^2 = \left(\frac{dc'}{du}\right)^2, \\ \left(\frac{d\gamma}{dv}\right)^2 = \left(\frac{d\alpha'}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\beta'}{dv}\right)^2. \end{gathered} \tag{25}$$

Wählen wir hier für a, b, α', β' beliebige Funktionen, so werden aus den beiden letzten Gleichungen c', γ durch Quadraturen bestimmt, worauf sich aus der ersten Gleichung $\bar{n} + \bar{\nu}$ ergibt; den verschiedenen Werten der Konstante k entspricht hier eine Schar ähnlicher Flächen.

Beziehen sich alle drei Relationen von der Form (20) auf die eine Seite der Gleichung (11), so entsteht die zweite Untergruppe

$$(\mathrm{I}, 2)\qquad \begin{gathered} n+\nu=\bar{n}+\bar{\nu}+k, \quad n'+\nu'=\bar{n}+\bar{\nu}-k, \\ a'=0, \quad b'=0, \quad c'=0, \\ \alpha=0, \quad \beta=0, \quad \gamma=0. \end{gathered}$$

Die Gleichungen (11), (12) nehmen hier die Form an

$$(26)\qquad \begin{gathered} a^2+b^2+c^2+4k(\bar{n}+\bar{\nu})=\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2, \\ \left(\frac{da}{du}\right)^2+\left(\frac{db}{du}\right)^2+\left(\frac{dc}{du}\right)^2=0, \\ \left(\frac{d\alpha'}{dv}\right)^2+\left(\frac{d\beta'}{dv}\right)^2+\left(\frac{d\gamma'}{dv}\right)^2=0. \end{gathered}$$

Es ist leicht zu sehen, daß dieser Fall in den vorhergehenden leicht transformiert werden kann. Ersetzen wir in (26) c, γ' durch ic', $i\gamma$ und bringen diese Glieder auf die anderen Seiten der Gleichungen, so erhalten wir (25); letztere Transformation ist aber ein Spezialfall von (24) für $g=0$, $h=-i$.

Es ist zu beachten, daß, obwohl die Gl. (26) nur imaginäre Lösungen zulassen, wir jedoch auch hier reelle P-Flächen erhalten können. Wir können nämlich u, v als konjugiert komplexe Veränderliche betrachten und a, b, c konjugiert zu $i\alpha'$, $i\beta'$, $i\gamma'$ wählen. Wenden wir dann auf alle Glieder von (26) außer $\bar{n}+\bar{\nu}$, die Transformation (24) mit $g=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $h=\frac{i}{\sqrt{2}}$ an, so verwandelt sich die erste dieser Gleichungen in

$$\begin{gathered} (a+i\alpha')^2+(b+i\beta')^2+(c+i\gamma')^2+8k(\bar{n}+\bar{\nu}) \\ =(ia+\alpha')^2+(ib+\beta')^2+(ic+\gamma')^2. \end{gathered}$$

Alle Glieder sind hier reell und können zur Bestimmung zweier reeller P-Flächen dienen.

Als Beispiel wollen wir setzen

$$\begin{array}{llll} a+\alpha=2\sin u, & b+\beta=2\cos u, & c+\gamma=2\,\mathfrak{Sin}\, v, & n+\nu=u^2+v^2+1, \\ a'+\alpha'=2\,\mathfrak{Cos}\, v, & b'+\beta'=2v, & c'+\gamma'=2u, & n'+\nu'=u^2+v^2-1, \end{array}$$

hier haben wir

$$\begin{gathered} a'=0, \quad b'=0, \quad c=0, \\ \alpha=0, \quad \beta=0, \quad \gamma'=0, \\ n+\nu=n'+\nu'+2, \end{gathered}$$

also den Fall (I, 1). Die Gleichungen (11), (12) werden identisch befriedigt, und wir haben nach (10)

$$l+\lambda=2(u^2+v^2), \quad m+\mu=-2.$$

Dann liefern (1), (1') zwei folgende aufeinander abwickelbare P-Flächen

$$x = \frac{\sin u}{u^2 + v^2}, \quad y = \frac{\cos u}{u^2 + v^2}, \quad z = \frac{\operatorname{Sin} v}{u^2 + v^2},$$
$$x' = \frac{\operatorname{Cos} v}{u^2 + v^2}, \quad y' = \frac{v}{u^2 + v^2}, \quad z' = \frac{u}{u^2 + v^2}.$$

Vertauschen wir $l + \lambda$ mit $m + \mu$ und multiplizieren mit -1, so bekommen wir ein anderes Flächenpaar

$$x = \sin u, \quad y = \cos u, \quad z = \operatorname{Sin} v,$$
$$x' = \operatorname{Cos} u, \quad y' = v, \quad z' = u.$$

Diese Gleichungen stellen zwei Zylinder dar. Wenden wir aber auf dieselben die Transformation (24) an, so bekommen wir zwei aufeinander abwickelbare Translationsflächen

$$x = \sin u, \quad y = g \cos u + hv, \quad z = \operatorname{Sin} v,$$
$$x' = \operatorname{Cos} v, \quad y' = h \cos u + gv, \quad z' = u,$$
$$g^2 - h^2 = 1.$$

12.

Wir wenden uns jetzt zu der zweiten Gruppe von Lösungen, bei der keine der linearen Relationen die Form (23) hat. Hier entstehen ebenfalls Untergruppen, die davon abhängen, wieviele Relationen von der Form (20) jeder Seite der Gleichung (11) entsprechen. Es können nämlich entweder jeder Seite je zwei Relationen entsprechen, oder einer Seite drei und der anderen eine, oder endlich können alle vier Relationen sich auf eine Seite beziehen. Das liefert folgende drei Untergruppen:

$$\text{(II, 1)} \qquad \begin{aligned} &a' = 0, \quad b' = 0, \quad c = 0, \quad n = 0, \\ &\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma' = 0, \quad \nu' = 0, \end{aligned}$$

Die Gleichungen (11), (12) ergeben hier

$$\text{(27)} \qquad \begin{aligned} &a^2 + b^2 + \gamma^2 + \nu^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 + c'^2 + n'^2, \\ &\left(\frac{da}{du}\right)^2 + \left(\frac{db}{du}\right)^2 = \left(\frac{dc'}{du}\right)^2 + \left(\frac{dn'}{du}\right)^2, \\ &\left(\frac{d\gamma}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\nu}{dv}\right)^2 = \left(\frac{d\alpha'}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\beta'}{dv}\right)^2. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung zerfällt in zwei andere

$$\text{(28)} \qquad \begin{aligned} &a^2 + b^2 + k = c'^2 + n'^2, \\ &\gamma^2 + \nu^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 + k, \end{aligned}$$

wobei k eine Konstante bezeichnet.

Differentiieren wir die erste Gleichung (28) und verbinden sie mit der zweiten Gleichung (27), so bekommen wir

$$(a^2+b^2+k)\left[\left(\frac{da}{du}\right)^2+\left(\frac{db}{du}\right)^2\right]-\left(a\frac{da}{du}+b\frac{db}{du}\right)^2$$
$$=(c'^2+n'^2)\left[\left(\frac{dc'}{du}\right)^2+\left(\frac{dn'}{du}\right)^2\right]-\left(c'\frac{dc'}{du}+n'\frac{dn'}{du}\right)^2,$$

oder

$$\left(n'\frac{dc'}{du}-c'\frac{dn'}{du}\right)^2=\left(b\frac{da}{du}-a\frac{db}{du}\right)^2+k\left[\left(\frac{da}{du}\right)^2+\left(\frac{db}{du}\right)^2\right].$$

Zieht man hier beiderseits die Quadratwurzel aus, dividiert durch die erste Gleichung (28) und integriert, so bekommt man

$$\operatorname{arctg}\frac{c'}{n'}=\int\frac{\sqrt{\left(b\frac{da}{du}-a\frac{db}{du}\right)^2+k\left[\left(\frac{da}{du}\right)^2+\left(\frac{db}{du}\right)^2\right]}}{a^2+b^2+k}\,du.$$

und ebenso

$$\operatorname{arctg}\frac{\alpha'}{\beta'}=\int\frac{\sqrt{\left(\nu\frac{d\gamma}{dv}-\gamma\frac{d\nu}{dv}\right)^2-k\left[\left(\frac{d\gamma}{dv}\right)^2+\left(\frac{d\nu}{dv}\right)^2\right]}}{\gamma^2+\nu^2-k}\,dv.$$

Diese Formeln, zusammen mit (28), drücken c', n', α', β' durch a, b, γ, ν aus. Die bei der Integration auftretenden Konstanten entsprechen orthogonalen Substitutionen in c', n' und α', β'.

Die beiden anderen Untergruppen sind die folgenden:

$$\text{(II, 2)}\qquad\begin{gathered}
a'=0,\quad b'=0,\quad c'=0,\quad n=0,\\
\alpha=0,\quad \beta=0,\quad \gamma=0,\quad \nu'=0,\\
a^2+b^2+c^2+\nu^2=\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2+n'^2,\\
\left(\frac{da}{du}\right)^2+\left(\frac{db}{du}\right)^2+\left(\frac{dc}{du}\right)^2=\left(\frac{dn'}{du}\right)^2,\\
\left(\frac{d\alpha'}{dv}\right)^2+\left(\frac{d\beta'}{dv}\right)^2+\left(\frac{d\gamma'}{dv}\right)^2=\left(\frac{d\nu}{dv}\right)^2.
\end{gathered}$$

$$\text{(II, 3)}\qquad\begin{gathered}
a'=0,\quad b'=0,\quad c'=0,\quad n'=0,\\
\alpha=0,\quad \beta=0,\quad \gamma=0,\quad \nu=0,\\
a^2+b^2+c^2+n^2=\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2+\nu'^2,\\
\left(\frac{da}{du}\right)^2+\left(\frac{db}{du}\right)^2+\left(\frac{dc}{du}\right)^2+\left(\frac{dn}{du}\right)^2=0,\\
\left(\frac{d\alpha'}{dv}\right)^2+\left(\frac{d\beta'}{dv}\right)^2+\left(\frac{d\gamma'}{dv}\right)^2+\left(\frac{d\nu'}{dv}\right)^2=0,
\end{gathered}$$

Diese beiden Untergruppen können aus der ersten (II, 1) durch dieselbe imaginäre Transformation abgeleitet werden, durch die wir (I, 2) aus (I, 1) erhalten haben. Obwohl in (II, 3) nur imaginäre Lösungen möglich sind, können wir auch hier reelle P-Flächen erhalten. Dazu müssen wir, ähnlich wie in (I, 2), u, v konjugiert imaginär nehmen und zugleich die Funktionen a, b, c, n konjugiert imaginär zu $i\alpha', i\beta', i\gamma'$, $i\nu'$ wählen.

Als Beispiel nehmen wir

$$\begin{aligned} a + \alpha &= \mathfrak{Sin}\, ku, & b + \beta &= \sin kv, & c + \gamma &= \cos kv, & n + \nu &= k\, \mathfrak{Cos}\, u, \\ a' + \alpha' &= k\, \mathfrak{Sin}\, u, & b' + \beta' &= k \sin v, & c' + \gamma' &= \mathfrak{Cos}\, ku, & n' + \nu' &= k \cos v, \end{aligned}$$

wobei k eine Konstante ist.

Hier ist

$$\begin{gathered} b = 0, \quad c = 0, \quad b' = 0, \quad n' = 0, \\ \alpha = 0, \quad \nu = 0, \quad \alpha' = 0, \quad \gamma' = 0, \end{gathered}$$

was, abgesehen von der Bezeichnung, dem Falle (II, 1) entspricht. Man überzeugt sich, daß diese Werte den Gleichungen (11), (12) genügen. Berechnet man $l + \lambda$ aus (10), so bekommt man aus (1), (1′) die Gleichungen der beiden aufeinander abwickelbaren P-Flächen

$$(29) \qquad \begin{aligned} x &= \frac{\mathfrak{Sin}\, ku}{\mathfrak{Cos}\, u + \cos v}, & y &= \frac{\sin kv}{\mathfrak{Cos}\, u + \cos v}, & z &= \frac{\cos kv}{\mathfrak{Cos}\, u + \cos v}, \\ x' &= \frac{k\, \mathfrak{Sin}\, u}{\mathfrak{Cos}\, u + \cos v}, & y' &= \frac{k \sin v}{\mathfrak{Cos}\, u + \cos v}, & z' &= \frac{\mathrm{ch}\, ku}{\mathfrak{Cos}\, u + \cos v}, \end{aligned}$$

wobei zur Vereinfachung alle Ausdrücke mit k multipliziert worden sind.

Üben wir auf $c + \gamma$, $c' + \gamma'$ die Transformation (24) aus, so entstehen allgemeinere Gleichungen, indem die Ausdrücke von z, z' die Form erhalten

$$(29') \qquad \begin{gathered} z = \frac{h\, \mathfrak{Cos}\, ku + g \cos kv}{\mathfrak{Cos}\, u + \cos v}, \quad z' = \frac{g\, \mathfrak{Cos}\, ku + h \cos kv}{\mathfrak{Cos}\, u + \cos v}, \\ g^2 - h^2 = 1. \end{gathered}$$

Diese Gleichungen sind von Peterson 1866 angegeben worden. Sie können augenscheinlich noch weiter verallgemeinert werden, wenn man die Transformation (24) auf die beiden übrigen Koordinatenpaare anwendet.

13.

Aus dem Vorhergehenden läßt sich schließen, daß im allgemeinen eine P-Fläche in eine andere von ihr wesentlich verschiedene P-Fläche nicht verbogen werden kann. In der Tat, ersetzt man n, n', ν, ν' durch ihre Ausdrücke (10), so folgt aus § 8, daß die acht Funktionen a, a', b, b', c, c', l, m durch vier lineare Relationen und ebenso die acht übrigen Funktionen $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma', \lambda, \mu$ durch vier andere lineare Relationen verbunden sind. Durch eine entsprechende Veränderung der Lage der beiden P-Flächen in bezug auf den Koordinatenanfang kann man aber stets erreichen, daß die Funktionen l, m, λ, μ nicht mit den übrigen Funktionen linear verbunden seien. Tritt z. B. in einer linearen Relation die Summe $a + kl$ auf, so verschieben wir die erste Fläche parallel zur x-Achse um die Länge k. Dann muß man den Ausdruck $x = \frac{a+\alpha}{l+\lambda}$ durch den anderen

$$x = \frac{(a+kl)+(\alpha+k\lambda)}{l+\lambda}$$

ersetzen. Somit kommt an die Stelle von a die Summe $a + kl$, und in unserer linearen Relation muß umgekehrt $a + kl$ durch a ersetzt werden. In dieser Weise kann l aus jeder linearen Relation entfernt werden, welche eine der Funktionen a, a', b, b', c, c' enthält. Ebenso überzeugt man sich, daß eine lineare Verbindung von m mit diesen sechs Funktionen vermieden werden kann. Differentiieren wir nämlich (8) nach u und v, so folgt ähnlich wie in § 8, daß, wenn a mit m linear verbunden ist, und diese lineare Gleichung die einzige ist, in der a und m zusammen auftreten, eine zweite lineare Relation vorhanden sein muß, die α mit λ verbindet. Aus der letzteren kann man aber λ wegschaffen mittels desselben Verfahrens, welches oben auf l angewandt wurde; dann wird auch m aus seiner Verbindung mit a verschwinden.

Da die Funktionen a, b, c, l im allgemeinen durch keine linearen Relationen verbunden sind, so lassen sich aus den vier linearen Relationen zwischen a, a', b, b', c, c', l, m die Funktionen a', b', c', m durch a, b, c, l ausdrücken, wobei nach dem Vorangehenden die Ausdrücke für a', b', c' nur a, b, c, nicht aber l erhalten. Setzen wir diese Ausdrücke in (9) ein und beachten, daß wir zwischen a, b, c, l keine spezielle Abhängigkeit voraussetzen, so folgt daraus, daß durch unsere Substitution $\sum\left(\frac{d\,a'}{d\,u}\right)^2$ in $\sum\left(\frac{d\,a}{d\,u}\right)^2$ übergeht. Diese Substitution entspricht folglich einer Drehung der ursprünglichen P-Fläche um den Koordinatenanfang, eventuell verbunden mit einer Spiegelung, so daß die zweite P-Fläche der Form nach von der ersten nicht verschieden ist. Nur solche P-Flächen können in andere P-Flächen verbogen werden, deren Gleichungen mit den Lösungen (I, 1) — (II, 3) in §§ 11, 12 in Verbindung stehen.

14.

Bisher hatten wir nach Paaren von aufeinander abwickelbaren P-Flächen gesucht. Wir wollen nun untersuchen, ob es solche P-Flächen gibt, die kontinuierlich in andere P-Flächen verbogen werden können unter der Bedingung, daß das Liniensystem (u, v) bei dem Verbiegen der Fläche ein konjugiertes System bleiben soll. Mit anderen Worten: wir fragen nach solchen *kontinuierlichen Scharen von aufeinander abwickelbaren P-Flächen, bei denen es konjugierte Liniensysteme gibt, die auf allen Flächen der Schar einander entsprechen.*

Es mögen die Gleichungen (1') eine solche Flächenschar darstellen. Dann müssen a', α', b', β', c', γ' Funktionen eines „Biegungsparameters" t sein, die wir in bezug auf t differentiierbar voraussetzen wollen. Einem speziellen Werte t_0 dieses Parameters entspricht eine bestimmte Fläche der Schar, die durch (1) dargestellt werden möge. Dann ist es zur Lösung unserer Aufgabe nötig, die Gleichungen (8), (9):

$$\Sigma(a+\alpha)^2 - \Sigma(a'+\alpha')^2 = (l+\lambda)(m+\mu), \tag{8}$$

$$\begin{gathered} \sum\left(\frac{da}{du}\right)^2 - \sum\left(\frac{da'}{du}\right)^2 = \frac{dl}{du}\cdot\frac{dm}{du}, \\ \sum\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2 - \sum\left(\frac{d\alpha'}{dv}\right)^2 = \frac{d\lambda}{dv}\cdot\frac{d\mu}{dv}, \end{gathered} \tag{9}$$

auf solche Weise zu lösen, daß die Funktionen a', α', b', β', c', γ', m, μ von t abhängig seien, nicht aber a, α, b, β, c, γ, l, λ. Da wir gesehen haben, daß l, m, λ, μ mit den übrigen Funktionen durch keine lineare Relationen verbunden sind, so sind nur folgende Arten von Relationen zwischen diesen übrigen Funktionen möglich:

$$1)\ a = 0,\ a' = 0; \qquad 2)\ \alpha = 0,\ \alpha' = 0,$$
$$3)\ a = h^{-1}a',\ \alpha = h\alpha'; \qquad 4)\ a + \alpha = a' + \alpha' + k,$$

wobei h, k von t abhängen.

Setzen wir diese Relationen in (8), (9) ein, so ergibt eine einfache Untersuchung, auf die wir hier nicht eingehen wollen, daß unsere Aufgabe nur dreierlei Lösungen zuläßt. Es sind die folgenden:

$$a = a' = 0,\quad b = b' = 0,\quad \gamma = \gamma' = 0,\quad \lambda = \mu = 0. \tag{A}$$

Hier nehmen Gl. (8), (9) die Form an

$$\begin{gathered} \alpha^2 + \beta^2 + c^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 + c'^2 + lm, \\ \left(\frac{dc}{du}\right)^2 = \left(\frac{dc'}{du}\right)^2 + \frac{dl}{du}\cdot\frac{dm}{du}, \\ \left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dv}\right)^2 = \left(\frac{d\alpha'}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\beta'}{dv}\right)^2. \end{gathered}$$

Die erste Gleichung zerfällt in die beiden anderen:

$$\begin{gathered} c^2 = c'^2 + lm + h, \\ \alpha^2 + \beta^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 - h, \end{gathered}$$

wobei h eine Konstante ist. Verfährt man hier wie in (II, 1) § 12, so bekommt man

$$c' = l\int\sqrt{\left[\frac{d}{du}\left(\frac{c}{l}\right)\right]^2 - h\left[\frac{d}{du}\,\frac{1}{l}\right]^2}\,du,$$

$$\operatorname{arctg}\frac{\beta'}{\alpha'} = \int\frac{\sqrt{\left(\alpha\,\frac{d\beta}{dv} - \beta\,\frac{d\alpha}{dv}\right)^2 + h\left[\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dv}\right)^2\right]}}{\alpha^2+\beta^2+h}\,dv.$$

Ersetzen wir hier $\frac{c}{l}$, $\frac{c'}{l}$, $\frac{1}{l}$ durch c, c', l und tragen diese Ausdrücke in (1) ein, so bekommen wir folgende Gleichungen mit dem Biegungsparameter h:

$$
(30)\qquad
\begin{aligned}
x &= l\sqrt{\alpha^2+\beta^2+h}\cos\varphi,\\
y &= l\sqrt{\alpha^2+\beta^2+h}\sin\varphi,\\
z &= \int\sqrt{\left(\frac{dc}{du}\right)^2 - h\left(\frac{dl}{du}\right)^2}\,du,\\
\varphi &= \int\frac{\sqrt{\left(\alpha\,\frac{d\beta}{dv} - \beta\,\frac{d\alpha}{dv}\right)^2 + h\left[\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dv}\right)^2\right]}}{\alpha^2+\beta^2+h}\,dv.
\end{aligned}
$$

Die Linien $u = \text{const.}$ sind hier der xy-Ebene parallel; es sind Berührungslinien der umgeschriebenen Kegel, deren Spitzen auf der z-Achse liegen. Die Linien $v = \text{const.}$ sind ebene Kurven, deren Ebenen durch die z-Achse hindurchgehen; sie sind Berührungslinien der umgeschriebenen Zylinder, deren Erzeugenden parallel der xy-Ebene verlaufen.

Die Flächen (30) können aus Rotationsflächen erzeugt werden. Hat man eine Rotationsfläche

$$x = l\cos\varphi,\quad y = l\sin\varphi,\quad z = \int\sqrt{\left(\frac{dc}{du}\right)^2 - h\left(\frac{dl}{du}\right)^2}\,du,$$

wobei φ den in (30) angegebenen Wert hat, so braucht man nur die Abstände ihrer Punkte von der Rotationsachse im Verhältnis $\sqrt{\alpha^2+\beta^2+h} : 1$ zu verändern, um die Fläche (29) zu haben.

Diese Flächen sind von mir im Bulletin des Sciences Mathématiques 2. sér., t. 15 ausführlich behandelt worden.

Setzt man in (30) $\alpha = \cos v$, $\beta = \sin v$, so entstehen die bekannten Biegungen von Rotationsflächen. Setzt man aber

$$\alpha = A\cos v,\quad \beta = B\sin v,\quad c = C\sin u,\quad l = \cos u,$$

wobei A, B, C Konstanten bedeuten, so hat man aus (30)

$$
(31)\qquad
\begin{aligned}
x &= \cos u\sqrt{A^2\cos^2 v + B^2\sin^2 v + h}\cos\varphi,\\
y &= \cos u\sqrt{A^2\cos^2 v + B^2\sin^2 v + h}\sin\varphi,\\
z &= \int\sqrt{C^2\cos^2 u - h\sin^2 u}\,du,\\
\varphi &= \int\frac{\sqrt{A^2B^2 + h(A^2\sin^2 v + B^2\cos^2 v)}}{A^2\cos^2 v + B^2\sin^2 v + h}\,dv.
\end{aligned}
$$

Für $h = 0$ haben wir

$$x = A \cos u \cos v, \quad y = B \cos u \sin v, \quad z = C \sin u.$$

Demnach sind (31) Biegungen von Mittelpunktsflächen 2ter Ordnung.

Wir gehen nun zur zweiten Lösung unserer Aufgabe über:

(B) $\quad a = h^{-1} a', \quad \alpha = h\alpha', \quad b = b' = 0, \quad \gamma = \gamma' = 0, \quad l + \lambda = 1.$

Die Gleichungen (8), (9) verwandeln sich in

$$a^2(1-h^2) + \alpha^2(1-h^{-2}) + \beta^2 + c^2 = \beta'^2 + c'^2 + m + \mu,$$
$$\left(\frac{da}{du}\right)^2(1-h^2) + \left(\frac{dc}{du}\right)^2 = \left(\frac{dc'}{du}\right)^2,$$
$$\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2(1-h^{-2}) + \left(\frac{d\beta}{dv}\right)^2 = \left(\frac{d\beta'}{dv}\right)^2.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen bestimmt man durch Quadraturen c und β', worauf die erste Gleichung $m + \mu$ liefert. Die Gleichungen (1) ergeben dann

$$\begin{aligned} x &= ah + \alpha h^{-1}, \\ y &= \int \sqrt{\left(\frac{d\beta}{dv}\right)^2 + (1+h^{-2})\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2}\, dv, \\ z &= \int \sqrt{\left(\frac{dc}{du}\right)^2 + (1-h^2)\left(\frac{da}{du}\right)^2}\, du. \end{aligned} \tag{32}$$

Diese Gleichungen stellen aufeinander abwickelbare Translationsflächen dar, mit dem Biegungsparameter h. Dieser Fall kann als Grenzfall des vorangehenden betrachtet werden, der entsteht, wenn wir in (30) die z-Achse ins Unendliche rücken lassen, wie das in meinem oben zitierten Aufsatze im Bulletin des Sciences Mathématiques gezeigt worden ist. Das konjugierte System (u, v) besteht hier aus zwei Scharen von zylindrischen Linien, die parallel zu den xy- und xz-Ebenen verlaufen.

Die dritte Lösung entspricht den Voraussetzungen

(C) $\quad a = h^{-1}a', \ \alpha = h\alpha', \ b = h^{-1}b', \ \beta = h\beta', \ c = h^{-1}c', \ \gamma = h\gamma', \ l + \lambda = 1.$

Hier erhalten (8), (9) die Form

$$(a^2 + b^2 + c^2)(1-h^2) + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(1-h^{-2}) = m + \mu,$$
$$\left(\frac{da}{du}\right)^2 + \left(\frac{db}{du}\right)^2 + \left(\frac{dc}{du}\right)^2 = 0,$$
$$\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{dv}\right)^2 = 0,$$

Die beiden letzten Gleichungen zeigen, daß die Linien $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ Minimalkurven sind; da sie ein konjugiertes System bilden, so sind die dieser Lösung entsprechenden Flächen Minimalflächen. Um reelle Flächen zu haben, müssen wir u und v konjugiert imaginär nehmen, für a, b, c und α, β, γ drei Paare konjugierter Funktionen dieser Veränderlichen wählen und $h = e^{ik}$ bei reellem k setzen. Dann geben (1) die Gleichungen von aufeinander abwickelbaren Minimalflächen

$$(33) \qquad x = e^{ik}a + e^{-ik}\alpha, \quad y = e^{ik}b + e^{-ik}\beta, \quad z = e^{ik}c + e^{-ik}\gamma,$$

mit k als Biegungsparameter.

Die Fälle (A), (B), (C) sind, abgesehen von Kegeln und Zylindern, die einzigen, bei denen eine kontinuierliche Biegung von P-Flächen in andere P-Flächen möglich ist. Dieselben sind bereits 1866 von Peterson angegeben worden.

Zur Theorie des relativbiquadratischen Zahlkörpers.*)

Von

Stephan Bochníček in Agram (Kroatien).

In W. Lietzmanns Inaugural-Dissertation: „Über das biquadratische Reziprozitätsgesetz in algebraischen Zahlkörpern“ (Göttingen 1904) befinden sich Sätze, die einen Teil des Beweises des biquadratischen Reziprozitätsgesetzes in algebraischen Zahlkörpern ausmachen. Wir knüpfen an diese Dissertation an.

Im ersten Teile der vorliegenden Arbeit soll als Grundkörper k ein beliebiger Oberkörper des durch die Einheitswurzel $i = \sqrt{-1}$ definierten Körpers $k(i)$ mit ungerader Klassenzahl genommen und für ihn die Sätze über die primären Primideale und das spezielle biquadratische Reziprozitätsgesetz in der Gestalt

$$\left(\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right)\right) = \left(\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right)\right)^n \quad (n = 1 \text{ oder } 3)$$

allgemein bewiesen werden.

Im zweiten Teile wird dann angenommen, daß für den Körper k auch das Gesetz

$$\left(\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right)\right) = \left(\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right)\right)$$

als richtig nachgewiesen sei, und auf Grund dieser Annahme das allgemeine biquadratische Reziprozitätsgesetz in Hilbertscher Fassung für den Körper k bewiesen.

I. Teil.

§ 1.

Die Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$.

Es sei k ein beliebiger Oberkörper des Körpers $k(i)$ und μ eine ganze Zahl in k, die nicht das Quadrat einer ganzen Zahl desselben Körpers k ist.

---

*) Kroatisch erschienen in den Sitzungsberichten der Südslavischen Akademie der Wissenschaften und Künste in Agram, Bd. 163.

Bezeichnet man mit $D_{\sqrt[4]{\mu}, k}$ die Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu}, k)$ in bezug auf k, ferner mit $D_{\sqrt[4]{\mu}, \sqrt{\mu}}$ die Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ bezüglich $K(\sqrt{\mu}, k)$ und schließlich mit $D_{\sqrt{\mu}, k}$ die Relativdiskriminante von $K(\sqrt{\mu})$ in bezug auf k, so gilt die Beziehung

$$(1) \qquad D_{\sqrt[4]{\mu}, k} = D^2_{\sqrt{\mu}, k} N_{\sqrt{\mu}, k}\left(D_{\sqrt[4]{\mu}, \sqrt{\mu}}\right),$$

wobei unter $N_{\sqrt{\mu}, k}$ die Norm in $K(\sqrt{\mu})$ genommen in bezug auf k zu verstehen ist.

Demzufolge enthält $D_{\sqrt[4]{\mu}, k}$ nur diejenigen Primideale des Körpers k als Faktoren, welche in mindestens einer der Zahlen

$$D_{\sqrt{\mu}, k}, \; N_{\sqrt{\mu}, k}\left(D_{\sqrt[4]{\mu}, \sqrt{\mu}}\right)$$

aufgehen. Es kann leicht gezeigt werden, daß jeder Primfaktor des Körpers k, welcher in $D_{\sqrt{\mu}, k}$ aufgeht, auch in $N_{\sqrt{\mu}, k}\left(D_{\sqrt[4]{\mu}, \sqrt{\mu}}\right)$ aufgehen muß. Durch solche Primideale müssen jedoch noch nicht sämtliche Primfaktoren von $D_{\sqrt[4]{\mu}, k}$ erschöpft sein; es kann vorkommen, daß $D_{\sqrt[4]{\mu}, k}$ auch solche Primfaktoren enthält, welche nicht in $D_{\sqrt{\mu}, k}$, wohl aber in

$$N_{\sqrt{\mu}, k}\left(D_{\sqrt[4]{\mu}, \sqrt{\mu}}\right)$$

aufgehen.

Über diejenigen Primideale $\mathfrak{p}$, die zu $1 + i$ prim und in $D_{\sqrt[4]{\mu}, k}$ als Faktoren enthalten sind, vergleiche man Satz 5 der Lietzmannschen Dissertation.

