Die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie.

Von

Emil Hilb in Augsburg.

Herr Bôcher gibt in seinem Buche: „Über die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie" (Leipzig 1894) im Anschlusse an eine von Prof. Klein im Winter 1889—90 gehaltene Vorlesung eine zusammenfassende Ableitung der wichtigsten Reihenentwicklungen, welche hier in Betracht kommen. Die verschiedenen in der Potentialtheorie benutzten Orthogonalsysteme erscheinen dabei als Spezialfälle des Systems konfokaler Zykliden. Die einzelnen Reihenglieder bez. die Konstanten in den die einzelnen Reihenglieder definierenden Differentialgleichungen werden durch das von Herrn Klein aufgestellte Oszillationstheorem*) festgelegt. Dadurch ist das formale Gesetz der Reihenentwicklung gegeben; doch findet sich bei Bôcher kein Beweis für die Möglichkeit und Konvergenz der Entwicklungen. Der Konvergenzbeweis wurde später von Herrn Jaccottet in seiner Doktordissertation: „Über die allgemeine Reihenentwicklung nach Laméschen Produkten" (Göttingen 1895) in Angriff genommen, aber nicht zu Ende geführt. In dieser Arbeit sollen nun die von Herrn Prof. Hilbert geschaffenen Methoden der Integralgleichungen**) auf diese Probleme angewendet werden. Es wird sich dabei der *Konvergenzbeweis* nahezu von selbst ohne jede Rechnung aus den viel allgemeineren Sätzen der obigen Theorie ergeben, ebenso läßt sich jetzt auch die *Möglichkeit der Entwicklungen* streng beweisen. Es handelt sich nämlich nur mehr darum, zu zeigen, daß die bisher hier bekannten Eigenfunktionen***) oder die ausgezeichneten Lösungen†), welche sich durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen ergaben, alle überhaupt möglichen erschöpfen. Für eine Anzahl von Fällen ist dieses nun schon längst streng bewiesen, und

*) Der Name findet sich zuerst bei Klein in den Göttinger Nachrichten 1890, S. 90.

**) Göttinger Nachrichten 1904, S. 49—91 u. S. 213—259.

***) Hilbert, ib. S. 67.

†) Pockels, $\Delta u + k^2 u = 0$, S. 33.

wenn das von Klein ausgesprochene Kontinuitätsprinzip*), welches aussagt, daß bei stetiger Abänderung irgend welcher in diesem Probleme auftretender Parameter kein Eigenwert verloren geht, richtig ist, so gilt der Satz in allen Fällen. Da aber die Theorie der Integralgleichungen uns in den Stand setzt, die Abhängigkeit der Eigenwerte von den Parametern zu untersuchen, so läßt sich jetzt tatsächlich das Kontinuitätsprinzip wenigstens für die in Betracht kommenden Fälle streng beweisen, nachdem gewisse von H. A. Schwarz**) zuerst aufgestellte Sätze über die Eigenwerte verallgemeinert sind.

In Verfolgung dieses Gedankenganges wird in dieser Arbeit zunächst von der Möglichkeit der Entwicklung nach Kugelfunktionen ausgegangen, und es werden die Reihenentwicklungen nach den gewöhnlichen Laméschen Funktionen und den Eigenfunktionen behandelt, welche zu Gebieten auf der Kugel gehören, die von vier konfokalen sphärischen Kegelschnitten begrenzt sind. Durch diese Beispiele soll nur die allgemeine Lösungsmethode***) vorbereitet werden, welche aber nicht von der Differentialgleichung der Kugelfunktionen ausgeht, sondern von einer anderen, neuen Differentialgleichung, welche wir Normalgleichung nennen wollen. Mit dieser lassen sich in der Tat alle vorkommenden Differentialgleichungen leicht in Verbindung bringen, und sie hat ferner die ausgezeichnete Eigenschaft, daß man ohne weiteres ersieht, daß alle ihre Eigenfunktionen sich aus gewöhnlichen Differentialgleichungen ergeben. In bezug auf ihre weiteren Eigenschaften ist auf die Arbeit zu verweisen. Es ist dann eine Leichtigkeit, die Möglichkeit der von Bôcher gegebenen Reihenentwicklungen für das Zyklidensechsflach und das von 6 konfokalen Flächen 2. Grades begrenzte Sechsflach zu erweisen; alle anderen Fälle lassen sich auf analoge Weise behandeln.

§ 1.

Die Laméschen Polynome.

In seiner 2. Abhandlung über Integralgleichungen gibt Herr Prof. Hilbert†) eine ausführliche Ableitung für die Entwicklung nach Kugelfunktionen. Die hier gegebene Ableitung für die Laméschen Polynome schließt sich auf das engste daran an.

---

*) Pockels, S. 95.

**) H. A. Schwarz, Gesammelte Abhandlungen I, S. 260.

***) Die für die allgemeine Lösungsmethode selbst wesentlichen Sätze sind durch Kursivdruck hervorgehoben.

†) Hilbert l. c. S. 241.

Es sei

$$(1)\qquad \begin{aligned} & x^2+y^2+z^2=1, \\ & \frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}-\frac{z^2}{c^2-\mu^2}=0, \\ & \frac{x^2}{\nu^2}-\frac{y^2}{b^2-\nu^2}-\frac{z^2}{c^2-\nu^2}=0 \end{aligned}$$

und

$$-b<\nu<b<\mu<c.$$

Man hat also eine Kugel und zwei Systeme von Kegeln 2. Ordnung. Die von den Kegeln auf der Kugel ausgeschnittenen Kurven $\mu = C_1$, $\nu = C_2$ führen wir als krummlinige Koordinaten ein und bilden den Ausdruck:

$$(2)\qquad L(u)=\frac{p}{\sqrt{eg-f^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{g\frac{\partial u}{\partial\mu}-f\frac{\partial u}{\partial\nu}}{\sqrt{eg-f^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{e\frac{\partial u}{\partial\nu}-f\frac{\partial u}{\partial\mu}}{\sqrt{eg-f^2}}\right)\right\},$$

