Über aufeinander abwickelbare P-Flächen.

Von

B. Mlodziejowski in Moskau.

1.

In seinen Arbeiten über Differentialgeometrie*) beschäftigte sich Peterson eingehend mit einer Klasse von Flächen, denen nachher A. Voß (Mathematische Annalen 39) den Namen P-Flächen beilegte. Sie werden durch die Eigenschaft gekennzeichnet, ein konjugiertes Liniensystem zu besitzen, dessen Linien zugleich Berührungslinien der der Fläche umbeschriebenen Kegel und Zylinder sind. Solche Linien, längs deren eine Fläche von Kegeln oder Zylindern berührt wird, wollen wir nach Peterson *konische* resp. *zylindrische* Linien dieser Fläche nennen. Somit können wir die P-Flächen als diejenigen Flächen erklären, die ein konjugiertes System konischer oder zylindrischer Linien besitzen.

Nehmen wir die Parameter der beiden Linienfamilien dieses Systems als Gaußsche Koordinaten auf der P-Fläche an, so erhalten nach Peterson die Gleichungen dieser Fläche die Form

$$x = \frac{a+\alpha}{l+\lambda}, \quad y = \frac{b+\beta}{l+\lambda}, \quad z = \frac{c+\gamma}{l+\lambda}, \tag{1}$$

worin a, b, c, l Funktionen von u und $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ Funktionen von v sind. Die Spitzen der Kegel, die die Fläche längs der Linien $u = \text{const.}$ berühren, haben die Koordinaten

$$\frac{\frac{da}{du}}{\frac{dl}{du}}, \quad \frac{\frac{db}{du}}{\frac{dl}{du}}, \quad \frac{\frac{dc}{du}}{\frac{dl}{du}}.$$

Ebenso hat man für die Koordinaten der Spitzen der Berührungskegel längs der Linien $v = \text{const.}$ die Ausdrücke

*) Zeitschrift der Moskauer Mathematischen Gesellschaft, Bd. I, II und die Monographie „Über Kurven und Flächen" (Moskau u. Leipzig, 1868). Über Peterson s. Stäckel in Bibliotheca Mathematica, 3. Folge, Bd. II und meinen Aufsatz in den Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 2. sér., t. V.

$$\frac{\frac{d\alpha}{dv}}{\frac{d\lambda}{dv}}, \quad \frac{\frac{d\beta}{dv}}{\frac{d\lambda}{dv}}, \quad \frac{\frac{d\gamma}{dv}}{\frac{d\lambda}{dv}}.$$

Verschwinden $\frac{dl}{du}$ und $\frac{d\lambda}{dv}$ identisch oder für bestimmte Werte von u und v, so gehen die entsprechenden Kegel in Zylinder über, deren Erzeugende die Richtungen $\frac{da}{du} : \frac{db}{du} : \frac{dc}{du}$ resp. $\frac{d\alpha}{dv} : \frac{d\beta}{dv} : \frac{d\gamma}{dv}$ haben. Alle diese Beziehungen sind in der erwähnten Arbeit von A. Voß angegeben. Beiläufig sei bemerkt, daß die Form der Gl. (1) die geometrisch evidente Tatsache bestätigt, daß die Klasse der P-Flächen gegenüber den kollinearen Transformationen des Raumes invariant ist.

Es ist merkwürdig, daß fast alle bedeutenden Ergebnisse, zu welchen Peterson auf dem Gebiete der Theorie der Biegung der Flächen gelangte, sich auf die Biegungen von P-Flächen beziehen. Aus einer Stelle seiner ersten russischen Abhandlung läßt sich schließen, daß Peterson allgemeine Methoden für das Auffinden solcher Biegungen besaß, und daß diese Methoden in Verbindung mit seinen allgemeineren Untersuchungen über konforme Abbildung stehen; leider sind die bezüglichen Untersuchungen Petersons unveröffentlicht geblieben.

Bei meinen Untersuchungen über die geometrischen Arbeiten Petersons ist es mir gelungen, die Frage nach den aufeinander abwickelbaren P-Flächen vollständig zu beantworten. Da ich aber von der konformen Abbildung keinen Gebrauch mache, so vermute ich, daß meine Methode mit der Petersonschen nicht identisch ist. Ich will hier die von mir erhaltenen Resultate kurz darlegen, als Auszug aus meiner in der „Zeitschrift der Moskauer Mathematischen Gesellschaft", Bd. 24 veröffentlichten Arbeit.

2.

Die acht Funktionen $a, \cdots, \lambda$, die in den Gl. (1) auftreten, lassen Veränderungen zu, bei welchen höchstens die Lage der entsprechenden P-Fläche, nicht aber ihre Form sich ändert. Wir können nämlich alle acht Funktionen mit einer Konstanten multiplizieren; dann können wir zu jeder Funktion, z. B. zu a, eine beliebige Konstante hinzuzufügen und zugleich dieselbe Konstante von der entsprechenden Funktion α abziehen. Diese beiden Transformationen sind ohne Einfluß weder auf die Form der P-Fläche, noch auf ihre Lage.

Übt man ferner zwei gleiche orthogonale Substitutionen mit konstanten Parametern auf a, b, c und α, β, γ aus, so entspricht das einer Drehung der Fläche um den Koordinatenanfang, eventuell verbunden mit einer Spiegelung an demselben. Fügt man endlich zu den beiden Funktionen eines Zählers, z. B. a und α, die Glieder des Nenners l und λ, multipliziert mit einer Konstanten k hinzu, so entspricht das einer Verschiebung der Fläche parallel der λ-Achse um die Länge k.

Bei der Lösung der Frage nach den Biegungen einer Fläche dürfen wir die verschiedenen Lagen dieser Fläche als untereinander identisch ansehen. Daher werden wir in die Gleichungen einer P-Fläche alle die Vereinfachungen einführen können, die durch die hier aufgezählten Transformationen erreichbar sind.

3.

Es ist leicht einzusehen, wie sich eine P-Fläche gestaltet, wenn einige der in (1) auftretenden Funktionen sich in Konstanten verwandeln. Sind Zähler und Nenner in (1) durch eine homogene lineare Relation mit konstanten Koeffizienten verbunden, so geht die P-Fläche in eine Ebene über; das tritt speziell ein, wenn einer der Zähler identisch verschwindet. Dieser Fall soll von unseren Betrachtungen ausgeschlossen werden. Wenn ferner eine der Funktionen, z. B. a, zu einer Konstanten wird, so können wir diese Konstante zu α hinzufügen und a gleich Null setzen, so daß wir allen Funktionen in (1), die konstant sind, den Wert Null beilegen werden.

Unter den P-Flächen können auch abwickelbare Linienflächen vorkommen und zwar nur Zylinder und Kegel. Nehmen wir die geradlinigen Erzeugenden einer solchen Fläche als Linien $v =$ const. und wählen im ersten Falle die z-Achse parallel den Erzeugenden des Zylinders, so verschwinden a, b, l; ebenso wenn im zweiten Falle der Koordinatenanfang in die Spitze des Kegels verlegt wird, verschwinden a, b, c. Führen wir eine Koordinatentransformation aus, so sehen wir, daß (1) eine abwickelbare P-Fläche darstellt, wenn zwischen a, b, c, l oder α, β, γ, λ drei lineare homogene Relationen bestehen. Da die Biegungen der abwickelbaren Flächen wohlbekannt sind, so werden wir diesen Fall von unserer Betrachtung ausschließen. Wir wollen daher im folgenden voraussetzen, daß von den acht Funktionen in (1) höchstens nur je zwei Funktionen desselben Arguments verschwinden, wobei außerdem zwei zusammengehörige Funktionen, wie a und α, l und λ nicht gleichzeitig verschwinden dürfen.