Über diejenigen Primideale, die in $1 + i$ aufgehen, wollen wir folgenden Satz beweisen:

Satz 1. Es sei $\mathfrak{l}$ ein in $1 + i$ genau zur l^{ten} Potenz aufgehendes Primideal des Körpers k; es sei ferner μ eine genau durch die a^{te} Potenz von $\mathfrak{l}$ teilbare ganze Zahl in k, die nicht das Quadrat einer ganzen Zahl desselben Körpers k ist; schließlich sei $\bar{\mathfrak{l}}$ ein in $\mathfrak{l}$ aufgehendes Primideal des Körpers $K(\sqrt{\mu})$; so ist die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu}, k}$ dann und nur dann prim zu $\mathfrak{l}$, wenn die Beziehungen

$$(2) \qquad \mu \equiv \alpha^2, \quad (\mathfrak{l}^{4l+a}),$$

$$(2^*) \qquad \sqrt{\mu} \equiv \bar{\alpha}^2, \quad \left(\bar{\mathfrak{l}}^{4l+\frac{a}{2}}\right)$$

statthaben, wobei α eine ganze Zahl in k, $\bar{\alpha}$ eine ganze Zahl in $K(\sqrt{\mu})$ bedeutet und a eine gerade positive ganze rationale Zahl ist, die sich durch 4 teilbar erweisen wird.

Ist $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right) = +1$, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß μ dem

Biquadrate einer ganzen Zahl in k nach dem Modul $\mathfrak{l}^{6l+a}$ kongruent werde; ist hingegen $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right) = -1$, so ist dazu notwendig, daß μ dem Biquadrate einer ganzen Zahl in k nach dem Modul $\mathfrak{l}^{4l+a}$ kongruent werde; diese Bedingung ist jedoch nicht ausreichend und wir werden später (man vergleiche hierzu Satz 22) auch eine solche aufstellen.

Beweis. Die Beziehungen (2) und (2*) folgen sofort aus der Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers, wenn man die Gleichung (1) beachtet.

Nun sei weiter $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right) = +1$: dann zerfällt das Primideal $\mathfrak{l}$ im Körper $K(\sqrt{\mu})$ in zwei voneinander verschiedene Primideale $\overline{\mathfrak{l}}$, $S\overline{\mathfrak{l}}$ nach der Gleichung

$$\mathfrak{l} = \overline{\mathfrak{l}} \cdot S\overline{\mathfrak{l}},$$

wobei unter S die Substitution $S = (\sqrt{\mu} : -\sqrt{\mu})$ zu verstehen ist. Aus (2*) ergibt sich leicht die Gleichung

$$(3) \qquad \mu \equiv \overline{\alpha}^4, \quad (\overline{\mathfrak{l}}^{6l+a}).$$

Wir beachten jetzt die Beziehung

$$n_{\sqrt{\mu}}(\overline{\mathfrak{l}}^e) = n(\mathfrak{l}^e),$$

wo e eine beliebige positive ganze rationale Zahl bedeutet und unter $n_{\sqrt{\mu}}$ die Norm genommen in $K(\sqrt{\mu})$, unter n die Norm genommen in k zu verstehen ist. Dieser Beziehung zufolge ist die Anzahl der untereinander inkongruenten Reste des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ bezüglich des Moduls $\overline{\mathfrak{l}}^e$ genau gleich der Anzahl der untereinander inkongruenten Reste des Körpers k in bezug auf den Modul $\mathfrak{l}^e$. Es sind aber zwei untereinander nach dem Modul $\mathfrak{l}^e$ inkongruente ganze Zahlen α, β des Körpers k auch nach $\overline{\mathfrak{l}}^e$ inkongruent, denn wäre

$$\alpha \equiv \beta, \quad (\overline{\mathfrak{l}}^e),$$

so würde hieraus weiter folgen, daß auch

$$\alpha \equiv \beta, \quad (S\overline{\mathfrak{l}}^e)$$

sein muß, und es müßte dann, weil $\overline{\mathfrak{l}}^e$ und $S\overline{\mathfrak{l}}^e$ relativ prime Ideale sind, auch $\alpha \equiv \beta$ nach $\mathfrak{l}^e$ sein. Da auch umgekehrt zwei untereinander nach dem Modul $\overline{\mathfrak{l}}^e$ inkongruente ganze Zahlen α, β des Körpers k gewiß auch nach $\mathfrak{l}^e$ inkongruent sind, so kann jede ganze Zahl $\overline{\alpha}$ des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ einer ganzen Zahl α des Körpers k nach $\overline{\mathfrak{l}}^e$ kongruent gesetzt werden. Tun wir dies insbesondere in der Kongruenz (3), indem wir

$$\overline{\alpha} \equiv \alpha, \quad (\overline{\mathfrak{l}}^{6l+a})$$

annehmen, so ergibt sich

$$\mu \equiv \alpha^4, \quad (\mathfrak{l}^{6l+a})$$

und hieraus

$$\mu \equiv \alpha^4, \quad (S\mathfrak{l}^{6l+a});$$

beides zusammengenommen liefert den Beweis für die Behauptung des Satzes 1.

Die Umkehrung ergibt sich wie bei Lietzmann, pag. 16.

Nun sei weiter $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right) = -1$, so bleibt $\mathfrak{l}$ in $K(\sqrt{\mu})$ unzerlegt. Wir schreiben (2*) folgendermaßen

$$\text{(4)} \qquad \sqrt{\mu} \equiv \left(\frac{\varrho + \sigma\sqrt{\mu}}{\tau}\right)^2, \quad \left(\mathfrak{l}^{4l+\frac{a}{2}}\right),$$

wobei $\frac{\varrho + \sigma\sqrt{\mu}}{\tau}$ eine ganze Zahl in $K(\sqrt{\mu})$, ϱ, σ, τ ganze Zahlen in k sein sollen. Es sei das Primideal $\mathfrak{l}$ in den Zahlen ϱ, σ, τ der Reihe nach genau zur r^{ten}, s^{ten}, t^{ten} Potenz enthalten. Da $\frac{\varrho + \sigma\sqrt{\mu}}{\tau}$ eine ganze Zahl sein soll, so muß es auch $\frac{\varrho - \sigma\sqrt{\mu}}{\tau}$ sein, folglich auch ihre Summe $\frac{2\varrho}{\tau}$ und ihre Differenz $\frac{2\sigma\sqrt{\mu}}{\tau}$. Hieraus ist zu entnehmen, daß

$$\text{(5)} \qquad r + 2l \geqq t, \quad s + \frac{a}{2} + 2l \geqq t$$

sein muß.

Weiter muß $N_{\sqrt{\mu}, k}\left(\frac{\varrho + \sigma\sqrt{\mu}}{\tau}\right) = \frac{\varrho^2 - \sigma^2\mu}{\tau^2}$ eine ganze Zahl sein, woraus wegen (4) die Beziehung

$$\text{(6)} \qquad \varrho^2 - \sigma^2\mu \equiv 0, \quad \left(\mathfrak{l}^{2t+\frac{a}{2}}\right)$$

folgt. Nun folgern wir aus (4) die Kongruenz

$$\text{(7)} \qquad -\sqrt{\mu} \equiv \left(\frac{\varrho - \sigma\sqrt{\mu}}{\tau}\right)^2, \quad \left(\mathfrak{l}^{4l+\frac{a}{2}}\right).$$

Addiert man (7) zu (4), so ergibt sich

$$\frac{\varrho^2 + \sigma^2\mu}{\tau^2} \equiv 0, \quad \left(\mathfrak{l}^{2l+\frac{a}{2}}\right);$$

somit muß

$$\text{(8)} \qquad \varrho^2 + \sigma^2\mu \equiv 0, \quad \left(\mathfrak{l}^{2l+\frac{a}{2}+2t}\right)$$

sein, woraus wir weiter die folgende Kongruenz ableiten:

$$\varrho^2 - \sigma^2\mu \equiv -2\sigma^2\mu, \quad \left(\mathfrak{l}^{2l+\frac{a}{2}+2t}\right).$$

Vergleicht man diese Kongruenz mit (6), so ersieht man unmittelbar, daß

(9) $$s = t - \frac{a}{4} - l$$

sein muß. In ähnlicher Weise schließen wir, indem wir (8) auf die Form

$$\sigma^2\mu - \varrho^2 \equiv -2\varrho^2, \quad \left(\mathfrak{l}^{2l+\frac{a}{2}+2t}\right)$$

bringen, durch Vergleichung mit (6), daß

(10) $$r = t + \frac{a}{4} - l$$

ist.

Nachdem die Beziehungen (9) und (10) festgestellt sind, leiten wir aus (2) die Kongruenz

$$\sqrt{\mu} \equiv \alpha, \quad \left(\mathfrak{l}^{2l+\frac{a}{2}}\right)$$

ab und überzeugen uns leicht von der Richtigkeit der folgenden Kongruenz:

$$\sqrt{\mu} \equiv \left(\frac{\varrho + \sigma\alpha}{\tau}\right)^2, \quad \left(\mathfrak{l}^{2l+\frac{a}{2}}\right).$$

Bestimmen wir nun eine ganze Zahl β in k, so daß

$$\frac{\varrho + \sigma\alpha}{\tau} \equiv \beta, \quad \left(\mathfrak{l}^{2l+\frac{a}{2}}\right)$$

wird, was hier möglich ist, so können wir die Beziehung

$$\sqrt{\mu} \equiv \beta^2, \quad \left(\mathfrak{l}^{2l+\frac{a}{2}}\right)$$

aufschreiben. Da aber auch

$$-\sqrt{\mu} \equiv \beta^2, \quad \left(\mathfrak{l}^{2l+\frac{a}{2}}\right)$$

sein muß, so ergibt sich schließlich

(11) $$\mu \equiv \beta^4, \quad (\mathfrak{l}^{4l+a}),$$

wie Satz 1 behauptet.

Umgekehrt kann aber nicht geschlossen werden, daß aus (11) die Kongruenzen (2) und (2*) folgen, es kann vielmehr vorkommen, daß die Kongruenzen (2) und (2*) nicht erfüllt werden können, obwohl die Beziehung (11) statthat. So sind beispielsweise im Körper der imaginären Zahlen $k(i)$ die Zahlen $1 + 4i$ und -3 beide kongruent 1 nach 4. Im Körper $K(\sqrt{1+4i})$ besteht die Beziehung

$$\sqrt{1+4i} \equiv \left(\frac{1 - i\sqrt{1+4i}}{1+i}\right)^2, \quad (4);$$

folglich ist die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{1+4i},\,k(i)}$ prim zu $1+i$. Die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{-3},\,k(i)}$ ist hingegen teilbar durch $1+i$. In der Tat ist die ganze Zahl

$$A = \frac{2+i+(1+i)\sqrt[4]{-3}+\sqrt{-3}}{2}$$

des Körpers $K(\sqrt[4]{-3})$ nicht mehr teilbar durch $1+i$, ihre Norm $N_{\sqrt[4]{-3},\,k(i)}(A)$ jedoch genau durch 2 teilbar, woraus zu folgern ist, daß das Primideal $1+i$ des Körpers $k(i)$, welches in $K(\sqrt{-3})$ unzerlegt bleibt, im Körper $K(\sqrt[4]{-3})$ das Quadrat eines Primideals wird, weil es wegen $\left(\frac{-3}{1+i}\right) = -1$ nicht in zwei voneinander verschiedene Primideale des Körpers $K(\sqrt[4]{-3})$ zerfallen kann.

Wir wollen hier nun noch den folgenden Satz über die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu},\,k}$ ableiten:

Satz 2. Es seien μ, μ^* zwei beliebige ganze Zahlen des Körpers k, die nicht dem Quadrate ganzer Zahlen desselben Körpers k gleich sind, und es sei das in $1+i$ aufgehende Primideal $\mathfrak{l}$ des Körpers k in den Zahlen μ, μ^* genau in der a^{ten} Potenz enthalten. Besteht dann die Beziehung

$$(12) \qquad \mu \equiv \mu^*, \quad (\mathfrak{l}^{6l+a}),$$

so sind die Relativdiskriminanten $D_{\sqrt[4]{\mu},\,k}$, $D_{\sqrt[4]{\mu^*},\,k}$ entweder beide zugleich prim zu $\mathfrak{l}$ oder beide zugleich durch $\mathfrak{l}$ teilbar.

Beweis. Es sei die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu},\,k}$ zu $\mathfrak{l}$ prim. Soll jetzt bewiesen werden, daß auch die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu^*},\,k}$ zu $\mathfrak{l}$ prim sein muß, so genügt es zu zeigen, daß die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu\mu^*},\,k}$ zu $\mathfrak{l}$ prim ist, weil der Körper, der durch Zusammensetzung der Körper $K(\sqrt[4]{\mu})$ und $K(\sqrt[4]{\mu^*})$ entsteht, mit dem Körper, der sich durch Zusammensetzung von $K(\sqrt[4]{\mu})$ mit $K(\sqrt[4]{\mu\mu^*})$ ergibt, identisch ist.

Es sei ferner $\bar{\mathfrak{l}}$ ein Primfaktor von $\mathfrak{l}$ im Körper $K(\sqrt{\mu\mu^*})$; es gibt dann in diesem Körper $K(\sqrt{\mu\mu^*})$ eine Zahl $\bar{\alpha}$, so daß

$$(13) \qquad \mu \equiv \bar{\alpha}^2, \quad (\bar{\mathfrak{l}}^{4l+a})$$

wird, weil die Relativdiskriminante desjenigen Körpers, der durch Zusammensetzung der Körper $K(\sqrt{\mu\mu^*})$ und $K(\sqrt{\mu})$ entsteht, in bezug auf den Körper $K(\sqrt{\mu\mu^*})$ zu $\bar{\mathfrak{l}}$ prim ist. Nach Voraussetzung (12) ist aber

$$\mu\mu^* \equiv \mu^2, \quad (\bar{\mathfrak{l}}^{6l+2a});$$

daher muß

$$(\sqrt{\mu\mu^*}+\mu)(\sqrt{\mu\mu^*}-\mu)\equiv 0, \quad (\mathfrak{l}^{6l+2a})$$

sein. Folglich ist entweder

$$\sqrt{\mu\mu^*}+\mu\equiv 0, \quad (\mathfrak{l}^{4l+a}),$$

oder

$$\sqrt{\mu\mu^*}-\mu\equiv 0, \quad (\mathfrak{l}^{4l+a}).$$

Es gibt daher, wie man mit Hilfe von (13) schließt, eine Zahl $\bar{\beta}$ in $K(\sqrt{\mu\mu^*})$, so daß

$$\sqrt{\mu\mu^*}\equiv\bar{\beta}^2, \quad (\mathfrak{l}^{4l+a})$$

wird, d. h. die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu\mu^*},\,k}$ ist zu $\mathfrak{l}$ prim, w. z. b. w.

Da auch umgekehrt in derselben Weise folgt, daß die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu},\,k}$ zu $\mathfrak{l}$ prim sein muß, wenn es $D_{\sqrt[4]{\mu^*},\,k}$ ist, so ist damit Satz 2 bewiesen.

§ 2.

Die Zerlegung der Primideale des Körpers k im Körper $K(\sqrt[4]{\mu})$.

Betreffs der Zerlegung der Primideale des Körpers k im Körper $K(\sqrt[4]{\mu})$ verweisen wir auf die Lietzmannsche Dissertation. Es möge jedoch darauf hingewiesen werden, daß im Falle $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right)=-1$ die Beziehung $\left(\frac{\sqrt{\mu}}{\mathfrak{l}}\right)_{\sqrt{\mu}}=-1$ möglich ist, so daß das Primideal $\mathfrak{l}$ in $K(\sqrt[4]{\mu})$ unzerlegt bleibt.

Das Symbol $\left(\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right)\right)$ ist folgendermaßen zu definieren:

Definition 1. Es sei μ eine ganze Zahl des Körpers k, die nicht das Quadrat einer Zahl in k ist, und $\mathfrak{l}$ ein in $1+i$ zur l^{ten}, in μ zur a^{ten} Potenz aufgehendes Primideal in k. Dann soll $\left(\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right)\right)=0$ sein, wenn die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu},\,k}$ durch $\mathfrak{l}$ teilbar ist; ferner sei $\left(\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right)\right)=+1$, wenn μ dem Biquadrate einer ganzen Zahl in k nach dem Modul $\mathfrak{l}^{6l+a+1}$ kongruent ist, und $\left(\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right)\right)=-1$, wenn μ dem Biquadrate einer ganzen Zahl in k nach $\mathfrak{l}^{6l+a}$, aber nicht mehr nach $\mathfrak{l}^{6l+a+1}$ kongruent ausfällt; schließlich $\left(\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right)\right)=\pm i$, wenn $\left(\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right)\right)\neq 0$ und $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right)=-1$ ist.

Bei Anwendung dieser Definition gilt für die Zerlegung der Primideale des Körpers k Satz 10 der Lietzmannschen Dissertation; ebenso Satz 11.

§ 3.

Der Begriff des biquadratischen Normenrestes und das biquadratische Normenrestsymbol.

Hinsichtlich dieser Begriffe vergleiche man § 6 und § 7 der Lietzmannschen Dissertation.

§ 4.

Die relativen Grundeinheiten des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ in bezug auf den Körper $K(\sqrt{\mu})$.

Der Körper k vom Grade $2m$ sei nebst seinen konjugierten Körpern $k', \cdots, k^{(2m-1)}$ imaginär. Wir beweisen folgenden Satz:

Satz 3. Das System der relativen Grundeinheiten des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ in bezug auf den Körper $K(\sqrt{\mu})$ läßt sich stets in der Gestalt

$$\mathsf{H}_1,\ S\mathsf{H}_1,\ \cdots,\ \mathsf{H}_m,\ S\mathsf{H}_m$$

darstellen, wo $\mathsf{H}_1, \cdots, \mathsf{H}_m$ gewisse Einheiten in $K(\sqrt[4]{\mu})$ sind, und S die Substitution $(\sqrt[4]{\mu} : i\sqrt[4]{\mu})$ bedeutet.

Beweis. Es sei $\bar{\varepsilon}_1, \cdots, \bar{\varepsilon}_{2m-1}$ ein System von Grundeinheiten des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ und E_1 eine solche Einheit in $K(\sqrt[4]{\mu})$, daß das System $\mathsf{E}_1, \bar{\varepsilon}_1, \cdots, \bar{\varepsilon}_{2m-1}$ ein System von unabhängigen Einheiten vorstellt; dann müssen auch die Einheiten $\mathsf{E}_1, S\mathsf{E}_1, \bar{\varepsilon}_1, \cdots, \bar{\varepsilon}_{2m-1}$ ein System von unabhängigen Einheiten darstellen. Wir machen die gegenteilige Annahme und denken uns $\mathsf{E}_1^{a_1+b_1S} = \bar{\varepsilon}$, wo a_1, b_1 ganze rationale Zahlen bedeuten, die nicht beide 0 sind, und $\bar{\varepsilon}$ eine Einheit in $K(\sqrt{\mu})$ vorstellt. Beachten wir nun die Identität

$$(a_1 + b_1S)(a_1 - b_1S) + b_1^2(1 + S^2) = a_1^2 + b_1^2,$$

in welcher die Summe $a_1^2 + b_1^2$ der gemachten Voraussetzung gemäß nicht verschwinden kann, so folgt hieraus sofort, wenn man beachtet, daß $\mathsf{E}_1^{1+S^2}$ eine Einheit in $K(\sqrt{\mu})$ darstellt, eine Beziehung von der Form

$$\mathsf{E}_1^{a_1^2+b_1^2} = \bar{\varepsilon}^*,$$

wo $\bar{\varepsilon}^*$ eine Einheit in $K(\sqrt{\mu})$ ist, was unserer Annahme zuwiderläuft.

Nunmehr wählen wir eine Einheit E_2 in $K(\sqrt[4]{\mu})$, so daß $\mathsf{E}_2, \mathsf{E}_1, \mathsf{E}_1^S, \bar{\varepsilon}_1, \cdots, \bar{\varepsilon}_{2m-1}$ ein System unabhängiger Einheiten bilden, und beweisen in ähnlicher Weise, daß dann auch die Einheiten $\mathsf{E}_2, \mathsf{E}_2^S, \mathsf{E}_1, \mathsf{E}_1^S, \bar{\varepsilon}_1, \cdots, \bar{\varepsilon}_{2m-1}$ voneinander unabhängig sind. So fortfahrend, gelangen wir zu $4m-1$ Einheiten

$$\mathsf{E}_s,\ \mathsf{E}_s^S,\ \bar{\varepsilon}_1, \cdots, \bar{\varepsilon}_{2m-1} \qquad (s = 1, 2, \cdots, m),$$

die ein System von unabhängigen Einheiten bilden. Die Anzahl der Grundeinheiten in $K(\sqrt{\mu})$ beträgt aber auch $4m-1$, und wir können auf Grund dessen ebenso wie Hilbert*) (H. A. Z. § 55, Seite 274) zeigen, daß man immer eine Potenz 2^m von 2 finden kann, so daß ein Ausdruck von der Form

$$\mathsf{E}_1^{a_1+b_1 S} \cdots \mathsf{E}_m^{a_m+b_m S}[\theta] \tag{1}$$

nicht anders eine $2^{m\text{te}}$ Potenz einer Einheit in $K(\sqrt[4]{\mu})$ werden kann, als wenn die ganzen rationalen Zahlen $a_1, \cdots, a_m$, $b_1, \cdots, b_m$ sämtlich gerade sind; und ebenso, daß der Ausdruck (1) nicht anders eine $(1-S)^{2m\text{te}}$ symbolische Potenz einer Einheit in $K(\sqrt[4]{\mu})$ werden kann, als wenn die ganzen algebraischen Zahlen $a_1 + b_1 i, \cdots, a_m + b_m i$ sämtlich durch $1-i$ teilbar sind.

Weiter bilden wir analog wie Hilbert ein System von Einheiten $\mathsf{H}_1, \cdots, \mathsf{H}_m$ folgendermaßen: Es sei e_1 die größte ganze rationale Zahl $\geqq 0$ von der Art, daß ein Ausdruck von der Gestalt (1) eine $(1-S)^{e_1\text{te}}$ symbolische Potenz einer Einheit ist, ohne daß sämtliche Zahlen $a_1 + b_1 i, \cdots, a_m + b_m i$ durch $1-i$ teilbar sind; wir nehmen an, es sei ein solcher Ausdruck

$$\mathsf{E}_1^{a_1+b_1 S} \cdots \mathsf{E}_m^{a_m+b_m S}[\bar{\varepsilon}] = \mathsf{H}_1^{(1-S)^{e_1}},$$

wo $a_1, \cdots, a_m$, $b_1, \cdots, b_m$ ganze rationale Zahlen bedeuten und etwa $a_1 + b_1 i$ nicht durch $1-i$ teilbar sein möge; $[\bar{\varepsilon}]$ hat die frühere Bedeutung und H_1 ist eine gewisse Einheit des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$. In ähnlicher Weise bestimmen wir $\mathsf{H}_2, \cdots, \mathsf{H}_m$. Man vergleiche hierzu durchweg H. A. Z. § 55.

Dann bilden die Einheiten H_1, $S\mathsf{H}_1, \cdots, \mathsf{H}_m$, $S\mathsf{H}_m$ ein System von relativen Grundeinheiten des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ in bezug auf $K(\sqrt{\mu})$. Davon überzeugt man sich leicht, wie bei H. A. Z. § 55. Man hat dabei nur zu beachten, daß $\mathsf{H}_s^{a_s+b_s S}$, wenn $a_s + b_s i$ durch $1-i$ teilbar ist, das Produkt aus einer symbolischen $(1-S)^{\text{ten}}$ Potenz einer Einheit in $K(\sqrt[4]{\mu})$ mit einer Einheit in $K(\sqrt{\mu})$ vorstellt.

Mit Hilfe der eben bestimmten relativen Grundeinheiten $\mathsf{H}_1, S\mathsf{H}_1, \cdots, \mathsf{H}_m, S\mathsf{H}_m$ beweist man nun den folgenden Satz:

Satz 4. Bedeutet H_1, $S\mathsf{H}_1, \cdots, \mathsf{H}_m$, $S\mathsf{H}_m$ ein System von relativen Grundeinheiten des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ in bezug auf $K(\sqrt{\mu})$, dann gilt für eine beliebige Einheit E in $K(\sqrt[4]{\mu})$ jedesmal eine Gleichung von der Gestalt

$$\mathsf{E}^f = \mathsf{H}_1^{a_1+b_1 S} \cdots \mathsf{H}_1^{a_m+b_m S}[\bar{\varepsilon}], \tag{2}$$

wobei f eine ungerade ganze rationale Zahl ist; $a_1, \cdots, a_m$, $b_1, \cdots, b_m$ bedeuten gewisse ganze rationale Zahlen und $[\bar{\varepsilon}]$ eine Einheit in $K(\sqrt{\mu})$ oder eine solche Einheit in $K(\sqrt[4]{\mu})$, deren Quadrat in $K(\sqrt{\mu})$ liegt.

---

*) D. Hilbert: Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1897 (zitiert mit H. A. Z.).

Der Beweis dieses Satzes schließt sich genau an H. A. Z. § 146 an und wir wollen ihn deshalb übergehen.

Im Körper $K(\sqrt[4]{\mu})$ besteht nur dann eine solche Einheit, deren Quadrat in $K(\sqrt{\mu})$ liegt, wenn $\sqrt{\mu}$ von der Gestalt $\bar{\xi}\bar{\alpha}^2$ ist, wobei $\bar{\xi}$ eine Einheit und $\bar{\alpha}$ eine ganze Zahl in $K(\sqrt{\mu})$ ist. In diesem Falle wird man $[\bar{\varepsilon}]$ in der Form

$$[\bar{\varepsilon}] = \bar{\eta}\left(\sqrt{\bar{\xi}}\right)^e$$

darstellen können, wobei $\bar{\eta}$ eine Einheit in $K(\sqrt{\mu})$ bedeutet und e einen der Werte 0 oder 1 vorstellt.

Gleichung (2) wird demnach, wenn $\sqrt{\mu}$ nicht von der Gestalt $\bar{\xi}\bar{\alpha}^2$ ist, die Form

$$\mathsf{E}^f = \mathsf{H}_1^{a_1 + b_1 S} \cdots \mathsf{H}_m^{a_m + b_m S}\,\bar{\eta} \tag{3}$$

und, wenn $\sqrt{\mu} = \bar{\xi}\bar{\alpha}^2$ ist, die Form

$$\mathsf{E}^f = \mathsf{H}_1^{a_1 + b_1 S} \cdots \mathsf{H}_m^{a_m + b_m S}\,\bar{\eta}\left(\sqrt{\bar{\xi}}\right)^e \tag{3*}$$

annehmen.

Mit Hilfe der Gleichungen (3) und (3*) beweisen wir nun den folgenden Hilfssatz:

Satz 5. Es mögen die obigen Bezeichnungen beibehalten und überdies die Relativnormen $N_{\sqrt[4]{\mu},k}$ der relativen Grundeinheiten des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ in bezug auf k, nämlich

$$\eta_1 = N_{\sqrt[4]{\mu},k}(\mathsf{H}_1), \cdots, \eta_m = N_{\sqrt[4]{\mu},k}(\mathsf{H}_m)$$

gebildet werden; dann läßt sich jede Einheit ε in k, welche die Relativnorm $N_{\sqrt[4]{\mu},k}$ einer Einheit E des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ ist, in einer der Formen

$$\varepsilon = \eta_1^{u_1} \cdots \eta_m^{u_m}\left[N_{\sqrt{\mu},k}(\bar{\eta})\right]^2 \tag{4}$$

oder

$$\varepsilon = \eta_1^{u_1} \cdots \eta_m^{u_m}\left[N_{\sqrt{\mu},k}(\bar{\eta})\right]^2\left(-\bar{\xi}\cdot S\bar{\xi}\right)^e \tag{4*}$$

darstellen, wo die Exponenten $u_1, \cdots, u_m, e$ gewisse Werte 0, 1 haben und $\bar{\eta}$ eine Einheit in $K(\sqrt{\mu})$ bedeutet. Gleichung (4) gilt, wenn $\sqrt{\mu}$ nicht von der Gestalt $\bar{\xi}\bar{\alpha}^2$ ist, und (4*), wenn $\sqrt{\mu}$ die Form $\sqrt{\mu} = \bar{\xi}\bar{\alpha}^2$ besitzt.

Beweis. Um diesen Hilfssatz zu beweisen, bilden wir die Relativnormen $N_{\sqrt[4]{\mu},k}$ auf beiden Seiten der Gleichungen (3) und (3*). Es ergibt sich, wenn $\varepsilon = N_{\sqrt[4]{\mu},k}(\mathsf{E})$ gesetzt wird,

$$\varepsilon^f = \eta_1^{a_1 + b_1} \cdots \eta_m^{a_m + b_m}\left[N_{\sqrt{\mu},k}(\bar{\eta})\right]^2 \tag{5}$$

beziehungsweise

$$(5^*)\qquad \varepsilon^f = \eta_1^{a_1+b_1} \cdots \eta_m^{a_m+b_m}\left[N_{\sqrt{\mu},k}(\bar\eta)\right]^2 (-\bar\xi\cdot S\bar\xi)^e.$$

Hieraus folgen sofort Gleichungen von der Form (4) und (4*), wenn man beachtet, daß $\varepsilon, \eta_1, \cdots, \eta_m$ gewiß auch Relativnormen $N_{\sqrt{\mu},k}$ von Einheiten in $K(\sqrt{\mu})$ darstellen.

Bedeutet nun $\bar\eta_1, \cdots, \bar\eta_m$ ein System von relativen Grundeinheiten des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ *) (man sehe H. Rq. Z. § 14), und setzt man

$$\vartheta_1 = N_{\sqrt{\mu},k}(\bar\eta_1), \cdots, \vartheta_m = N_{\sqrt{\mu},k}(\bar\eta_m),$$

so kann bekanntermaßen jede Einheit ϑ in k, welche der Relativnorm $N_{\sqrt{\mu},k}$ einer Einheit in $K(\sqrt{\mu})$ gleich ist, in der Gestalt

$$\vartheta = \vartheta_1^{v_1} \cdots \vartheta_m^{v_m} N_{\sqrt{\mu},k}([\zeta])$$

dargestellt werden, wobei $v_1, \cdots, v_m$ gewisse Werte 0, 1 bedeuten und $[\zeta]$ eine Einheit in k vorstellt oder eine solche Einheit in $K(\sqrt{\mu})$, deren Quadrat in k liegt.

Demnach besteht der Satz:

Satz 6. Es seien $\mathsf{H}_1, S\mathsf{H}_1, \cdots, \mathsf{H}_m, S\mathsf{H}_m$ relative Grundeinheiten des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ in bezug auf $K(\sqrt{\mu})$, ferner $\bar\eta_1, \cdots, \bar\eta_m$ relative Grundeinheiten des Körpers $K(\sqrt{\mu})$. Setzen wir dann

$$\eta_1 = N_{\sqrt[4]{\mu},k}(\mathsf{H}_1), \cdots, \eta_m = N_{\sqrt[4]{\mu},k}(\mathsf{H}_m);$$

$$\vartheta_1 = N_{\sqrt{\mu},k}(\bar\eta_1), \cdots, \vartheta_m = N_{\sqrt{\mu},k}(\bar\eta_m),$$

so kann jede Einheit ε in k, welche die Relativnorm $N_{\sqrt[4]{\mu},k}$ von einer Einheit in $K(\sqrt[4]{\mu})$ ist, in einer der Formen

$$\varepsilon = \eta_1^{u_1} \cdots \eta_m^{u_m} \vartheta_1^{2v_1} \cdots \vartheta_m^{2v_m}\left\{N_{\sqrt{\mu},k}([\zeta])\right\}^2$$

oder

$$\varepsilon = \eta_1^{u_1} \cdots \eta_m^{u_m} \vartheta_1^{2v_1} \cdots \vartheta_m^{2v_m}\left\{N_{\sqrt{\mu},k}([\zeta])\right\}^2 (-\bar\xi\cdot S\bar\xi)^e$$

dargestellt werden. Hierbei haben die Exponenten $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m, e$ gewisse Werte 0, 1; $[\zeta]$ und $\bar\xi$ haben dieselbe Bedeutung wie oben. Die erstere dieser Gleichungen gilt, wenn $\sqrt{\mu}$ nicht von der Gestalt $\bar\xi\bar\alpha^2$ ist, die letztere hingegen, wenn $\sqrt{\mu} = \bar\xi\bar\alpha^2$ ist.