wobei

$$ds^2=e\,d\mu^2+2f\,d\mu\,d\nu+g\,d\nu^2,$$

p irgend eine Funktion von ξ, η ist. Also hat man in unserem Falle:

$$(3)\qquad \begin{aligned} ds^2 &= (\mu^2-\nu^2)\left(\frac{d\mu^2}{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}+\frac{d\nu^2}{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}\right) \\ &= (\mu^2-\nu^2)\left(\frac{d\mu^2}{R(\mu)}+\frac{d\nu^2}{R_1(\nu)}\right) \end{aligned}$$

und

$$(4)\qquad L(u)=\frac{p}{\mu^2-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right),$$

wenn

$$(5)\qquad d\xi=\frac{d\mu}{\sqrt{R(\mu)}},\quad d\eta=\frac{d\nu}{\sqrt{R_1(\nu)}}$$

ist. Führt man aber in bekannter Weise Polarkoordinaten für die Kugel ein, so erhält man, wenn man noch $p=\frac{1}{2\pi}$ setzt:

$$(6)\qquad L_1(u)=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right\}.$$

Die Greensche Funktion ist in bekannter Weise definiert. Es seien μ, ν irgend welche orthogonale Koordinaten auf einem singularitätenfreien Flächenstücke; μ^*, ν^* sei ein beliebiger Punkt, in welchem e^* und g^* im Linienelemente nicht verschwinden und nicht unendlich werden, dann ist die Greensche Funktion, für welche $L(u)=0$ ist, von der Form:

$$(7)\quad g(\mu,\nu;\mu^*,\nu^*)=-\frac{1}{2}\log\left(e^*(\mu-\mu^*)^2+g^*(\nu-\nu^*)^2\right)+\gamma_1(\mu,\nu;\mu^*,\nu^*),$$

wobei γ_1 auf dem ganzen Flächenstücke regulär ist und so bestimmt werden muß, daß gewisse vorgegebene Randbedingungen erfüllt sind. In Punkten, wo e^* und g^* nicht die obigen Bedingungen erfüllen, ist die obige Form etwas zu modifizieren, wie die kommenden Beispiele*) zeigen. Bei der Kugel führen wir als Randbedingung ein, daß γ_1 auf der ganzen Kugel regulär ist. Eine solche Greensche Funktion gibt es aber unter Zugrundelegung von $L_1(u) = 0$ nicht, wohl aber eine solche, für welche $L_1(u) = \frac{1}{4\pi}$ ist, und diese Funktion $G(\vartheta, \varphi; \vartheta^* \varphi^*)$ nennt man die erweiterte Greensche Funktion**), und zwar muß

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} G(\vartheta, \varphi; \vartheta^*, \varphi^*) \frac{1}{2\pi} \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta = 0$$

sein. Man findet dann

$$\begin{aligned} G &= -\left[\pi + \pi \log\left(\frac{1 - \cos\vartheta\cos\vartheta^* - \sin\vartheta\sin\vartheta^*\cos(\varphi - \varphi^*)}{2}\right)\right], \\ &= -\pi\left[\log\left(\frac{1-\cos\varrho}{2}\right) + 1\right] = -\pi\left[\log\sin^2\frac{\varrho}{2} + 1\right], \end{aligned} \tag{8}$$

wobei ϱ die kleinste sphärische Entfernung der zwei Punkte ϑ, φ; ϑ^*, φ^* bedeutet.

Die Eigenfunktionen von $L_1(u) + \lambda u = 0$ sind dann identisch mit den Eigenfunktionen, welche zu der Integralgleichung gehören:

$$\lambda^{(n)} \int \varphi(\vartheta^*, \varphi^*) \, G(\vartheta, \varphi; \vartheta^*, \varphi^*) \, dK = \varphi(\vartheta, \varphi). \tag{9}$$

Dabei ergeben sich die $\lambda^{(n)}$ als Wurzeln einer transzendenten Gleichung. Man bestimmt sie leicht direkt (z. B. vergl. Pockels, $\Delta u + k^2 u = 0$, S. 106) und findet

$$\lambda^{(n)} = \frac{n(n+1)}{2\pi} \quad \text{für} \quad n = 0, 1 \cdots, \tag{10}$$

wobei $\lambda^{(n)}$ ein $2n + 1$-facher Eigenwert ist. Daraus folgt aber dann, nach der Hilbertschen Theorie, daß jede zweimal stetig differenzierbare Funktion auf der Kugel nach den obigen Eigenfunktionen, den Kugelflächenfunktionen, entwickelbar ist.

Der Übergang zu den zu der Gleichung

$$L(u) + \lambda u = \frac{2\pi}{\mu^2 - \nu^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) + \lambda u = 0 \tag{11}$$

gehörigen Eigenfunktionen, den Laméschen Polynomen, ist jetzt leicht.

---

*) Vergl. z. B. Formel (12) für die den Nabelpunkten auf dem Ellipsoide entsprechenden Punkte, welche im übrigen die Anwendbarkeit der Hilbertschen Theorie nicht stören, wie man leicht durch Grenzübergang zeigt, nachdem man die vier Punkte durch kleine Kurven umgeben hat.

**) Hilbert l. c. S. 238.

Aus

$$x = \cos\vartheta = \frac{\mu\nu}{bc},$$

$$y = \cos\varphi \sin\vartheta = \frac{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}},$$

$$z = \sin\varphi \sin\vartheta = \frac{\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}$$

folgt, daß die erweiterte Greensche Funktion gegeben ist durch:

$$(12)\quad G = -\left[\pi + \pi \log \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu\mu^*\nu\nu^*}{b^2c^2} - \frac{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{\mu^{*2}-b^2}\sqrt{b^2-\nu^{*2}}}{b^2(c^2-b^2)} - \frac{\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\mu^{*2}}\sqrt{c^2-\nu^{*2}}}{c^2(c^2-b^2)}\right)\right].$$

Die Oktanten unterscheiden sich durch die Vorzeichen der Wurzeln. Die Eigenwerte sind dann dieselben wie oben, und man erhält bekanntlich alle Eigenfunktionen wenn man setzt:

$$(13)\quad u = E_s^n(\mu) \cdot E_s^n(\nu),$$

wobei $E_s^n(\mu)$ der Gleichung*) genügt:

$$(14)\quad (\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)\frac{d^2E(\mu)}{d\mu^2} + \mu(2\mu^2 - b^2 - c^2)\frac{dE(\mu)}{d\mu} + [(b^2 + c^2)v_s^n - n(n+1)\mu^2]E(\mu) = 0.$$

Es besteht dann ein analoger Satz wie oben über die Entwickelbarkeit von Funktionen nach diesen Laméschen Produkten.