4.

Da auf einer P-Fläche die Linien (u) und (v) ein konjugiertes System bilden, so genügen die Ausdrücke für x, y, z in (1) der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} = \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \vartheta}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \vartheta}{\partial v}. \tag{2}$$

Eine direkte Berechnung aus (1) liefert

$$\left\{\begin{matrix}1\,2\\1\end{matrix}\right\} = -\frac{\partial \log (l+\lambda)}{\partial v}, \quad \left\{\begin{matrix}1\,2\\2\end{matrix}\right\} = -\frac{\partial \log (l+\lambda)}{\partial u}, \tag{3}$$

woraus beiläufig folgt, daß Gl. (2) für die P-Flächen gleiche Invarianten hat.

Ersetzen wir in (3) die Christoffelschen Symbole durch ihre Ausdrücke in den Koeffizienten des Linienelements der P-Fläche, so bekommen wir nach einer einfachen Rechnung

$$\frac{\partial}{\partial v}[E(l+\lambda)^2] + 2F(l+\lambda)\frac{dl}{du} = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial u}[G(l+\lambda)^2] + 2F(l+\lambda)\frac{d\lambda}{dv} = 0.$$

Daraus folgt, daß E, F, G in der Form dargestellt werden können

$$E = \frac{\partial (l+\lambda)^{-1}}{\partial u}\frac{\partial N}{\partial u}, \quad G = \frac{\partial (l+\lambda)^{-1}}{\partial v}\frac{\partial N}{\partial v}, \quad F = \frac{1}{2}(l+\lambda)^{-1}\frac{\partial^2 N}{\partial u\,\partial v}, \tag{4}$$

wo N eine Funktion von u, v ist, die sich aus (1) leicht bestimmen läßt. Wir haben nämlich für eine P-Fläche

$$\begin{aligned} E &= \frac{\frac{dl}{\partial u}}{(l+\lambda)^2}\left[\frac{\sum\left(\frac{da}{du}\right)^2}{\frac{dl}{du}} - \frac{\partial}{\partial u}\frac{\sum(a+\alpha)^2}{l+\lambda}\right], \\ G &= \frac{\frac{d\lambda}{dv}}{(l+\lambda)^2}\left[\frac{\sum\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2}{\frac{d\lambda}{dv}} - \frac{\partial}{\partial v}\frac{\sum(a+\alpha)^2}{l+\lambda}\right], \\ F &= \frac{1}{2(l+\lambda)}\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\frac{\sum(a+\alpha)^2}{l+\lambda}, \end{aligned} \tag{5}$$

wobei die Summenzeichen sich auf die drei Koordinaten erstrecken. Aus der Vergleichung dieser Formeln mit den vorangehenden kommt

$$N = \frac{\sum(a+\alpha)^2}{l+\lambda} - \int\left[\frac{\sum\left(\frac{da}{du}\right)^2}{\frac{dl}{du}}du + \frac{\sum\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2}{\frac{d\lambda}{dv}}dv\right]. \tag{6}$$

Die Integrationskonstante ist hier ohne Bedeutung, da sie aus den Formeln (4) wegfällt.

Die Formeln (4)—(6) haben keinen Sinn, wenn l oder λ zu Konstanten werden. Wenn wir jedoch diesen Fall als einen Grenzfall betrachten, so sehen wir, daß die Formeln (5) auch hier bei dem Grenzübergange bestimmte Ausdrücke liefern, die mit den für diesen Fall direkt berechneten selbstverständlich zusammenfallen.

5.

Wir gehen nunmehr zur Untersuchung über, *ob eine P-Fläche sich in der Weise verbiegen läßt, daß das konjugierte System konischer Linien* (u), (v) *nach dem Verbiegen konjugiert bleibt.* Solche konjugierten Systeme, die auf zwei aufeinander abwickelbaren Flächen sich gegenseitig entsprechen, heißen nach Peterson die *Basis* der Biegung.

Es ist leicht einzusehen, daß, wenn bei einer Biegung der P-Fläche das konjugierte konische System (u), (v) konjugiert bleibt, die Linien (u), (v) notwendig konisch resp. zylindrisch bleiben. In der Tat behält Gl. (2) für alle aufeinander abwickelbaren Flächen dieselbe Form, da die Symbole $\left\{ {12 \atop 1} \right\}$, $\left\{ {12 \atop 2} \right\}$ nur von den Koeffizienten des Linienelements abhängen; ersetzt man diese Symbole durch ihre Werte (3), so läßt sich (2) auf die Form bringen

$$\frac{\partial^2[\vartheta(l+\lambda)]}{\partial u \partial v} = 0.$$

Hieraus folgt, daß die Gleichungen einer auf die Fläche (1) mit der Basis (u), (v) abwickelbaren Fläche folgende Form haben müssen

$$(1') \qquad x = \frac{a' + \alpha'}{l+\lambda}, \quad y = \frac{b' + \beta'}{l+\lambda}, \quad z = \frac{c' + \gamma'}{l+\lambda},$$

wobei a', b', c' neue Funktionen von u, α', β', γ' solche von v sind. Das sind aber Gleichungen einer neuen P-Fläche, auf der die Linien (u), (v) wieder konisch oder zylindrisch bleiben. Soll also eine P-Fläche derart verbogen werden, daß ihr konjugiertes System konischer Linien zur Basis der Biegung werde, so kann diese ihre Biegung nur eine P-Fläche sein.

6.

Untersuchen wir, unter welchen Bedingungen (1) und (1′) zwei aufeinander abwickelbare P-Flächen darstellen. Zuvörderst bemerken wir, daß in diesen Gleichungen derselbe Nenner $l + \lambda$ auftritt. Wir bilden dann die Koeffizienten E', F', G' des Linienelements der Fläche (1′)

$$(5') \qquad \begin{aligned} E' &= \frac{\frac{dl}{du}}{(l+\lambda)^2}\left[\frac{\sum\left(\frac{da'}{du}\right)^2}{\frac{dl}{du}} - \frac{\partial}{\partial u}\frac{\sum(a'+\alpha')^2}{l+\lambda}\right], \\ G' &= \frac{\frac{d\lambda}{dv}}{(l+\lambda)^2}\left[\frac{\sum\left(\frac{d\alpha'}{dv}\right)^2}{\frac{d\lambda}{dv}} - \frac{\partial}{\partial v}\frac{\sum(a'+\alpha')^2}{l+\lambda}\right], \\ F' &= \frac{1}{2(l+\lambda)}\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\frac{\sum(a'+\alpha')^2}{l+\lambda}. \end{aligned}$$

Aus der Vergleichung von (5′) mit (5) kommen wir zu den folgenden Bedingungen für die Abwickelbarkeit zweier P-Flächen auf konischer Basis:

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\sum(a+\alpha)^2-\sum(a'+\alpha')^2}{l+\lambda}=\frac{\sum\left(\frac{da}{du}\right)^2-\sum\left(\frac{da'}{du}\right)^2}{\frac{dl}{du}},$$

(7)
$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{\sum(a+\alpha)^2-\sum(a'+\alpha')^2}{l+\lambda}=\frac{\sum\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2-\sum\left(\frac{d\alpha'}{dv}\right)^2}{\frac{d\lambda}{dv}},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\frac{\sum(a+\alpha)^2-\sum(a'+\alpha')^2}{l+\lambda}=0.$$

Die letzte Gleichung braucht nicht berücksichtigt zu werden, da sie aus den beiden ersten folgt; wir wollen sie jedoch im folgenden beibehalten. Schreibt man sie in der Form

$$\frac{\partial}{\partial u\,\partial v}\frac{\sum x^2-\sum x'^2}{l+\lambda}=0,$$

so sieht man, daß sie aus dem bekannten Satze von Königs (Comptes Rendus, Bd. 116) folgt.