---

*) D. Hilbert: Über die Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers. Mathem. Annalen Bd. 51 (zitiert mit H. Rq. Z.).

§ 5.

Die ambigen Komplexe des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$.

Bedeutet ε eine beliebige Einheit in k, so soll das System von Einheiten, welches aus dem Produkte $\varepsilon\xi^2$ entsteht, wenn ξ alle Einheiten des Körpers k durchläuft, ein *quadratischer Einheitenverband*, hingegen das System von Einheiten, welches aus $\varepsilon\xi^4$ entsteht, wenn ξ wieder alle Einheiten des Körpers k durchläuft, ein *biquadratischer Einheitenverband* genannt werden.

Wir machen nun für die Folge über den Körper k vom Grade $2m$, der nebst seinen konjugierten Körpern $k', \cdots, k^{(2m-1)}$ imaginär ist, noch die Annahme, *die Klassenzahl h sei im Körper k ungerade.*

Indem wir dann den Begriff der ambigen Idealklasse und des ambigen Komplexes wie bei Lietzmann (L. § 9) fassen, wollen wir zunächst den folgenden Satz beweisen:

Satz 7. Es sei die Anzahl der verschiedenen Primideale des Körpers k, welche in der Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu}, k}$ des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ aufgehen, gleich $t_1 + t_2$, und es seien hiervon genau t_1 in der Relativdiskriminante $D_{\sqrt{\mu}, k}$ des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ als Faktoren enthalten; ferner mögen diejenigen Einheiten in k, welche Relativnormen $N_{\sqrt[4]{\mu}, k}$ von Einheiten in $K(\sqrt[4]{\mu})$ sind, 2^{w^*} verschiedene biquadratische Einheitenverbände bilden: dann gilt, wenn wir die Anzahl aller ambigen Komplexe in $K(\sqrt[4]{\mu})$, die aus ambigen Idealen entspringen, mit 4^{a^*} bezeichnen und

$$t = t_1 + \frac{t_2}{2}, \qquad v^* = \frac{w^*}{2}$$

setzen, für a^* die Beziehung

$$a^* \leqq t + v^* - m - 1.$$

Beweis. Wir nehmen zunächst an, daß die Zahl μ, die den Körper $K(\sqrt[4]{\mu})$ bestimmt, nicht das Produkt einer Einheit in k mit dem *Quadrate* einer Zahl in k ist.

Darnach gilt für jede Einheit ε in k, welche Relativnorm $N_{\sqrt[4]{\mu}, k}$ einer Einheit in $K(\sqrt[4]{\mu})$ ist, nach Hilfssatz 6 eine Gleichung von der Form

$$\varepsilon = \eta_1^{u_1} \cdots \eta_m^{u_m} \vartheta_1^{2v_1} \cdots \vartheta_m^{2v_m} \zeta^4,$$

wo ζ eine Einheit in k und die Bedeutung der übrigen Größen aus Hilfssatz 6 zu ersehen ist.

Unter den Einheiten $\vartheta_1, \cdots, \vartheta_m$ wird es eine bestimmte Maximalanzahl $v_2{}^*$ voneinander quadratisch unabhängiger geben, es seien dies etwa $\vartheta_1, \cdots, \vartheta_{v_2{}^*}$, so daß keine Relation von der Gestalt

$$\vartheta_1^{a_1} \cdots \vartheta_{v_2^*}^{a_{v_2^*}} = \zeta^2$$

stattfinden kann, wenn man unter ζ eine Einheit in k versteht und den Exponenten $a_1, \cdots, a_{v_2^*}$ beliebige Werte 0, 1 erteilt, außer es sind sämtliche Exponenten $a_1, \cdots, a_{v_2^*}$ gleich Null.

Dann kann jede Einheit ϑ in k, welche Relativnorm $N_{\sqrt{\mu}, k}$ einer Einheit in $K(\sqrt{\mu})$ ist, eindeutig in die Form

$$\vartheta = \vartheta_1^{a_1} \cdots \vartheta_{v_2^*}^{a_{v_2^*}} \zeta^2$$

gebracht werden, wo ζ eine bestimmte Einheit in k ist und die Exponenten $a_1, \cdots, a_{v_2^*}$ gewisse Werte 0, 1 haben. Infolgedessen wird man jede Einheit ϑ^2, welche das Quadrat der Relativnorm $N_{\sqrt{\mu}, k}$ einer Einheit in $K(\sqrt{\mu})$ ist, eindeutig in der Form

$$\vartheta^2 = \vartheta_1^{2a_1} \cdots \vartheta_{v_2^*}^{2a_{v_2^*}} \zeta^4$$

darstellen können.

Nun nahmen wir an, daß diejenigen Einheiten in k, welche Relativnormen $N_{\sqrt[4]{\mu}, k}$ von Einheiten in $K(\sqrt[4]{\mu})$ sind, insgesamt 2^{w^*} biquadratische Einheitenverbände bilden. Demgemäß wird man unter den Einheiten $\eta_1, \cdots, \eta_m$ genau $v_1^* = w^* - v_2^*$ Einheiten bestimmen können, es seien dies etwa $\eta_1, \cdots, \eta_{v_1^*}$, so daß jede Einheit ε in k, welche Relativnorm $N_{\sqrt[4]{\mu}, k}$ einer Einheit in $K(\sqrt[4]{\mu})$ ist, auf eine und nur auf eine Weise in der Form

$$\varepsilon = \eta_1^{a_1} \cdots \eta_{v_1^*}^{a_{v_1^*}} \vartheta_1^{2b_1} \cdots \vartheta_{v_2^*}^{2b_{v_2^*}} \zeta^4$$

dargestellt werden kann, wobei die Exponenten $a_1, \cdots, a_{v_1^*}, b_1, \cdots, b_{v_2^*}$ gewisse Werte 0, 1 haben und ζ eine Einheit in k bedeutet.

Wir wenden dies insbesondere auf die Einheiten $\eta_{v_1^*+1}, \cdots, \eta_m$; $\vartheta_{v_2^*+1}, \cdots, \vartheta_m$ an. Es sei

$$\eta_s = \eta_1^{a_1^{(s)}} \cdots \eta_{v_1^*}^{a_{v_1^*}^{(s)}} \vartheta_1^{2b_1^{(s)}} \cdots \vartheta_{v_2^*}^{2b_{v_2^*}^{(s)}} \zeta_s^4,$$

$$(s = v_1^* + 1, \cdots, m);$$

$$\vartheta_u = \vartheta^{a_1^{(u)}} \cdots \vartheta_{v_2^*}^{a_{v_2^*}^{(u)}} \zeta_u^2,$$

$$(u = v_2^* + 1, \cdots, m),$$

wo ζ_s, ζ_u bestimmte Einheiten in k sind und die Exponenten a, b gewisse Werte 0, 1 haben.

Hieraus folgt, daß die $m - v_1^*$ Ausdrücke

$$\mathsf{H}_s' = \mathsf{H}_s \mathsf{H}_1^{-a_1^{(s)}} \cdots \mathsf{H}_{v_1^*}^{-a_{v_1^*}^{(s)}} \bar{\vartheta}_1^{-b_1^{(s)}} \cdots \bar{\vartheta}_{v_2^*}^{-b_{v_2^*}^{(s)}} \zeta_s^{-1}, \tag{1}$$

$$(s = v_1^* + 1, \cdots, m),$$

Einheiten in $K(\sqrt[4]{\mu})$ vorstellen, deren Relativnorm $N_{\sqrt[4]{\mu},k}$ gleich 1 ist. Ebenso sind die $m - v_2^*$ Ausdrücke

$$\overline{\vartheta}_u' = \overline{\vartheta}_u \overline{\vartheta}_1^{-a_1^{(u)}} \cdots \overline{\vartheta}_{v_2^*}^{-a_{v_2^*}^{(u)}} \zeta_u^{-1}, \tag{2}$$
$$(u = v_2^* + 1, \cdots, m),$$

Einheiten in $K(\sqrt{\mu})$, deren Relativnorm $N_{\sqrt{\mu},k}$ gleich 1 wird.

Somit wird man stets ganze Zahlen M_s, $\overline{\mu}_u$ in $K(\sqrt[4]{\mu})$ beziehungsweise in $K(\sqrt{\mu})$ finden können derart, daß die Gleichungen

$$\mathsf{H}_s' = \mathsf{M}_s^{1-S}, \quad \overline{\vartheta}_u' = \overline{\mu}^{1-S}, \tag{3}$$
$$(s = v_1^* + 1, \cdots, m; \ u = v_2^* + 1, \cdots, m)$$

statthaben. Man vergleiche hierzu H. A. Z., § 54. Die Ideale (M_s), $(\overline{\mu}_u)$ sind dann, ebenso wie $\mathsf{M} = (\sqrt[4]{\mu})$ und $\overline{\mu} = (\sqrt{\mu})$, ambige Hauptideale des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$.

Nun bezeichnen wir die ambigen Primideale des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ mit $\overline{\mathfrak{d}}_1, \cdots, \overline{\mathfrak{d}}_{t_1}$ und die in diesen Idealen aufgehenden Primideale des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ entsprechend mit $\mathfrak{D}_1, \cdots, \mathfrak{D}_{t_1}$. Außer diesen ambigen Primidealen können im Körper $K(\sqrt[4]{\mu})$ im allgemeinen noch solche Primideale vorkommen, deren Quadrate Ideale in k sind. Schließlich kann es in $K(\sqrt[4]{\mu})$ auch noch solche Primideale $\mathfrak{P}$ geben, die zwar nicht ambig sind, deren Produkt aber mit dem relativ konjugierten Ideal $S\mathfrak{P}$ ein ambiges Ideal $\mathfrak{D} = \mathfrak{P} \cdot S\mathfrak{P}$ ergibt. Es mögen unter $\mathfrak{D}_{t_1+1}, \cdots, \mathfrak{D}_{t_1+t_2}$ zum Teile die außer den bereits angeführten in $K(\sqrt[4]{\mu})$ noch vorhandenen ambigen Primideale, zum Teil solche Produkte $\mathfrak{D} = \mathfrak{P} \cdot S\mathfrak{P}$ verstanden werden. Dann wird man die Hauptideale (M), $(\mathsf{M}_{v_1^*+1}), \cdots, (\mathsf{M}_m)$; $(\overline{\mu})$, $(\overline{\mu}_{v_2^*+1}), \cdots, (\overline{\mu}_m)$ stets in der Form

$$(\mathsf{M}) = \mathfrak{D}_1^{a_1} \cdots \mathfrak{D}_{t_1+t_2}^{a_{t_1+t_2}} \overline{\mathfrak{d}}_1^{b_1} \cdots \overline{\mathfrak{d}}_{t_1}^{b_{t_1}} \mathfrak{j}, \tag{4}$$
$$(\mathsf{M}_s) = \mathfrak{D}_1^{a_1^{(s)}} \cdots \mathfrak{D}_{t_1+t_2}^{a_{t_1+t_2}^{(s)}} \overline{\mathfrak{d}}_1^{b_1^{(s)}} \cdots \overline{\mathfrak{d}}_{t_1}^{b_{t_1}^{(s)}} \mathfrak{j}^{(s)};$$

$$\overline{\mu} = \overline{\mathfrak{d}}_1^{c_1} \cdots \overline{\mathfrak{d}}_{t_1}^{c_{t_1}} \mathfrak{j}_1, \tag{5}$$
$$(\overline{\mu}_u) = \overline{\mathfrak{d}}_1^{c_1^{(u)}} \cdots \overline{\mathfrak{d}}_{t_1}^{c_{t_1}^{(u)}} \mathfrak{j}_1^{(u)},$$
$$(s = v_1^* + 1, \cdots, m; \ u = v_2^* + 1, \cdots, m)$$

darstellen können, so daß die Exponenten a, b, c gewisse Werte 0, 1 haben und $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{j}^{(s)}$, $\mathfrak{j}_1$, $\mathfrak{j}_1^{(u)}$ Ideale in k bedeuten.

Wir wollen nun nachweisen, daß diese Relationen voneinander unabhängig sind, d. h. daß keine Beziehung

$$(6)\qquad (\mathsf{M})^{e}(\mathsf{M}_{v_1^*+1})^{e_{v_1^*+1}}\cdots(\mathsf{M}_m)^{e_m}(\bar{\mu})^{e'}(\bar{\mu}_{v_2^*+1})^{e'_{v_1^*+1}}\cdots(\bar{\mu}_m)^{e'_m}=\mathfrak{j}^*$$

bestehen kann, wobei die Exponenten $e, e_{v_1^*+1}, \cdots, e_m, e', e'_{v_2^*+1}, \cdots, e'_m$ irgendwelche Werte 0, 1 haben und $\mathfrak{j}^*$ ein Ideal in k ist, außer wenn $e = e_{v_1^*+1} = \cdots = e_m = e' = e'_{v_2^*+1} = \cdots = e'_m = 0$ und $\mathfrak{j}^* = 1$ ist.

Zu diesem Behufe erheben wir (6) in die h^{te} Potenz und erhalten

$$(7)\qquad \mathsf{M}^{eh}\mathsf{M}_{v_1^*+1}^{e_{v_1^*+1}h}\cdots\mathsf{M}_m^{e_m h}\,\bar{\mu}^{e'h}\,\bar{\mu}_{v_2^*+1}^{e'_{v_2^*+1}h}\cdots\bar{\mu}_m^{e'_m h}=\iota\mathsf{E},$$

wo ι eine ganze Zahl aus k und E eine Einheit aus K ist. Indem wir (7) symbolisch mit $1 - S$ potenzieren, erhalten wir

$$\left(\mathsf{M}^{1-S}\right)^{eh}\left(\mathsf{M}_{v_1^*+1}^{1-S}\right)^{e_{v_1^*+1}h}\cdots\left(\mathsf{M}_m^{1-S}\right)^{e_m h}\left(\bar{\mu}^{1-S}\right)^{e'h}\left(\bar{\mu}_{v_2^*+1}^{1-S}\right)^{e'_{v_2^*+1}h}\cdots\left(\bar{\mu}_m^{1-S}\right)^{e'_m h}$$
$$=\mathsf{E}^{1-S}$$

oder nach (3)

$$i^{-eh}\,\mathsf{H}'^{\,e_{v_1^*+1}h}_{v_1^*+1}\cdots\mathsf{H}'^{\,e_m h}_m\,(-1)^{e'h}\,\bar{\vartheta}^{e'_{v_2^*+1}h}_{v_2^*+1}\cdots\bar{\vartheta}^{e'_m h}_m=\mathsf{E}^{1-S}.$$

Führen wir nun für $\mathsf{H}'_{v_1^*+1}, \cdots, \mathsf{H}'_m$ die Werte aus (1) ein und beachten dann die in Satz 3 ausgesprochene Eigenschaft der Einheiten $\mathsf{H}_1, \cdots, \mathsf{H}_m$, so erkennen wir sofort, daß die Exponenten $e_{v_1^*+1}, \cdots, e_m$ sämtlich gleich 0 sein müssen. Ebenso überzeugen wir uns, daß auch die Exponenten $e'_{v_2^*+1}, \cdots, e'_m$ sämtlich gleich 0 sein müssen, wenn wir für $\bar{\vartheta}_{v_2^*+1}, \cdots, \bar{\vartheta}_m$ die Werte aus (2) einsetzen und dann die Eigenschaft der relativen Grundeinheiten $\bar{\vartheta}_1, \cdots, \bar{\vartheta}_m$ beachten (man sehe hierzu H. Rq. Z., § 14). Es ist also jetzt noch zu zeigen, daß auch $e = e' = 0$ sein muß. Aus (7) folgt $\mathsf{M}^{(2e'+e)h} = \iota\mathsf{E}$, oder wenn man mit 4 potenziert

$$\mu^{(2e'+e)h} = \iota^4\mathsf{E}^4.$$

Da nun E^4 eine Einheit in k sein muß, so ergibt sich aus unserer speziellen Voraussetzung über μ, daß $e = e' = 0$ sein muß. Es kann daher keine Relation von der Gestalt (7) bestehen. Dann folgt aber, daß man mit Hilfe der Gleichungen (4) und (5) $2m - w^* + 2$ unter den Idealen $\mathfrak{D}_1, \cdots, \mathfrak{D}_{t_1+t_2}, \bar{\mathfrak{d}}_1, \cdots, \bar{\mathfrak{d}}_{t_1}$ — es seien dazu etwa $\mathfrak{D}_1, \cdots, \mathfrak{D}_\sigma, \bar{\mathfrak{d}}_1, \cdots, \bar{\mathfrak{d}}_\tau$, wo $\sigma + \tau = 2m - w^* + 2$ ist, geeignet — durch die übrigen, die wir mit $\mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_{2t_1+t_2-2m+w^*-2}$ bezeichnen, in der Gestalt

$$(8)\qquad \begin{gathered}\mathfrak{D}_s = (\mathsf{B}_s)\,\mathfrak{B}_1^{a_1^{(s)}}\cdots\mathfrak{B}_{2t_1+t_2-2m+w^*-2}^{a^{(s)}_{2t_1+t_2-2m+w^*-2}}\,\mathfrak{j}_s,\\ \bar{\mathfrak{d}}^u = (\Gamma_u)\,\mathfrak{B}_1^{b_1^{(u)}}\cdots\mathfrak{B}_{2t_1+t_2-2m+w^*-2}^{b^{(u)}_{2t_1+t_2-2m+w^*-2}}\,\mathfrak{j}_u,\\ (s = 1, 2, \cdots, \sigma;\ u = 1, 2, \cdots, \tau)\end{gathered}$$

darstellen kann, wobei die Exponenten $a^{(s)}, b^{(u)}$ gewisse Werte 0, 1 haben, B_s, Γ_u Hauptideale in $K(\sqrt[4]{\mu})$, $\mathfrak{j}_s, \mathfrak{j}_u$ Ideale in k bedeuten.

7*

Um dies einzusehen, haben wir außer der bewiesenen Tatsache, daß eine Beziehung (6) nicht bestehen kann, wenn nicht sämtliche Exponenten $e, e_{v_1^*+1}, \cdots, e_m, e', e'_{v_1^*+1}, \cdots, e'_m$ gleich Null sind und $\mathfrak{j}^* = 1$ wird, nur noch den Umstand zu berücksichtigen, daß die Quadrate der Ideale $\mathfrak{D}_1, \cdots, \mathfrak{D}_{t_1+t_2}$; $(\mathsf{M}), (\mathsf{M}_{v_1^*+1}), \cdots, (\mathsf{M}_m)$ Ideale in $K(\sqrt{\mu})$ sind, die durch die Substitution $S = (\sqrt[4]{\mu}) : i\sqrt[4]{\mu})$ ungeändert bleiben, und daß die Biquadrate von

$$(\mathsf{M}), (\mathsf{M}_{v_1^*+1}), \cdots, (\mathsf{M}_m),$$

wie auch die Quadrate von $\bar{\mathfrak{d}}_{v_2^*+1}, \cdots, \bar{\mathfrak{d}}_m$ Ideale in k werden.

Aus (8) ergibt sich sofort die Beziehung

$$a^* \leqq t_1 + \frac{t_2}{2} + \frac{w^*}{2} - m - 1.$$

Die Abänderungen, welche der Beweis in den ausgeschlossenen Fällen, wo μ das Produkt einer Einheit in k mit dem Quadrate einer ganzen Zahl in k ist, zu erfahren hat, sind leicht zu treffen. Man überzeugt sich auch in diesen Fällen von der Richtigkeit des Satzes 7.

Wir wollen das erhaltene Resultat auf beliebige ambige Komplexe des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ ausdehnen, indem wir folgenden Satz beweisen.

Satz 8. Es sei die Anzahl der verschiedenen Primideale des Körpers k, welche in der Relativdiskriminante $\mathfrak{D}_{\sqrt[4]{\mu}, k}$ aufgehen, gleich $t_1 + t_2$ und es seien hiervon genau t_1 in der Relativdiskriminante $\mathfrak{D}_{\sqrt{\mu}, k}$ als Faktoren enthalten; ferner mögen diejenigen Einheiten in k, welche Relativnormen $N_{\sqrt[4]{\mu}, k}$ von Einheiten oder gebrochenen Zahlen in $K(\sqrt[4]{\mu})$ sind, 2^w verschiedene biquadratische Verbände bilden: Dann gilt, wenn wir die Anzahl aller ambigen Komplexe in $K(\sqrt[4]{\mu})$ mit 4^a bezeichnen und

$$t = t_1 + \frac{t_2}{2}, \quad v = \frac{w}{2}$$

setzen, für a die Beziehung

$$a \leqq t + v - m - 1.$$

Beweis. Wir behalten die Bezeichnungsweise des vorigen Satzes bei. Dann wird man offenbar $w - w^*$ Einheiten $\zeta_1, \cdots, \zeta_{w-w^*}$ in k finden können, die Relativnormen $N_{\sqrt[4]{\mu}, k}$ von gebrochenen Zahlen in $K(\sqrt[4]{\mu})$ sind, so daß eine Beziehung von der Form

$$\eta_1^{a_1} \cdots \eta_{v_1^*}^{a_{v_1^*}} \vartheta_1^{2b_1} \cdots \vartheta_{v_2^*}^{2b_{v_2^*}} \zeta_1^{c_1} \cdots \zeta_{w-w^*}^{c_{w-w^*}} \xi^4 = 1,$$

wo ξ eine Einheit in k bedeutet und die Exponenten

$$a_1, \cdots, a_{v_1^*}, \ b_1, \cdots, b_{v_2^*}, \ c_1, \cdots, c_{w-w^*}$$

beliebige Werte 0, 1 haben, nur dann bestehen kann, wenn sämtliche Exponenten $a_1, \cdots, a_{v_1^*}, b_1, \cdots, b_{v_2^*}, c_1, \cdots, c_{w-w^*}$ gleich 0 sind und $\xi^4 = 1$

wird. Wir denken uns die Einheiten $\zeta_1, \cdots, \zeta_{w-w^*}$ so bestimmt, daß für $\zeta^2_{w-w^*}, \zeta^2_{w-w^*-1}, \cdots, \zeta^2_1$ der Reihe nach Beziehungen von der Gestalt

$$\eta_1^{a_1^{(s)}} \cdots \eta_{v_1^*}^{a_{v_1^*}^{(s)}} \vartheta_1^{2b_1^{(s)}} \cdots \vartheta_{v_2^*}^{2b_{v_2^*}^{(s)}} \zeta_s^2 \zeta_{s+1}^{c_{s+1}^{(s)}} \cdots \zeta_{w-w^*}^{c_{w-w^*}^{(s)}} \xi_s^4 = 1,$$
$$(s = w - w^*,\ w - w^* - 1, \cdots, 1)$$

statthaben, wobei die Exponenten a, b, c gewisse Werte 0, 1 haben und ξ_s Einheiten in k vorstellen. Dann wird man jede Einheit ζ in k, welche Relativnorm $N_{\sqrt[4]{\mu}, k}$ einer ganzen oder gebrochenen Zahl in $K(\sqrt[4]{\mu})$ ist, eindeutig in die Form

$$\zeta = \eta_1^{a_1} \cdots \eta_{v_1^*}^{a_{v_1^*}} \vartheta_1^{2b_1} \cdots \vartheta_{v_2^*}^{2b_{v_2^*}} \zeta_1^{c_1} \cdots \zeta_{w-w^*}^{c_{w-w^*}} \xi^4$$

bringen können, wo die Exponenten $a_1, \cdots, a_{v_1^*}, b_1, \cdots, b_{v_2^*}, c_1, \cdots, c_{w-w^*}$ gewisse Werte 0, 1 haben und ξ eine Einheit in k ist.

Wir bezeichnen mit $\mathsf{A}_1, \cdots, \mathsf{A}_{w-w^*}$ Zahlen in $K(\sqrt[4]{\mu})$, so daß

$$\zeta_1 = N_{\sqrt[4]{\mu}, k}(\mathsf{A}_1), \cdots, \zeta_{w-w^*} = N_{\sqrt[4]{\mu}, k}(\mathsf{A}_{w-w^*})$$

wird. Verfahren wir dann genau so, wie Hilbert in A. Z. § 148 oder Furtwängler in seiner Preisarbeit, § 5, Satz 20, so können wir $w - w^*$ Ideale $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_{w-w^*}$ bestimmen, so daß

$$\mathsf{A}_s = \mathfrak{A}_s^{1-S},$$
$$(s = 1, 2, \cdots, w - w^*),$$

wird.

Nach den Erläuterungen im Beweise zu Satz 7 kann jedes Ideal $\mathfrak{J}$ des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ mit der Eigenschaft $\mathfrak{J} = S\mathfrak{J}$ durch gewisse $2t_1 + t_2 - 2m + w^* - 2$ Ideale $\mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_{2t_1+t_2-2m+w^*-2}$, in der Form

$$\mathfrak{J} = (\mathsf{B})\, \mathfrak{B}_1^{a_1} \cdots \mathfrak{B}_{2t_1+t_2-2m+w^*-2}^{a_{2t_1+t_2-2m+w^*-2}}\, \mathfrak{j} \tag{9}$$

ausgedrückt werden, wo die Exponenten $a_1, \cdots, a_{2t_1+t_2-2m+w^*-2}$ gewisse Werte 0, 1 haben, (B) ein Hauptideal in $K(\sqrt[4]{\mu})$ und $\mathfrak{j}$ ein Ideal in k bedeutet. Bezeichnen wir nun die ambigen Komplexe, die aus den Idealen $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_{w-w^*}, \mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_{2t_1+t_2-2m+w^*-2}$ entspringen, mit $A_1, \cdots, A_{w-w^*}, B_1, \cdots, B_{2t_1+t_2-2m+w^*-2}$, so kann gezeigt werden, daß jeder ambige Komplex P des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ in der Form

$$P = A_1^{a_1}, \cdots, A_{w-w^*}^{a_{w-w^*}}\, B_1^{b_1}, \cdots, B_{2t_1+t_2-2m+w^*-2}^{b_{2t_1+t_2-2m+w^*-2}} \tag{10}$$

darstellbar ist, wo die Exponenten a, b gewisse Werte 0, 1 haben.

Es sei $\mathfrak{A}$ ein beliebiges Ideal des ambigen Komplexes P. Da jeder ambige Komplex in $K(\sqrt[4]{\mu})$ nur ambige Klassen enthält, so wird eine Beziehung

$$\left(\frac{S\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}}\right)^3 = \Theta$$

bestehen müssen, wo Θ eine Zahl in $K(\sqrt[4]{\mu})$ bedeutet. Da die Relativnorm $N_{\sqrt[4]{\mu},k}$ von Θ eine Einheit ζ wird, so können wir setzen

$$N_{\sqrt[4]{\mu},k}(\Theta) = \zeta = \eta_1^{a_1} \cdots \eta_{v_1^*}^{a_{v_1^*}} \vartheta_1^{2b_1} \cdots \vartheta_{v_2^*}^{2b_{v_2^*}} \zeta_1^{c_1} \cdots \zeta_{w-w^*}^{c_{w-w^*}} \xi^4,$$

so daß die Exponenten $a_1, \cdots, a_{v_1^*}, b_1, \cdots, b_{v_2^*}, c_1, \cdots, c_{w-w^*}$ gewisse Werte 0, 1 haben und ξ eine Einheit in k bedeutet. Bilden wir jetzt die Zahl

$$(11) \quad \Theta' = \Theta \mathsf{H}_1^{-a_1} \cdots \mathsf{H}_{v_1^*}^{-a_{v_1^*}} \bar{\vartheta}_1^{-2b_1} \cdots \bar{\vartheta}_{v_2^*}^{-2b_{v_2^*}} \mathsf{A}_1^{-c_1} \cdots \mathsf{A}_{w-w^*}^{-c_{w-w^*}} \xi^{-1},$$

so ist

$$N_{\sqrt[4]{\mu},k}(\Theta') = 1$$

und wir können demnach

$$\Theta' = \Lambda^{1-S}$$

setzen, wo Λ eine ganze Zahl in $K(\sqrt[4]{\mu})$ bedeutet. Führen wir dies in (10) ein und gehen zu den Idealen zurück, so erhalten wir eine Relation von der Gestalt

$$(\Lambda)^{1-S} = \left(\frac{S\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}}\right)^8 \left(\mathfrak{A}_1^{-c_1} \cdots \mathfrak{A}_{w-w^*}^{-c_{w-w^*}}\right)^{1-S}.$$

Wenn wir daher

$$(12) \qquad \mathfrak{A}^8 \mathfrak{A}_1^{c_1} \cdots \mathfrak{A}_{w-w^*}^{c_{w-w^*}} \Lambda = \mathfrak{J}$$

setzen, so wird

$$\mathfrak{J} = S\mathfrak{J}$$

und wir können demnach $\mathfrak{J}$ durch die Ideale $\mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_{2t_1+t_2-2m+w^*-2}$, wie Gleichung (9) lehrt, ausdrücken. Tun wir dies und beachten dann die im Beweise zu Satz 7 erläuterten Eigenschaften der Ideale

$$\mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_{2t_1+t_2-2m+w^*-2},$$

so folgt sofort aus (12) eine Relation von der Gestalt (10).

Damit ist Satz 8 für den Fall, daß μ nicht das Produkt aus einer Einheit in k mit dem Quadrate einer ganzen Zahl in k ist, bewiesen. Man überzeugt sich aber leicht, daß Satz 8 auch im ausgeschlossenen Falle seine *Gültigkeit* behält.

§ 6.

Die Geschlechter im Körper $K(\sqrt[4]{\mu})$.

Bezüglich der Begriffe: „Geschlecht", „Charakterensystem einer Zahl und eines Ideals", „charakteristische Einheiten" verweisen wir auf § 8 der Lietzmannschen Dissertation.

Es gilt der Satz:

Satz 9. Wenn t und v dieselbe Bedeutung haben, wie in Satz 8, und man mit r_1 die Anzahl der vierwertigen, mit r_2 die Anzahl der zweiwertigen Charaktere eines Komplexes in K bezeichnet, so besteht die Beziehung

$$t + v - m \leqq r, \tag{1}$$

wo $r = r_1 + \frac{r_2}{2}$ gesetzt worden ist.