§ 2.

Die Eigenfunktionen für Gebiete auf der Kugel, welche von vier konfokalen Kegeln 2. Grades ausgeschnitten werden.

Gegeben ist ein Rechteck auf der Kugel, welches von den Linien $\mu = \mu_1$, $\nu = \nu_1$, $\mu = \mu_2$, $\nu = \nu_2$ begrenzt ist, wobei noch die Lage der Seiten in bezug auf die verschiedenen Oktanten festgelegt ist. Wir bilden dann eine Funktion, welche jetzt der Gleichung $L(u) = 0$ genügt, für μ^*, ν^* logarithmisch unendlich wird und auf dem Rande verschwindet.

Um diese Funktion zu erhalten, denken wir unseren Bereich auf die $\xi\eta$-Ebene abgebildet, wobei wir die verschiedenen Oktanten durch passende Vermehrung von ξ und η um Perioden unterscheiden. Dem Bereiche entspricht dann in der $\xi\eta$-Ebene ein von geraden Linien begrenztes Rechteck, dessen Seiten die Längen a und b haben sollen. Unsere Gleichung geht dann über in:

$$(15)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$$

*) v_s^n ist bekanntlich durch eine algebraische Gleichung zu bestimmen (siehe z. B. Heine, Kugelfunktionen, Bd. 1).

Die Greensche Funktion, welche also jetzt die Form hat:

$$(16)\qquad G(\xi,\eta;\xi^*,\eta^*) = -\frac{1}{2}\log\left((\xi-\xi^*)^2+(\eta-\eta^*)^2\right)+g(\xi,\eta;\xi^*\eta^*),$$

läßt sich für unseren Fall in expliziter, wenn auch etwas komplizierter Form vermittelst elliptischer Funktionen darstellen.*) Gehen wir nun von unserem Rechtecke zu benachbarten über, indem wir a durch $a(1+\sigma)$ ersetzen, so kann man durch Potenzreihenentwicklung der Formel für $G(\xi,\eta;\xi^*,\eta^*)$ zeigen, daß $G(\xi,\eta;\xi^*,\eta^*)$ eine analytische Funktion von σ ist, daraus folgt aber, daß auch die Koeffizienten**) δ_h von λ in $\delta(\lambda)$ analytische Funktionen von σ sind. Dasselbe gilt dann aber, da $\delta(\lambda)$ gleichmäßig konvergiert, von jeder gerade ins Auge gefaßten endlichen Wurzel λ von $\delta(\lambda)=0$, und es folgt der Satz, daß, wenn $\delta(\lambda)=0$ eine m-fache Wurzel $\lambda^{(n)}$ hat, $\delta(\lambda)$ für genügend kleine Werte von σ m benachbarte Wurzeln zu $\lambda^{(n)}$ hat, die, ebenso wie die zu ihnen gehörigen Eigenfunktionen, sich als Potenzreihen in bezug auf σ darstellen lassen. Der Konvergenzbereich dieser Reihen ist natürlich von dem Anfangswert $\lambda^{(n)}$ abhängig, und es kann vorkommen, daß, wenn wir σ geeignet verändern, eine solche Wurzel in das Unendliche wächst, wobei dann die dazugehörige Eigenfunktion verloren geht. Wenn also auch in einem Falle alle Eigenfunktionen sich beispielshalber als Lamésche Produkte bestimmen lassen, so dürfen wir nicht ohne weiteres schließen, daß dieses nun für alle anderen Rechtecke auch der Fall sein muß, denn wir dürfen zunächst die Möglichkeit nicht aus dem Auge lassen, daß gerade in dem betrachteten Spezialfalle alle anderen Eigenfunktionen verloren gegangen sein könnten. Und in der Tat werden wir im folgenden auch auf solche Fälle stoßen, in denen Eigenwerte verloren gehen, bezüglich gewonnen werden. Es kommt also darauf an, zu zeigen, daß bei der vorliegenden Fragestellung in allen Fällen die bekannten Eigenfunktionen alle erschöpfen. Die bekannten Eigenfunktionen lassen sich nun in der Form $E'(\mu)\cdot E''(\nu)$ darstellen und zwar ist

$$(17)\qquad \frac{d^2E}{dt^2} = -(\lambda z^2+B)E;$$

wobei $z=\mu$ bezüglich ν, $t=\xi$ bez. ηi ist. Um mit der Literatur in volle Übereinstimmung zu kommen, setzen wir $z^2=z_1$; ferner wählt man $E'(\mu_1)=0$, $E''(\nu_1)=0$ und bestimmt λ und B so, daß

$$(18)\qquad \begin{aligned} E'(\mu_2;\lambda,B)&=0,\\ E''(\nu_2;\lambda,B)&=0. \end{aligned}$$

*) Harnack, Theorie des logarithmischen Potentials, S. 78.

**) Hilbert, l. c. S. 58.

Das Oszillationstheorem zeigt dann, daß man zu jedem Wertepaare m, n λ und B auf eine und nur auf eine Weise so bestimmen kann, daß $E'(\mu)$ m mal, $E''(\nu)$ n mal in dem betreffenden Intervalle verschwindet.