Wir wollen die dritte Gleichung (7) in der Form schreiben

(8) $$\Sigma(a+\alpha)^2-\Sigma(a'+\alpha')^2=(l+\lambda)(m+\mu),$$

wobei m eine Funktion von u, μ eine Funktion von v ist. Alsdann erhalten die beiden ersten Gleichungen die Gestalt

(9) $$\begin{aligned}\sum\left(\frac{da}{du}\right)^2-\sum\left(\frac{da'}{du}\right)^2&=\frac{dl}{du}\,\frac{dm}{du},\\ \sum\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2-\sum\left(\frac{d\alpha'}{dv}\right)^2&=\frac{d\lambda}{dv}\,\frac{d\mu}{dv}.\end{aligned}$$

Wir schließen hieraus:

Um zwei aufeinander abwickelbare P-Flächen zu finden, muß man acht Funktionen von u und ebenso viele Funktionen von v bestimmen, die den Gleichungen (8), (9) identisch genügen. Die Gleichungen (1), (1′) stellen dann die beiden Flächen dar.

Die Gleichungen (7) gelten nur unter der Bedingung, daß l und λ keine Konstanten sind. Jedoch behalten die Gleichungen (8) und (9) auch in diesem Falle ihre Gültigkeit; man kann sich davon entweder durch einen Grenzübergang oder durch direkte Rechnung überzeugen.

Die Gleichungen (8), (9) geben zu einer interessanten Bemerkung Anlaß. Da dieselben bei der Vertauschung von l mit m, λ mit μ unverändert bleiben, so können wir folgenden Satz aufstellen:

Sind zwei aufeinander abwickelbare P-Flächen gegeben, von denen die eine aus der anderen nicht durch Drehung um den Koordinatenanfang oder durch Spiegelung an demselben entstanden ist, so erhält man zwei im allgemeinen neue aufeinander abwickelbare P-Flächen, indem man in den Gleichungen der gegebenen Flächen den Nenner $l+\lambda$ durch $m+\mu$ ersetzt.

Die hinzugefügte Beschränkung ist nötig, damit $m+\mu$ nicht identisch verschwinde.

Übrigens überzeugt man sich durch eine einfache Rechnung, daß, wenn die beiden gegebenen P-Flächen zueinander kongruent oder symmetrisch sind, dasselbe auch für die beiden abgeleiteten Flächen eintritt. Entsteht dagegen das erste Flächenpaar durch eigentliche Biegung, so gilt dasselbe auch für das zweite Paar.

7.

Die Gleichungen (8), (9) können auf eine symmetrischere Form gebracht werden. Zu diesem Zwecke führen wir je zwei neue Funktionen von u resp. v mittels der Gleichungen

$$\begin{aligned} l &= n' + n, & m &= n' - n, \\ \lambda &= \nu' + \nu, & \mu &= \nu' - \nu. \end{aligned} \tag{10}$$

ein. Dann gehen die Gleichungen (8), (9) über in

$$\Sigma(a+\alpha)^2 + (n+\nu)^2 = \Sigma(a'+\alpha')^2 + (n'+\nu')^2,$$

$$\sum\left(\frac{da}{du}\right)^2 + \left(\frac{dn}{du}\right)^2 = \sum\left(\frac{da'}{du}\right)^2 + \left(\frac{dn'}{du}\right)^2,$$

$$\sum\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\nu}{dv}\right)^2 = \sum\left(\frac{d\alpha'}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\nu'}{dv}\right)^2,$$

oder kürzer, wenn wir die Summenzeichen beiderseits auf alle vier Glieder erstrecken, in

$$\Sigma(a+\alpha)^2 = \Sigma(a'+\alpha')^2, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \sum\left(\frac{da}{du}\right)^2 &= \sum\left(\frac{da'}{du}\right)^2, \\ \sum\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2 &= \sum\left(\frac{d\alpha'}{dv}\right)^2. \end{aligned} \tag{12}$$

Dies sind die Fundamentalgleichungen unseres Problems.

Hat man ein Paar aufeinander abwickelbarer P-Flächen, so entspricht demselben eine Lösung der Gleichungen (11), (12). Hat man aber umgekehrt eine Lösung dieser Gleichungen, so kann man daraus nicht nur ein einziges Paar, sondern unendlich viele Paare aufeinander abwickelbarer P-Flächen ableiten. In der Tat, bringen wir alle Glieder jeder dieser Gleichungen auf die linke Seite, so bekommen wir drei kogrediente 8-gliedrige quadratische Formen. Dieselben können durch unendlich viele lineare Substitutionen in sich selbst transformiert werden, wodurch neue Lösungen der Gleichungen (11), (12) entstehen, welche zu neuen Paaren aufeinander abwickelbarer P-Flächen führen.

Man soll jedoch nicht glauben, alle diese Flächenpaare seien von den ursprünglichen wesentlich verschieden. Wenn man z. B. das Vorzeichen eines der Glieder $(a + \alpha)$, $(b + \beta)$, $(c + \gamma)$ abändert, so entspricht dieser Substitution bloß die Spiegelung der ersten Fläche an einer der Koordinatenebenen. Anderen speziellen Substitutionen entsprechen Verschiebungen und Drehungen einer oder beider Flächen. Unwesentlich ist ferner eine lineare Transformation von $n + \nu$ und $n' + \nu'$ mit der Determinante $+ 1$, weil durch dieselbe die beiden aufeinander abwickelbaren P-Flächen durch zwei ihnen ähnliche ersetzt werden, indem der gemeinsame Nenner $l + \lambda$ nur einen konstanten Faktor erhält.

Dagegen gibt der Zeichenwechsel von $n + \nu$ oder $n' + \nu'$ im allgemeinen eine wesentliche Veränderung der P-Flächen, indem dadurch $l + \lambda$ mit $m + \mu$ vertauscht wird. Ebenso werden die Flächen wesentlich verändert durch solche Transformationen, bei denen die ersten drei Glieder der beiden Seiten, z. B. $a + \alpha$ und $a' + \alpha'$, beteiligt sind.

8.