Beweis. Bezeichnet man mit $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{r_1^*}$ die vierwertigen, mit $\varepsilon_{r_1^*+1}, \cdots, \varepsilon_{r_1^*+r_2^*}$ die zweiwertigen charakteristischen Einheiten des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ und haben $\eta_1, \cdots, \eta_{v_1^*}, \vartheta_1, \cdots, \vartheta_{v_2^*}, \zeta_1, \cdots, \zeta_{w-w^*}$ dieselbe Bedeutung wie im Beweise zu Satz 8, so kann keine Beziehung von der Form

$$\varepsilon_1^{a_1} \cdots \varepsilon_{r_1^*}^{a_{r_1^*}} \varepsilon_{r_1^*+1}^{a_{r_1^*+1}} \cdots \varepsilon_{r_1^*+r_2^*}^{a_{r_1^*+r_2^*}} \eta_1^{b_1} \cdots \eta_{v_1^*}^{b_{v_1^*}} \vartheta_1^{2c_1} \cdots \vartheta_{v_2^*}^{2c_{v_2^*}} \zeta_1^{d_1} \cdots \zeta_{w-w^*}^{d_{w-w^*}} = \xi^4 \tag{2}$$

bestehen, wo die Exponenten $a_1, \cdots, a_{r_1^*}$ gewisse Werte 0, 1, 2, 3, die Exponenten $a_{r_1^*+1}, \cdots, a_{r_1^*+r_1^*}, b_1, \cdots, b_{v_1^*}, c_1, \cdots, c_{v_2^*}, d_1, \cdots, d_{w-w^*}$ hingegen nur die Werte 0, 1 haben können, außer es sind sämtliche angeführten Exponenten gleich 0. Bestünde nämlich eine Relation (2), so müßte

$$\left(\left(\frac{\varepsilon_1^{a_1} \cdots \varepsilon_{r_1^*+r_2^*}^{a_{r_1^*+r_2^*}} \eta_1^{b_1} \cdots \eta_{v_1^*}^{b_{v_1^*}} \vartheta_1^{2c_1} \cdots \vartheta_{v_2^*}^{2c_{v_2^*}} \zeta_1^{d_1} \cdots \zeta_{w-w^*}^{d_{w-w^*}}, \mu}{\mathfrak{w}}\right)\right) = 1$$

sein für sämtliche Primideale $\mathfrak{w}$ der charakteristischen Symbole. Dies ist jedoch unmöglich, wenn nicht sämtliche Exponenten $a_1, \cdots, a_{r_1^*}$ durch 4 und die Exponenten $a_{r_1^*+1}, \cdots, a_{r_1^*+r_2^*}$ durch 2 teilbar sind und die übrigen Exponenten sämtlich gerade ausfallen.

Nun ist die Anzahl aller biquadratischen Einheitenverbände in k gleich 4^m. Lassen wir im Ausdrucke

$$\varepsilon_1^{a_1} \cdots \varepsilon_{r_1^*}^{a_{r_1^*}} \varepsilon_{r_1^*+1}^{a_{r_1^*+1}} \cdots \varepsilon_{r_1^*+r_2^*}^{a_{r_1^*+r_2^*}} \eta_1^{b_1} \cdots \eta_{v_1^*}^{b_{v_1^*}} \vartheta_1^{2c_1} \cdots \vartheta_{v_2^*}^{2c_{v_2^*}} \zeta_1^{d_1} \cdots \zeta_{w-w^*}^{d_{w-w^*}} \xi^4$$

die Exponenten $a_1, \cdots, a_{r_1^*}$ alle Werte 0, 1, 2, 3, die Exponenten

$$a_{r_1^*+1}, \cdots, a_{r_1^*+r_2^*}, b_1, \cdots, b_{v_1^*}, c_1, \cdots, c_{v_2^*}, d_1, \cdots, d_{w-w^*}$$

die Werte 0, 1 und ξ sämtliche Einheiten in k durchlaufen, so erhalten wir insgesamt $4^{r_1^* + \frac{r_2^*}{2} + v}$ biquadratische Einheitenverbände; folglich ist

$$r_1^* + \frac{r_2^*}{2} + v \leqq m$$

und demnach

$$t + v - m \leqq r. \tag{3}$$

Wegen Satz 8 muß $r \geqq 1$ sein.

Bezeichnet man mit A die Anzahl aller ambigen Komplexe in $K(\sqrt[4]{\mu})$ und mit g die Anzahl der Geschlechter in $K(\sqrt[4]{\mu})$, so ist $g \leqq A$ (L. § 9). Beachten wir nun die im Satze 8 enthaltene Beziehung und (3), so ergibt sich für die Anzahl g der Geschlechter in $K(\sqrt[4]{\mu})$ die Relation

$$g \leqq 4^{r-1}. \tag{4}$$

§ 7.

Ein gewisses System von $m+z$ zu $1+i$ primen Primidealen des Körpers k.

Es möge k ein Zahlkörper $2m^{\text{ten}}$ Grades sein, über den wir folgende Annahmen machen:

1) *Der Körper k enthalte den Körper der imaginären Zahlen $k(i)$ als Unterkörper und sei nebst seinen konjugierten Körpern $k', \cdots, k^{(2m-1)}$ imaginär.*

2) *Die Anzahl h der Idealklassen im Körper k sei ungerade.*

Wir verstehen ferner unter $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{m-1}$ ein volles System von Grundeinheiten des Körpers k, und es sei ε_m eine Einheitswurzel in k, deren Quadratwurzel nicht in k liegt, so daß jede beliebige Einheit ε des Körpers k sich auf eine und nur auf eine Weise in der Gestalt

$$\varepsilon = \varepsilon_1^{u_1} \varepsilon_2^{u_2} \cdots \varepsilon_m^{u_m} \xi^2$$

darstellen läßt, wo $u_1, u_2, \cdots, u_m$ gewisse Werte 0, 1 haben und ξ eine Einheit in k bedeutet.

Für die Primzahl $1+i$ des Körpers $k(i)$ möge in k die Zerlegung

$$1 + i = \mathfrak{l}_1^{l_1} \mathfrak{l}_2^{l_2} \cdots \mathfrak{l}_z^{l_z}$$

gelten, wo $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \cdots, \mathfrak{l}_z$ voneinander verschiedene Primideale des Körpers k bedeuten, und es sei weiter

$$(\lambda_1) = \mathfrak{l}_1^{hh'}, \quad (\lambda_2) = \mathfrak{l}_2^{hh'}, \cdots, (\lambda_z) = \mathfrak{l}_z^{hh'},$$

wobei $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_z$ ganze Zahlen in k sind und h' derart bestimmt werden soll, daß es die Kongruenz $hh' \equiv 1, (4)$ befriedigt.

Wir wollen nun folgenden Satz beweisen:

Satz 10. Es seien $\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_m$ solche zu $1+i$ prime Primideale des Körpers k, für welche

$$\left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{q}_s}\right)\right) = \pm i, \quad \left(\left(\frac{\varepsilon_k}{\mathfrak{q}_s}\right)\right) = +1 \qquad (s \neq k),$$

$$(s, k = 1, 2, \cdots, m)$$

ausfällt; ferner seien $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_m$ quadratisch primäre*) Primideale in k, für welche

$$\left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{p}_k}\right)\right) = +1, \qquad (s,\ k = 1, 2, \cdots, m);$$

$$\left(\frac{\lambda_k}{\mathfrak{p}_k}\right) = -1, \qquad \left(\frac{\lambda_k}{\mathfrak{p}_l}\right) = +1 \qquad (k \neq l)$$

$$(k,\ l = 1, 2, \cdots, z)$$

wird. Setzen wir nun

$$\mathfrak{q}_1^{hh'} = (\varkappa_1), \cdots, \mathfrak{q}_m^{hh'} = (\varkappa_m), \qquad \mathfrak{p}_1^{hh'} = (\pi_1), \cdots, \mathfrak{p}_z^{hh'} = (\pi_z),$$

so daß $\varkappa_1, \cdots, \varkappa_m, \pi_1, \cdots, \pi_z$ gewisse ganze Zahlen des Körpers k bedeuten und außerdem $\pi_1, \cdots, \pi_z$ quadratisch primäre Zahlen sind, dann gilt für jede beliebige zu $1 + i$ prime ganze Zahl ω in k nach dem Modul 8 eine Kongruenz von der Gestalt

(1) $$\omega \equiv \varepsilon_1^{u_1} \cdots \varepsilon_m^{u_m} \varkappa_1^{v_1} \cdots \varkappa_m^{v_m} \pi_1^{w_1} \cdots \pi_z^{w_z} \alpha^4, \quad (8),$$

worin die Exponenten $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m$ gewisse Werte $0, 1, 2, 3$, die Exponenten $w_1, \cdots, w_z$ nur die Werte $0, 1$ haben können und α eine geeignete ganze Zahl in k bedeutet.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß eine Zahl μ von der Form

(a) $$\mu = \varepsilon_1^{u_1} \cdots \varepsilon_m^{u_m} \varkappa_1^{v_1} \cdots \varkappa_m^{v_m} \pi_1^{w_1} \cdots \pi_z^{w_z},$$

wo $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m$ gewisse Werte $0, 1, 2, 3,\ w_1, \cdots, w_z$ nur die Werte $0, 1$ haben können, nicht dem Biquadrate einer ganzen Zahl in k nach 8 kongruent sein kann, es sei denn, daß die Exponenten

$$u_1, \cdots, u_m,\ v_1, \cdots, v_m,\ w_1, \cdots, w_z$$

sämtlich gleich 0 sind.

Wenn unter den Exponenten $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m, w_1, \cdots, w_z$ mindestens einer ungerade ist, so folgt die Richtigkeit unserer Behauptung aus dem Umstande, daß

$$\varepsilon_1^{u_1} \cdots \varepsilon_m^{u_m} \varkappa_1^{v_1} \cdots \varkappa_m^{v_m} \pi_1^{w_1} \cdots \pi_z^{w_z},$$

wo die Exponenten $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m, w_1, \cdots, w_z$ gewisse Werte $0, 1$ haben, nicht dem Quadrate einer ganzen Zahl in k nach dem Modul

$$\mathfrak{l}_1^{4l_1+1}\, \mathfrak{l}_2^{4l_2+1} \cdots \mathfrak{l}_z^{4l_z+1}$$

kongruent sein kann, es sei denn, daß die Exponenten $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m, w_1, \cdots, w_z$ sämtlich gleich 0 sind (H. Rq. Z. § 21, Satz 29). Soll also μ

*) Wir gebrauchen im Nachstehenden statt der Ausdrücke „primär", „hyperprimär" der Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers die ausführlicheren Ausdrücke „quadratisch primär", „quadratisch hyperprimär".

dem Biquadrate einer ganzen Zahl in k nach 8 kongruent sein, so müssen jedenfalls die Exponenten $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m, w_1, \cdots, w_z$ in (a) sämtlich gerade ausfallen.

Sind aber die Exponenten $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m, w_1, \cdots, w_z$ sämtlich gerade und setzen wir etwa

$$u_1 = 2a_1, \cdots, u_m = 2a_m, \quad v_1 = 2b_1, \cdots, v_m = 2b_m, \quad w_1 = 0, \cdots, w_z = 0,$$

wo $a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots, b_m$ gewisse Werte 0, 1 haben, so müßte eine Kongruenz von der Gestalt

$$\varepsilon_1^{2a_1} \cdots \varepsilon_m^{2a_m} \varkappa_1^{2b_1} \cdots \varkappa_m^{2b_m} \equiv \alpha^4, \quad (8)$$

bestehen, worin α eine ganze Zahl in k bedeutet.

Wir greifen nun unter den Primidealen, die in $1+i$ als Faktoren enthalten sind, ein beliebiges heraus und bezeichnen es mit $\mathfrak{l}$. Es möge $\mathfrak{l}$ in $1+i$ genau zur l^{ten} Potenz aufgehen, so folgt aus der letzten Kongruenz, daß

$$\varepsilon_1^{a_1} \cdots \varepsilon_m^{a_m} \varkappa_1^{b_1} \cdots \varkappa_m^{m} \equiv \pm \alpha^2, \quad (\mathfrak{l}^{4l})$$

sein muß. Beachten wir jetzt, daß $-1 = i^2$ und i eine Zahl in k ist, so können wir folgende Kongruenzen aufschreiben:

$$\varepsilon_1^{a_1} \cdots \varepsilon_m^{a_m} \varkappa_1^{b_1} \cdots \varkappa_m^{b_m} \equiv \alpha_1^{\,2}, \quad (\mathfrak{l}_1^{4l_1}),$$
$$\varepsilon_1^{a_1} \cdots \varepsilon_m^{a_m} \varkappa_1^{b_1} \cdots \varkappa_m^{b_m} \equiv \alpha_2^{\,2}, \quad (\mathfrak{l}_2^{4l_2}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varepsilon_1^{a_1} \cdots \varepsilon_m^{a_m} \varkappa_1^{b_1} \cdots \varkappa_m^{b_m} \equiv \alpha_z^{\,2}, \quad (\mathfrak{l}_z^{4l_z}),$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_z$ geeignete ganze Zahlen in k vorstellen. Man könnte demnach eine ganze Zahl β in k derart bestimmen, daß die Kongruenz

$$\varepsilon_1^{a_1} \cdots \varepsilon_m^{a_m} \varkappa_1^{b_1} \cdots \varkappa_m^{b_m} \equiv \beta^2, \quad (4)$$

stattfände. Dies ist jedoch nur möglich, wenn die Exponenten $a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots, b_m$ sämtlich gleich Null sind (H. Rq. Z. § 21). Damit ist die Aussage über die Zahl μ bewiesen.

Wir setzen nun zur Abkürzung

$$L_1 = n(\mathfrak{l}_1^{2l_1})\left(1 - \frac{1}{n(\mathfrak{l}_1)}\right),$$

wo n die Norm genommen im Körper k bedeutet, und verstehen unter

$$\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_1^{(L_1)}$$

ein volles System von ganzen zu $\mathfrak{l}_1$ primen und nach $\mathfrak{l}_1^{2l_1}$ einander inkongruenten Zahlen in k, die überdies sämtlich kongruent 1 nach dem Modul $\mathfrak{l}_2^{2l_2}\mathfrak{l}_3^{2l_3}\cdots\mathfrak{l}_z^{2l_z}$ sein sollen. Da allgemein

$$\alpha_1^{(k)} \not\equiv i\alpha_1^{(k)}, \quad (\mathfrak{l}_1^{2l_1})$$
$$(k = 1, 2, \cdots, L_1)$$

ist, so können wir annehmen, es sei etwa stets

$$i\alpha_1^{(k)} \equiv \alpha_1^{\left(\frac{L_1}{2}+k\right)}, \quad (\mathfrak{l}_1^{2l_1})$$
$$\left(k = 1, 2, \cdots, \frac{L_1}{2}\right).$$

Die $\frac{L_1}{2}$ Zahlen $\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_1^{\left(\frac{L_1}{2}\right)}$ haben dann offenbar die Eigenschaft, daß, wenn α_1 eine beliebige unter ihnen bedeutet, in diesem Systeme keine Zahl vorkommt, die kongruent $i\alpha_1$ nach dem Modul $\mathfrak{l}_1^{2l_1}$ wäre.

Ferner setzen wir zur Abkürzung

$$L_2 = n(\mathfrak{l}_2^{2l_2})\left(1 - \frac{1}{n(\mathfrak{l}_2)}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$L_z = n(\mathfrak{l}_z^{2l_z})\left(1 - \frac{1}{n(\mathfrak{l}_z)}\right)$$

und bilden in der entsprechenden Weise wie oben zunächst das System von $\frac{L_2}{2}$ ganzen, zu $\mathfrak{l}_2$ primen Zahlen

$$\alpha_2^{(1)}, \cdots, \alpha_2^{\left(\frac{L_2}{2}\right)},$$

die sämtlich kongruent 1 nach $\mathfrak{l}_1^{2l_1}\mathfrak{l}_3^{2l_3}\cdots\mathfrak{l}_z^{2l_z}$ sind und die Eigenschaft haben, daß, wenn α_2 eine beliebige Zahl dieses Systems ist, in diesem System keine Zahl vorkommt, die kongruent $i\alpha_2$ nach dem Modul $\mathfrak{l}_2^{2l_2}$ wäre, u. s. f.; endlich bilden wir ein System von $\frac{L_z}{2}$ ganzen, zu $\mathfrak{l}_z$ primen Zahlen

$$\alpha_z^{(1)}, \cdots, \alpha_z^{\left(\frac{L_z}{2}\right)},$$

die sämtlich kongruent 1 nach $\mathfrak{l}_1^{2l_1}\mathfrak{l}_2^{2l_2}\cdots\mathfrak{l}_{z-1}^{2l_{z-1}}$ sind und die Eigenschaft haben, daß, wenn α_z eine beliebige Zahl des Systems bedeutet, in diesem Systeme keine Zahl vorkommt, die kongruent $i\alpha_z$ nach dem Modul $\mathfrak{l}_z^{2l_z}$ wäre.

Der Ausdruck

$$(2) \qquad \varepsilon_1^{u_1}\cdots\varepsilon_m^{u_m}\varkappa_1^{v_1}\cdots\varkappa_m^{v_m}\pi_1^{w_1}\cdots\pi_z^{w_z}\left(\alpha_1^{(i_1)}\right)^4\cdots\left(\alpha_z^{(i_z)}\right)^4$$
$$\left(\begin{array}{c} u_1, \cdots, u_m, \;\; v_1, \cdots, v_m = 0, 1, 2, 3; \;\; w_1, \cdots, w_z = 0, 1, \\ i_1 = 1, 2, \cdots, \frac{L_1}{2}; \cdots; i_z = 1, 2, \cdots, \frac{L_z}{2} \end{array}\right)$$

stellt ein System von

$$2^{6m}\left(1-\frac{1}{n(\mathfrak{l}_1)}\right)\left(1-\frac{1}{n(\mathfrak{l}_2)}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n(\mathfrak{l}_z)}\right)$$

ganzen Zahlen in k dar; diese sind sämtlich zu $1+i$ prim und nach 8 einander inkongruent. In der Tat, wären zwei Zahlen von der Gestalt (2) einander nach 8 kongruent, wäre etwa

$$\begin{aligned}(3)\qquad &\varepsilon_1^{u_1}\cdots\varepsilon_m^{u_m}\varkappa_1^{v_1}\cdots\varkappa_m^{v_m}\pi_1^{w_1}\cdots\pi_m^{w_m}\left(\alpha_1^{(i_1)}\right)^4\cdots\left(\alpha_z^{(i_z)}\right)^4\\ &\equiv\varepsilon_1^{u_1'}\cdots\varepsilon_m^{u_m'}\varkappa_1^{v_1'}\cdots\varkappa_m^{v_m'}\pi_1^{w_1'}\cdots\pi_m^{w_z'}\left(\alpha_1^{(i_1')}\right)^4\cdots\left(\alpha_z^{(i_z')}\right)^4,\quad(8),\end{aligned}$$

so würde, da die Zahlen $\alpha_1^{(i)},\cdots,\alpha_z^{(i)}$ sämtlich zu $1+i$ prim sind, aus dem vorhin Bewiesenen sofort folgen, daß die Exponenten $u_1,\cdots,u_m$, $v_1,\cdots,v_m$, $w_1,\cdots,w_z$ bez. mit den Exponenten $u_1',\cdots,u_m'$, $v_1',\cdots,v_m'$, $w_1',\cdots,w_z'$ übereinstimmen und es wäre mithin

$$\left(\alpha_1^{(i_1)}\right)^4\cdots\left(\alpha_z^{(i_z)}\right)^4\equiv\left(\alpha_1^{(i_1')}\right)^4\cdots\left(\alpha_z^{(i_z')}\right)^4,\quad(8).$$

Aus dieser Kongruenz entnehmen wir der Reihe nach die z Kongruenzen

$$\left(\alpha_1^{(i_1)}\right)^4\equiv\left(\alpha_1^{(i_1')}\right)^4,\quad\left(\mathfrak{l}_1^{6l_1}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\alpha_1^{(i_z)}\right)^4\equiv\left(\alpha_z^{(i_z')}\right)^4,\quad\left(\mathfrak{l}_z^{6l_z}\right).$$

Betrachten wir nun eine beliebige unter diesen Kongruenzen, z. B. die folgende:

$$\left(\alpha_k^{(i_k)}\right)^4\equiv\left(\alpha_k^{(i_k')}\right)^4,\quad\left(\mathfrak{l}_k^{6l_k}\right).$$

Aus dieser Kongruenz würde weiter folgen, daß

$$\left[\left(\alpha_k^{(i_k)}\right)^2+\left(\alpha_k^{(i_k')}\right)^2\right]\left[\left(\alpha_k^{(i_k)}\right)^2-\left(\alpha_k^{(i_k')}\right)^2\right]\equiv 0,\quad\left(\mathfrak{l}_k^{6l_k}\right)$$

sein muß. Demnach müßte entweder

$$\left(\alpha_k^{(i_k)}\right)^2+\left(\alpha_k^{(i_k')}\right)^2\quad\text{oder}\quad\left(\alpha_k^{(i_k)}\right)^2-\left(\alpha_k^{(i_k')}\right)^2$$

durch $\mathfrak{l}_k^{4l_k}$ teilbar sein. Im ersteren Falle könnten wir weiter schließen, daß $\alpha_k^{(i_k)}-i\alpha_k^{(i_k')}$ durch $\mathfrak{l}_k^{2l_k}$ teilbar sein muß. Dies verstößt aber gegen die Eigenschaft der oben aufgestellten z Systeme der α. Im letzteren Falle würde wieder folgen, daß $\alpha_k^{(i_k)}-\alpha_k^{(i_k')}$ durch $\mathfrak{l}_k^{2l_k}$ teilbar sein muß, woraus sich $i_k=i_k'$ ergibt. Dies gilt für $k=1,2,\cdots,z$, so daß wir allgemein

$$i_1=i_1',\quad i_2=i_2',\cdots,i_z=i_z'$$

hätten, d. h. die beiden Ausdrücke auf der linken und rechten Seite der Kongruenz (3) waren nicht voneinander verschieden.

Nun gibt es für den Modul 8 genau

$$2^{6m}\left(1-\frac{1}{n(\mathfrak{l}_1)}\right)\left(1-\frac{1}{n(\mathfrak{l}_2)}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n(\mathfrak{l}_z)}\right)$$

zu $1+i$ prime und untereinander inkongruente Zahlen; mithin bilden die ganzen Zahlen in (2) ein volles Restsystem der genannten Art nach 8. Dies ist die Aussage des Satzes 10.

Auch für den Modul $\mathfrak{l}_1^{6l_1+1}\mathfrak{l}_2^{6l_2+1}\cdots\mathfrak{l}_z^{6l_z+1}$ kann man eine der Kongruenz (1), die wir für den Modul 8 fanden, analoge Kongruenz bestimmen. Es gilt hier

Satz 10*. Wenn $\mathfrak{q}_1,\cdots,\mathfrak{q}_m,\ \mathfrak{p}_1,\cdots,\mathfrak{p}_z;\ \varkappa_1,\cdots,\varkappa_m,\ \pi_1,\cdots,\pi_z$ dieselbe Bedeutung haben, wie in Satz 10, so gilt für jede beliebige zu $1+i$ prime ganze Zahl ω in k nach dem Modul $\mathfrak{l}_1^{6l_1+1}\mathfrak{l}_2^{6l_2+1}\cdots\mathfrak{l}_z^{6l_z+1}$ eine Kongruenz von der Gestalt

$$(4)\qquad \omega\equiv\varepsilon_1^{u_1}\cdots\varepsilon_m^{u_m}\varkappa_1^{v_1}\cdots\varkappa_m^{v_m}\pi_1^{w_1}\cdots\pi_z^{w_z}\alpha^4,\qquad\left(\mathfrak{l}_1^{6l_1+1}\mathfrak{l}_2^{6l_2+1}\cdots\mathfrak{l}_z^{6l_z+1}\right),$$

worin die Exponenten $u_1,\cdots,u_m,\ v_1,\cdots v_m,\ w_1,\cdots,w_z$ gewisse Werte 0, 1, 2, 3 haben und α eine geeignete ganze Zahl in k ist.

Beweis. Auch in diesem Falle können wir zunächst nachweisen, daß eine Zahl von der Form

$$\varepsilon_1^{u_1}\cdots\varepsilon_m^{u_m}\varkappa_1^{v_1}\cdots\varkappa_m^{v_m}\pi_1^{w_1}\cdots\pi_z^{w_z},$$

wo die Exponenten $u_1,\cdots,u_m,\ v_1,\cdots,v_m,\ w_1,\cdots,w_z$ gewisse Werte 0, 1, 2, 3 haben, nicht dem Biquadrate einer ganzen Zahl in k nach dem Modul $\mathfrak{l}_1^{6l_1+1}\mathfrak{l}_2^{6l_2+1}\cdots\mathfrak{l}_z^{6l_z+1}$ kongruent sein kann, es sei denn, daß die Exponenten $u_1,\cdots,u_m,\ v_1,\cdots,v_m,\ w_1,\cdots,w_z$ sämtlich gleich Null sind. Man beweist dies wie im analogen Falle des Satzes 10. Die Abänderungen, die an jenem Beweise anzubringen sind, weil die Exponenten $w_1,\cdots,w_z$ jetzt die vier Werte 0, 1, 2, 3 haben können, sind leicht zu treffen. (Man beachte hierzu H. Rq. Z. § 30.)

Wir setzen nun zur Abkürzung

$$L_1=n(\mathfrak{l}_1^{2l_1})\,(n(\mathfrak{l}_1)-1)$$

und verstehen unter

$$(5)\qquad \alpha_1^{(1)},\cdots,\alpha_1^{(L_1)}$$

ein volles System von ganzen zu $\mathfrak{l}_1$ primen nach $\mathfrak{l}_1^{2l_1+1}$ einander inkongruenten Zahlen in k, die überdies sämtlich kongruent 1 nach dem Modul $\mathfrak{l}_2^{2l_2+1}\mathfrak{l}_3^{2l_3+1}\cdots\mathfrak{l}_z^{2l_z+1}$ sein sollen. Da allgemein

$$\alpha_1^{(l)}\not\equiv-\alpha_1^{(k)},\quad\not\equiv\pm i\alpha_1^{(k)},\quad(\mathfrak{l}_1^{2l_1+1})$$
$$(k=1,2,\cdots,L_1)$$

ist, so können wir die Zahlen des Systems (5) folgendermaßen anordnen:

$$\begin{array}{rr} \alpha_1^{(1)}, \cdots, & \alpha_1^{\left(\frac{L_1}{4}\right)}, \\ -\alpha_1^{(1)}, \cdots, & -\alpha_1^{\left(\frac{L_1}{4}\right)}, \\ i\alpha_1^{(1)}, \cdots, & i\alpha_1^{\left(\frac{L_1}{4}\right)}, \\ -i\alpha_1^{(1)}, \cdots, & -i\alpha_1^{\left(\frac{L_1}{4}\right)}. \end{array}$$

Die Zahlen der zweiten, dritten und vierten Reihe erhält man aus den Zahlen der ersten Reihe, indem man die Zahlen dieser Reihe beziehungsweise mit -1, i und $-i$ multipliziert. Die Zahlen der ersten Reihe haben dann offenbar die Eigenschaft, daß, wenn α_1 eine beliebige unter ihnen bedeutet, in diesem Systeme keine Zahl vorkommt, die kongruent $-\alpha$, $i\alpha$ oder $-i\alpha$ nach dem Modul $\mathfrak{l}_1^{2l_1+1}$ wäre.

Ferner setzen wir

$$\begin{aligned} L_2 &= n(\mathfrak{l}_2^{2l_2})\,(n(\mathfrak{l}_2)-1), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ L_z &= n(\mathfrak{l}_z^{2l_z})\,(n(\mathfrak{l}_z)-1) \end{aligned}$$

und bilden in der entsprechenden Weise für den Modul $\mathfrak{l}_2^{2l_2+1}$ ein analoges System von $\frac{L_2}{4}$ Zahlen u. s. f.; endlich für den Modul $\mathfrak{l}_z^{2l_z+1}$ ein analoges System von $\frac{L_z}{4}$ Zahlen. Man vergleiche hierzu den Beweis zu Satz 10. Bezeichnet man diese Systeme der Reihe nach mit

$$\begin{array}{l} \alpha_2^{(1)}, \cdots, \alpha_2^{\left(\frac{L_2}{4}\right)}, \\ \cdots\cdots \\ \alpha_z^{(1)}, \cdots, \alpha_z^{\left(\frac{L_z}{4}\right)}, \end{array}$$

so kann man, wie in Satz 10, nachweisen, daß der Ausdruck

$$\varepsilon_1^{u_1}\cdots\varepsilon_m^{u_m}\,\varkappa_1^{v_1}\cdots\varkappa_m^{v_m}\cdots\pi_1^{w_1}\cdots\pi_z^{w_z}\left(\alpha_1^{(i_1)}\right)^4\cdots\left(\alpha_z^{(i_z)}\right)^4, \tag{6}$$

$$\begin{pmatrix} u_1, \cdots, u_m;\ v_1, \cdots, v_m;\ w_1, \cdots, w_z = 0, 1, 2, 3, \\ i_1 = 1, 2, \cdots, \frac{L_1}{4}; \cdots; i_z = 1, 2, \cdots, \frac{L_z}{4} \end{pmatrix}$$

ein System von

$$2^{4m} L_1 L_2 \cdots L_z$$

ganzen Zahlen in k darstellt, die sämtlich zu $1+i$ prim und nach $\mathfrak{l}_1^{6l_1+1}\mathfrak{l}_2^{6l_2+1}\cdots\mathfrak{l}_z^{6l_z+1}$ einander inkongruent sind. Da es aber für den Modul $\mathfrak{l}_1^{6l_1+1}\mathfrak{l}_2^{6l_2+1}\cdots\mathfrak{l}_z^{6l_z+1}$ genau $2^{4m}L_1L_2\cdots L_z$ solcher Zahlen gibt, so bilden die ganzen Zahlen (6) ein volles Restsystem der genannten Art nach $\mathfrak{l}_1^{6l_1+1}\mathfrak{l}_1^{6l_2+1}\cdots\mathfrak{l}_z^{6l_z+1}$; dies ist die Aussage des Satzes 10*.

§ 8.

Ein Satz aus der Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers.

Wir wollen in diesem Paragraphen einen Satz ableiten, von welchem wir später Gebrauch machen werden.

Satz 11. Es seien $\mathfrak{l}_1, \cdots, \mathfrak{l}_z$ die voneinander verschiedenen Primfaktoren von $1+i$ in k und es gehe $\mathfrak{l}_1$ genau zur l_1^{ten}, ferner die Primideale $\mathfrak{l}_2, \cdots, \mathfrak{l}_z$ bez. genau zur $l_2, \cdots, l_z^{\text{ten}}$ Potenz in $1+i$ auf. Wir setzen

$$\mathfrak{l}_1^h = (\lambda_1), \cdots, \mathfrak{l}_z^h = (\lambda_z),$$

so daß $\lambda_1, \cdots, \lambda_z$ ganze Zahlen im k sind, und bestimmen ein quadratisch primäres Primideal $\mathfrak{p}_1$ in k derart, daß es die Gleichungen

$$\text{(1)} \qquad \left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}_1}\right) = -1, \quad \left(\frac{\lambda_2}{\mathfrak{p}_1}\right) = +1, \cdots, \left(\frac{\lambda_z}{\mathfrak{p}_1}\right) = +1$$

befriedigt; es sei endlich $\mathfrak{p}_1^h = (\pi_1)$, wo π_1 eine quadratisch primäre Zahl bedeutet.

Ist dann μ eine quadratisch primäre Zahl in k, für welche die Gleichungen

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}_1}\right) = -1, \quad \left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}_s}\right) = +1, \quad (s = 2, 3, \cdots, z)$$

bestehen, so gilt für μ nach dem Modul $\mathfrak{l}_1^{4l_1+1} \cdots \mathfrak{l}_z^{4l_z+1}$ eine Kongruenz von der Gestalt

$$\mu \equiv \pi_1 \alpha^2, \quad (\mathfrak{l}_1^{4l_1+1} \cdots \mathfrak{l}_z^{4l_z+1}),$$

wo α eine ganze Zahl in k bedeutet.