Ein einfacher Fall, in welchem diese Eigenfunktionen alle möglichen erschöpfen, ist der Kugeloktant. Wenn wir nämlich diesen Bereich an den ihn begrenzenden Kreisen spiegeln, bleibt die Differentialgleichung unverändert, es folgt also: Die Eigenfunktionen für den Kugeloktanten, welche auf der Begrenzung verschwinden, sind unter den vorher besprochenen Eigenfunktionen enthalten, welche sich auf der ganzen Kugel regulär verhalten, und es folgt in diesem Falle leicht, daß die durch das Oszillationstheorem gelieferten Eigenfunktionen alle möglichen erschöpfen. Um nun auf andere Rechtecke übergehen zu können, benützen wir folgenden wichtigen Satz, den wir im nächsten Paragraphen beweisen wollen: *Wenn wir eine Rechteckseite nach außen verschieben, so nimmt ein jedes gerade ins Auge gefaßte λ ab; jedenfalls nimmt es nie zu.* Nun muß λ immer größer sein als Null. Wenn wir also für ein Rechteck im Inneren des Oktanten Eigenwerte hätten, zu denen Eigenfunktionen gehören, die von den Laméschen Produkten wesentlich verschieden, d. h. linear unabhängig sind, so hätten diese Eigenwerte auch für den Oktanten einen endlichen Wert und wir hätten für den Oktanten Eigenfunktionen, die von den Laméschen Produkten wesentlich verschieden sind, was nach obigem nicht der Fall ist. Damit ist gezeigt, daß die Laméschen Produkte alle Eigenfunktionen erschöpfen, die zu Rechtecken gehören, die kleiner sind als der Oktant, und es gilt ein dem obigen analoges Entwicklungstheorem.

§ 3.

Einige Sätze über Eigenwerte.

Wir haben im letzten Paragraphen den Satz erwähnt, daß die Eigenfunktionen analytische Funktionen des Verschiebungsparameters sind, wenn wir dem Punkte $\xi\eta$ des 1. Rechtecks den Punkt $\xi(1+\sigma)$, η zuordnen (vergl. Fig. 1). Desgleichen folgt aus einem allgemeinen Satze der Integralgleichungen, daß unsere Eigenfunktionen im Inneren beliebig oft differenzierbar und ebenso auch auf dem Rande nach der Normalen stetig differenzierbar sind. Auf den Beweis dieses Satzes komme ich bei

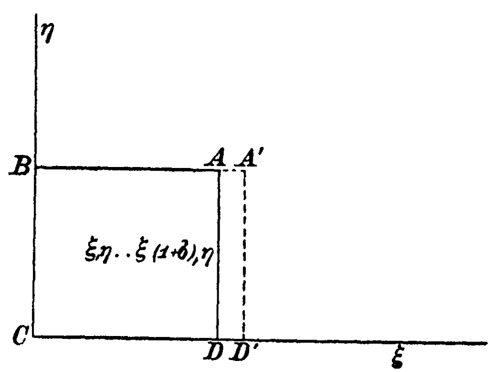


Fig. 1.

anderer Gelegenheit zurück; er läßt sich mit elementaren Hilfsmitteln führen.

Sei nun:

$$(19) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \lambda(\mu - \nu)u = L(u) + \lambda(\mu - \nu)u = 0.$$

Dann hat man:

$$(20) \qquad \int (v L(u) - u L(v))\, d\xi\, d\eta = \int \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) ds.$$

Dabei ist das linke Integral über das geradlinige Rechteck in der $\xi\eta$-Ebene zu nehmen, das rechte Integral über die Randlinien; $\frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial v}{\partial n}$ bedeuten die Ableitungen nach der in das Innere gerichteten Normalen. u verschwindet auf dem Rande des kleineren Rechtecks, v auf dem des daraus durch Verschiebung entstandenen. Wir umgeben die Nulllinien*) von u und v mit Streifen, so daß außerhalb derselben u und v dasselbe Vorzeichen haben. Wenn σ klein genug gewählt wird, können diese Streifen beliebig schmal gemacht werden. v gehöre nun zum Eigenwerte λ'. Dann hat man

$$-(\lambda - \lambda') \int v u\, (\mu - \nu)\, d\xi\, d\eta = -\int v \frac{d u}{\partial n}\, ds,$$

$$v(\xi, \eta) = u\left(\frac{\xi}{1+\sigma}, \eta\right) + \sigma^{\alpha} u_1(\xi, \eta);$$

$$u\left(\frac{\xi}{1+\sigma}, \eta\right) = u(\xi, \eta) + \sigma^{\beta} u_2(\xi, \eta) = \sigma^{\beta} u_2(\xi, \eta),$$

wenn ξ, η auf der Rechteckseite AD liegt. Ferner ist noch

$$\lambda = \lambda' + \sigma^{\gamma_1} \lambda_1 + \sigma^{\gamma_2} \lambda_2 + \cdots.$$

Also hat man:

$$-\sigma^{\gamma_1} \lambda_1 \int u^2 (\mu - \nu)\, d\xi\, d\eta + \cdots = -\sigma^{\alpha} \int u_1 \frac{\partial u}{\partial n}\, ds - \sigma^{\beta} \int u_2 \frac{\partial u}{\partial n}\, ds.$$

Nun ist entweder $\lambda' = \lambda$ oder $\lambda_1 \neq 0$; dann aber ist entweder α oder $\beta = \gamma_1$. Sei z. B. $\alpha < \beta$; dann ist entweder $\alpha = \gamma_1$; oder

$$\int u_1 \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = 0, \quad \text{und} \quad \gamma_1 = \beta.$$

Nehmen wir z. B. den ersten Fall, dann ist

$$\lambda_1 \int u^2 (\mu - \nu)\, d\xi\, d\eta = \int \left[u_1 + \sigma^{\beta - \alpha} u_2\right] \frac{\partial u}{\partial n}\, ds + \varepsilon;$$

die linke Seite hat einen endlichen, von Null verschiedenen Wert, die rechte Seite ist ihr gleich, abgesehen von Größen ε, die mit σ beliebig klein werden. Außerhalb der Streifen hat die eckige Klammer dasselbe Zeichen

*) Mit Ausnahme des Randes.

wie $\frac{\partial u}{\partial n}$; da wir die Streifen beliebig verkleinern können, so folgt, daß die rechte Seite > 0 wird für sehr kleine σ, also ist auch $\lambda_1 > 0$, $\lambda' \leqq \lambda$. λ nimmt also mit wachsendem Bereiche immer ab.