Wir haben in § 3 gesehen, daß, wenn in (1) zwischen den Funktionen a, b, c, l oder α, β, γ, λ mehr als zwei lineare Relationen bestehen, die entsprechende P-Fläche eine abwickelbare Fläche ist. Wir wollen jetzt untersuchen, unter welchen Bedingungen derselbe Umstand bei den Gleichungen (11), (12) auftritt. Dazu ist notwendig, daß diese Gleichungen bei jeder linearen Substitution nur solche Funktionen $a \cdots l$, $\alpha \cdots \lambda$ liefern, die durch mehr als zwei lineare Relationen verbunden sind. Dieser Umstand tritt aber sicher ein, wenn zwischen den acht Funktionen einer Art mindestens sechs lineare Relationen stattfinden. Wir wollen z. B. voraussetzen, daß die acht Funktionen $a \cdots n$, $a' \cdots n'$ sechs linearen Gleichungen genügen. Wenn wir aus diesen Gleichungen sechs Funktionen durch die zwei übrigen ausdrücken und diese Ausdrücke in die erste Gleichung (12) eintragen, so bekommen wir eine homogene quadratische Relation zwischen den Ableitungen dieser beiden Funktionen. Diese quadratische Relation läßt sich in zwei lineare auflösen und liefert dann nach dem Integrieren eine siebente lineare Relation zwischen den beiden Funktionen. Somit lassen sich alle acht Funktionen von u durch eine von denselben ausdrücken, in welchem Falle, wie in § 3 gezeigt worden ist, die entsprechenden P-Flächen auf eine Ebene abwickelbar sind. Es zeigt sich sogar, daß dieser Umstand schon bei fünf Relationen zwischen den acht Funktionen desselben Arguments eintritt, doch ist es mir bisher nicht gelungen, davon einen allgemeinen Beweis zu erbringen. Wir wollen daher auch die Möglichkeit von fünf linearen Relationen voraussetzen.

Differentiieren wir (11) nach u und v, so kommt

$$\sum \frac{da}{du}\frac{d\alpha}{dv} = \sum \frac{da'}{du}\frac{d\alpha'}{dv}. \tag{13}$$

Erteilt man hier der Veränderlichen v verschiedene Werte, so entstehen zwischen den acht Ableitungen nach u, $\frac{da}{du}, \cdots \frac{dn'}{du}$, ebensoviele lineare Relationen; in derselben Weise entstehen lineare Relationen zwischen $\frac{d\alpha}{dv}, \cdots, \frac{d\nu'}{dv}$, wenn wir u einzelne Werte beilegen. Man überzeugt sich leicht, daß die Gesamtanzahl der unabhängigen Relationen beider Art gleich der Zahl der Glieder der vorstehenden Gleichung, d. h. gleich 8 ist. Da mehr als fünf Relationen einer Art sicher zu den auf die Ebene abwickelbaren P-Flächen führen, welche wir von unserer Betrachtung ausgeschlossen haben, so bleiben nur noch zwei Möglichkeiten übrig: Wir können entweder je vier Relationen zwischen den Funktionen von u und denen von v haben, oder drei Relationen der einen Art und fünf der anderen. Wegen der Gleichwertigkeit der beiden Parameter u und v können wir im letzteren Falle annehmen, daß die Funktionen von u durch drei, die von v durch fünf Relationen verbunden sind.

Wir wollen zuerst den Fall betrachten, daß die Anzahl der Relationen zwischen $\frac{da}{du} \cdots \frac{dn'}{du}$ gleich 4 ist. Wir schreiben dieselben in der Form

$$\begin{aligned} &p_1 \frac{da}{du} + q_1 \frac{db}{du} + r_1 \frac{dc}{du} + s_1 \frac{dn}{du} = p_1' \frac{da'}{du} + q_1' \frac{db'}{du} + r_1' \frac{dc'}{du} + s_1' \frac{dn'}{du}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &p_4 \frac{da}{du} + \cdots \qquad\qquad = p_4' \frac{da'}{du} + \cdots, \end{aligned} \tag{14}$$

mit den 32 konstanten Koeffizienten $p_1, \cdots, s_4'$.

Wir setzen vorläufig voraus, daß diese vier Gleichungen in bezug auf $\frac{da'}{du}, \frac{db'}{du}, \frac{dc'}{du}, \frac{dn'}{du}$ auflösbar sind. Betrachten wir dann die beiden quadratischen Formen

$$\sum \left(\frac{da}{du}\right)^2, \quad \sum \left(\frac{da'}{du}\right)^2,$$

und ersetzen in der zweiten die Ableitungen $\frac{da'}{du} \cdots$ durch ihre Ausdrücke in $\frac{da}{du}\cdots$ aus (14), so erhalten wir zwei definite Formen in den nämlichen Veränderlichen $\frac{da}{du}\cdots\frac{dn}{du}$. Diese beiden Formen können bekanntlich durch eine reelle lineare Substitution in Summen von Quadraten verwandelt werden, deren neue Argumente wir mit $\frac{dA}{du}$, $\frac{dB}{du}$, $\frac{dC}{du}$, $\frac{dN}{du}$ bezeichnen wollen. Alsdann verwandeln sich die beiden Summen in

$$\left(\frac{dA}{du}\right)^2+\left(\frac{dB}{du}\right)^2+\left(\frac{dC}{du}\right)^2+\left(\frac{dN}{du}\right)^2$$

und

$$h_1^2\left(\frac{dA}{du}\right)^2+h_2^2\left(\frac{dB}{du}\right)^2+h_3^2\left(\frac{dC}{du}\right)^2+h_4^2\left(\frac{dN}{du}\right)^2,$$

wobei alle h reelle endliche Zahlen sind. Setzen wir

$$(15)\qquad h_1\frac{dA}{du}=\frac{dA'}{du},\quad h_2\frac{dB}{du}=\frac{dB'}{du},\quad h_3\frac{dC}{du}=\frac{dC'}{du},\quad h_4\frac{dN}{du}=\frac{dN'}{du},$$

so nehmen die beiden Formen die Gestalt

$$\sum\left(\frac{dA}{du}\right)^2,\quad \sum\left(\frac{dA'}{du}\right)^2$$

an. Führen wir dieselbe Transformation in Gl. (11), (12) aus, behalten aber statt $A, A'\cdots$ die alten Bezeichnungen $a, a'\cdots$ bei, so ändern diese Gleichungen ihre Form nicht, da unsere Transformation die Quadratsummen auf den beiden Seiten in Quadratsummen überführt. Die Gleichungen (14) werden aber durch die nachstehenden ersetzt

$$(16)\qquad h_1\frac{da}{du}=\frac{da'}{du},\quad h_2\frac{db}{du}=\frac{db'}{du},\quad h_3\frac{dc}{du}=\frac{dc'}{du},\quad h_4\frac{dn}{du}=\frac{dn'}{du}.$$

Bisher hatten wir vorausgesetzt, daß Gl. (14) in bezug auf $\frac{da'}{du}\cdots\frac{dn'}{du}$ auflösbar ist. Sollte diese Bedingung in einzelnen Fällen nicht erfüllt sein, dann können wir die Koeffizienten von (14) etwas abändern und dann zu unserem Falle als zur Grenze übergehen. Man sieht leicht ein, daß bei diesem Grenzübergange unsere orthogonale Substitution nie unmöglich, sondern höchstens unbestimmt werden kann, in welchem Falle wir aus der unendlichen Menge möglicher Substitutionen eine beliebige auswählen können, um den linearen Relationen (14) die Form (16) zu geben. Der einzige Unterschied besteht darin, daß in diesem Falle einige von den Zahlen $h_1, \cdots, h_4$ unendlich oder unbestimmt werden, was übrigens für das Folgende gleichgültig ist. Wird z. B. in der Gleichung $h_1\frac{da}{du}=\frac{da'}{du}$ die Größe h_1 unendlich, so ist die Gleichung durch $\frac{da}{du}=0$ zu ersetzen; wird h_1 aber unbestimmt, so hat man die beiden Gleichungen $\frac{da}{du}=0$, $\frac{da'}{du}=0$.