Beweis. Wegen (1) müssen auch die Beziehungen

$$\left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{l}_1}\right) = -1, \quad \left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{l}_2}\right) = +1, \cdots, \left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{l}_z}\right) = +1$$

stattfinden; daher ist

$$\left(\frac{\pi_1 \mu}{\mathfrak{l}_s}\right) = +1, \quad (s = 1, 2, \cdots, z),$$

d. h. $\pi_1 \mu$ ist eine quadratisch hyperprimäre Zahl in k, womit Satz 11 bewiesen ist.

§ 9.

Das primäre Ideal und die primäre Zahl.

Definition 3. Ist das zu $1+i$ prime Ideal $\mathfrak{a}$ in k so beschaffen, daß für jede Einheit ε in k das Symbol $\left(\left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{a}}\right)\right)$ den Wert $+1$ hat, so heiße $\mathfrak{a}$ ein *biquadratisch primäres* oder kurz *primäres Ideal.* Alle Ideale, die diese Eigenschaft nicht haben, heißen *biquadratisch nichtprimäre* oder kurz *nichtprimäre Ideale.*

Definition 4. Es sei α eine beliebige ganze Zahl in k, die nicht das Quadrat einer ganzen Zahl in k ist. Fällt dann die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\alpha},\,k}$ des Körpers $K(\sqrt[4]{\alpha})$ prim zu $1+i$ aus, so heiße α eine *biquadratisch primäre* oder kurz *primäre Zahl.*

§ 10.

Eigenschaften der primären Primideale.

Die primären Ideale zeichnen sich durch besondere Eigenschaften aus, zu deren Herleitung uns folgender Hilfssatz verhelfen wird.

Satz 12. Bedeutet μ eine *quadratisch primäre* Zahl des Körpers k, so kann man stets ganze Zahlen ξ in k bestimmen derart, daß die Zahl $\xi^2\mu$ *primär* wird.

Beweis. Es sei $\mathfrak{l}$ ein Primideal des Körpers k, welches in $1+i$, u. zw. genau zur l^{ten} Potenz aufgeht. Da nach Voraussetzung μ eine quadratisch primäre Zahl ist, so ist das Symbol $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right)$ entweder gleich $+1$ oder -1. Im ersteren Falle zerfällt $\mathfrak{l}$ im Körper $K(\sqrt{\mu})$ in zwei voneinander verschiedene Primideale $\overline{\mathfrak{l}}$, $S\overline{\mathfrak{l}}$ nach der Gleichung $\mathfrak{l}=\overline{\mathfrak{l}}\cdot S\overline{\mathfrak{l}}$. Nun ist $n(\mathfrak{l}^e)=n_{\sqrt{\mu}}(\overline{\mathfrak{l}}^e)$, wo e eine beliebige positive ganze rationale Zahl ist, und es wird jede ganze Zahl in $K(\sqrt{\mu})$ kongruent einer ganzen Zahl des Körpers k nach $\overline{\mathfrak{l}}^e$. Insbesondere muß eine ganze Zahl ξ in k bestehen derart, daß

$$\sqrt{\mu}\equiv\xi,\quad(\overline{\mathfrak{l}}^{4l}) \tag{1}$$

wird.

Ist hingegen $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right)=-1$ und etwa

$$\mu\equiv\alpha^2,\quad(\mathfrak{l}^{4l}), \tag{2}$$

wo α eine ganze Zahl in k bedeutet, so bestimmen wir eine ganze Zahl λ in k, die genau durch $\mathfrak{l}$ teilbar ist und eine zu $\mathfrak{l}$ prime ganze Zahl ϱ, die durch $\frac{\lambda}{\mathfrak{l}}$ teilbar ist. Dann ist

$$\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^l(\alpha+i\sqrt{\mu})$$

eine ganze zu $\mathfrak{l}$ prime Zahl in $K\sqrt{\mu}$).

Wir zeigen nun, daß man stets eine ganze Zahl ξ in k bestimmen kann derart, daß die Kongruenz

$$\varrho^{2l}\xi\sqrt{\mu}\equiv\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^{2l}(\alpha+i\sqrt{\mu})^2,\quad(\mathfrak{l}^{4l}) \tag{3}$$

befriedigt wird. Diese Kongruenz kann folgendermaßen geschrieben werden

$$\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^{2l}(\alpha^2-\mu)-\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^{2l}(\lambda^{2l}\xi+2\alpha i)\sqrt{\mu}\equiv 0, \quad (\mathfrak{l}^{4l}).$$

Bezeichnet man die linke Seite dieser Kongruenz etwa mit $\bar{\sigma}$, so muß $\bar{\sigma}+S\bar{\sigma}$ durch $\mathfrak{l}^{4l}$ und $\bar{\sigma}\cdot S\bar{\sigma}$ durch $\mathfrak{l}^{8l}$ teilbar sein. Das erstere ist immer der Fall, und es muß demnach ξ so bestimmt werden, daß die Kongruenz

$$\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^{4l}(\alpha^2-\mu)^2-\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^{4l}(\lambda^{2l}\xi+2\alpha i)^2\mu\equiv 0, \quad (\mathfrak{l}^{8l})$$

stattfindet. Multipliziert man diese Kongruenz mit μ, so kann sie auch in der Gestalt

$$\left(\varrho^{2l}\xi+\frac{2\varrho^{2l}\alpha i}{\lambda^{2l}}\right)^2\mu^2\equiv\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^{4l}(\alpha^2-\mu)^2\mu, \quad (\mathfrak{l}^{8l})$$

geschrieben werden oder weiter, wenn man (2) beachtet, in der Form

$$\left(\varrho^{2l}\xi+\frac{2\varrho^{2l}\alpha i}{\lambda^{2l}}\right)^2\mu^2\equiv\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^{4l}(\alpha^2-\mu)^2\alpha^2, \quad (\mathfrak{l}^{8l}).$$

Bestimmt man jetzt ξ nach der Kongruenz

$$\left(\varrho^{2l}\xi+\frac{2\varrho^{2l}\alpha i}{\lambda^{2l}}\right)\mu\equiv\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^{2l}(\alpha^2-\mu)\alpha, \quad (\mathfrak{l}^{6l}),$$

so befriedigt es die oben gestellte Anforderung.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \cdots, \mathfrak{l}_z$ die sämtlichen in $1+i$ aufgehenden Primideale des Körpers k, und es gehe $\mathfrak{l}_1$ genau zur l_1^{ten}, $\mathfrak{l}_2$ genau zur l_2^{ten}, usf., $\mathfrak{l}_z$ genau zur l_z^{ten} Potenz in $1+i$ auf, dann lehren die Kongruenzen (1) und (3), daß man zu diesen Primidealen stets ganze Zahlen $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_z$ in k finden kann derart, daß Kongruenzen von der Gestalt

$$\begin{aligned}
\xi_1\sqrt{\mu} &\equiv \bar{\alpha}_1^{\,2}, \quad (\mathfrak{l}_1^{4l_1}),\\
\xi_2\sqrt{\mu} &\equiv \bar{\alpha}_2^{\,2}, \quad (\mathfrak{l}_2^{4l_2}),\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\xi_z\sqrt{\mu} &\equiv \bar{\alpha}_z^{\,2}, \quad (\mathfrak{l}_z^{4l_z})
\end{aligned}$$

statthaben, wo $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \cdots, \bar{\alpha}_z$ ganze Zahlen in $K(\sqrt{\mu})$ bedeuten. Bestimmt man ferner eine ganze Zahl ξ nach folgenden Kongruenzen:

$$\begin{aligned}
\xi &\equiv \xi_1, \quad (\mathfrak{l}_1^{4l_1}),\\
\xi &\equiv \xi_2, \quad (\mathfrak{l}_2^{4l_2}),\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\xi &\equiv \xi_z, \quad (\mathfrak{l}_z^{4l_z}),
\end{aligned}$$

so wird für diese Zahl ξ offenbar auch eine Kongruenz von der Form

$$\xi\sqrt{\mu}\equiv\bar{\alpha}^2, \quad (4)$$

bestehen müssen, wo $\bar{\alpha}$ eine ganze Zahl in $K(\sqrt{\mu})$ bedeutet, und dies ist die Aussage des Hilfssatzes 12.

Nun sind wir imstande, folgenden Satz zu beweisen:

Satz 13. Ist $\mathfrak{p}$ ein beliebiges primäres Primideal in k, so kann man stets eine primäre Zahl π in k bestimmen derart, daß $\mathfrak{p}^{hh'} = (\pi)$ wird.

Beweis. Da $\mathfrak{p}$ ein primäres Primideal sein soll, so können wir zunächst eine quadratisch primäre Zahl π^* in k bestimmen, so daß $\mathfrak{p}^{hh'} = (\pi^*)$ wird. Nun bestehen nach dem vorigen Satze immer solche ganze Zahlen ω in k, die eine Kongruenz von der Form

$$(4) \qquad \omega\sqrt{\pi^*} \equiv \bar{\alpha}^2, \quad (4)$$

befriedigen, wo $\bar{\alpha}$ eine ganze Zahl in $K(\sqrt{\pi^*})$ bedeutet. Wir bestimmen ferner die Primideale $\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_m$ in k derart, daß die Beziehungen

$$(5) \qquad \left(\left(\frac{\pi^*}{\mathfrak{q}_s}\right)\right) = \pm i, \quad \left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{q}_s}\right)\right) = \pm i, \quad \left(\left(\frac{\varepsilon_t}{\mathfrak{q}_s}\right)\right) = +1 \quad (t \neq s)$$
$$(s = 1, 2, \cdots, m)$$

bestehen, und setzen

$$\mathfrak{q}_s^{hh'} = (\varkappa_s), \quad (s = 1, 2, \cdots, m),$$

so daß $\varkappa_1, \cdots, \varkappa_m$ ganze Zahlen in k bedeuten. Dann gilt für ω eine Kongruenz von der Gestalt

$$\omega \equiv \varepsilon\varkappa_1^{u_1} \cdots \varkappa_m^{u_m}\alpha^2, \quad (4),$$

wo die Exponenten $u_1, \cdots, u_m$ gewisse Werte 0, 1 haben, ε eine Einheit und α eine ganze Zahl in k vorstellt. Demnach können wir die Kongruenz (4) auf die Form

$$(6) \qquad \varepsilon\varkappa_1^{u_1} \cdots \varkappa_m^{u_m}\sqrt{\pi^*} \equiv \bar{\beta}^2, \quad (4)$$

bringen, wo $\bar{\beta}$ eine ganze Zahl in $K(\sqrt{\pi^*})$ ist. Sind nun sämtliche Exponenten $u_1, \cdots, u_m$ gleich Null, so ist $\pi = \varepsilon^2\pi^*$ eine Zahl, wie sie Satz (13) fordert. Wir machen demzufolge die gegenteilige Annahme, es seien etwa die Exponenten $u_1, \cdots, u_e$ gleich 1, die übrigen gleich 0, setzen

$$\varepsilon\varkappa_1^{u_1} \cdots \varkappa_e^{u_e}\sqrt{\pi^*} = \bar{\pi}$$

und betrachten den Körper $K(\sqrt{\bar{\pi}})$. Im Körper $K(\sqrt{\pi^*})$ bleiben die Primideale $\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_m$ wegen (5) unzerlegt, $\mathfrak{p}$ hingegen wird das Quadrat eines Primideals $\bar{\mathfrak{p}}$. Die Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt{\bar{\pi}})$ bezüglich $K(\sqrt{\pi^*})$ enthält die Primideale $\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_e$, $\bar{\mathfrak{p}}$ als Faktoren und keine anderen mehr. Wir wollen zeigen, daß die Anzahl der (quadratischen) Geschlechter in $K(\sqrt{\bar{\pi}})$ gleich 1 ist.

Zu diesem Behufe beachten wir zunächst, daß die Klassenzahl des Körpers $K(\sqrt{\pi^*})$ eine ungerade Zahl ist (H. Rq. Z. § 33 im Beweise zu

Satz 47) und daß jede beliebige Einheit ε in k der Relativnorm $N_{\sqrt{\pi^*},k}(\bar{\varepsilon})$ einer Einheit in $K(\sqrt{\pi^*})$ gleich ist (H. Rq. Z. Satz 33). Bestehen ferner in $K(\sqrt{\pi^*})$ die Kongruenzen

$$\bar{\varepsilon}^{\frac{n(\mathfrak{q}_s)-1}{4}} \equiv i^{w_s}, \quad (\mathfrak{q}_s)$$
$$(s = 1, 2, \cdots, e),$$
$$\bar{\varepsilon}^{\frac{n(\bar{\mathfrak{p}})-1}{4}} \equiv i^{w}, \quad (\bar{\mathfrak{p}}),$$

wo $n(\mathfrak{q}_s)$, $n(\bar{\mathfrak{p}})$ die Normen genommen in $K(\sqrt{\pi^*})$ bedeuten und die Exponenten $w_1, \cdots, w_e$, w gewisse Werte 0, 1, 2, 3 haben, so müssen zugleich auch die Kongruenzen

$$S\bar{\varepsilon}^{\frac{n(\mathfrak{q}_s)-1}{4}} \equiv i^{w_s}, \quad (\mathfrak{q}_s)$$
$$(s = 1, 2, \cdots, m),$$
$$S\bar{\varepsilon}^{\frac{n(\bar{\mathfrak{p}})-1}{4}} \equiv i^{w}, \quad (\bar{\mathfrak{p}})$$

statthaben, wo $S = (\sqrt{\pi^*} : -\sqrt{\pi^*})$ ist. Es bestehen somit in $K(\sqrt{\pi^*})$ die Gleichungen

$$\left(\left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\mathfrak{q}_s}\right)\right) = \left(\left(\frac{S\bar{\varepsilon}}{\mathfrak{q}_s}\right)\right)$$
$$(s = 1, 2, \cdots, m), \tag{7}$$
$$\left(\left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)\right) = \left(\left(\frac{S\bar{\varepsilon}}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)\right).$$

Bedeutet schließlich $\bar{\mathfrak{r}}$ ein beliebiges Ideal in $K(\sqrt{\pi^*})$, so gilt stets die Gleichung

$$\left(\left(\frac{\varepsilon}{\bar{\mathfrak{r}}}\right)\right)_{K(\sqrt{\pi^*})} = \left(\left(\frac{\varepsilon}{N_{\sqrt{\pi^*},k}(\bar{\mathfrak{r}})}\right)\right)_k.$$

Hieraus folgern wir, daß wegen (5)

$$\left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{q}_s}\right)\right) = \left(\left(\frac{\bar{\varepsilon}_s}{\mathfrak{q}_s}\right)\right)\left(\left(\frac{S\bar{\varepsilon}_s}{\mathfrak{q}_s}\right)\right) = -1,$$
$$\left(\left(\frac{\varepsilon_t}{\mathfrak{q}_s}\right)\right) = \left(\left(\frac{\bar{\varepsilon}_t}{\mathfrak{q}_s}\right)\right)\left(\left(\frac{S\bar{\varepsilon}_t}{\mathfrak{q}_s}\right)\right) = +1 \qquad (t \neq s) \tag{8}$$
$$(s = 1, 2, \cdots, m),$$
$$\left(\left(\frac{\varepsilon}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)\right) = \left(\left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)\right)\left(\left(\frac{S\bar{\varepsilon}}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)\right) = +1 \tag{8*}$$

sein muß, wo sämtliche Gleichungen für den Körper $K(\sqrt{\pi^*})$ gelten und $\varepsilon_s = N_{\sqrt{\pi^*},k}(\bar{\varepsilon}_s)$ gesetzt wurde.

Aus (8) und (8*) ergibt sich weiter bei Berücksichtigung von (6)

$$\left(\left(\frac{\bar{\varepsilon}_s}{\mathfrak{q}_s}\right)\right) = \pm i, \quad \left(\left(\frac{\bar{\varepsilon}_t}{\mathfrak{q}_s}\right)\right) = \pm 1 \quad (t \neq s)$$
$$(s = 1, 2, \cdots, e),$$
$$\left(\left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)\right) = \pm 1,$$

woraus wir folgende Gleichungen ableiten:

$$\left(\frac{\bar{\varepsilon}_s}{\mathfrak{q}_s}\right) = -1, \quad \left(\frac{\bar{\varepsilon}_t}{\mathfrak{q}_s}\right) = +1 \quad (t \neq s)$$
$$(s = 1, 2, \cdots, e),$$
$$\left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\mathfrak{p}}}\right) = +1.$$

Demzufolge ist die Anzahl der geschlechtsbestimmenden Charaktere für den Körper $K(\sqrt{\bar{\pi}})$ gleich 1, womit unsere Behauptung als richtig erwiesen ist.

Aus dieser Tatsache ergibt sich, weil $\bar{\mathfrak{p}}$ ein quadratisch primäres Primideal in $K(\sqrt{\pi^*})$ ist, genau in derselben Weise, wie bei Hilbert, Rq. Z. § 23, daß die oben gemachte Annahme, es seien einige der Exponenten $u_1, \cdots, u_m$ in (6) von Null verschieden, unstatthaft ist, womit Satz 13 vollständig bewiesen ist.

Auch die Umkehrung dieses Satzes ist gültig, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 14. Wenn π eine primäre Zahl in k ist und wenn überdies $(\pi) = \mathfrak{p}^{hh'}$ ist, wo $\mathfrak{p}$ ein Primideal in k bedeutet, so ist dieses Primideal $\mathfrak{p}$ stets primär.

Beweis. Nach Voraussetzung ist die Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt[4]{\pi})$ bezüglich k prim zu $1+i$; sie enthält nur das eine Primideal $\mathfrak{p}$ des Körpers k als Faktor. Die Relativdiskriminante von $K(\sqrt[4]{\pi})$ bezüglich $K(\sqrt{\pi})$ enthält nur das in $\mathfrak{p}$ aufgehende Primideal $\mathfrak{p}$ des Körpers $K(\sqrt{\pi})$ als Faktor. Bezeichnen wir mit 2^{v^*} die Anzahl der Einheitenverbände, welche von denjenigen Einheiten in $K(\sqrt{\pi})$ gebildet werden, welche Relativnormen $N_{\sqrt[4]{\pi},\sqrt{\pi}}$ von Einheiten in $K(\sqrt[4]{\pi})$ sind, so besteht, weil die Klassenzahl in $K(\sqrt{\pi})$ ungerade ist, die Beziehung

$$1 + v^* - 2m > 0.$$

Es ist also $v^* \geqq 2m$, und weil v^* nicht größer als $2m$ sein kann, muß $v^* = 2m$ sein. Somit ist jede Einheit in $K(\sqrt{\pi})$ die Relativnorm $N_{\sqrt[4]{\pi},\sqrt{\pi}}$ einer Einheit des Körpers $K(\sqrt[4]{\pi})$. Da jedoch auch jede Einheit in k der Relativnorm $N_{\sqrt{\pi},k}$ einer Einheit in $K(\sqrt{\pi})$ gleich ist, so folgt hieraus, daß jede Einheit in k die Relativnorm $N_{\sqrt[4]{\pi},k}$ von einer Einheit in $K(\sqrt[4]{\pi})$ sein muß. Es ist demnach, wenn ξ eine beliebige Einheit in k vorstellt,

$$\left(\left(\frac{\xi,\,\pi}{\mathfrak{p}}\right)\right)=\left(\left(\frac{\xi}{\mathfrak{p}}\right)\right)=+1,$$

d. h. $\mathfrak{p}$ ist ein primäres Primideal.

II. Teil.

§ 11.

Eigenschaften primärer Ideale und Zahlen.

Satz 15. Sind α_1 und α_2 primäre Zahlen, so ist auch ihr Produkt $\alpha_1\alpha_2$ primär.

Beweis. Wegen der über α_1 und α_2 gemachten Voraussetzung sind die Relativdiskriminanten $D_{\sqrt[4]{\alpha_1},k}$ und $D_{\sqrt[4]{\alpha_2},k}$ zu $1+i$ prim; demnach muß auch die Relativdiskriminante des aus $K(\sqrt[4]{\alpha_1})$ und $K(\sqrt[4]{\alpha_2})$ zusammengesetzten Körprrs K' in bezug auf k zu $1+i$ prim ausfallen; folglich auch die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\alpha_1\alpha_2},k}$ des Unterkörpers $K(\sqrt[4]{\alpha_1\alpha_2})$ von K'.

Auf Grund des speziellen Reziprozitätsgesetzes, welches wir nunmehr für den Körper k als gültig annehmen, und der bisher bewiesenen Sätze beweist man nun leicht die Sätze 37, 38 und 39 der Lietzmannschen Dissertation. Sonach kann Satz 13 folgendermaßen verallgemeinert werden:

Satz 16. Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges primäres Ideal in k, so ist es stets möglich, eine primäre Zahl α in k derart zu bestimmen, daß $\mathfrak{a}^{hh'}=(\alpha)$ wird.

Beweis. Es sei α^* eine ganze Zahl in k, so daß $\mathfrak{a}^{hh'}=(\alpha^*)$ wird. Nach Satz 10 besteht für α^* nach dem Modul 8 eine Kongruenz von der Form

$$\alpha^*\equiv\varepsilon\varkappa_1^{v_1}\cdots\varkappa_m^{v_m}\pi_1^{w_1}\cdots\pi_z^{w_z}\beta^4,\quad(8),$$

wo ε eine Einheit in k ist und die Bedeutung der übrigen Größen in dieser Kongruenz aus Satz 10 zu entnehmen ist. Wir nehmen hier insbesondere an, die Zahlen $\pi_1,\cdots,\pi_z$ seien *biquadratisch* primäre Zahlen. Es ist dann $\alpha\varepsilon^{-1}\varkappa_1^{4-v_1}\cdots\varkappa_m^{4-v_m}$ eine primäre Zahl. Es gilt demnach nach Satz 38 der Lietzmannschen Dissertation die Gleichung

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\left(\frac{\nu,\ \alpha^*\varepsilon^{-1}\varkappa_1^{4-v_1}\cdots\varkappa_m^{4-v_m}}{\mathfrak{w}}\right)\right)=+1$$

für jede beliebige zu $1+i$ prime ganze Zahl ν in k, wenn das Produkt $\underset{(\mathfrak{w})}{\Pi'}$ über sämtliche zu $1+i$ prime Primideale des Körpers k erstreckt wird. Setzen wir insbesondere für ν die Einheiten $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$ ein, so ergibt sich bei Berücksichtigung der Eigenschaften der Primideale $\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_m$ sofort, daß $v_1, \cdots, v_m$ sämtlich gleich 0 sein müssen; daher ist $\alpha = \alpha^* \varepsilon^{-1}$ eine primäre Zahl, w. z. b. w.

Auch die Umkehrung dieses Satzes gilt. Sie lautet:

Satz 17. Wenn $\mathfrak{a}$ ein zu $1+i$ primes Ideal in k und α eine ganze Zahl in k ist, so daß $\mathfrak{a}^{hh'} = (\alpha)$ wird und überdies die Zahl α primär ausfällt, so ist $\mathfrak{a}$ ein primäres Ideal in k.

Den Beweis dieses Satzes gewinnen wir aus Satz 38 der Lietzmannschen Dissertation, wenn wir in der Gleichung dieses Satzes für ν eine beliebige Einheit ξ in k und für μ die Zahl α nehmen.

Wir wollen nun folgenden Satz beweisen:

Satz 18. Eine beliebige ganze Zahl μ des Körpers k ist stets dann und nur dann primär, wenn sie einer Kongruenz von der Gestalt

$$\mu \equiv \pi_1^{w_1} \cdots \pi_z^{w_z} \alpha^4, \quad (8) \tag{1}$$

Genüge leistet, wo $w_1, \cdots, w_z$ gewisse Werte 0, 1 haben, α eine ganze Zahl in k ist und die *biquadratisch* primären Zahlen $\pi_1, \cdots, \pi_z$ gemäß Satz 10 bestimmt worden sind.

Beweis. Genügt μ der Kongruenz (1), so ist $\mu \pi_1^{4-w_1} \cdots \pi_z^{4-w_z}$ eine primäre Zahl. Da aber auch $\pi_1^{w_1} \cdots \pi_z^{w_z}$ primär ist, so muß auch das Produkt μ dieser Zahlen primär sein.

Ist umgekehrt μ primär, so gilt für μ sicher eine Kongruenz

$$\mu \equiv \varepsilon \varkappa_1^{v_1} \cdots \varkappa_m^{v_m} \pi_1^{w_1} \cdots \pi_z^{w_z} \alpha^4, \quad (8),$$

wo ε eine Einheit in k ist und die Bedeutung der übrigen Größen aus Satz 10 zu entnehmen ist. Dieser Kongruenz zufolge muß auch

$$\mu \varepsilon^{-1} \varkappa_1^{4-v_1} \cdots \varkappa_m^{4-v_m}$$

eine primäre Zahl sein. Berücksichtigen wir nun den Satz 38 der Lietzmannschen Dissertation und verfahren wie im Beweise zu Satz 17, so überzeugen wir uns leicht, daß $v_1 = v_2 = \cdots = v_m = 0$ sein muß. Es ist daher auch $\mu \varepsilon^{-1}$ primär und somit auch ε. Demnach muß ε die vierte Potenz einer Einheit in k sein, weil die Klassenzahl von k ungerade ist. Man vergleiche hierzu H. Rq. Z., Satz 28. Somit gilt wirklich für μ eine Kongruenz von der Form (1).

§ 12.

Die hyperprimären Ideale und Zahlen.

Definition 5. Ist α eine ganze Zahl in k, für welche eine Kongruenz von der Form

$$\alpha \equiv \beta^4, \quad (\mathfrak{l}_1^{6 l_1+1} \cdots \mathfrak{l}_z^{6 l_z+1})$$

statthat, wo β eine ganze Zahl in k ist und $\mathfrak{l}_1, \cdots, \mathfrak{l}_z$; $l_1, \cdots, l_z$ die frühere Bedeutung haben, so heiße α eine *biquadratisch hyperprimäre* oder kurz *hyperprimäre Zahl* des Körpers k.

Für hyperprimäre Zahlen gilt Satz 41 der Lietzmannschen Dissertation.

Definition 6. Ist $\mathfrak{a}$ ein primäres Ideal in k, für welches die Gleichungen

$$\left(\left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{a}}\right)\right) = +1, \cdots, \quad \left(\left(\frac{\lambda_z}{\mathfrak{a}}\right)\right) = +1$$

bestehen, so heiße $\mathfrak{a}$ ein *biquadratisch hyperprimäres* oder kurz *hyperprimäres Ideal* des Körpers k.

Es gilt der Satz:

Satz 19. Ist $\mathfrak{a}$ ein hyperprimäres Ideal in k, so kann man stets eine hyperprimäre Zahl α in k derart bestimmen, daß $\mathfrak{a}^{hh'} = (\alpha)$ wird.

Beweis. Es sei α^* irgend eine ganze Zahl in k, so daß $\mathfrak{a}^{hh'} = (\alpha^*)$ wird, so können wir dem Satze 10* gemäß für α^* eine Kongruenz von der Form

$$\alpha^* \equiv \varepsilon^* \varkappa_1^{v_1} \cdots \varkappa_m^{v_m} \pi_1^{w_1} \cdots \varkappa_z^{w_z} \beta^4, \quad (\mathfrak{l}_1^{6 l_1+1} \cdots \mathfrak{l}_z^{6 l_z+1})$$

aufstellen, wo ε^* eine Einheit, β eine ganze Zahl in k bedeutet und die Bedeutung der übrigen Größen aus Satz 10* zu ersehen ist.

Die Zahl

$$\mu = \alpha^* \varepsilon^{*3} \varkappa_1^{4-v_1} \cdots \varkappa_m^{4-v_m} \pi_1^{4-w_1} \cdots \pi_z^{4-w_z}$$

ist eine hyperprimäre Zahl in k. Folglich müssen die Gleichungen

$$(1) \quad \begin{cases} \prod\limits_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\left(\frac{\varepsilon_s, \mu}{\mathfrak{w}}\right)\right) = +1, \quad (s = 1, 2, \cdots, m), \\ \prod\limits_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\left(\frac{\lambda_t, \mu}{\mathfrak{w}}\right)\right) = +1, \quad (t = 1, 2, \cdots, z) \end{cases}$$

statthaben. Aus (1) ergeben sich weiter die Beziehungen

$$(2) \quad \begin{gathered} \left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\alpha^* \varkappa_1^{4-v_1} \cdots \varkappa_m^{4-v_m} \pi_1^{4-w_1} \cdots \pi_z^{4-w_z}}\right)\right) \\ = \left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{a}}\right)\right) \left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{q}_1}\right)\right)^{-v_1} \cdots \left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{q}_m}\right)\right)^{-v_m} \left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{p}_1}\right)\right)^{-w_1} \cdots \left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{p}_z}\right)\right)^{-w_z} = +1, \\ (s = 1, 2, \cdots, m), \end{gathered}$$

$$\left(\left(\frac{\lambda_t}{\alpha^* \varkappa_1^{4-v_1} \ldots \varkappa_m^{4-v_m} \pi_1^{4-w_1} \ldots \pi_z^{4-w_z}}\right)\right)$$

(3) $$= \left(\left(\frac{\lambda_t}{\mathfrak{a}}\right)\right)\left(\left(\frac{\lambda_t}{\mathfrak{q}_1}\right)\right)^{-v_1} \cdots \left(\left(\frac{\lambda_t}{\mathfrak{q}_m}\right)\right)^{-v_m}\left(\left(\frac{\lambda_t}{\mathfrak{p}_1}\right)\right)^{-w_1} \cdots \left(\left(\frac{\lambda_t}{\mathfrak{p}_z}\right)\right)^{-w_z} = +1,$$
$$(t = 1, 2, \cdots, z).$$

Berücksichtigen wir jetzt die Eigenschaften der Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_m$, $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_z$, so ergibt sich zunächst aus (2), daß sämtliche Exponenten $v_1, \cdots, v_m$ gleich 0 sein müssen; dann folgt aber aus (3), daß auch die Exponenten $w_1, \cdots, w_z$ sämtlich gleich 0 werden müssen. Demnach ist $\alpha = \varepsilon^{*s}\alpha^*$ eine Zahl von der im Satz 19 verlangten Eigenschaft.

Die Umkehrung des Satzes 20 lautet wie folgt:

Satz 20. Ist α eine hyperprimäre Zahl in k, so ist

$$\left(\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right)\right) = +1, \cdots, \left(\left(\frac{\varepsilon_m}{\alpha}\right)\right) = +1,$$
$$\left(\left(\frac{\lambda_1}{\alpha}\right)\right) = +1, \cdots, \left(\left(\frac{\lambda_m}{\alpha}\right)\right) = +1.$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz 41 der Lietzmannschen Dissertation.

§ 13.

Das Symbol $\left(\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right)\right)$ und das biquadratische Reziprozitätsgesetz.

Es gelingt jetzt leicht, nach dem Vorbilde Hilberts (H. Rq. Z. § 32 ff.) das biquadratische Reziprozitätsgesetz im Körper k abzuleiten.