Es soll nebenbei bemerkt werden, daß dieser Satz durch dieselben *geometrisch-physikalischen Anschauungen* evident wird, wie das Kleinsche Oszillationstheorem*), jedoch nur für die *dabei auftretenden* Eigenfunktionen, während der obige analytische Beweis zeigt, daß der Satz für *alle überhaupt möglichen Eigenfunktionen* gilt, woraus dann erst aus den Untersuchungen des letzten Paragraphen folgt, daß die durch das Oszillationstheorem gelieferten Eigenfunktionen eben alle möglichen sind.

Um uns also den Satz nachträglich noch plausibel zu machen, gehen wir aus von:

$$\frac{d^2E'(\mu)}{d\xi^2} = -(\mu\lambda + B)E'(\mu); \quad \frac{d^2E''(\nu)}{d\eta^2} = (\nu\lambda + B)E''(\nu). \tag{21}$$

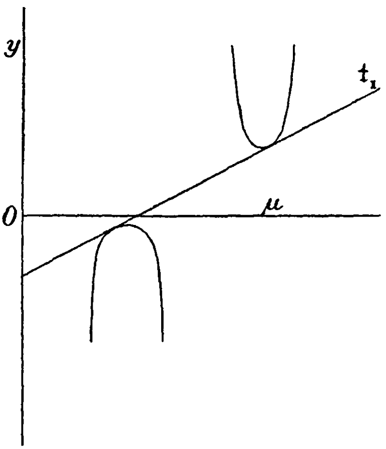


Fig. 2.

Dann erhält man für die Oszillationszahlen m, n zwei Hüllkurven, welche uns Fig. 2 schematisch zeigt. Diese Kurven sind eingehüllt von den Geraden: $y = \mu\lambda + B$ bez. $y = \nu\lambda + B$, die beiden gemeinsame Tangente liefert das zu m, n gehörige Wertepaar λ, B. Wird nun eine Rechteckseite nach außen verschoben, so rückt entweder die untere Hüllkurve nach oben oder die obere Hüllkurve nach unten, gerade wie bei einer Verkleinerung der Oszillationszahlen m bezüglich n**); in beiden Fällen wird die gemeinsame Tangente flacher liegen als vorher, d. h. λ nimmt ab.

Wir behandeln einen anderen Fall. Wir lassen das Rechteck fest und betrachten die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2} + [-\tau k^2(\xi,\eta) + \lambda(\mu - \nu)]f = 0. \tag{22}$$

Es sei $k^2(\xi, \eta)$ überall positiv, $0 \leqq \tau \leqq 1$. Dann ist die zu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2} - \tau k^2(\xi,\eta)f = 0 \tag{23}$$

---

*) Eine ausführliche Darstellung davon siehe Bôcher l. c. S. 120, das dort Gebrachte wird als bekannt vorausgesetzt.

**) Das letztere siehe Bôcher S. 128.

gehörige Greensche Funktion, die bekanntlich in diesem Falle immer existiert, eine analytische Funktion von τ, was man wie oben vermittelst der Theorie der Integralgleichungen leicht zeigt, und es folgt dasselbe für die Eigenwerte λ und die dazu gehörigen Eigenfunktionen. Wir setzen $\tau = \tau_0 + \alpha$ und es sei $\alpha > 0$; ferner sei

$$\lambda = \lambda_0 + \alpha^{\varrho}\lambda_2 + \cdots, \quad u_1 = u_0 + \alpha^{\sigma} u_2 + \cdots, \tag{24}$$

wobei u_0 die zu einem beliebigen Wertepaar λ_0 und τ_0, u_1 die zu λ und τ gehörige Eigenfunktion von (22) ist. Dann folgt:

$$\alpha \int k^2(\xi\eta) u_0^2 d\xi d\eta - \alpha^{\varrho}\lambda_2 \int (\mu - \nu) u_0^2 d\xi d\eta = 0, \tag{25}$$

also ist $\varrho = 1$; $\lambda_2 > 0$. Wir haben also den für die Verwertung der im nächsten Paragraphen eingeführten Normalgleichung fundamentalen Satz:

I. *Wenn in der Differentialgleichung*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + [-\tau k^2(\xi, \eta) + \lambda(\mu - \nu)] f = 0 \tag{22}$$

das 1. *Glied in der eckigen Klammer verkleinert wird, wächst* λ.

Wir beweisen noch einen andern Satz. Sei

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \lambda k_\alpha(\xi\eta) f = 0, \tag{26}$$

wobei $k_\alpha(\xi, \eta)$ eine Funktion ist, die immer positiv sein soll und regulär in bezug auf α, sowie auch der Kürze wegen in bezug auf ξ und η. Sei $\gamma(\xi, \eta; \xi^*\eta^*)$ die Greensche Funktion für $\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = 0$, so ist die zu unserer Gleichung gehörige Integralgleichung

$$F(\xi, \eta) = \varphi(\xi\eta) + \lambda \int \gamma(\xi, \eta; \xi^*\eta^*) k_\alpha(\xi^*\eta^*) \varphi(\xi^*, \eta^*) d\xi^* d\eta^*,$$

also ist der Kern eine analytische Funktion von α und dasselbe gilt von den Eigenwerten und den dazu gehörigen Eigenfunktionen. Es ist also

$$k_\alpha(\xi, \eta) = k_0(\xi\eta) + \alpha k_1(\xi\eta) + \cdots,$$
$$\lambda = \lambda_0 + \alpha^{\varrho}\lambda_1 + \cdots; \quad u_1 = u_0 + \alpha^{\sigma} u_2 + \cdots,$$

wenn u_0 die zu λ_0 und k_0, u_1 die zu λ und k_α gehörige Eigenfunktion von (26) ist, und wir finden:

$$\alpha^{\varrho}\lambda_1 \int u_0^2 k_0(\xi\eta) d\xi d\eta + \alpha\lambda \int u_0^2 k_1(\xi\eta) d\xi d\eta = 0.$$

Ist nun überall $k_1(\xi, \eta) > 0$, so folgt, da $\lambda > 0$ ist, daß $\lambda_1 < 0$ ist. Wir haben also den Satz:

II. *Wird in der Differentialgleichung:*

$$(26) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \lambda k_\alpha(\xi\eta) f = 0$$

$k_\alpha(\xi, \eta)$ *vergrößert, so nimmt* λ *ab.*

§ 4.