Ist ferner die Anzahl der Gleichungen (14) bloß gleich 3, so können wir denselben eine beliebige vierte lineare Gleichung hinzufügen, die wir nach Ausführung der orthogonalen Substitution wieder fallen lassen.

9.

Wir können die Bedingungen (16) auf drei verschiedene Formen zurückführen. Betrachten wir eine Relation

$$h\frac{da}{du} = \frac{da'}{du}, \tag{17}$$

so sind drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der absolute Betrag von $h \gtreqless 1$ ist. Ist z. B. $|h| > 1$, so können wir in (11), (12) statt $(a + \alpha)$ und $(a' + \alpha')$ folgende Ausdrücke einsetzen

$$\frac{1}{\sqrt{h^2 - 1}}[h(a + \alpha) - (a' + \alpha')], \quad \frac{1}{\sqrt{h^2 - 1}}[(a + \alpha) - h(a' + \alpha')],$$

wodurch Gl. (11), (12) keine wesentliche Veränderung erleiden. Bezeichnen wir aber diese Ausdrücke wieder mit $(a + \alpha)$, $(a' + \alpha')$, so nimmt unsere Relation (17) die einfache Form

$$\frac{da}{du} = 0$$

an. Ebenso verwandelt sich (17) bei $|h| < 1$ in

$$\frac{da'}{du} = 0.$$

Ist endlich $|h| = 1$, so können wir immer $h = +1$ setzen, da wir in (11) nötigenfalls die Vorzeichen der einzelnen Glieder verändern können. Somit können die Relationen (16) zwischen den Ableitungen der acht Funktionen $a, \cdots, n'$ nach u immer auf die drei Formen zurückgeführt werden:

$$\frac{da}{du} = 0, \quad \frac{da'}{du} = 0, \quad \frac{da}{du} = \frac{da'}{du}. \tag{18}$$

Wir wollen nun voraussetzen, daß zwischen den Ableitungen der Funktionen $a, \cdots, n'$ tatsächlich eine gewisse Anzahl von Relationen von der Form (18) besteht. Führen wir diese in (13) ein, so bestehen keine weiteren linearen Beziehungen zwischen den übrig gebliebenen Ableitungen nach u; es müssen daher die Koeffizienten dieser Ableitungen identisch verschwinden. Untersuchen wir, welche Beziehungen zwischen den Ableitungen nach v daraus entstehen. Kommt irgend eine Ableitung nach u, z. B. $\frac{da}{du}$, in den Bedingungen (16) nicht vor, so bleibt sie auch in (13) bestehen und ihr Koeffizient muß verschwinden; wir haben somit

$$\frac{d\alpha}{dv} = 0.$$

Genügt dagegen a der Bedingung $\frac{d\,a}{d\,u} = 0$, so verschwindet diese Ableitung aus (13), und ihr Koeffizient $\frac{d\,a}{d\,v}$ in (13) bleibt frei. Sind endlich a und a' durch die Relation

$$\frac{d\,a}{d\,u} = \frac{d\,a'}{d\,u}$$

verbunden, und eliminieren wir mittels derselben aus (13) die Ableitung $\frac{d\,a'}{d\,u}$, so erhält $\frac{d\,a}{d\,u}$ den Koeffizienten $\frac{d\,\alpha}{d\,v} - \frac{d\,\alpha'}{d\,v}$ und es folgt

$$\frac{d\,\alpha}{d\,v} = \frac{d\,\alpha'}{d\,v}.$$

Folglich können die Beziehungen zwischen den Ableitungen nach v in dreifacher Form dargestellt werden:

$$\frac{d\,\alpha}{d\,v} = 0, \quad \frac{d\,\alpha'}{d\,v} = 0, \quad \frac{d\,\alpha}{d\,v} = \frac{d\,\alpha'}{d\,v}. \tag{19}$$

Von den Beziehungen (18), (19) zwischen den Ableitungen der Funktionen $a, \cdots, \nu'$ können wir zu den Beziehungen zwischen diesen Funktionen selbst übergehen. Aus

$$\frac{d\,a}{d\,u} = 0$$

folgt

$$a = k = \text{const.}$$

Da aber a in (11) nur in der Verbindung $a + \alpha$ auftritt, so können wir k zu α hinzufügen und setzen

$$a = 0. \tag{20}$$

Ebenso führt

$$\frac{d\,\alpha}{d\,v} = 0$$

zu

$$\alpha = 0, \tag{21}$$

wobei die beiden Beziehungen $a = 0$, $\alpha = 0$ niemals zusammen eintreten dürfen.

Bestehen endlich die beiden Relationen

$$\frac{d\,a}{d\,u} = \frac{d\,a'}{d\,u}, \quad \frac{d\,\alpha}{d\,v} = \frac{d\,\alpha'}{d\,v}, \tag{22}$$

die, wie wir oben gezeigt haben, immer gleichzeitig vorkommen, so ergeben dieselben

$$a + \alpha = a' + \alpha' + 2k,$$

wobei k eine Konstante ist.

Diese Gleichung kann durch zwei andere ersetzt werden

$$a + \alpha = \bar{a} + \bar{\alpha} + k, \quad a' + \alpha' = \bar{a} + \bar{\alpha} - k, \tag{23}$$

wo $\bar{a}$, $\bar{\alpha}$ zwei neue Funktionen von u resp. v bezeichnen. Setzen wir diese Ausdrücke in (11), (12) ein, so verschwinden die entsprechenden Glieder aus (12), während in (11) auf den beiden Seiten die Ausdrücke

$$2(\bar{a}+\bar{\alpha})k, \quad -2(\bar{a}+\bar{\alpha})k$$

bleiben. Ist $k=0$, so verschwinden auch diese. Ist aber k von Null verschieden, so können wir in (11) $k\bar{a}$, $k\bar{\alpha}$ durch $\bar{a}$, $\bar{\alpha}$ ersetzen, was dem Werte $k=1$ entsprechen würde. Somit kann man immer in (23) entweder $k=0$ oder $k=1$ setzen und es folgt aus (22) entweder

$$a+\alpha=\alpha'+\alpha'$$

oder

$$a+\alpha-1=a'+\alpha+1.$$

10.

Nunmehr sind wir imstande, alle Lösungen der Gleichungen (11), (12) *und damit alle aufeinander abwickelbaren P-Flächen anzugeben.* Wie wir sahen, können aus jeder Lösung dieser Gleichungen unendlich viele neue Lösungen abgeleitet werden mittels linearer Substitutionen, die diese Gleichungen in sich überführen. Diese Substitutionen setzen sich zusammen aus orthogonalen Substitutionen, welche auf jede Seite dieser Gleichungen ausgeübt werden können, und aus einer Substitution, durch welche Glieder der beiden Seiten miteinander verbunden werden. Wir können nämlich in (11), (12) die Ausdrücke

$$a+\alpha, \quad a'+\alpha'$$

durch

$$g(a+\alpha)+h(a'+\alpha'), \quad h(a+\alpha)+g(a'+\alpha') \tag{24}$$

ersetzen, wobei die Konstanten g, h durch die Bedingung

$$g^2-h^2=1$$

verbunden sind.

Alle Lösungen der Gleichungen (11), (12), die auseinander durch lineare Transformationen erhalten werden können, wollen wir zu einer Gruppe rechnen, und es genügt, aus jeder Gruppe nur eine Lösung zu finden, um alle übrigen zu haben. Jede Gruppe von Lösungen wird durch die Beschaffenheit der linearen Relationen charakterisiert, die nach § 8 zwischen den Funktionen in (11) stattfinden müssen. Durch geeignete lineare Transformationen können wir diese Relationen auf die Formen (20), (21), (23) bringen, und die Zahl der Relationen jeder Form ist es, die die verschiedenen Gruppen von Lösungen voneinander unterscheidet.