Es seien $\mathfrak{l}_1, \cdots, \mathfrak{l}_z$ die in $1+i$ aufgehenden Primideale des Körpers k, und es gehe $\mathfrak{l}_1$ in $1+i$ genau zur l_1^{ten}; $\mathfrak{l}_2, \cdots, \mathfrak{l}_z$ bez. genau zur $l_2^{\text{ten}}, \cdots, l_z^{\text{ten}}$ Potenz in $1+i$ auf.

Sind ν, μ zwei zu $1+i$ prime ganze Zahlen in k, so bestimme man eine ganze Zahl μ^* nach den Kongruenzen

(1) $$\mu^* \equiv \mu, \quad (\mathfrak{l}_1^{6 l_1}),$$
$$\mu^* \equiv \alpha^4, \quad (\mathfrak{l}_2^{6 l_2} \cdots \mathfrak{l}_z^{6 l_z});$$

wenn hingegen ν, μ beliebige ganze Zahlen in k sind und $\mathfrak{l}_1$ in μ genau zur α^{ten} Potenz aufgeht, bestimme man μ^*, so daß

(2) $$\mu^* \equiv \mu, \quad (\mathfrak{l}_1^{6 l_1 + a + 1}),$$
$$\mu^* \equiv \alpha^4, \quad (\mathfrak{l}_2^{6 l_2 + 1} \cdots \mathfrak{l}_z^{6 l_z + 1})$$

wird; hierbei ist α eine beliebige zu $\mathfrak{l}_2, \cdots, \mathfrak{l}_z$ prime ganze Zahl in k.

Definiert man dann das Symbol $\left(\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right)$ durch die Gleichung

(3) $$\left(\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\left(\frac{\nu, \mu^*}{\mathfrak{w}}\right)\right)^{-1},$$

wo das Produkt $\prod\limits_{(\mathfrak{w})}'$ über sämtliche zu $1+i$ primen Primideale in k zu erstrecken ist, so ist ν dann und nur dann biquadratischer Normenrest des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ nach $\mathfrak{l}_1$, wenn

$$(4) \qquad \left(\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right) = +1$$

ausfällt.

Sind ν, μ zwei beliebige von Null verschiedene ganze Zahlen in k, dann gilt stets die Gleichung

$$(5) \qquad \prod_{(\mathfrak{w})} \left(\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right)\right) = +1,$$

wo das Produkt über alle Primideale $\mathfrak{w}$ des Körpers k zu erstrecken ist (L. § 17, Satz 48).

Die Gleichung (5) stellt das biquadratische Reziprozitätsgesetz in allgemeinster Gestalt dar.

Wir möchten an dieser Stelle nur noch eines besonderen Falles dieses allgemeinen Reziprozitätsgesetzes erwähnen.

Satz 21. Sind $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ zwei beliebige *quadratisch primäre Primideale* und setzt man

$$\mathfrak{p}_1^{hh'} = (\pi_1), \quad \mathfrak{p}_2^{hh'} = (\pi_2),$$

so daß π_1, π_2 *quadratisch primäre Zahlen* in k vorstellen, so gilt das Reziprozitätsgesetz

$$\left(\left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{p}_2}\right)\right) = \left(\left(\frac{\pi_2}{\mathfrak{p}_1}\right)\right).$$

Beweis. Es seien die Primideale $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ etwa so beschaffen, daß

$$\left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{p}_1}\right)\right) = c_s, \quad \left(\frac{\lambda_t}{\mathfrak{p}_1}\right) = d_t,$$
$$\left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{p}_2}\right)\right) = c_s', \quad \left(\frac{\lambda_t}{\mathfrak{p}_2}\right) = d_t',$$
$$(s = 1, 2, \cdots, m, \quad t = 1, 2, \cdots, z)$$

wird; dabei haben $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$; $\lambda_1, \cdots, \lambda_z$ die vorige Bedeutung und c_s, c_s', d_t, d_t' bedeuten gewisse Werte ± 1, Wir bestimmen ein Primideal $\mathfrak{r}$ in k, welches die Gleichungen

$$\left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{r}}\right)\right) = \pm c_s'', \quad \left(\left(\frac{\lambda_t}{\mathfrak{r}}\right)\right) = \pm d_t'',$$
$$(s = 1, 2, \cdots, m; \quad t = 1, 2, \cdots, z)$$

befriedigt; hierbei ist unter c_s'', d_t'' der Wert $+1$ zu verstehen, wenn $c_s = c_s'$ bez. $d_t = d_t'$ ist, und der Wert i, wenn $c_s = -c_s'$ bez. $d_t = -d_t'$ ausfällt. Dann ist das Ideal $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{r}^2$ primär. Setzen wir $\mathfrak{r}^{hh'} = (\varrho)$, so daß ϱ eine ganze Zahl in k wird, so kann man eine Einheit ε in k bestimmen derart, daß $\varepsilon\pi_1\pi_2\varrho^2$ primär wird. Nun muß für $\varepsilon\pi_1\pi_2\varrho^2$ gewiß eine Kongruenz von der Form

$$\varepsilon\pi_1\pi_2\varrho^2 \equiv \alpha^2, \quad (4)$$

bestehen, wo α eine ganze Zahl in k vorstellt, woraus sich für ε eine Kongruenz von der Gestalt

$$\varepsilon \equiv \beta^2, \quad (4)$$

ergibt, wo β wieder eine ganze Zahl in k bedeutet. Demnach muß ε gleich dem Quadrate einer Einheit η in k werden. (H. Rq. Z. § 21, Satz 28), so daß $\eta^2\pi_1\pi_2\varrho^2$ eine primäre Zahl ist.

Beachten wir nun, daß das Produkt

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\left(\frac{\pi_1,\ \ \eta^2\pi_1\pi_2\varrho^2}{\mathfrak{w}}\right)\right) = +1$$

sein muß, wenn man es über alle zu $1+i$ primen Primideale $\mathfrak{w}$ des Körpers k erstreckt (L. § 14, Satz 38), so folgt hieraus unmittelbar die Gleichung

$$(6) \qquad \left(\left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{p}_2}\right)\right)\left(\left(\frac{\pi_2}{\mathfrak{p}_1}\right)\right)^{-1}\left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{r}}\right)\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}_1}\right) = +1.$$

Es ist aber nach der Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers (H. Rq. Z. § 25, Satz 36)

$$\left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{r}}\right)\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}_1}\right) = +1,$$

womit sich aus (6) die Richtigkeit des Satzes 21 ergibt.

§ 14.

Ein Satz über die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu},k}$.

Satz 22. Es sei $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_1$ ein beliebiges in $1+i$ genau zur l^{ten} Potenz enthaltenes Primideal des Körpers k und μ eine ganze Zahl in k, die genau durch $\mathfrak{l}^a$ teilbar und nicht das Quadrat einer ganzen Zahl in k ist. Soll die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu},k}$ prim zu $\mathfrak{l}$ sein, so muß nach Satz 1 a durch 4 teilbar sein, und wir können dann stets eine zu $\mathfrak{l}$ prime ganze Zahl μ_1 in k bestimmen, so daß $K(\sqrt[4]{\mu}) = K(\sqrt[4]{\mu_1})$ wird.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{l}_2, \cdots, \mathfrak{l}_z$ die noch außer $\mathfrak{l}$ in $1+i$ aufgehenden Primideale des Körpers k und bestimmen die ganzen Zahlen $\lambda = \lambda_1$, $\lambda_2, \cdots, \lambda_z$ derart, daß

$$\mathfrak{l}^{hh'} = (\lambda), \quad \mathfrak{l}_2^{hh'} = (\lambda_2), \cdots, \mathfrak{l}_z^{hh'} = (\lambda_z)$$

wird. Ferner möge $\mathfrak{p}$ ein primäres Primideal in k sein, für welches die Beziehungen

(1) $$\left(\left(\frac{\lambda}{\mathfrak{p}}\right)\right)=\pm i,\quad \left(\left(\frac{\lambda_2}{\mathfrak{p}}\right)\right)=+1,\cdots,\left(\left(\frac{\lambda_z}{\mathfrak{p}}\right)\right)=+1$$

gelten. Bedeutet dann π eine primäre Zahl in k, so daß man $\mathfrak{p}^{hh'}=(\pi)$ setzen kann, so ist die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu},k}$ stets dann und nur dann prim zu $\mathfrak{l}$, wenn eine Kongruenz von der Form

(2) $$\mu_1\equiv\pi^w\alpha^4,\quad(\mathfrak{l}^{6l})$$

statthat, wo w einen der Werte 0, 1 hat und α eine ganze Zahl in k bedeutet.

Beweis. Besteht eine Kongruenz von der Gestalt (2), so ist wegen Satz 2, weil $\pi^w\alpha^4$ eine primäre Zahl ist, gewiß die Diskriminante $D_{\sqrt{\mu_1},k}$ zu $\mathfrak{l}$ prim. Somit haben wir nur noch die Umkehrung davon zu beweisen.

Es mögen die Primideale $\mathfrak{l}_2,\cdots,\mathfrak{l}_z$ beziehungsweise genau zur $l_2^{\text{ten}},\cdots,l_z^{\text{ten}}$ Potenz in $1+i$ aufgehen. Dann bestimmen wir eine ganze Zahl μ^* in k, so daß die Kongruenzen

(3) $$\mu_1\equiv\mu^*,\quad(\mathfrak{l}^{6l}),$$

(4) $$\mu^*\equiv\beta^4,\quad(\mathfrak{l}_2^{6l_2}\cdots\mathfrak{l}_z^{6l_z})$$

stattfinden, wo β eine zu $\mathfrak{l}_2\cdots\mathfrak{l}_z$ prime ganze Zahl in k vorstellt. Die Zahl μ^* ist diesen Kongruenzen zufolge sicherlich primär, und es muß für dieselbe nach Satz 10 und Satz 18 eine Kongruenz von der Form

$$\mu^*\equiv\pi^w\pi_2^{w_2}\cdots\pi_z^{w_z}\gamma^4,\qquad(8)$$

bestehen, wo die Exponenten $w, w_2,\cdots,w_z$ gewisse Werte 0, 1 haben und γ eine ganze Zahl in k bedeutet. Hierbei seien $\pi_2,\cdots,\pi_z$ primäre Zahlen und die entsprechenden Primideale $\mathfrak{p}_2,\cdots,\mathfrak{p}_z$ des Satzes 10 als primäre Primideale so bestimmt, daß für dieselben die Gleichungen

$$\left(\left(\frac{\lambda_s}{\mathfrak{p}_s}\right)\right)=\pm i,\quad\left(\left(\frac{\lambda_t}{\mathfrak{p}_s}\right)\right)=+1,\qquad(s\neq t),$$
$$(s=2,3,\cdots,z)$$

gelten.

Ist nun μ^* quadratisch hyperprimär, so müssen die Exponenten $w, w_2,\cdots,w_z$ sämtlich gleich 0 sein; ist es jedoch nur quadratisch primär und nicht hyperprimär, so ist wegen (4)

$$\left(\frac{\mu^*}{\mathfrak{l}_2}\right)=+1,\cdots,\left(\frac{\mu^*}{\mathfrak{l}_z}\right)=+1;$$

folglich muß $\left(\frac{\mu^*}{\mathfrak{l}}\right)=-1$ sein. Demnach muß nach Satz 11 $w_2=0,\cdots,$ $w_z=0$ und $w_1=1$ ausfallen, und es besteht in der Tat für μ_1 eine Kongruenz von der Form (2). Da aber wegen (1) auch stets

$$\left(\left(\frac{\pi}{\mathfrak{l}}\right)\right)=\pm i,\quad\left(\left(\frac{\pi}{\mathfrak{l}_2}\right)\right)=+1,\cdots,\left(\left(\frac{\pi}{\mathfrak{l}_z}\right)\right)=+1$$

ist, so befriedigt die laut (2) bestimmte Zahl $\pi^w \alpha^4$ schon von selbst eine Kongruenz von der Gestalt

$$\pi^w \alpha^4 \equiv \beta^4, \quad (\mathfrak{l}_2^{6 l_2} \cdots \mathfrak{l}_z^{6 l_z})$$

und kann als μ^* der Kongruenz (3) und (4) genommen werden. Beachtet man endlich, daß wegen (3) die Diskriminanten $D_{\sqrt[4]{\mu_1}, k}$ und $D_{\sqrt[4]{\mu^*}, k}$ entweder beide durch $\mathfrak{l}$ teilbar oder beide zu $\mathfrak{l}$ prim sind, so ist damit Satz 22 bewiesen.

§ 15.

Die Anzahl der biquadratischen Normenreste.

Satz 23. Wenn $\mathfrak{p}$ ein zu $1+i$ primes Primideal des Körpers k ist, das nicht in der Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu}, k}$ des relativbiquadratischen Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ aufgeht, so ist *jede* zu $\mathfrak{p}$ prime Zahl ν biquadratischer Normenrest des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ nach $\mathfrak{p}$.

Ist dagegen $\mathfrak{p}$ ein zu $1+i$ primes Primideal des Körpers k, das wohl in der Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu}, k}$ des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$, aber nicht in der Relativdiskriminante $D_{\sqrt{\mu}, k}$ des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ aufgeht, und bedeutet e einen beliebigen positiven ganzen rationalen Exponenten, so sind von allen vorhandenen zu $\mathfrak{p}$ primen und nach $\mathfrak{p}^e$ einander inkongruenten Zahlen in k die *Hälfte* biquadratische Normenreste des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ nach $\mathfrak{p}$; geht hingegen $\mathfrak{p}$ auch in der Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu}, k}$ des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ auf, so sind von den erwähnten zu $\mathfrak{p}$ primen Zahlen nur der *vierte Teil* biquadratische Normenreste des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ nach $\mathfrak{p}$.

Der Beweis für diesen Satz ergibt sich leicht aus den Eigenschaften des Symbols $\left(\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)\right)$. Man sehe hierzu L. § 7.

Wir gehen nun zur Bestimmung der Anzahl der biquadratischen Normenreste nach einem in $1+i$ aufgehenden Primideal über und wollen den folgenden Satz beweisen:

Satz 24. Es sei $\mathfrak{l}_1$ ein Primfaktor von $1+i$ und zwar gehe $\mathfrak{l}_1$ genau zur l_1^{ten} Potenz in $1+i$ auf: Wenn dann die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu}, k}$ des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ nicht durch $\mathfrak{l}_1$ teilbar ist, so ist *jede* zu $\mathfrak{l}_1$ prime ganze Zahl ν in k Normenrest des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ nach $\mathfrak{l}_1$. Ist dagegen die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu}, k}$ durch $\mathfrak{l}_1$ teilbar, die Relativdiskriminante $D_{\sqrt{\mu}, k}$ des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ jedoch zu $\mathfrak{l}_1$ prim, und bezeichnet man mit L einen beliebigen Exponenten größer als $6l$, so sind von allen vorhandenen zu $\mathfrak{l}_1$ primen und nach $\mathfrak{l}_1^L$ inkongruenten Zahlen ν in k genau die *Hälfte* Normenreste des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ nach $\mathfrak{l}_1$. Ist endlich auch die Relativdiskriminante $D_{\sqrt{\mu},k}$ durch $\mathfrak{l}_1$ teilbar, so sind von allen vorhandenen zu $\mathfrak{l}_1$ primen und nach $\mathfrak{l}_1^L$ inkongruenten Zahlen ν in k genau der *vierte Teil* Normenreste des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ nach $\mathfrak{l}_1$.

Beweis. Wenn $\mathfrak{l}_1$ nicht in der Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu},k}$ von $K(\sqrt[4]{\mu})$ aufgeht, so können wir μ prim zu $\mathfrak{l}_1$ annehmen. Eine gemäß (1) des § 13 zu μ bestimmte Zahl μ^* wird dann laut Satz 18 und 11 einer Kongruenz von der Form

$$\mu^* \equiv \pi_1^{w_1}\beta^4, \quad (8)$$

Genüge leisten müssen, wo π_1 eine wie in Satz 18 bestimmte primäre Zahl ist, w_1 einen der Werte 0 oder 1 hat, und β eine ganze Zahl in k bedeutet. Wir können demnach setzen

$$\left(\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\left(\frac{\nu,\pi_1^{w_1}}{\mathfrak{w}}\right)\right)^{-1}.$$

Es wird somit, weil π_1 primär ist, $\left(\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right) = +1$, wie es Satz 24 fordert.

Um aber die zweite Aussage des Satzes zu beweisen, nehmen wir zunächst an, μ sei prim zu $\mathfrak{l}_1$. Nun stellen wir für die zu μ nach (1) des § 13 bestimmte ganze Zahl μ^* eine Kongruenz von der Form (1) des § 7 auf, verstehen jedoch hier wie in der Folge stets unter $\pi_1, \cdots, \pi_z$ *primäre* Zahlen. Es sei

$$(1) \qquad \mu^* \equiv \varepsilon_1^{u_1} \cdots \varepsilon_m^{u_m} \varkappa_1^{v_1} \cdots \varkappa_m^{v_m} \pi_1^{w_1} \cdots \pi_z^{w_z} \alpha^4, \quad (8),$$

wo die Exponenten $u_1, \cdots, u_m$; $v_1, \cdots, v_m$ gewisse Werte 0, 1, 2, 3, hingegen die Exponenten $w_1, \cdots, w_z$ nur gewisse Werte 0, 1 haben können, und a eine geeignete ganze Zahl in k bedeutet.

Soll die Relativdiskriminante $D_{\sqrt{\mu},k}$ des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ durch $\mathfrak{l}_1$ teilbar sein, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß mindestens einer der Exponenten $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m$ in (1) ungerade sei. Denn es darf in diesem Falle μ nicht einer Quadratzahl in k nach dem Modul $\mathfrak{l}_1^{4l_1}$ kongruent ausfallen. Wären jedoch sämtliche Exponenten $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m$ gerade, so wäre nach (1) μ^* einer Quadratzahl in k nach dem Modul $\mathfrak{l}_1^{4l_1}$ kongruent und demzufolge würde dies wegen (1) des § 13 auch für μ der Fall sein. Wenn hingegen auch nur einer der Exponenten $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m$ ungerade ist, so kann μ keiner Quadratzahl in k nach dem Modul $\mathfrak{l}_1^{4l_1}$ kongruent sein. Denn wäre dies der Fall, so müßte wegen (1) des § 13 die Zahl μ^* einer Quadratzahl nach dem Modul 4 kongruent sein, was der Annahme über die Exponenten $u_1, \cdots, u_m$, $v_1, \cdots, v_m$ widerspricht, wie aus (1) zu ersehen ist.

Wir nehmen nun an, es gebe unter den Exponenten $u_1, \cdots, u_m$, $v_1, \cdots, v_m$ mindestens einen, der ungerade ist. Dann zeigt man leicht unter Zuhilfenahme der Eigenschaften der Primideale $\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_m, \mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_z$, daß das Symbol $\left(\left(\frac{\nu,\, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right)$ für solche Zahlen ν, die zu $\mathfrak{l}_1$ prim sind, die Werte $\pm i$ haben kann. In der Tat nehmen wir zunächst an, es seien sämtliche Exponenten v, aber nicht alle u gleich Null, und es sei etwa u_s von Null verschieden und ungerade, so wird

$$(2) \qquad \left(\left(\frac{\varkappa_s,\, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\left(\frac{\varkappa_s,\, \mu^*}{\mathfrak{w}}\right)\right) = \left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{q}_s}\right)\right)^{u_s} = \pm i.$$

Sind dagegen nicht alle v gleich Null und etwa v_s von Null verschieden und ungerade, so schließen wir ähnlich, daß

$$(3) \qquad \left(\left(\frac{\varepsilon_s,\, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\left(\frac{\varepsilon_s,\, \mu^*}{\mathfrak{w}}\right)\right) = \left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{q}_s}\right)\right)^{v_s} = \pm i$$

sein muß.

Soll ferner die Relativdiskriminante $D_{\sqrt{\mu},\, k}$ des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ prim zu $\mathfrak{l}_1$ sein, so folgt ähnlich, wie in dem eben erledigten Falle, daß dazu notwendig und hinreichend ist, daß die Exponenten $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m$ sämtlich gerade ausfallen; soll aber $D_{\sqrt[4]{\mu},\, k}$ durch $\mathfrak{l}_1$ teilbar sein, so muß mindestens einer dieser Exponenten von 0 verschieden sein.

Sind diese Exponenten nicht sämtlich gleich 0, so zeigt man leicht, wie oben, daß das Symbol $\left(\left(\frac{\nu,\, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right)$ für solche Zahlen ν, die zu $\mathfrak{l}_1$ prim sind, auch den Wert -1 erreichen kann. Das Symbol $\left(\left(\frac{\nu,\, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right)$ kann in diesem Falle für die in Rede stehenden Zahlen ν überhaupt nur die Werte $+1$ und -1 haben.

Wir sahen, daß das Symbol $\left(\left(\frac{\nu,\, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right)$ für solche Zahlen ν, μ, die zu $\mathfrak{l}_1$ prim sind, wenn die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu},\, k}$ durch $\mathfrak{l}_1$ teilbar ist, beziehungsweise zwei oder vier Werte annehmen kann. Es ist nun leicht, die Aussage des Satzes 24 über die Anzahl der Normenreste für den gegenwärtigen Fall zu beweisen.

Wegen $L > 6 l_1$ sind zwei nach $\mathfrak{l}_1^L$ kongruente zu $\mathfrak{l}_1$ prime ganze Zahlen in k stets gleichzeitig Normenreste oder Normennichtreste nach $\mathfrak{l}_1$. Wir bezeichnen nun mit $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_s$ ein System ganzer Zahlen in k von folgender Beschaffenheit: Die Zahlen $\nu_1, \cdots, \nu_s$ sollen nach $\mathfrak{l}_1^L$ untereinander inkongruente und zu $\mathfrak{l}_1$ prime Normenreste nach $\mathfrak{l}_1$ sein; endlich soll jede zu $\mathfrak{l}_1$ prime Zahl, welche Normenrest nach $\mathfrak{l}_1$ ist, einer jener Zahlen $\nu_1, \cdots, \nu_s$ nach $\mathfrak{l}_1^L$ kongruent sein. Ist nun ν ein zu $\mathfrak{l}_1$ primer Normennichtrest nach $\mathfrak{l}_1$, für den etwa

$$\left(\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right) = i$$

ausfällt, so sind die Zahlen

$$\begin{gathered} \nu\nu_1, \cdots, \nu\nu_s, \\ \nu^2\nu_1, \cdots, \nu^2\nu_s, \\ \nu^3\nu_1, \cdots, \nu^3\nu_s \end{gathered}$$

sämtlich Normennichtreste nach $\mathfrak{l}_1$, und wir können leicht zeigen, daß jeder beliebige zu $\mathfrak{l}_1$ prime Normennichtrest nach $\mathfrak{l}_1$ einer dieser $3s$ Zahlen nach $\mathfrak{l}_1^L$ kongruent ausfällt.

Es sei ν' irgend ein beliebiger Normennichtrest nach $\mathfrak{l}_1$ und etwa

$$\left(\left(\frac{\nu', \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right) = i^t,$$

wo t einen der Werte 1, 2 oder 3 haben kann, so bestimmen wir eine ganze Zahl ν^*, so daß

$$\nu^t\nu^* \equiv 1, \quad (\mathfrak{l}_1^L)$$

wird. Es folgt dann wegen $L > 6l_1$ die Gleichung

$$\left(\left(\frac{\nu^*, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right) = \left(\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right)^{-t} = i^{-t};$$

somit ist $\nu'\nu^*$ Normenrest nach $\mathfrak{l}_1$ und folglich einer der Zahlen $\nu_1, \cdots, \nu_s$ nach $\mathfrak{l}_1^L$ kongruent; es sei etwa $\nu'\nu^* \equiv \nu_i$ nach $\mathfrak{l}_1^L$; dann ist

$$\nu'\nu^t\nu^* \equiv \nu' \equiv \nu^t\nu_i, \quad (\mathfrak{l}_1^L).$$

Ist das Symbol $\left(\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right)$ für solche Zahlen ν, die zu $\mathfrak{l}_1$ prim sind, nur der Werte $+1$ und -1 fähig, so zeigt man in ganz analoger Weise, daß von allen vorhandenen zu $\mathfrak{l}_1$ primen und nach $\mathfrak{l}_1^L$ inkongruenten Zahlen ν in k genau die Hälfte Normenreste des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ nach $\mathfrak{l}_1$ sind. Damit ist dann die Aussage des zweiten Teiles von Satz 24 für solche Zahlen μ, die zu $\mathfrak{l}_1$ prim sind, vollständig bewiesen.

Um nun diesen Teil des Satzes für beliebige Zahlen μ zu beweisen, nehmen wir an, das Primideal $\mathfrak{l}_1$ gehe in μ genau zur a_1^{ten} Potenz auf. Setzt man $\mathfrak{l}_1^{hh'} = (\lambda_1)$, so daß λ_1 eine ganze Zahl in k wird, so ist $\frac{\mu^{hh'}}{\lambda_1^{a_1}}$ eine ganze zu $\mathfrak{l}_1$ prime Zahl in k. Wir bestimmen eine ganze Zahl μ^* in k, welche die Kongruenzen

$$\mu^* \equiv \frac{\mu^{hh'}}{\lambda_1^{a_1}}, \quad (\mathfrak{l}_1^{6l_1+1}),$$

(4)

$$\lambda_1^{a_1}\mu^* \equiv \alpha^4, \quad \left(\mathfrak{l}_2^{6l_2+1} \ldots \mathfrak{l}_z^{6l_z+1}\right),$$

befriedigt, wo α eine beliebige zu $\mathfrak{l}_2, \cdots, \mathfrak{l}_z$ prime ganze Zahl in k vorstellt. Die auf diese Weise bestimmte Zahl μ^* fällt zu $1+i$ prim aus.

Es gilt, wie man leicht einsieht, die Beziehung

$$\left(\left(\frac{\nu,\,\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right) = \left(\left(\frac{\nu,\,\mu^{hh'}}{\mathfrak{l}_1}\right)\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\left(\frac{\nu,\,\lambda_1^{a_1}\mu^*}{\mathfrak{w}}\right)\right)^{-1}, \tag{5}$$

wo, wie immer, das Produkt $\prod\limits_{(\mathfrak{w})}{}'$ über sämtliche zu $1+i$ primen Primideale in k zu erstrecken ist.

Wir können für μ^* nach Satz 10* eine Kongruenz nach dem Modul $\mathfrak{l}_1^{6l_1+1} \ldots \mathfrak{l}_z^{6l_z+1}$ aufstellen; sie laute etwa:

$$\mu^* \equiv \varepsilon_1^{u_1} \cdots \varepsilon_m^{u_m} \varkappa_1^{v_1} \cdots \varkappa_m^{v_m} \pi_1^{w_1} \cdots \pi_z^{w_z} \alpha^4, \quad \left(\mathfrak{l}_1^{6l_1+1} \ldots \mathfrak{l}_z^{6l_z+1}\right), \tag{6}$$

wo die Bedeutung der einzelnen Größen dieser Kongruenz aus Satz 10* zu ersehen ist. Mithin ergibt sich aus (5) die folgende Gleichung

$$\left(\left(\frac{\nu,\,\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\left(\frac{\nu,\,\lambda_1^{a_1}\varepsilon_1^{u_1} \cdots \varepsilon_m^{u_m}\varkappa_1^{v_1} \cdots \varkappa_m^{v_m}\pi_1^{w_1} \cdots \pi_z^{w_z}}{\mathfrak{w}}\right)\right)^{-1}. \tag{7}$$

Soll nun die Relativdiskriminante $D_{\sqrt{\mu},k}$ des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ durch $\mathfrak{l}_1$ teilbar sein, so muß entweder a_1 ungerade sein, oder, wenn a_1 gerade ist, mindestens einer der Exponenten $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m$ ungerade ausfallen. Im letzteren Falle folgert man wie oben, daß das Symbol $\left(\left(\frac{\nu,\,\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right)$ für solche Zahlen ν, die zu $\mathfrak{l}_1$ prim sind, der Werte $\pm i$ fähig ist. Im ersteren Falle setzen wir in (7) für ν die Zahl π_1 ein und erhalten die Gleichung

$$\left(\left(\frac{\pi_1,\,\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right) = \left(\left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}_1}\right)\right)^{\pm a_1} = \pm i.$$

Soll ferner die Relativdiskriminante $D_{\sqrt{\mu},k}$ des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ prim zu $\mathfrak{l}_1$ ausfallen, so muß jedenfalls a_1 gerade sein, ebenso die Exponenten $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m$. Man ersieht dann unmittelbar aus (6), daß in einem solchen Falle das Symbol $\left(\left(\frac{\nu,\,\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right)$ für diejenigen Zahlen ν, die zu $\mathfrak{l}_1$ prim sind, höchstens die Werte $+1$ und -1 haben kann.

Nun sei zunächst $a_1 \equiv 2$, (4). Führt man dann in (7) für ν die Zahl π_1 ein, so ergibt sich die Gleichung

$$\left(\left(\frac{\pi_1,\,\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right) = \left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}_1}\right) = -1.$$

Ist ferner $a_1 \equiv 0$, (4), so überzeugt man sich leicht wie oben (man sehe die Gleichungen (2) und (3)), daß das Symbol $\left(\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right)$, wenn nicht sämtliche Exponenten $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m$ gleich 0 sind, für solche Zahlen ν, die zu $\mathfrak{l}_1$ prim sind, die Werte $+1$ und -1 erhalten kann.

Beachten wir endlich, daß die Schlüsse, die wir bei der Bestimmung der Anzahl der Normenreste im Falle eines zu $\mathfrak{l}_1$ primen μ gemacht haben, auch, wenn μ durch $\mathfrak{l}_1$ teilbar ist, uneingeschränkt gültig sind, so ist damit Satz 24 vollständig bewiesen.

§ 15.

Der Fundamentalsatz über die Geschlechter eines relativbiquadratischen Zahlkörpers.

Auf Grund der bisher erlangten Resultate beweist man nun leicht den Fundamentalsatz über die Geschlechter eines relativbiquadratischen Zahlkörpers. Das Beweisverfahren ist dem Hilbertschen Verfahren für den analogen Fall im relativquadratischen Zahlkörper vollkommen ähnlich. Wir wollen es hier nicht durchführen. Man gelangt zu folgendem Resultate:

Satz 25. Es sei r_1 die Anzahl der vierwertigen, r_2 die Anzahl der zweiwertigen Charaktere, welche ein Geschlecht des relativbiquadratischen Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ bestimmen: Ist dann ein System von r_1 beliebigen vierten und ein System von r_2 beliebigen zweiten Einheitswurzeln vorgelegt, so bilden diese Systeme dann und nur dann das Charakterensystem eines Geschlechtes in $K(\sqrt[4]{\mu})$, wenn das Produkt der sämtlichen $r_1 + r_2$ Einheitswurzeln gleich $+1$ ist. Die Anzahl der in $K(\sqrt[4]{\mu})$ vorhandenen Geschlechter ist daher 4^{r-1}, wenn $r = r_1 + \frac{r_2}{2}$ gesetzt wird.

Wir folgern aus diesem Satze sofort folgende Tatsache:

Satz 26. Die Anzahl g der Geschlechter in einem relativbiquadratischen Körper ist gleich der Anzahl A seiner ambigen Komplexe.

Beweis. Nach Satz 25 ist

$$g = 4^{r-1}.$$

Es ist aber weiter

$$(1) \qquad g \leqq A \leqq 4^{t+v-m-1},$$

(man sehe hierzu § 6); folglich muß

$$r \leqq t + v - m$$

sein und da nach Satz 9

$$r \geqq t + v - m$$

ist, so ergibt sich

$$r = t + v - m$$

und mithin nach (1) $g = A$.