Aufstellung einer Normalform, auf welche die vorkommenden Differentialgleichungen zurückgeführt werden können.

Wir gehen jetzt zu der Untersuchung der Differentialgleichung über:

$$(27) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \lambda \mu f = 0.$$

Wir versuchen, diese Gleichung durch Funktionen zu integrieren, die die Form $u(\xi)v(\eta)$ haben. Wir finden dann:

$$(28) \qquad \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} + (\lambda\mu + B)u(\xi) = 0.$$

$$(29) \qquad \frac{\partial^2 v(\eta)}{\partial \eta^2} - Bv(\eta) = 0.$$

Als Randbedingungen nehmen wir wieder die des Verschwindens auf dem Rande. Die Eigenfunktionen von (29) lassen sich dann sofort als einfache trigonometrische Funktionen angeben, die Eigenwerte B sind dadurch völlig bestimmt und zwar so, daß man in (28) zu jedem Eigenwerte B von (29) λ auf unendlich viele Weisen so bestimmen kann, daß man Eigenlösungen von (28) erhält.

Sei nun $f(\mu, \nu)$ eine Funktion, die der Einfachheit halber als beliebig oft nach μ und ν differenzierbar angenommen wird. Dann ist

$$(30) \qquad f(\mu, \nu) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n(\eta);$$

wobei

$$(31) \qquad a_n = \int f(\mu, \nu) v_n(\eta) d\eta;$$

a_n ist also noch abhängig von μ und nach den Voraussetzungen über $f(\mu, \nu)$ in eine Reihe*) nach Eigenfunktionen von (28) entwickelbar, wenn man in (28) B durch B_n ersetzt. Wir finden dann:

$$(32) \qquad f(\mu, \nu) = \sum_n \sum_m \int f(\mu, \nu) v_n(\eta) \mu u_{m,n}(\xi) d\xi d\eta \cdot v_n(\eta) u_{m,n}(\xi),$$

eine Reihe, die absolut und gleichmäßig konvergiert und welche wir

*) Hilbert l. c. S. 226.

also beliebig umordnen können. Da $v_n(\eta)u_{m,n}(\xi)$ auch Eigenfunktionen von (27) sind, da ferner nach dem in Fourierscher Weise gebildeten Koeffizientengesetze gleichmäßig konvergierende Nullentwicklungen unmöglich sind, so folgt noch bei geeigneter Spezialisierung von $f(\mu, \nu)$, daß (27) überhaupt keine wesentlich anderen Eigenfunktionen haben kann. Es folgt also der Satz:

III. *Alle Eigenfunktionen der Normalgleichung*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \lambda \mu f = 0 \tag{27}$$

lassen sich durch das Oszillationstheorem bestimmen.

Wir können aber jetzt leicht diesen Satz auf die Eigenfunktionen der Gleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \lambda(\mu - \nu) f = 0 \tag{33}$$

übertragen. In der Tat, wir setzen $\mu - \nu = \mu + a - \nu - a$; und führen den Parameter σ ein, so daß wir erhalten:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \lambda(\mu + a - \sigma(\nu + a))f = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \lambda(\mu' - \sigma\nu')f. \tag{34}$$

Wir richten a so ein, daß $\nu + a > 0$; dann nehmen nach dem II. Satze des § 3 die λ, welche immer reell und größer als Null sind, mit wachsendem σ zu; ein für $\sigma = 0$ unendlicher Eigenwert ist also auch für $\sigma = 1$ unendlich; (33) kann also keine anderen Eigenfunktionen haben, als die durch das Oszillationstheorem gelieferten.

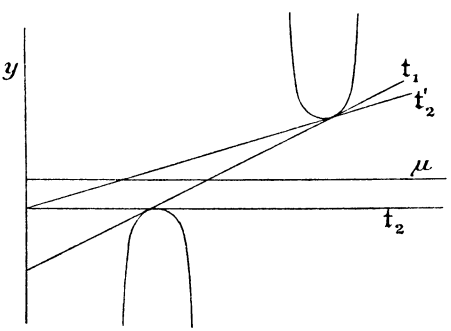


Fig. 3.

Von (33) gehen wir schließlich über auf:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + [-\varrho(\mu^3 - \nu^3) + \lambda(\mu - \nu)] f = 0. \tag{35}$$

Nach Satz I des § 3 nimmt λ mit wachsendem ϱ zu und wir haben den grundlegenden Satz:

IV. *Alle Eigenfunktionen der Differentialgleichung:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + [-\varrho(\mu^3 - \nu^3) + \lambda(\mu - \nu)] f = 0 \tag{35}$$

lassen sich durch das Kleinsche Oszillationstheorem bestimmen.