Die Untersuchung aller hier möglichen Fälle bietet keine Schwierigkeiten; wir wollen hier bloß ihr Endergebnis angeben. Es zeigt sich:

wenn wir nur solche P-Flächen haben wollen, die auf die Ebene nicht abwickelbar sind, so ist notwendig, daß zwischen den Funktionen von u und denen von v je vier lineare Relationen bestehen; von diesen darf höchstens ein Paar die Form (23) haben.

Es lassen sich daher alle Lösungen der Gleichungen (11), (12) in zwei Gruppen verteilen, je nachdem in der bezüglichen linearen Relation die Form (23) vorkommt oder nicht. Jede Gruppe zerfällt in Untergruppen, die sich durch die Verteilung der Relationen der Form (20), (21) zwischen den beiden Seiten von (11) unterscheiden. Es wird sich jedoch zeigen, daß diese Untergruppen sich voneinander nicht wesentlich unterscheiden, da sie durch lineare Substitutionen, allerdings mit imaginären Koeffizienten, ineinander übergehen.

11.

Wir wollen nun die erste Gruppe der Lösungen betrachten. Hier hat ein Paar von Relationen die Form (23); wir wollen dieselbe auf die Glieder $n + \nu$, $n' + \nu'$ beziehen und setzen

$$n + \nu - k = n' + \nu' + k = \bar{n} + \bar{\nu},$$

indem wir die Konstante k unbestimmt lassen, um auch den Fall $k = 0$ einbegreifen zu können. Die übrigen sechs Relationen verteilen sich auf die übrigen Glieder der Gleichung (11). Als erste Untergruppe betrachten wir die, bei der unter den drei Relationen von der Form (20) sich zwei auf die eine und eine auf die andere Seite der Gleichung (11) beziehen. Dann müssen die Relationen (21) sich umgekehrt verteilen. Somit haben wir in diesem Falle folgende Beziehungen

$$\begin{gathered} n + \nu = \bar{n} + \bar{\nu} + k, \quad n' + \nu' = \bar{n} + \bar{\nu} - k, \\ a' = 0, \quad b' = 0, \quad c = 0, \\ \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma' = 0. \end{gathered} \tag{I, 1}$$

Die Gleichungen (11), (12) verwandeln sich hier in

$$\begin{gathered} a^2 + b^2 + \gamma^2 + 4k(\bar{n} + \bar{\nu}) = \alpha'^2 + \beta'^2 + c'^2, \\ \left(\frac{da}{du}\right)^2 + \left(\frac{db}{du}\right)^2 = \left(\frac{dc'}{du}\right)^2, \\ \left(\frac{d\gamma}{dv}\right)^2 = \left(\frac{d\alpha'}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\beta'}{dv}\right)^2. \end{gathered} \tag{25}$$

Wählen wir hier für a, b, α', β' beliebige Funktionen, so werden aus den beiden letzten Gleichungen c', γ durch Quadraturen bestimmt, worauf sich aus der ersten Gleichung $\bar{n} + \bar{\nu}$ ergibt; den verschiedenen Werten der Konstante k entspricht hier eine Schar ähnlicher Flächen.

Beziehen sich alle drei Relationen von der Form (20) auf die eine Seite der Gleichung (11), so entsteht die zweite Untergruppe

$$\text{(I, 2)} \qquad \begin{gathered} n+\nu=\bar{n}+\bar{\nu}+k, \quad n'+\nu'=\bar{n}+\bar{\nu}-k, \\ a'=0, \quad b'=0, \quad c'=0, \\ \alpha=0, \quad \beta=0, \quad \gamma=0. \end{gathered}$$

Die Gleichungen (11), (12) nehmen hier die Form an

$$(26) \qquad \begin{gathered} a^2+b^2+c^2+4k(\bar{n}+\bar{\nu})=\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2, \\ \left(\frac{da}{du}\right)^2+\left(\frac{db}{du}\right)^2+\left(\frac{dc}{du}\right)^2=0, \\ \left(\frac{d\alpha'}{dv}\right)^2+\left(\frac{d\beta'}{dv}\right)^2+\left(\frac{d\gamma'}{dv}\right)^2=0. \end{gathered}$$

Es ist leicht zu sehen, daß dieser Fall in den vorhergehenden leicht transformiert werden kann. Ersetzen wir in (26) c, γ' durch ic', $i\gamma$ und bringen diese Glieder auf die anderen Seiten der Gleichungen, so erhalten wir (25); letztere Transformation ist aber ein Spezialfall von (24) für $g=0$, $h=-i$.

Es ist zu beachten, daß, obwohl die Gl. (26) nur imaginäre Lösungen zulassen, wir jedoch auch hier reelle P-Flächen erhalten können. Wir können nämlich u, v als konjugiert komplexe Veränderliche betrachten und a, b, c konjugiert zu $i\alpha'$, $i\beta'$, $i\gamma'$ wählen. Wenden wir dann auf alle Glieder von (26) außer $\bar{n}+\bar{\nu}$, die Transformation (24) mit $g=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $h=\frac{i}{\sqrt{2}}$ an, so verwandelt sich die erste dieser Gleichungen in

$$\begin{gathered} (a+i\alpha')^2+(b+i\beta')^2+(c+i\gamma')^2+8k(\bar{n}+\bar{\nu}) \\ =(ia+\alpha')^2+(ib+\beta')^2+(ic+\gamma')^2. \end{gathered}$$

Alle Glieder sind hier reell und können zur Bestimmung zweier reeller P-Flächen dienen.

Als Beispiel wollen wir setzen

$$\begin{array}{llll} a+\alpha=2\sin u, & b+\beta=2\cos u, & c+\gamma=2\,\mathfrak{Sin}\,v, & n+\nu=u^2+v^2+1, \\ a'+\alpha'=2\,\mathfrak{Cos}\,v, & b'+\beta'=2v, & c'+\gamma'=2u, & n'+\nu'=u^2+v^2-1, \end{array}$$

hier haben wir

$$\begin{gathered} a'=0, \quad b'=0, \quad c=0, \\ \alpha=0, \quad \beta=0, \quad \gamma'=0, \\ n+\nu=n'+\nu'+2, \end{gathered}$$

also den Fall (I, 1). Die Gleichungen (11), (12) werden identisch befriedigt, und wir haben nach (10)

$$l+\lambda=2(u^2+v^2), \quad m+\mu=-2.$$

Dann liefern (1), (1') zwei folgende aufeinander abwickelbare P-Flächen

$$x = \frac{\sin u}{u^2 + v^2}, \quad y = \frac{\cos u}{u^2 + v^2}, \quad z = \frac{\mathfrak{Sin}\, v}{u^2 + v^2},$$
$$x' = \frac{\mathfrak{Cof}\, v}{u^2 + v^2}, \quad y' = \frac{v}{u^2 + v^2}, \quad z' = \frac{u}{u^2 + v^2}.$$

Vertauschen wir $l + \lambda$ mit $m + \mu$ und multiplizieren mit -1, so bekommen wir ein anderes Flächenpaar

$$x = \sin u, \quad y = \cos u, \quad z = \mathfrak{Sin}\, v,$$
$$x' = \mathfrak{Cof}\, u, \quad y' = v, \quad z' = u.$$

Diese Gleichungen stellen zwei Zylinder dar. Wenden wir aber auf dieselben die Transformation (24) an, so bekommen wir zwei aufeinander abwickelbare Translationsflächen

$$x = \sin u, \quad y = g \cos u + hv, \quad z = \mathfrak{Sin}\, v,$$
$$x' = \mathfrak{Cof}\, v, \quad y' = h \cos u + gv, \quad z' = u,$$
$$g^2 - h^2 = 1.$$

12.