Aus diesem Satze 26 folgt nun leicht der folgende wichtige Satz:

Satz 27. Jeder Komplex des Hauptgeschlechtes in einem relativbiquadratischen Zahlkörper $K(\sqrt[4]{\mu})$ ist die $(1-S)^{\text{te}}$ symbolische Potenz eines Komplexes in $K(\sqrt[4]{\mu})$, d. h. jede Klasse des Hauptgeschlechtes in $K(\sqrt[4]{\mu})$ ist gleich dem Produkte aus der $(1-S)^{\text{ten}}$ symbolischen Potenz einer Klasse und aus einer solchen Klasse, welche Ideale des Körpers k enthält.

Beweis. Bezeichnet man mit f die Anzahl der Komplexe des Hauptgeschlechtes und mit f' die Anzahl derjenigen Komplexe vom Hauptgeschlechte, welche $(1-S)^{\text{te}}$ symbolische Potenzen anderer Komplexe sind, so ist $Af' = gf$ (L. § 9). Da sich aber $A = g$ ergeben hat, muß auch $f = f'$ sein und dies ist eben die Aussage des Satzes 27.

Es möge zum Schluß hier noch bemerkt werden, daß auch für den relativbiquadratischen Zahlkörper ein Satz von den Relativnormen wie im relativquadratischen Körper besteht. Er lautet:

Satz 28. Wenn ν, μ irgend zwei beliebige ganze Zahlen $\neq 0$ des Körpers k bedeuten, von denen μ nicht das Quadrat einer Zahl in k ist, und welche für jedes Primideal $\mathfrak{w}$ in k die Bedingung:

$$\left(\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right)\right) = +1$$

erfüllen, so ist die Zahl ν stets gleich der Relativnorm $N_{\sqrt[4]{\mu}, k}$ einer ganzen oder gebrochenen Zahl des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$.

Der Beweis dieses Satzes schließt sich genau an den Hilbertschen für den analogen Fall im relativquadratischen Körper an (H. Rq. Z., § 43). Es ist wohl eine kleine Modifikation an demselben anzubringen wegen der charakteristischen Einheiten, deren Symbol den Wert -1 hat; diese ist jedoch leicht zu treffen.

§ 16.

Über den Körper der imaginären Zahlen.

Um ein Beispiel für die erhaltenen allgemeinen Resultate zu haben, bestimmen wir das biquadratische Reziprozitätsgesetz für zwei zu $\lambda = 1 + i$ prime Primzahlen des Körpers $k(i)$ der imaginären Zahlen und die Ergänzungssätze. Wir schlagen jedoch den gerade entgegengesetzten Weg zu demjenigen ein, der in Hilberts Theorie des ralativquadratischen Zahlkörpers und entsprechend in Lietzmanns Dissertation befolgt wird. Wir bestimmen zunächst die Werte des Symbols $\left(\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right)\right)$ für beliebige Primideale $\mathfrak{w}$, geben dann die Definition des Geschlechtes in $K(\sqrt[4]{\mu})$ gleich allgemein, die Fälle, wo die Relativdiskriminante von $K(\sqrt[4]{\mu})$ durch λ teilbar ist, nicht ausschließend, und ermitteln für die Anzahl der Geschlechter in den betrachteten Körpern $K(\sqrt[4]{\mu})$ eine *obere Grenze.* Auf Grund dieses Resultates ergibt sich dann das gesuchte Reziprozitätsgesetz mit den Ergänzungssätzen leicht unter Zuhilfenahme des Eisensteinschen speziellen Reziprozitätsgesetzes für eine rationale und eine imaginäre Primzahl.

Es seien μ, ν beliebige ganze Zahlen des Körpers k und es gehe die Primzahl $\lambda = 1 + i$ in μ genau zur a^{ten}, in ν genau zur b^{ten} Potenz auf; ferner sei π eine zu λ prime Primzahl in k. Wir setzen $\frac{\nu^a}{\mu^b} = \frac{\varrho}{\sigma}$, so daß ϱ und σ zu λ prime Zahlen werden, und definieren das Symbol $\left(\left(\frac{\nu,\mu}{\pi}\right)\right)$ durch die Gleichung

$$\left(\left(\frac{\nu,\mu}{\pi}\right)\right) = \left(\left(\frac{(-1)^{ab}\,\varrho\,\sigma^3}{\pi}\right)\right).$$

Man zeigt dann leicht auf Grund der Sätze der Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers, daß die Zahl ν dann und nur dann Normenrest des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ wird, wenn

$$\left(\left(\frac{\nu,\mu}{\pi}\right)\right) = +1$$

ausfällt.

Wir wollen nun weiter untersuchen, wann eine ganze Zahl ν des Körpers k Normenrest des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ nach der Primzahl λ wird.

Zu diesem Behufe stellen wir zunächst für die zu λ primen Zahlen ν Kongruenzen nach den Moduln 8 und λ^7 auf, entsprechend Satz 10 und 10*. Im Körper $k(i)$ gibt es keine Grundeinheit: wir nehmen für ε_m der Sätze 10 und 10* die Einheitswurzel i; ferner für $\varkappa$ die Primzahl $3 - 2i$ und endlich für π die Primzahl $1 + 4i$. Diese Primzahlen entsprechen den Anforderungen der Sätze 10 und 10*, denn es bestehen die Gleichungen

$$\left(\left(\frac{i}{3-2i}\right)\right) = -i, \quad \left(\left(\frac{i}{1+4i}\right)\right) = +1, \quad \left(\frac{\lambda}{1+4i}\right) = -1;$$

dabei ist $1 + 4i$ eine primäre Zahl.

Berücksichtigen wir nun, daß für jede zu λ prime Zahl α die Kongruenz

$$\alpha^4 \equiv 1, \quad (\lambda^7)$$

besteht, so können wir für jede zu λ prime Zahl ν Kongruenzen von der Form

$$(1) \qquad \nu \equiv i^a (3-2i)^b (1+4i)^c, \quad (8),$$
$$(2) \qquad \nu \equiv i^a (3-2i)^b (1+4i)^c, \quad (\lambda^7)$$

aufstellen, wobei die Exponenten a, b gewisse Werte 0, 1, 2, 3 haben, hingegen der Exponent c in (1) die Werte 0, 1 und in (2) die Werte 0, 1, 2, 3 haben kann. Es soll zur Abkürzung

$$i^a (3-2i)^b (1+4i)^c = (a\, b\, c)$$

gesetzt werden.

Es seien nun μ, ν zwei beliebige ganze Zahlen in k, und es gehe die Primzahl λ in μ genau zur e^{ten}, in ν genau zur e'^{ten} Potenz auf; ferner mögen die Kongruenzen

$$\mu \equiv \lambda^e (a\, b\, c), \qquad (\lambda^{7+e}),$$
$$\nu \equiv \lambda^{e'} (a'\, b'\, c'), \qquad (\lambda^{7+e'})$$

statthaben. Ich definiere dann das Symbol $\left(\left(\frac{\nu,\, \mu}{\lambda}\right)\right)$ durch die Gleichung

$$(3) \qquad \left(\left(\frac{\nu,\, \mu}{\lambda}\right)\right) = i^{a'b - ab' + 2bb' + ce' - c'e}.$$

Die Rechnung zeigt, daß ν dann und nur dann Normenrest des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ wird, wenn

$$(4) \qquad \left(\left(\frac{\nu,\, \mu}{\lambda}\right)\right) = +1$$

ausfällt.

Für das Symbol $\left(\left(\frac{\nu,\, \mu}{\lambda}\right)\right)$ bestehen, wie unmittelbar aus (3) zu ersehen ist, die Beziehungen

$$(5) \qquad \begin{aligned} \left(\left(\frac{\nu,\, \mu}{\lambda}\right)\right) \left(\left(\frac{\mu,\, \nu}{\lambda}\right)\right) &= +1, \\ \left(\left(\frac{\nu,\, \mu}{\lambda}\right)\right) \left(\left(\frac{\nu,\, \mu'}{\lambda}\right)\right) &= \left(\left(\frac{\nu,\, \mu\mu'}{\lambda}\right)\right), \\ \left(\left(\frac{\nu,\, \mu}{\lambda}\right)\right) \left(\left(\frac{\nu',\, \mu}{\lambda}\right)\right) &= \left(\left(\frac{\nu\nu',\, \mu}{\lambda}\right)\right), \end{aligned}$$

wo μ, ν, μ', ν' ganz beliebige ganze Zahlen in k bedeuten.

Die Gleichung (4) steht in vollem Einklange mit Satz 24. Wir heben hier nur den Fall eines primären μ noch besonders hervor. μ ist primär, wenn eine Kongruenz von der Form

$$\mu \equiv (0\, 0\, c), \quad (8)$$

besteht. Es wird dann in der Tat

$$\left(\left(\frac{\nu,\, \mu}{\lambda}\right)\right) = +1$$

für jede beliebige zu λ prime ganze Zahl ν in k.

Nun können wir zur Definition des Geschlechtes schreiten und zur Bestimmung der *oberen Grenze* 4^{r-1} für die Anzahl der Geschlechter auf Grund der Sätze 7 und 8. Dann ergibt sich das gesuchte Reziprozitätsgesetz leicht, wenn man die Hilbertsche Methode im Kummerschen Körper befolgt (H. A. Z.).

Für den biquadratischen Charakter der Einheit i in bezug auf die Zahl μ des Körpers $\varkappa$ gilt die Gleichung

$$\left(\left(\frac{i}{\mu}\right)\right) = i^{\frac{n(\mu)-1}{4}},$$

wo $n(\mu)$ die Norm der Zahl μ genommen im Körper k vorstellt.

Setzen wir nun $\mu \equiv (a\,b\,c)$, (λ^7), so wird

$$n(\mu) \equiv (-3)^b, \quad (16)$$

und es ist demnach

$$\frac{n(\mu)-1}{4} \equiv -b, \quad (4).$$

Folglich besteht die Beziehung

(6) $$\left(\left(\frac{i}{\mu}\right)\right) = i^{-b},$$

die wir mit bezug auf (3) auch folgendermaßen schreiben können:

(6*) $$\left(\left(\frac{i}{\mu}\right)\right)^{-1} = \left(\left(\frac{i,\mu}{\lambda}\right)\right).$$

Die Gleichungen (6) und (6*) stellen *den ersten Ergänzungssatz* zum biquadratischen Reziprozitätsgesetz im Körper der imaginären Zahlen $k(i)$ dar.

Je nach dem Werte, den der biquadratische Charakter der Einheit i nach einer Primzahl in k hat, wollen wir diese Primzahlen in folgende drei Arten einteilen: zur ersten Art gehören diejenigen Primzahlen π in k, für welche

$$\left(\left(\frac{i}{\pi}\right)\right) = \pm i$$

wird; zur zweiten Art die Primzahlen $\varkappa_1$, für welche

$$\left(\left(\frac{i}{\varkappa_1}\right)\right) = -1$$

und endlich zur dritten Art diejenigen Primzahlen $\varkappa_2$, für welche

$$\left(\left(\frac{i}{\varkappa_2}\right)\right) = +1$$

ausfällt. Den Primzahlen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ der zweiten und der dritten Art wollen wir in der Folge stets eine solche Form erteilen, daß die Gleichungen

$$\varkappa_1 \equiv (2\,2\,c), \quad (\lambda^7),$$
$$\varkappa_2 \equiv (0\,0\,c), \quad (\lambda^7)$$

befriedigt werden, was durch Multiplikation mit einer geeigneten Potenz von i immer geschehen kann.

Am leichtesten findet man das biquadratische Reziprozitätsgesetz in $k(i)$ für zwei Primzahlen π und π_1 der ersten Art. Ist nämlich π_1 eine Primzahl der ersten Art, so kann man stets eine Potenz i^t der Einheit i bestimmen derart, daß

$$\left(\left(\frac{i^t\pi}{\pi_1}\right)\right) = +1 \tag{7}$$

wird. Demnach ist π_1 im Körper $K(\sqrt[4]{i^t\pi})$ die Relativnorm bezüglich k eines Primideals $\mathfrak{P}_1$ dieses Körpers $K(\sqrt[4]{i^t\pi})$. Die Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt[4]{i^t\pi})$ bezüglich k enthält nur die Primzahlen λ und π als Faktoren. Folglich besteht das Charakterensystem der Zahl π_1 im Körper $K(\sqrt[4]{i^t\pi})$ aus den Symbolen

$$\left(\left(\frac{\pi_1,\, i^t\pi}{\lambda}\right)\right), \quad \left(\left(\frac{\pi_1,\, i^t\pi}{\pi}\right)\right) = \left(\left(\frac{\pi_1}{\pi}\right)\right).$$

Da wir aber angenommen haben, daß π eine Primzahl der ersten Art sei, so können wir wieder eine Potenz i^{t_1} von i bestimmen derart, daß

$$\left(\left(\frac{i^{t_1}\pi_1}{\pi}\right)\right) = +1 \tag{8}$$

wird. Mithin besteht das Charakterensystem des Primideals $\mathfrak{P}_1$ aus dem einzigen Symbol

$$\left(\left(\frac{i^{t_1}\pi_1,\, i^t\pi}{\lambda}\right)\right).$$

Der Körper $K(\sqrt[4]{i^t\pi})$ enthält nur ein Geschlecht: das Hauptgeschlecht. Deshalb muß

$$\left(\left(\frac{i^{t_1}\pi_1,\, i^t\pi}{\lambda}\right)\right) = +1$$

sein.

Wir können diese Gleichung auch folgendermaßen schreiben:

$$\left(\left(\frac{i,\, i}{\lambda}\right)\right)^{tt_1} \left(\left(\frac{i,\, \pi}{\lambda}\right)\right)^{t_1} \left(\left(\frac{\pi,\, i}{\lambda}\right)\right)^{t} \left(\left(\frac{\pi_1,\, \pi}{\lambda}\right)\right) = +1. \tag{9}$$

Nun beachten wir die Beziehungen

$$\left(\left(\frac{i,\, i}{\lambda}\right)\right) = 1, \quad \left(\left(\frac{i,\, \pi}{\lambda}\right)\right)\left(\left(\frac{\pi,\, i}{\lambda}\right)\right) = 1,$$

$$\left(\left(\frac{\pi,\, i}{\lambda}\right)\right) = \left(\left(\frac{i}{\pi}\right)\right), \quad \left(\left(\frac{\pi_1,\, i}{\lambda}\right)\right) = \left(\left(\frac{i}{\pi_1}\right)\right),$$

die aus (3) und (5) unmittelbar folgen, und bringen die Gleichungen (7) und (8) auf die Form

$$\left(\left(\frac{i}{\pi_1}\right)\right)^{t} = \left(\left(\frac{\pi}{\pi_1}\right)\right)^{-1}, \quad \left(\left(\frac{i}{\pi}\right)\right)^{t_1} = \left(\left(\frac{\pi_1}{\pi}\right)\right)^{-1},$$

so ergibt sich leicht aus (9) für die Primzahlen π und π_1 *das biquadratische Reziprozitätsgesetz*

$$\left(\left(\frac{\pi}{\pi_1}\right)\right)\left(\left(\frac{\pi_1}{\pi}\right)\right)^{-1}=\left(\left(\frac{\pi_1,\,\pi}{\lambda}\right)\right) \tag{10}$$

oder nach (3) in der Gestalt

$$\left(\left(\frac{\pi}{\pi_1}\right)\right)\left(\left(\frac{\pi_1}{\pi}\right)\right)^{-1}=i^{a_1 b-a b_1+2 b b_1}, \tag{10*}$$

wobei die Kongruenzen

$$\pi\equiv(a\;b\;c);\qquad \pi\equiv(a_1\;b_1\;c_1),\quad (\lambda^7)$$

bestehen.

Auch für ganz beliebige Primzahlen π, π_1, die einer beliebigen Art angehören, gilt das Reziprozitätsgesetz in derselben Gestalt, wie es die Gleichungen (10) und (10*) darstellen, wovon wir uns schrittweise überzeugen werden.

Zu diesem Behufe leiten wir zunächst einige besondere Fälle des Reziprozitätsgesetzes ab.

Es sei zunächst $\varkappa_1$ eine Primzahl der zweiten Art, π eine beliebige Primzahl. Wir nehmen an, es sei

$$\left(\left(\frac{\varkappa_1}{\pi}\right)\right)=+1.$$

Dann ist π die Relativnorm bezüglich k eines bestimmten Primideals $\mathfrak{P}$ des Körpers $K(\sqrt[4]{\varkappa_1})$. Das Charakterensystem der Zahl π besteht aus den Symbolen

$$\left(\left(\frac{\pi,\,\varkappa_1}{\lambda}\right)\right),\qquad \left(\left(\frac{\pi,\,\varkappa_1}{\varkappa_1}\right)\right)=\left(\left(\frac{\pi}{\varkappa_1}\right)\right),$$

weil λ und π die einzigen Primzahlen in k sind, die in der Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt[4]{\varkappa_1})$ bezüglich k aufgehen. Nun kann man wegen der Annahme, die wir über $\varkappa_1$ machten, eine geeignete Potenz i^t von i bestimmen derart, daß

$$\left(\left(\frac{i^t\pi,\,\varkappa_1}{\lambda}\right)\right)=+1 \tag{11}$$

wird. Hieraus folgt aber weiter, daß das Charakterensystem des Ideals $\mathfrak{P}$ aus dem einen Symbol

$$\left(\left(\frac{i^t\pi,\,\varkappa_1}{\varkappa_1}\right)\right)=\left(\left(\frac{i^t\pi}{\varkappa_1}\right)\right)$$

besteht. Wir schließen jetzt, wie wir es oben taten, daß

$$\left(\left(\frac{i^t\pi,\,\varkappa_1}{\varkappa_1}\right)\right)=\left(\left(\frac{i^t\pi}{\varkappa}\right)\right)=+1 \tag{12}$$

sein muß. Es ist nur noch der Exponent t zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke schreiben wir die Gleichung (11) in der Gestalt

$$\left(\left(\frac{i,\,\varkappa_1}{\lambda}\right)\right)^t \left(\left(\frac{\pi,\,\varkappa_1}{\lambda}\right)\right) = +1$$

und berücksichtigen hiernach die Beziehungen

$$\left(\left(\frac{i,\,\varkappa_1}{\lambda}\right)\right) = -1, \qquad \left(\left(\frac{\pi,\,\varkappa_1}{\lambda}\right)\right) = (-1)^{a+b},$$

wobei $\pi \equiv (a\,b\,c)$, (λ^7) gesetzt wurde; dann ergibt sich sofort für t die Kongruenz

$$t \equiv a + b, \quad (2).$$

Führen wir dies in (12) ein, so folgt wegen $\left(\left(\frac{i}{\varkappa_1}\right)\right) = -1$ folgende Gleichung

$$(-1)^{a+b}\left(\left(\frac{\pi}{\varkappa_1}\right)\right) = \left(\left(\frac{\pi,\varkappa_1}{\lambda}\right)\right)\left(\left(\frac{\pi}{\varkappa_1}\right)\right) = +1.$$

Dieselbe Gleichung folgt aber auch aus (10) für den gegenwärtigen Fall.

Es sei ferner $\varkappa_2$ eine Primzahl der dritten Art, π eine beliebige Primzahl.

Wir zeigen jetzt leicht, daß aus

$$\left(\left(\frac{\varkappa_2}{\pi}\right)\right) = +1$$

stets

$$\left(\left(\frac{\pi}{\varkappa_2}\right)\right) = +1$$

folgt. Wegen der ersten dieser Gleichungen ist die Zahl π die Relativnorm bezüglich k eines Primideals $\mathfrak{P}$ des Körpers $K(\sqrt{\varkappa_2})$. Nun enthält die Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt{\varkappa_2})$ bezüglich k nur den einen Primfaktor $\varkappa_2$ (Satz 1 nnd 19); folglich besteht das Charakterensystem der Zahl π aus dem einen Symbol $\left(\left(\frac{\pi,\,\varkappa_2}{\varkappa_2}\right)\right) = \left(\left(\frac{\pi}{\varkappa_2}\right)\right)$, ebenso aber auch das Charakterensystem von $\mathfrak{P}$, denn es ist $\left(\left(\frac{i,\varkappa_2}{\lambda}\right)\right) = +1$. Hieraus folgt, wie früher, die obige Behauptung.

Um nun auf Grund des Gefundenen das Reziprozitätsgesetz allgemein zu beweisen, setzen wir die Kenntnis des Eisensteinschen Reziprozitätsgesetzes zwischen einer rationalen und einer beliebigen komplexen Primzahl voraus. Bedeuten p, q zwei rationale Primzahlen, die erste von der Form $p \equiv 1$, (4), die zweite von der Form $q \equiv 3$, (4) und π eine beliebige komplexe Primzahl von der Form $\pi \equiv \pm 1$, oder $\equiv \pm 1 + 2i$, (4), so bestehen nach Eisenstein die Beziehungen

$$(14) \qquad \left(\left(\frac{p}{\pi}\right)\right) = \left(\left(\frac{\pi}{p}\right)\right), \quad \left(\left(\frac{-q}{\pi}\right)\right) = \left(\left(\frac{\pi}{q}\right)\right).$$

Es seien nun $\varkappa$ und $\varkappa_1$ zwei komplexe Primzahlen der zweiten oder der dritten Art. Wir zeigten bereits, daß in diesem Falle aus $\left(\left(\frac{\varkappa}{\varkappa_1}\right)\right)=+1$ stets $\left(\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa}\right)\right)=+1$ folgt. Jetzt nehmen wir an, es sei $\left(\left(\frac{\varkappa}{\varkappa_1}\right)\right)=i$, und bestimmen eine Primzahl ϱ in k derart, daß sie die Gleichungen

$$(15)\qquad \begin{aligned} &\left(\left(\frac{i}{\varrho}\right)\right)=\pm i, \quad \left(\left(\frac{\varkappa}{\varrho}\right)\right)=\mp i, \quad \left(\left(\frac{\varkappa'}{\varrho}\right)\right)=+1,\\ &\qquad\qquad\qquad \left(\left(\frac{\varkappa_1}{\varrho}\right)\right)=\mp i, \quad \left(\left(\frac{\varkappa_1'}{\varrho}\right)\right)=+1 \end{aligned}$$

befriedigt; $\varkappa'$, $\varkappa_1'$ sind die zu $\varkappa$ bez. $\varkappa_1$ konjugierten Primzahlen.

Wegen der ersten dieser Gleichungen ist ϱ eine Primzahl der ersten Art. Wir wollen sie etwa in einer der Formen

$$(16)\qquad \varrho\equiv(3\,3\,c) \quad\text{oder}\quad \equiv(1\,1\,c), \quad (\lambda^7)$$

annehmen, dem Vorzeichen von i in der ersten Gleichung (15) entsprechend, was stets durch Multiplikation mit einer geeigneten Potenz i^t von i geschehen kann.

Aus (15) folgen unmittelbar die Gleichungen

$$\left(\left(\frac{\varkappa\varkappa'}{\varrho}\right)\right)=\mp i, \quad \left(\left(\frac{\varkappa_1\varkappa_1'}{\varrho}\right)\right)=\mp i;$$

hierin sind $\varkappa\varkappa'$, $\varkappa_1\varkappa_1'$ rationale Primzahlen von der Form $p\equiv 1$, (4). Um nun auf diese Gleichungen das Reziprozitätsgesetz (14) anwenden zu können, müssen wir ϱ etwa noch mit i multiplizieren, damit

$$i\varrho=\pm 1+2i, \quad (4)$$

werde. Tun wir das, so folgen aus den letzten Gleichungen die Beziehungen

$$(17)\qquad \left(\left(\frac{\varkappa\varkappa'}{\varrho}\right)\right)=\left(\left(\frac{i\varrho}{\varkappa\varkappa'}\right)\right), \quad \left(\left(\frac{\varkappa_1\varkappa_1'}{\varrho}\right)\right)=\left(\left(\frac{i\varrho}{\varkappa_1\varkappa_1'}\right)\right).$$

Da jedoch $\varkappa$, $\varkappa_1$ der Voraussetzung nach Primzahlen der ersten oder der zweiten Art vorstellen, so muß

$$\left(\left(\frac{i}{\varkappa\varkappa'}\right)\right)=+1, \quad \left(\left(\frac{i}{\varkappa_1\varkappa_1'}\right)\right)=+1$$

sein, und es folgt hiermit aus (17) weiter

$$\left(\left(\frac{\varkappa\varkappa'}{\varrho}\right)\right)=\left(\left(\frac{\varrho}{\varkappa}\right)\right)\left(\left(\frac{\varrho}{\varkappa'}\right)\right), \quad \left(\left(\frac{\varkappa_1\varkappa_1'}{\varrho}\right)\right)=\left(\left(\frac{\varrho}{\varkappa_1}\right)\right)\left(\left(\frac{\varrho}{\varkappa_1'}\right)\right).$$

Berücksichtigen wir jetzt, daß wegen (15) auf Grund der bereits entwickelten besonderen Reziprozitätsgesetze, weil wir ϱ in der Form (16) annahmen, die Gleichungen

$$\left(\left(\frac{\varrho}{\varkappa'}\right)\right)=-1, \quad \left(\left(\frac{\varrho}{\varkappa_1'}\right)\right)=+1$$

folgen, so ergeben sich schließlich die Gleichungen

$$(18)\qquad \left(\left(\frac{\varkappa}{\varrho}\right)\right)=\left(\left(\frac{\varrho}{\varkappa}\right)\right)=\mp i,\qquad \left(\left(\frac{\varkappa_1}{\varrho}\right)\right)=\left(\left(\frac{\varrho}{\varkappa_1}\right)\right)=\mp i.$$

Nun betrachten wir den Körper $K(\sqrt[4]{\varkappa\varrho})$. Wegen der über $\varkappa$ und ϱ gemachten Annahmen hat $\varkappa\varrho$ eine der Formen

$$\varkappa\varrho\equiv(1\ 1\ c)\quad\text{oder}\quad\equiv(3\ 3\ c),\quad(\lambda^7),$$

und es ist deshalb $\left(\left(\frac{i,\ \varkappa\varrho}{\lambda}\right)\right)=\mp i$. Die Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt[4]{\varkappa\varrho})$ enthält die Primzahlen λ, $\varkappa$, ϱ als Faktoren, so daß das Charakterensystem der Zahl ϱ aus den drei Symbolen

$$\left(\left(\frac{\varrho,\ \varkappa\varrho}{\lambda}\right)\right),\quad \left(\left(\frac{\varrho,\ \varkappa\varrho}{\varkappa}\right)\right)=\left(\left(\frac{\varrho}{\varkappa}\right)\right),\quad \left(\left(\frac{\varkappa\varrho,\ \varkappa\varrho}{\varrho}\right)\right)=\left(\left(\frac{-\varkappa}{\varrho}\right)\right)^{-1}$$

besteht. Da aber ϱ in der Relativdiskriminante von $K(\sqrt[4]{\varkappa\varrho})$ als Faktor enthalten ist, so muß es gleich der vierten Potenz eines Primideals $\mathfrak{R}$ in $K(\sqrt[4]{\varkappa\varrho})$ sein. Um nun das Charakterensystem von $\mathfrak{R}$ zu finden, hat man nur zu beachten, daß $\left(\left(\frac{\varrho,\ \varkappa\varrho}{\lambda}\right)\right)=-1$ ist, und demnach ϱ mit -1 zu multiplizieren derart, daß

$$\left(\left(\frac{-\varrho,\ \varkappa\varrho}{\lambda}\right)\right)=+1$$

wird. Dann ergibt sich das Charakterensystem von $\mathfrak{R}$ in der Gestalt

$$(19)\qquad \left(\left(\frac{-\varrho}{\varkappa}\right)\right)=\left(\left(\frac{\varrho}{\varkappa}\right)\right),\qquad \left(\left(\frac{-\varrho,\ \varkappa\varrho}{\varrho}\right)\right)=\left(\left(\frac{\varkappa}{\varrho}\right)\right)^{-1}.$$

Aus (18) ersieht man, daß die Ideale $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}^2$, $\mathfrak{R}^3$, $\mathfrak{R}^4$ verschiedenen Geschlechtern angehören. Außer diesen Geschlechtern gibt es in $K(\sqrt[4]{\varkappa\varrho})$ keine anderen Geschlechter mehr. Wir ersehen ferner aus (18) und (19), daß das Produkt der Charaktere jedes einzelnen Geschlechtes gleich $+1$ ist. Hieraus folgt allgemein, daß das Produkt der Charaktere jedes beliebigen Ideals in $K(\sqrt[4]{\varkappa\varrho})$ gleich $+1$ sein muß.

Es besteht aber die Gleichung

$$(20)\qquad \left(\left(\frac{\varkappa\varrho}{\varkappa_1}\right)\right)=+1,$$

und es wird demzufolge $\varkappa_1$ im Körper $K(\sqrt[4]{\varkappa\varrho})$ die Relativnorm bezüglich k von einem gewissen Ideal $\mathfrak{K}_1$. Das Charakterensystem der Zahl $\varkappa_1$ enthält folgende Symbole:

$$\left(\left(\frac{\varkappa_1,\ \varkappa\varrho}{\lambda}\right)\right),\quad \left(\left(\frac{\varkappa_1,\ \varkappa\varrho}{\varkappa}\right)\right)=\left(\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa}\right)\right),\quad \left(\left(\frac{\varkappa_1,\ \varkappa\varrho}{\varrho}\right)\right)=\left(\left(\frac{\varkappa_1}{\varrho}\right)\right).$$

Wegen der Voraussetzungen, die über die Zahlen $\varkappa$, $\varkappa_1$ und ϱ gemacht wurden, muß $\left(\left(\frac{\varkappa_1,\, \varkappa\varrho}{\lambda}\right)\right) = +1$ werden. Da ferner $\left(\left(\frac{i,\, \varkappa\varrho}{\lambda}\right)\right) = \pm i$ ist, so besteht das Charakterensystem des Ideals $\mathfrak{K}_1$ aus den Charakteren $\left(\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa}\right)\right)$, $\left(\left(\frac{\varkappa_1}{\varrho}\right)\right)$, und es muß dem oben Gesagten zufolge

$$\left(\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa}\right)\right)\left(\left(\frac{\varkappa_1}{\varrho}\right)\right) = +1$$

sein. Vergleicht man jetzt diese Gleichung mit (20) und berücksichtigt hierbei noch die zweite der Gleichungen (19), so ergibt sich endlich, daß

$$\left(\left(\frac{\varkappa}{\varkappa_1}\right)\right) = \left(\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa}\right)\right) \tag{21}$$

sein muß, was auch aus (10) im gegenwärtigen Falle folgen würde.

Hätten wir anfangs angenommen, daß $\left(\left(\frac{\varkappa}{\varkappa_1}\right)\right) = -i$ sei, so hätten wir wieder in ähnlicher Weise die Gleichung (21) erhalten. Hieraus folgt schon, daß aus $\left(\left(\frac{\varkappa}{\varkappa_1}\right)\right) = -1$ stets $\left(\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa}\right)\right) = -1$ folgen muß.

Es bleibt nur noch übrig, den Fall, wo $\varkappa$ eine komplexe Primzahl der zweiten oder dritten, π eine Primzahl der ersten Art ist, näher zu betrachten.