Wir wollen jetzt noch die verschiedenen oben erwähnten *Oszillationstheoreme durch Zeichnungen erörtern.* In Fig. 3 ist t_1 die sich aus dem Kleinschen Oszillationstheorem für $\sigma = 1$ zu (34) ergebende gemeinsame Tangente der beiden Kurven. Für $\sigma < 1$ erhält man jedoch 2 verschiedene Tangenten an beide Kurven, die sich auf der y-Achse schneiden, für $\sigma = 0$ t_2 und t'_2. Fig 4 entspricht dem vorher vermiedenen Falle $\mu > 0$, $\nu < 0$. Bewegt man die y-Achse nach rechts, so zeigt Fig. 5, daß man statt der einen Tangente t'_2 zwei Tangenten t'_2 und t''_2 erhält, also statt des Tangentenpaares t_2, t'_2 zwei Paare t_2, t'_2, und t_2, t''_2. Das bedeutet einen Gewinn von Eigenwerten. Fig. 5 führt bei der analytischen Untersuchung auf die von Herrn Professor Hilbert in seinen Vorlesungen behandelten Integralgleichungen 3. Art. Alle diese Fälle bestätigen unsere Sätze über die Eigenwerte.

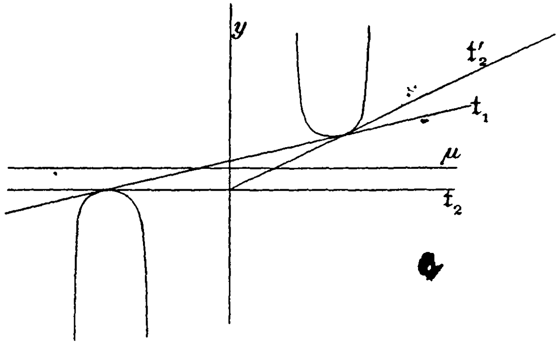


Fig. 4.

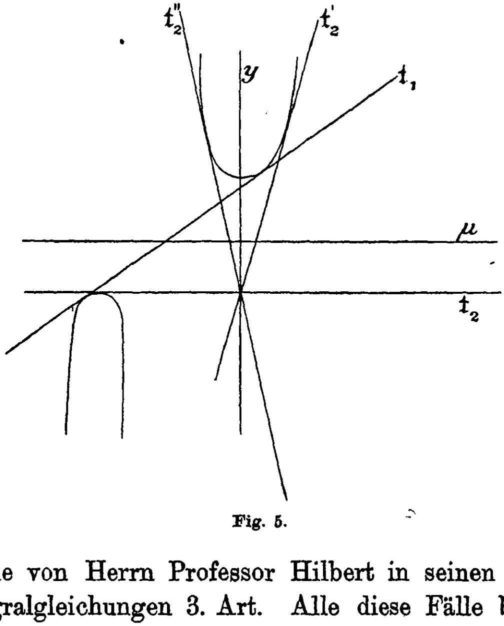


Fig. 5.

§ 5.

Die Integration der Potentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ für ein von sechs konfokalen Flächen 2. Ordnung begrenztes Gebiet. Ausdehnung auf Zyklidensechsflache.

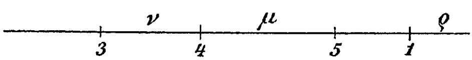
Wir haben jetzt nur noch das in der Literatur gegebene Formelmaterial für unser Problem, welches von Herrn Prof. Klein*) in dem in der Einleitung auseinandergesetzten Sinne ausführlich behandelt wurde, zusammenzustellen und umzuformen, um die Sätze des § 4 anwenden zu können.

Es sei in einem rechtwinkligen Koordinatensysteme:

$$(36)\qquad \begin{aligned}
&\frac{x^2}{\frac{1}{\varrho-e_1}-\frac{1}{e_3-e_1}}+\frac{y^2}{\frac{1}{\varrho-e_1}-\frac{1}{e_4-e_1}}+\frac{z^2}{\frac{1}{\varrho-e_1}-\frac{1}{e_5-e_1}}=1,\\
&\frac{-x^2}{\frac{1}{e_3-e_1}-\frac{1}{\mu-e_1}}-\frac{y^2}{\frac{1}{e_4-e_1}-\frac{1}{\mu-e_1}}+\frac{z^2}{\frac{1}{\mu-e_1}-\frac{1}{e_5-e_1}}=1,\\
&\frac{-x^2}{\frac{1}{e_3-e_1}-\frac{1}{\nu-e_1}}+\frac{y^2}{\frac{1}{\nu-e_1}-\frac{1}{e_4-e_1}}+\frac{z^2}{\frac{1}{\nu-e_1}-\frac{1}{e_5-e_1}}=1,
\end{aligned}$$

wobei wir nebenstehendes Schema zugrunde legen, in welchem die Zahlen die Indizes der e bedeuten.

I



Statt der Potentialfunktion führt man die Potentialform ein:

$$(37)\qquad V(\mu,\nu,\varrho)=\sqrt[4]{(e_1-\mu)(e_1-\nu)(\varrho-e_1)}\;\psi(\mu,\nu,\varrho).$$

Setzt man nun

$$(38)\qquad \begin{aligned}
d\xi&=\frac{d\mu}{2\sqrt{(e_1-\mu)^2(e_5-\mu)(\mu-e_4)(\mu-e_3)}};\\
d\eta&=\frac{d\nu}{2\sqrt{(e_1-\nu)^2(e_5-\nu)(e_4-\nu)(\nu-e_3)}};\\
d\zeta&=\frac{d\varrho}{2\sqrt{(\varrho-e_1)^2(\varrho-e_5)(\varrho-e_4)(\varrho-e_3)}};\\
d\mathrm{t}&=\frac{d\tau}{2\sqrt{(\tau-e_1)^2(\tau-e_3)(\tau-e_4)(\tau-e_5)}},
\end{aligned}$$

*) Klein, Annalen Bd. 18. Unsere Bezeichnung ist analog der von Bôcher für das Zyklidensechsflach benützten, das in der allgemeinen Theorie auftretende e_2 fällt hier mit e_1 zusammen, welches doppelt zählt.

so geht die Potentialgleichung über in

$$(39)\quad \begin{aligned}&(\varrho-\nu)\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+(\mu-\varrho)\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}+(\nu-\mu)\frac{\partial^2\psi}{\partial\zeta^2}\\&+(\mu-\nu)(\nu-\varrho)(\varrho-\mu)\left[\frac{5}{4}(\mu+\nu+\varrho)-\frac{3}{4}\Sigma' e_i\right]\psi=0,\end{aligned}$$

wobei $\Sigma'(e_i)=2e_1+e_3+e_4+e_5$ ist.