Wir wenden uns jetzt zu der zweiten Gruppe von Lösungen, bei der keine der linearen Relationen die Form (23) hat. Hier entstehen ebenfalls Untergruppen, die davon abhängen, wieviele Relationen von der Form (20) jeder Seite der Gleichung (11) entsprechen. Es können nämlich entweder jeder Seite je zwei Relationen entsprechen, oder einer Seite drei und der anderen eine, oder endlich können alle vier Relationen sich auf eine Seite beziehen. Das liefert folgende drei Untergruppen:

$$\text{(II, 1)} \qquad \begin{aligned} a' = 0, \quad b' = 0, \quad c = 0, \quad n = 0, \\ \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma' = 0, \quad \nu' = 0, \end{aligned}$$

Die Gleichungen (11), (12) ergeben hier

$$\text{(27)} \qquad \begin{aligned} a^2 + b^2 + \gamma^2 + \nu^2 &= \alpha'^2 + \beta'^2 + c'^2 + n'^2, \\ \left(\frac{da}{du}\right)^2 + \left(\frac{db}{du}\right)^2 &= \left(\frac{dc'}{du}\right)^2 + \left(\frac{dn'}{du}\right)^2, \\ \left(\frac{d\gamma}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\nu}{dv}\right)^2 &= \left(\frac{d\alpha'}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\beta'}{dv}\right)^2. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung zerfällt in zwei andere

$$\text{(28)} \qquad \begin{aligned} a^2 + b^2 + k &= c'^2 + n'^2, \\ \gamma^2 + \nu^2 &= \alpha'^2 + \beta'^2 + k, \end{aligned}$$

wobei k eine Konstante bezeichnet.

Differentiieren wir die erste Gleichung (28) und verbinden sie mit der zweiten Gleichung (27), so bekommen wir

$$(a^2+b^2+k)\left[\left(\frac{da}{du}\right)^2+\left(\frac{db}{du}\right)^2\right]-\left(a\frac{da}{du}+b\frac{db}{du}\right)^2$$
$$=(c'^2+n'^2)\left[\left(\frac{dc'}{du}\right)^2+\left(\frac{dn'}{du}\right)^2\right]-\left(c'\frac{dc'}{du}+n'\frac{dn'}{du}\right)^2,$$

oder

$$\left(n'\frac{dc'}{du}-c'\frac{dn'}{du}\right)^2=\left(b\frac{da}{du}-a\frac{db}{du}\right)^2+k\left[\left(\frac{da}{du}\right)^2+\left(\frac{db}{du}\right)^2\right].$$

Zieht man hier beiderseits die Quadratwurzel aus, dividiert durch die erste Gleichung (28) und integriert, so bekommt man

$$\operatorname{arctg}\frac{c'}{n'}=\int\frac{\sqrt{\left(b\frac{da}{du}-a\frac{db}{du}\right)^2+k\left[\left(\frac{da}{du}\right)^2+\left(\frac{db}{du}\right)^2\right]}}{a^2+b^2+k}\,du.$$

und ebenso

$$\operatorname{arctg}\frac{\alpha'}{\beta'}=\int\frac{\sqrt{\left(\nu\frac{d\gamma}{dv}-\gamma\frac{d\nu}{dv}\right)^2-k\left[\left(\frac{d\gamma}{dv}\right)^2+\left(\frac{d\nu}{dv}\right)^2\right]}}{\gamma^2+\nu^2-k}\,dv.$$

Diese Formeln, zusammen mit (28), drücken c', n', α', β' durch a, b, γ, ν aus. Die bei der Integration auftretenden Konstanten entsprechen orthogonalen Substitutionen in c', n' und α', β'.

Die beiden anderen Untergruppen sind die folgenden:

$$\text{(II, 2)}\qquad \begin{gathered} a'=0,\quad b'=0,\quad c'=0,\quad n=0,\\ \alpha=0,\quad \beta=0,\quad \gamma=0,\quad \nu'=0,\\ a^2+b^2+c^2+\nu^2=\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2+n'^2,\\ \left(\frac{da}{du}\right)^2+\left(\frac{db}{du}\right)^2+\left(\frac{dc}{du}\right)^2=\left(\frac{dn'}{du}\right)^2,\\ \left(\frac{d\alpha'}{dv}\right)^2+\left(\frac{d\beta'}{dv}\right)^2+\left(\frac{d\gamma'}{dv}\right)^2=\left(\frac{d\nu}{dv}\right)^2. \end{gathered}$$

$$\text{(II, 3)}\qquad \begin{gathered} a'=0,\quad b'=0,\quad c'=0,\quad n'=0,\\ \alpha=0,\quad \beta=0,\quad \gamma=0,\quad \nu=0,\\ a^2+b^2+c^2+n^2=\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2+\nu'^2,\\ \left(\frac{da}{du}\right)^2+\left(\frac{db}{du}\right)^2+\left(\frac{dc}{du}\right)^2+\left(\frac{dn}{du}\right)^2=0,\\ \left(\frac{d\alpha'}{dv}\right)^2+\left(\frac{d\beta'}{dv}\right)^2+\left(\frac{d\gamma'}{dv}\right)^2+\left(\frac{d\nu'}{dv}\right)^2=0, \end{gathered}$$

Diese beiden Untergruppen können aus der ersten (II, 1) durch dieselbe imaginäre Transformation abgeleitet werden, durch die wir (I, 2) aus (I, 1) erhalten haben. Obwohl in (II, 3) nur imaginäre Lösungen möglich sind, können wir auch hier reelle P-Flächen erhalten. Dazu müssen wir, ähnlich wie in (I, 2), u, v konjugiert imaginär nehmen und zugleich die Funktionen a, b, c, n konjugiert imaginär zu $i\alpha', i\beta', i\gamma', i\nu'$ wählen.

Als Beispiel nehmen wir

$$\begin{aligned} a + \alpha &= \mathfrak{Sin}\, ku, & b + \beta &= \sin kv, & c + \gamma &= \cos kv, & n + \nu &= k\,\mathfrak{Cos}\, u, \\ a' + \alpha' &= k\,\mathfrak{Sin}\, u, & b' + \beta' &= k \sin v, & c' + \gamma' &= \mathfrak{Cos}\, ku, & n' + \nu' &= k \cos v, \end{aligned}$$

wobei k eine Konstante ist.