Wir setzen $\pi \equiv (a\; b\; c)$, (λ^7) und können annehmen, daß $a + b = 4$ ist. Dann ergibt es sich aus dem früher bewiesenen Reziprozitätsgesetze, daß aus $\left(\left(\frac{\varkappa}{\pi}\right)\right) = +1$ stets $\left(\left(\frac{\pi}{\varkappa}\right)\right) = +1$ folgen muß. Ist aber $\left(\left(\frac{\varkappa}{\pi}\right)\right) = \pm i$, so kann durch ein ähnliches Verfahren, wie im oben ausführlich behandelten Falle, gezeigt werden, daß auch $\left(\left(\frac{\pi}{\varkappa}\right)\right) = \pm i$ ist.

Wir nehmen an, es sei $\left(\left(\frac{\varkappa}{\pi}\right)\right) = i$, und bestimmen ein Primideal ϱ derart, daß es die Gleichungen

$$\left(\left(\frac{i}{\varrho}\right)\right) = \pm i, \qquad \left(\left(\frac{\varkappa}{\varrho}\right)\right) = \mp i, \qquad \left(\left(\frac{\varkappa'}{\varrho}\right)\right) = 1,$$
$$\left(\left(\frac{\pi}{\varrho}\right)\right) = \mp i, \qquad \left(\left(\frac{\pi'}{\varrho}\right)\right) = 1$$

befriedigt; $\varkappa'$, π' sind die zu den Primzahlen $\varkappa$ bez. π konjugierten Primzahlen. Wir können wieder annehmen, es sei ϱ von der Form

$$\varrho \equiv (3\; 3\; c) \quad \text{bez.} \quad \equiv (1\; 1\; c), \quad (\lambda^7).$$

Da nach Voraussetzung $\left(\left(\frac{\pi'}{\varrho}\right)\right) = +1$ ist, so folgt hieraus wegen der Annahmen, die wir über die Zahlen π, ϱ gemacht haben, daß

$\left(\left(\frac{\varrho}{\pi'}\right)\right) = -1$ sein muß; denn es ist auch π' eine Primzahl von der ersten Art, so daß für π', ϱ die Reziprozitätsgleichung (10) gilt, und es wird, wenn wir $\pi' \equiv (a'\, b'\, c')$, (λ^7) setzen, $a' = b'$.

Nun können dieselben Schlüsse gemacht werden wie im oben behandelten Falle; man hat nur statt $\varkappa_1$ die Primzahl π zu nehmen. Es ergeben sich unter Berücksichtigung der Gleichung $\left(\left(\frac{i}{\pi\pi'}\right)\right) = -1$ die Beziehungen

$$(22) \qquad \left(\left(\frac{\varkappa}{\varrho}\right)\right) = \left(\left(\frac{\varrho}{\varkappa}\right)\right) = \mp i, \qquad \left(\left(\frac{\pi}{\varrho}\right)\right) = \left(\left(\frac{\varrho}{\pi}\right)\right) = \mp i.$$

Wie wir im vorigen Falle schlossen, daß der Körper $K(\sqrt[4]{\varkappa\varrho})$ vier voneinander verschiedene Geschlechter enthält und daß das Produkt der Charaktere, die ein Geschlecht bestimmen, gleich $+1$ ist, genau so können wir dasselbe im gegenwärtigen Falle schließen.

Nun ist dann weiter wegen der Gleichung $\left(\left(\frac{\varkappa\varrho}{\pi}\right)\right) = +1$ π die Relativnorm bezüglich k eines Primideals $\mathfrak{P}$ des Körpers $K(\sqrt[4]{\varkappa\varrho})$. Betrachtet man das Charakterensystem dieses Ideals $\mathfrak{P}$, so findet man bei Beachtung der Gleichung $\left(\left(\frac{\pi,\, \varkappa\varrho}{\lambda}\right)\right) = +1$, daß

$$\left(\left(\frac{\pi}{\varkappa}\right)\right) \left(\left(\frac{\pi}{\varrho}\right)\right) = +1$$

sein muß. Vergleichen wir diese Gleichung mit der Gleichung

$$\left(\left(\frac{\varkappa\varrho}{\pi}\right)\right) = +1$$

und mit der zweiten der Gleichungen (22), so ergibt sich schließlich die Reziprozitätsgleichung

$$(23) \qquad \left(\left(\frac{\varkappa}{\pi}\right)\right) = \left(\left(\frac{\pi}{\varkappa}\right)\right).$$

Ähnlich verfährt man, wenn $\left(\left(\frac{\varkappa}{\pi}\right)\right) = -i$ ist, und erhält zuletzt dieselbe Reziprozitätsgleichung.

Auch wenn man annimmt, daß $\left(\left(\frac{\varkappa}{\pi}\right)\right) = -1$ ist, kommt man schließlich durch dasselbe Verfahren zur Reziprozitätsgleichung (23). Es ist jedoch in diesem Falle die Primzahl ϱ so zu bestimmen, daß sie den Gleichungen

$$\left(\left(\frac{i}{\varrho}\right)\right) = \pm i, \quad \left(\left(\frac{\varkappa}{\varrho}\right)\right) = -1, \quad \left(\left(\frac{\varkappa'}{\varrho}\right)\right) = +1,$$
$$\left(\left(\frac{\pi}{\varrho}\right)\right) = -1, \quad \left(\left(\frac{\pi'}{\varrho}\right)\right) = +1$$

Genüge leistet.

Wir haben uns somit überzeugt, daß die Gleichung (10) für die betrachteten Fälle wirklich das Reziprozitätsgesetz liefert. Wir nahmen die Primzahlen, die wir der Betrachtung unterzogen, in besonderen Gestalten an, die stets durch Multiplikation mit einer geeigneten Potenz der Einheit i erreicht werden können. Lassen wir jedoch diese Annahme fallen und nehmen die Primzahlen π, π_1 in (10) in ganz beliebiger Form an, so überzeugt man sich leicht, daß auch dann noch immer jene Gleichung (10) richtig ist.

Wir wollen hier noch bemerken, daß aus (10) unmittelbar das besondere Reziprozitätsgesetz des Satzes 22 folgt.

Es soll jetzt schließlich *der zweite Ergänzungssatz* zum biquadratischen Reziprozitätsgesetze im Körper $k(i)$ abgeleitet werden. Bezeichnet man mit π eine beliebige zu λ prime Primzahl in k, für welche die Kongruenz $\pi \equiv (abc)$, (λ^7) besteht, so gilt die Gleichung

$$\left(\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)\right)^{-1} = \left(\left(\frac{\lambda,\, \pi}{\lambda}\right)\right) \tag{24}$$

oder in einer anderen Form geschrieben:

$$\left(\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)\right) = i^{-c}. \tag{24*}$$

Es sei zunächst π eine Primzahl der ersten Art. Dann können wir eine Potenz i^s von i bestimmen derart, daß

$$\left(\left(\frac{i^s \lambda}{\pi}\right)\right) = +1 \tag{25}$$

wird. Zufolge dieser Gleichung zerfällt π im Körper $K(\sqrt[4]{i^s\lambda})$ in vier voneinander verschiedene Primideale. Die Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt[4]{i^s\lambda})$ enthält nur den einen Faktor λ. Die Einheit i ist im gegenwärtigen Falle Normenrest des Körpers $K(\sqrt[4]{i^s\lambda})$ nach λ, so daß das Charakterensystem eines Primideals $\mathfrak{P}$ des Körpers $K(\sqrt[4]{i^s\lambda})$, welches in π aufgeht, aus dem einzigen Charakter $\left(\left(\frac{\pi,\, i^s\lambda}{\varkappa}\right)\right)$ besteht; folglich muß

$$\left(\left(\frac{\pi,\, i^s\lambda}{\lambda}\right)\right) = +1$$

sein. Beachtet man ferner die Beziehung $\left(\left(\frac{\pi,\, i}{\lambda}\right)\right) = \left(\left(\frac{i}{\pi}\right)\right)$, so folgt mit Bezug auf (25) sofort die Gleichung (24), weil nach (5)

$$\left(\left(\frac{\pi,\, \lambda}{\lambda}\right)\right)\left(\left(\frac{\lambda,\, \pi}{\lambda}\right)\right) = +1$$

ist.

Nun sei $\varkappa$ eine Primzahl der dritten Art, so folgt aus $\left(\left(\frac{\lambda}{\varkappa}\right)\right) = +1$, weil der Körper $K(\sqrt[4]{\lambda})$ nur ein Geschlecht enthält und $\left(\left(\frac{i}{\varkappa}\right)\right) = +1$ ist, sofort die Gleichung

$$\left(\left(\frac{\varkappa, \lambda}{\lambda}\right)\right) = +1,$$

wie es der Ergänzungssatz (24) fordert.

Ist jedoch $\left(\left(\frac{\lambda}{\varkappa}\right)\right) = i$, so bestimmen wir eine Primzahl ϱ, welche die Gleichungen

$$\left(\left(\frac{i}{\varrho}\right)\right) = \pm i, \quad \left(\left(\frac{\varkappa}{\varrho}\right)\right) = \mp i$$

befriedigt. Dann ist nach dem biquadratischen Reziprozitätsgesetze

$$\left(\left(\frac{\varrho}{\varkappa}\right)\right) = \mp i;$$

folglich wird

$$\left(\left(\frac{\lambda\varrho}{\varkappa}\right)\right) = +1.$$

Die Relativdiskriminante bezüglich k von $K(\sqrt[4]{\lambda\varrho})$ enthält die zwei Faktoren λ und ϱ. Da jedoch

$$\left(\left(\frac{i, \lambda\varrho}{\varrho}\right)\right) = \left(\left(\frac{i}{\varrho}\right)\right) = \pm i$$

wird, so bilden die Idealklassen in $K(\sqrt[4]{\lambda\varrho})$ nur ein Geschlecht. Die Primzahl $\varkappa$ wird die Relativnorm bezüglich k eines Primideals $\mathfrak{K}$ in $K(\sqrt[4]{\lambda\varrho})$. Für den Charakter dieses Primideals finden wir die Gleichung

$$\left(\left(\frac{i\varkappa, \lambda\varrho}{\lambda}\right)\right) = \left(\left(\frac{i\varkappa}{\varrho}\right)\right) = +1.$$

Aus dieser Gleichung folgern wir weiter, daß

$$\left(\left(\frac{i, \lambda}{\lambda}\right)\right) \left(\left(\frac{i, \varrho}{\lambda}\right)\right)^{-1} \left(\left(\frac{\varkappa, \lambda}{\lambda}\right)\right) \left(\left(\frac{\varkappa, \varrho}{\lambda}\right)\right)^{-1} = +1$$

sein muß. Da jedoch $\left(\left(\frac{i, \lambda}{\lambda}\right)\right) = 1$, $\left(\left(\frac{\varkappa, \varrho}{\lambda}\right)\right) = 1$ ausfällt, folgt schließlich

$$\left(\left(\frac{\varkappa, \lambda}{\lambda}\right)\right) = \left(\left(\frac{i, \varrho}{\lambda}\right)\right) = \left(\left(\frac{\varrho, i}{\lambda}\right)\right)^{-1} = \left(\left(\frac{i}{\varrho}\right)\right)^{-1} = \left(\left(\frac{\lambda}{\varkappa}\right)\right)^{-1};$$

dies war zu beweisen.

Falls $\left(\left(\frac{\lambda}{\varkappa}\right)\right) = -i$ ist, trifft man leicht die Abänderungen, die in dem eben entwickelten Beweise anzubringen sind. Folglich bleibt nur noch der Fall, daß $\left(\left(\frac{\lambda}{\varkappa}\right)\right) = -1$ ausfällt, zu betrachten. In diesem Falle bestimmen wir eine Primzahl ϱ in k derart, daß sie die Gleichungen

$$\left(\left(\frac{i}{\varrho}\right)\right) = \pm i, \quad \left(\left(\frac{\varkappa}{\varrho}\right)\right) = -1$$

befriedigt. Dann ist gewiß auch $\left(\left(\frac{\varrho}{\varkappa}\right)\right) = -1$, oder noch weiter

$$\left(\left(\frac{\lambda\varrho}{\varkappa}\right)\right) = +1.$$

Dieser Gleichung zufolge ist die Zahl $\varkappa$ die Relativnorm bezüglich k eines bestimmten Primideals $\mathfrak{K}$ in $K(\sqrt[4]{\lambda\varrho})$. Das Charakterensystem der Zahl $\varkappa$ enthält die Symbole

$$\left(\left(\frac{\varkappa,\, \lambda\varrho}{\lambda}\right)\right), \quad \left(\left(\frac{\varkappa,\, \lambda\varrho}{\varrho}\right)\right).$$

Es ist ferner $\left(\left(\frac{i,\, \lambda\varrho}{\varrho}\right)\right) = i$. Berücksichtigt man nun, daß

$$\left(\left(\frac{\varkappa,\, \lambda\varrho}{\varrho}\right)\right) = -1$$

ist, so folgt hieraus, daß das Charakterensystem von $\mathfrak{K}$ aus dem einen Charakter $\left(\left(\frac{-\varkappa,\, \lambda\varrho}{\lambda}\right)\right)$ besteht; mithin muß

$$\left(\left(\frac{-\varkappa,\, \lambda\varrho}{\lambda}\right)\right) = \left(\left(\frac{-\varkappa,\, \lambda}{\lambda}\right)\right) \left(\left(\frac{-\varkappa,\, \varrho}{\lambda}\right)\right)^{-1} = +1$$

sein. Hieraus folgt aber wegen der Gleichungen

$$\left(\left(\frac{-1,\, \lambda}{\lambda}\right)\right) = +1, \quad \left(\left(\frac{-1,\, \varrho}{\lambda}\right)\right) = -1, \quad \left(\left(\frac{\varkappa,\, \varrho}{\lambda}\right)\right) = +1$$

die Beziehung

$$\left(\left(\frac{\varkappa,\, \lambda}{\lambda}\right)\right) = -1,$$

was zu beweisen war.

Schließlich nehmen wir an, $\varkappa$ sei eine Primzahl der zweiten Art. Wir erkennen leicht, daß aus $\left(\left(\frac{\lambda}{\varkappa}\right)\right) = +1$ auch die Gleichung

$$\left(\left(\frac{\varkappa,\, \lambda}{\lambda}\right)\right) = +1$$

folgt. Zu diesem Behufe hat man den Körper $K(\sqrt[4]{\lambda})$ zu betrachten und zu beachten, daß wegen $\left(\left(\frac{i,\, \lambda}{\lambda}\right)\right) = +1$ in diesem Körper nur ein Geschlecht besteht.

Ist jedoch $\left(\left(\frac{\lambda}{\varkappa}\right)\right) = i$, so bestimmen wir eine Primzahl ϱ in k, welche den Gleichungen

$$\left(\left(\frac{i}{\varrho}\right)\right) = \pm i, \quad \left(\left(\frac{\varkappa}{\varrho}\right)\right) = \mp i$$

Genüge leistet, und nehmen ϱ in einer der Formen $\varrho \equiv (33c)$ bez. $\equiv (11c)$, (λ^7) an. Dann verfahren wir weiter wie zuvor. Die Fälle, wo $\left(\left(\frac{\lambda}{\varkappa}\right)\right) = -i$ oder $\left(\left(\frac{\lambda}{\varkappa}\right)\right) = -1$ ausfällt, bedürfen keiner weiteren Erläuterung mehr.

Damit ist der zweite Ergänzungssatz vollständig bewiesen für den Fall, daß die Primzahlen von derjenigen Gestalt sind, die wir ihnen bei der abgeschlossenen Untersuchung verliehen dachten. Da jedoch

$$\left(\left(\frac{i^s \lambda}{\lambda}\right)\right) = +1$$

ist, wenn s einen der Werte 0, 1, 2, 3 hat, so gilt die Gleichung (24) auch dann noch, wenn die Primzahl π in einer beliebigen Form genommen wird.

Vinkovci, am 18. Juni 1905.

Berichtigung

zu der Arbeit von G. Zemplén: Über die Kompatibilitätsbedingungen bei Unstetigkeiten in der Elektrodynamik in Band 62.

p. 578 ist in der Formel für $\bar{J}^L$ statt $x_t \mathfrak{A}_t^x + y_t \mathfrak{A}_t^y + z_t \mathfrak{A}_t^z$ zu setzen $x_t \mathfrak{A}^x + y_t \mathfrak{A}^y + z_t \mathfrak{A}^z$;

p. 580 ist in den Formeln (27), (28) und in der Zeile 11 v. u. überall statt σ zu setzen $\sigma\sqrt{\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2}$.

Durège, H., weil. Professor an der Universität Prag, Elemente der Theorie der Funktionen einer komplexen veränderlichen Größe. In 5. Auflage neu bearbeitet von Dr. L. Maurer, Professor an der Universität Tübingen. Mit 41 Figuren im Text. [X u. 397 S.] gr. 8. 1906. geh. n. *M.* 9.—, in Leinw. geb. n. *M.* 10.—

Ebner, Dr. F., Oberlehrer an der Kgl. Maschinenbauschule zu Einbeck, Leitfaden der technisch wichtigen Kurven. Mit 93 Figuren im Text. [VIII u. 197 S.] gr. 8 1906. In Leinw. geb. n. *M.* 4.—

Festschrift Adolph Wüllner gewidmet zum 70. Geburtstage 13. Juni 1905 von der Königl. Technischen Hochschule zu Aachen, ihren früheren und jetzigen Mitgliedern. Mit dem Bildnis A. Wüllners in Heliogravüre, 8 Tafeln u. 91 Fig. im Text. [VIII u. 264 S.] gr. 8. 1905. geh. n. *M.* 8.—, in Leinw. geb. n. *M.* 9.—

Fischer, Dr. Otto, Professor an der Universität Leipzig, theoretische Grundlagen für eine Mechanik der lebenden Körper mit speziellen Anwendungen auf den Menschen, sowie auf einige Bewegungsvorgänge an Maschinen. In möglichst elementarer und anschaulicher Weise dargestellt. Mit 67 in den Text gedruckten Figuren und 4 Tafeln. [X u. 372 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. *M.* 14.—

Fleming, J. A., Professor der Elektrotechnik am University College zu London, elektrische Wellen-Telegraphie. 4 Vorlesungen. Autorisierte deutsche Ausgabe von Professor Dr. E. Aschkinaß, Privatdozent an der Universität Berlin. Mit 53 Abbild. [IV u. 185 S.] gr. 8. 1906. geh. n. *M.* 4.20, in Leinw. geb. n. *M.* 5.—

Föppl, Dr. Aug., Professor an der Königl. Technischen Hochschule zu München, Vorlesungen über technische Mechanik. In 4 Bänden. gr. 8. Preis des ganzen Werkes in 4 Leinwand-Bänden n. *M.* 42.—

I. Band. Einführg. i. d. Mechanik. 3. Aufl. M. 136 Fig. i. Text. [XVI u. 428 S.] 1905. geb. n. *M.* 10.—
II. — Graphische Statik. 2. Aufl. Mit 176 Fig. i. Text. [XII u. 471 S.] 1903. geb. n. *M.* 10.—
III. — Festigkeitslehre. 3. Aufl. Mit 83 Fig. i. Text. [XVI u. 434 S.] 1905. geb. n. *M.* 10.—
IV. — Dynamik. 2. Aufl. Mit 69 Fig. i. Text. [XV u. 506 S.] 1901. geb. n. *M.* 12.—

Gans, Dr. Richard, Privatdozent an der Universität Tübingen, Einführung in die Vektoranalysis. Mit Anwendungen auf die mathematische Physik. Mit 31 Figuren im Text. [X u. 98 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. *M.* 2.80.

Heffter, Dr. L., Professor an der Universität Kiel, und **Dr. C. Koehler**, Professor an der Universität Heidelberg, Lehrbuch der analytischen Geometrie. I. Band: Geometrie in den Grundgebilden erster Stufe und in der Ebene. Mit 136 Figuren im Text. [XVI u. 526 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. *M.* 14.—

Hempel, J., Lehrer an der staatlichen Baugewerkschule zu Hamburg, Schattenkonstruktionen. Für den Gebrauch an Baugewerkschulen und ähnlichen Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht. Mit 51 Textfiguren und 20 Tafeln praktischer Beispiele in Lichtdruck. [IV u. 60 S.] quer Folio. 1906. In Leinwand geb. n. *M.* 5.—

Höfler, Dr. A., Professor an der Universität Prag, Vorschläge zu einer zeitgemäßen Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an den österreichischen Gymnasien und Realschulen. Im Auftrage der Deutschen Mittelschule in Prag erstattet. [15 S.] gr. 8. 1906. geh. n. *M.* —.40.

Jahnke, Dr. E., etatsmäßiger Professor an der Königl. Bergakademie zu Berlin, Vorlesungen über die Vektorenrechnung. Mit Anwendungen auf Geometrie, Mechanik und mathematische Physik. Mit 32 Figuren im Text. [XII u. 235 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. *M.* 5.60.

Kohlrausch, Dr. Friedr., Lehrbuch der praktischen Physik. 10., vermehrte Auflage des Leitfadens der praktischen Physik. Mit zahlreichen Figuren im Text. [XXVIII u. 656 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. *M.* 9.—

Leibniz, G. W., nachgelassene Schriften physikalischen, mechanischen und technischen Inhalts. Herausgegeben und mit erläut. Anmerk. versehen von Dr. E. Gerland, Professor an der Kgl. Bergakademie zu Klausthal. Mit 200 Figuren im Text. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. XXI. Heft. [VI u. 256 S.] gr. 8. 1906. geh. n. *M.* 10.—

Lorentz, Dr. H. A., Professor an der Universität Leiden, Abhandlungen über theoretische Physik. In 2 Bänden. I. Band, 1. Lieferung. Mit 8 Figuren im Text. [298 S.] gr. 8. 1906. geh. n. *M.* 10.—
[Die 2. (Schluß-)Lieferung des I. Bandes erscheint im Herbst 1906.]

*

Lorentz, Dr. **H. A.,** Professor an der Universität Leiden, Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern. Unveränderter Abdruck der 1895 bei J. Brill in Leiden erschienenen 1. Auflage. [III u. 138 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 3.20.

Neumann, Franz, gesammelte Werke. In 3 Bänden. II. Band. Bei der Herausgabe dieses Bandes sind tätig gewesen die Herren: E. Dorn (Halle), O. E. Meyer (Breslau), C. Neumann (Leipzig), C. Pape (früher in Königsberg), L. Saalschütz (Königsberg), K. Von der Mühll (Basel), A. Wangerin (Halle), H. Weber (Straßburg). Mit einem Bildnis Franz Neumanns aus dem 86. Lebensjahre in Heliogravüre. [XVI u. 620 S.] gr. 4. 1906. geh. n. ℳ 36.—

Nielsen, Dr. **Niels,** Dozent der reinen Mathematik an der Universität Kopenhagen, Inspektor des mathematischen Unterrichts an den Gymnasien Dänemarks, Handbuch der Theorie der Gammafunktion. [X u. 326 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 12.—

——— Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen. [XIV u. 408 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. ℳ 14.—

Osgood, Dr. **W. F.,** Professor an der Harvard-Universität, Cambridge, Mass., V. St. A., Lehrbuch der Funktionentheorie. In 2 Bänden. I. Band. 1. Hälfte. Mit zahlreichen Figuren im Text [306 S.] gr. 8. 1906. geh. n. ℳ 7.—
[Die 2. Hälfte des I. Bandes wird im Herbst 1906 erscheinen.]

Pockels, Dr. **F.,** Professor an der Universität Heidelberg, Lehrbuch der Kristalloptik. Mit 168 Figuren im Text und 6 Doppeltafeln. [X u. 519 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 16.—

Poincaré, Henri, Membre de l'Institut, Wissenschaft und Hypothese. Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. und L. Lindemann. 2., verbesserte Auflage. [XVI u. 346 S.] 8. 1906. In Leinwand geb. n. ℳ 4.80.

——— der Wert der Wissenschaft. Mit Genehmigung des Verfassers ins Deutsche übertragen von E. Weber. Mit Anmerkungen und Zusätzen von H. Weber, Professor in Straßburg i. E., und einem Bildnis des Verfassers. [V u. 252 S.] 8. 1906. In Leinwand geb. n. ℳ 3.60.

Reformvorschläge für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Entworfen v. d. Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturf. u. Ärzte. Nebst allgem. Bericht über die bisherige Tätigkeit der Kommission von Professor Dr. A. Gutzmer in Halle a. S. [IV u. 48 S.] gr. 8. 1905. geh. n. ℳ 1.—

——— II. Teil. Vorschläge überreicht der 78. Naturforscher-Versammlung in Stuttgart 1906. Nebst einem allgemeinen Bericht über die Tätigkeit der Kommission. Herausgegeben von Professor Dr. A. Gutzmer in Halle a. S. [IV u. 73 S.] gr. 8. 1906. geh. n. ℳ 1.40.

Serret-Scheffers, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. 3 Bände. gr. 8. [Von der 3. Auflage an hat Professor Dr. G. Scheffers in Charlottenburg die Neubearbeitung übernommen.]

Einzeln:

I. Band: Differentialrechnung. 3. Auflage, neu bearbeitet von Dr. G. Scheffers, Professor an der Technischen Hochschule zu Charlottenburg. Mit 70 Figuren im Text. [XVI u. 624 S.] 1906. geh. n. ℳ 12.—, in Leinw. geb. n. ℳ 13.—

II. Band: Integralrechnung. 2., durchgesehene Auflage, mit Unterstützung von H. Liebmann und E. Zermelo, herausgegeben von Dr. G. Bohlmann, Professor in Berlin. [XII u. 428 S.] 1899. geh. n. ℳ 8.—, in Leinw. geb. n. ℳ 9.—

III. Band: Differentialgleichungen und Variationsrechnung 2., durchgesehene Auflage von Dr. G. Bohlmann, Professor in Berlin, und E. Zermelo, Professor an der Universität Göttingen. Mit 33 Fig. im Text. [XII u. 480 S.] 1904. geh. n. ℳ 9.—, in Leinw. geb. n. ℳ 10.—

Simon, Dr. **Max,** Professor an der Universität Straßburg i. E., über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert. Bericht erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. (A. u. d. T.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Ergänzungsband I.) Mit 28 Figuren im Text. [VIII u. 278 S.] gr. 8. 1906. geh. n. ℳ 8.—, in Leinwand geb. n. ℳ 9.—

Simon, Dr. **Max**, Professor an der Universität Straßburg i. E., Methodik der elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischer Analysis. Mit 9 Textfiguren. [VI u. 108 S.] gr. 8. 1906. geb. n. *M.* 3.20.

Starke, Dr. **H.**, Professor an der Universität Greifswald, experimentelle Elektrizitätslehre. Mit besonderer Berücksichtigung der neueren Anschauungen und Ergebnisse dargestellt. Mit 275 in den Text gedruckten Abbildungen. [XIV u. 422 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. *M.* 6.—

Staude, Dr. **Otto**, Professor an der Universität Rostock, analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene. Ein Handbuch zu den Vorlesungen und Übungen über analytische Geometrie. Mit 387 Figuren im Text. [VIII u. 447 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. *M.* 14.—

Stolz, Dr. **Otto**, weil. Professor an der Universität Innsbruck, und Dr. **J. Anton Gmeiner**, Professor an der deutschen Universität Prag, Einleitung in die Funktionentheorie. Zweite, umgearbeitete und vermehrte Auflage der von den Verfassern in der „Theoretischen Arithmetik" nicht berücksichtigten Abschnitte der „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik" von O. Stolz. Mit 21 Figuren im Text. [X u. 598 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. *M.* 15.—

Auch in 2 Abteilungen:

I. Abteilung. Mit 10 Figuren im Text. [VI u. 242 S.] 1904. In Leinw. geb. n. *M.* 6.—

II. — Mit 11 Figuren im Text. [VIII u. S. 243—598.] 1905. In Leinw. geb. n. *M.* 9.—

Thomae, Dr. **J.**, Professor an der Universität Jena, Sammlung von Formeln und Sätzen aus dem Gebiete der elliptischen Funktionen nebst Anwendungen. [IV u. 44 S.] 4. 1905. kart. n. *M.* 2.80.

——— Grundriß einer analytischen Geometrie der Ebene. Mit 8 Figuren im Text. [X u. 183 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. *M.* 3.60.

Thomson, **J. J.**, D. Sc. Lld. Ph. D. Er. S. Fellow etc., Elektrizitäts-Durchgang in Gasen. Deutsche autor. Ausgabe unter Mitwirkung des Autors besorgt und ergänzt von Dr. E. Marx, Privatdozent an der Universität Leipzig. Mit 187 Figuren im Text. [VII u. 587 S.] gr. 8. 1906. geh. n. *M.* 18.—, in Leinw. geb. n. *M.* 19.—

Vahlen, Dr. **Karl Theodor**, Professor an der Universität Heidelberg, abstrakte Geometrie. Untersuchungen über die Grundlagen der Euklidischen und Nicht-Euklidischen Geometrie. Mit zahlreichen Figuren im Text. [XII u. 302 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. *M.* 12.—

Vivanti, **G.**, Professor an der Universität Messina, Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen. Umarbeitung unter Mitwirkung des Verfassers deutsch hrsg. von Dr. A. Gutzmer, Professor an der Universität Halle a. S. [VI u. 512 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. *M.* 12.—

Wallentin, Dr. **J.**, Regierungsrat und Landesschulinspektor in Wien, Einleitung in die theoretische Elektrizitätslehre. Mit 81 Figuren im Text. [X u. 444 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. n. *M.* 12.—

Weber, Dr. **H.**, und Dr. **J. Wellstein**, Professoren in Straßburg, Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. In 3 Bänden. gr. 8. I. Band. Elementare Algebra und Analysis. Bearbeitet von H. Weber. 2. Auflage. Mit 38 Textfiguren. [XVIII u. 539 S.] 1906. In Leinw. geb. n. *M.* 9.60. II. Band. Elemente der Geometrie. Bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein und W. Jacobsthal. Mit 280 Textfiguren. [XII u. 604 S.] 1905. In Leinw. geb. n. *M.* 12.— (Bd. III. Anwendungen der Elementar-Mathematik. U. d. Pr.)

Weinstein, Dr. **B.**, Professor an der Universität Berlin, die philosophischen Grundlagen der Wissenschaften. Vorlesungen gehalten an der Universität Berlin. [XIV u. 543 S.] 8. 1906. In Leinw. geb. n. *M.* 9.—

Wien, Dr. **W.**, Professor an der Universität Würzburg, über Elektronen. Vortrag, gehalten auf der 77. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Meran. [28 S.] gr. 8. 1905. geh. n. *M.* 1.—

Wilczynski, **E. J.**, A. M., Ph. D., Research Associate of the Carnegie Institution of Washington, Assistant Professor of Mathematics at the University of California, projektive differential geometry of curves and ruled surfaces. [VIII u. 298 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. *M.* 10.—

INHALT.

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exakten Ausführung stets auf besonderen Blättern, wenn möglich in der gewünschten Größe und in tunlichst präziser Zeichnung dem Manuskripte beilegen zu wollen. Außerdem wird um möglichst genaue Angabe der Adresse gebeten.

Die Redaktion.

☞ Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heften und umfaßt ca. 36 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.

Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 20 Mark; jährlich erscheinen etwa 4—6 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Verantwortl. Redaktion: **F. Klein,** Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 3, **W. v. Dyck,** München, Hildegardstr. $1\frac{1}{2}$, **David Hilbert,** Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 29, **Otto Blumenthal,** Aachen, Rütscherstraße 37.

Zusendungen sind zu richten an die Mitglieder der auf der Titelseite genannten Gesamtredaktion.