Die Gleichung (39) bleibt bekanntlich unverändert, wenn man die zugrunde gelegte Fläche durch eine beliebige Kreisverwandtschaft transformiert.

Wir haben dann als Aufgabe, eine Potentialform zu bestimmen, welche auf fünf Flächen verschwindet, auf der sechsten vorgegebene Werte*) annimmt.

Wir zerlegen versuchsweise $\psi(\mu, \nu, \varrho)$ in Faktoren, $E(\mu)$, $E'(\nu)$, $E''(\varrho)$, wobei dann

$$(40)\qquad \frac{d^2E}{dt^2}=\left[-\frac{5}{4}\tau^3+\frac{3}{4}\Sigma'(e_i)\tau^2+A\tau+B\right]E,$$

wenn $\tau=\mu, \nu, \varrho$ ist.

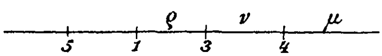
Sei die sechste Fläche $\varrho=\varrho_0$, so bilden wir die Gleichung:

$$(41)\quad \frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}+\left[-\frac{5}{4}(\mu^3-\nu^3)+\frac{3}{4}\Sigma' e_i(\mu^2-\nu^2)+A(\mu-\nu)\right]f=0,$$

welche durch $E(\mu)\cdot E'(\nu)$ befriedigt wird. Setzen wir, was immer erlaubt ist, $\Sigma e_i'=0$, so hat unsere Gleichung die Form (35) und die $E(\mu)\cdot E'(\nu)$ erschöpfen alle Eigenfunktionen von (41). Man kann also jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $f(\mu, \nu)$, welche die Randbedingungen erfüllt, in eine Reihe nach Laméschen Produkten entwickeln.

Um dieses Resultat auf die anderen Fälle ausdehnen zu können, ist wesentlich, daß auch hier die ξ entsprechende Größe die Form it, die η entsprechende die Form t hat. Anderenfalls könnte man sich wohl dadurch helfen, daß man B das eine Mal durch $-B$ ersetzt. Allein wir können die obige Forderung immer erreichen auf Grund folgenden Satzes.**) Unsere Flächenschar geht, abgesehen von einer Kreisverwandtschaft, in sich über, wenn man statt τ $\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}$ statt e_i $\frac{\alpha e_i+\beta}{\gamma e_i+\delta}$ setzt. Unter Zugrundelegung dieses Satzes wählen wir für das zweischalige Hyperboloid das Schema:

II

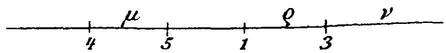


*) Auf den Fall, daß die vorgegebenen Werte auf dem Rande verschwinden, läßt sich der allgemeine Fall durch wiederholte Anwendung des Verfahrens bringen.

**) Klein bei Bôcher, S. 58.

wobei die μ-Schar zweischalige Hyperboloide, die ν-Schar einschalige Hyperboloide, die ϱ-Schar Ellipsoide darstellt. Um die einschaligen Hyperboloide auszuzeichnen, wählen wir das Schema:

III



Bei dem Zyklidensechsflach geht die Untersuchung analog, man hat nur statt des doppelt zu zählenden e_1 je einfach zählend e_1 und e_2 einzuführen, die auch konjugiert imaginär sein können. Für alle diese Fälle gilt also der Satz: *Sei $f(\mu, \nu)$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, welche auf dem Rande des Rechtecks verschwindet. Das Rechteck liege auf der Fläche $\varrho = r_2$. Dann konvergiert die Reihe:*

$$f(\mu, \nu) = \sum_1^\infty {}^m \sum_1^\infty {}^n A_{m,n} E'''_{m,n}(r_2) E'_{m,n}(\mu) E''_{m,n}(\nu),$$

absolut und gleichmäßig, wobei

$$(42) \qquad B_{m,n} = \frac{\int\int (\mu - \nu) f(\mu, \nu) E'_{m,n}(\mu) E''_{m,n}(\nu) \, d\xi \, d\eta}{\int\int (\mu - \nu) \left[E'_{m,n}(\mu) E''_{m,n}(\nu)\right]^2 d\xi \, d\eta} = A_{m,n} E'''_{m,n}(r_2).$$

Wir bilden daraus die Reihe:

$$\psi = \sum_1^\infty {}^m \sum_1^\infty {}^n \frac{\int\int (\mu - \nu) f(\mu, \nu) E'_{m,n}(\mu) E''_{m,n}(\nu) \, d\xi \, d\eta}{E'''_{m,n}(r_2) \int\int (\mu - \nu) \left[E'_{m,n}(\mu) E''_{m.n}(\nu)\right]^2 d\xi \, d\eta} \cdot$$
$$E'_{m,n}(\mu) E''_{m,n}(\nu) E'''_{m,n}(\varrho).$$

Wir gehen nun vorübergehend zu der Potentialfunktion V zurück, indem wir die linke und rechte Seite mit einem Faktor multiplizieren, der im allgemeinen die Form*) hat:

$$\left(\frac{\sum_1^5 {}^i \frac{x_i}{R_i}}{\sqrt{\sum_1^5 {}^i e_i x_i^2}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

wobei wir uns das System so eingerichtet denken, daß der Faktor innerhalb des Gebietes einen endlichen Wert hat, der von Null verschieden ist. Es sind dann alle Bedingungen des Harnackschen Satzes**) erfüllt, und es folgt, daß die durch die Reihe dargestellte Funktion im Inneren der Potentialgeichung $\Delta V = 0$ genügt und gleichmäßig in die Randwerte übergeht. Analog verhält sich die Sache in den anderen fünf Einzelproblemen.

Augsburg, Juli 1905.

---

*) Vergl. wegen der Bezeichnung Bôcher, S. 146.

**) Berichte der Sächs. Ges. 1886.