Hier ist

$$\begin{aligned} b = 0, \quad c = 0, \quad b' = 0, \quad n' = 0, \\ \alpha = 0, \quad \nu = 0, \quad \alpha' = 0, \quad \gamma' = 0, \end{aligned}$$

was, abgesehen von der Bezeichnung, dem Falle (II, 1) entspricht. Man überzeugt sich, daß diese Werte den Gleichungen (11), (12) genügen. Berechnet man $l + \lambda$ aus (10), so bekommt man aus (1), (1′) die Gleichungen der beiden aufeinander abwickelbaren P-Flächen

$$\begin{aligned} x &= \frac{\mathfrak{Sin}\, ku}{\mathfrak{Cos}\, u + \cos v}, & y &= \frac{\sin kv}{\mathfrak{Cos}\, u + \cos v}, & z &= \frac{\cos kv}{\mathfrak{Cos}\, u + \cos v}, \\ x' &= \frac{k\,\mathfrak{Sin}\, u}{\mathfrak{Cos}\, u + \cos v}, & y' &= \frac{k \sin v}{\mathfrak{Cos}\, u + \cos v}, & z' &= \frac{\mathrm{ch}\, ku}{\mathfrak{Cos}\, u + \cos v}, \end{aligned} \tag{29}$$

wobei zur Vereinfachung alle Ausdrücke mit k multipliziert worden sind.

Üben wir auf $c + \gamma$, $c' + \gamma'$ die Transformation (24) aus, so entstehen allgemeinere Gleichungen, indem die Ausdrücke von z, z' die Form erhalten

$$\begin{gathered} z = \frac{h\,\mathfrak{Cos}\, ku + g \cos kv}{\mathfrak{Cos}\, u + \cos v}, \quad z' = \frac{g\,\mathfrak{Cos}\, ku + h \cos kv}{\mathfrak{Cos}\, u + \cos v}, \\ g^2 - h^2 = 1. \end{gathered} \tag{29'}$$

Diese Gleichungen sind von Peterson 1866 angegeben worden. Sie können augenscheinlich noch weiter verallgemeinert werden, wenn man die Transformation (24) auf die beiden übrigen Koordinatenpaare anwendet.

13.

Aus dem Vorhergehenden läßt sich schließen, daß im allgemeinen eine P-Fläche in eine andere von ihr wesentlich verschiedene P-Fläche nicht verbogen werden kann. In der Tat, ersetzt man n, n', ν, ν' durch ihre Ausdrücke (10), so folgt aus § 8, daß die acht Funktionen $a, a', b, b', c, c', l, m$ durch vier lineare Relationen und ebenso die acht übrigen Funktionen $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma', \lambda, \mu$ durch vier andere lineare Relationen verbunden sind. Durch eine entsprechende Veränderung der Lage der beiden P-Flächen in bezug auf den Koordinatenanfang kann man aber stets erreichen, daß die Funktionen l, m, λ, μ nicht mit den übrigen Funktionen linear verbunden seien. Tritt z. B. in einer linearen Relation die Summe $a + kl$ auf, so verschieben wir die erste Fläche parallel zur x-Achse um die Länge k. Dann muß man den Ausdruck $x = \frac{a + \alpha}{l + \lambda}$ durch den anderen

$$x = \frac{(a + kl) + (a + k\lambda)}{l + \lambda}$$

ersetzen. Somit kommt an die Stelle von a die Summe $a + kl$, und in unserer linearen Relation muß umgekehrt $a + kl$ durch a ersetzt werden. In dieser Weise kann l aus jeder linearen Relation entfernt werden, welche eine der Funktionen a, a', b, b', c, c' enthält. Ebenso überzeugt man sich, daß eine lineare Verbindung von m mit diesen sechs Funktionen vermieden werden kann. Differentiieren wir nämlich (8) nach u und v, so folgt ähnlich wie in § 8, daß, wenn a mit m linear verbunden ist, und diese lineare Gleichung die einzige ist, in der a und m zusammen auftreten, eine zweite lineare Relation vorhanden sein muß, die α mit λ verbindet. Aus der letzteren kann man aber λ wegschaffen mittels desselben Verfahrens, welches oben auf l angewandt wurde; dann wird auch m aus seiner Verbindung mit a verschwinden.

Da die Funktionen a, b, c, l im allgemeinen durch keine linearen Relationen verbunden sind, so lassen sich aus den vier linearen Relationen zwischen a, a', b, b', c, c', l, m die Funktionen a', b', c', m durch a, b, c, l ausdrücken, wobei nach dem Vorangehenden die Ausdrücke für a', b', c' nur a, b, c, nicht aber l erhalten. Setzen wir diese Ausdrücke in (9) ein und beachten, daß wir zwischen a, b, c, l keine spezielle Abhängigkeit voraussetzen, so folgt daraus, daß durch unsere Substitution $\sum \left(\frac{d a'}{d u}\right)^2$ in $\sum \left(\frac{d a}{d u}\right)^2$ übergeht. Diese Substitution entspricht folglich einer Drehung der ursprünglichen P-Fläche um den Koordinatenanfang, eventuell verbunden mit einer Spiegelung, so daß die zweite P-Fläche der Form nach von der ersten nicht verschieden ist. Nur solche P-Flächen können in andere P-Flächen verbogen werden, deren Gleichungen mit den Lösungen (I, 1) — (II, 3) in §§ 11, 12 in Verbindung stehen.

14.

Bisher hatten wir nach Paaren von aufeinander abwickelbaren P-Flächen gesucht. Wir wollen nun untersuchen, ob es solche P-Flächen gibt, die kontinuierlich in andere P-Flächen verbogen werden können unter der Bedingung, daß das Liniensystem (u, v) bei dem Verbiegen der Fläche ein konjugiertes System bleiben soll. Mit anderen Worten: wir fragen nach solchen *kontinuierlichen Scharen von aufeinander abwickelbaren P-Flächen, bei denen es konjugierte Liniensysteme gibt, die auf allen Flächen der Schar einander entsprechen.*

Es mögen die Gleichungen (1') eine solche Flächenschar darstellen. Dann müssen a', α', b', β', c', γ' Funktionen eines „Biegungsparameters" t sein, die wir in bezug auf t differentiierbar voraussetzen wollen. Einem speziellen Werte t_0 dieses Parameters entspricht eine bestimmte Fläche der Schar, die durch (1) dargestellt werden möge. Dann ist es zur Lösung unserer Aufgabe nötig, die Gleichungen (8), (9):

$$\Sigma(a+\alpha)^2 - \Sigma(a'+\alpha')^2 = (l+\lambda)(m+\mu), \tag{8}$$

$$\begin{gathered} \sum\left(\frac{da}{du}\right)^2 - \sum\left(\frac{da'}{du}\right)^2 = \frac{dl}{du}\cdot\frac{dm}{du}, \\ \sum\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2 - \sum\left(\frac{d\alpha'}{dv}\right)^2 = \frac{d\lambda}{dv}\cdot\frac{d\mu}{dv}, \end{gathered} \tag{9}$$

auf solche Weise zu lösen, daß die Funktionen a', α', b', β', c', γ', m, μ von t abhängig seien, nicht aber a, α, b, β, c, γ, l, λ. Da wir gesehen haben, daß l, m, λ, μ mit den übrigen Funktionen durch keine lineare Relationen verbunden sind, so sind nur folgende Arten von Relationen zwischen diesen übrigen Funktionen möglich:

$$\begin{gathered} 1)\ a = 0,\ a' = 0; \qquad 2)\ \alpha = 0,\ \alpha' = 0, \\ 3)\ a = h^{-1}a',\ \alpha = h\alpha'; \qquad 4)\ a + \alpha = a' + \alpha' + k, \end{gathered}$$

wobei h, k von t abhängen.

Setzen wir diese Relationen in (8), (9) ein, so ergibt eine einfache Untersuchung, auf die wir hier nicht eingehen wollen, daß unsere Aufgabe nur dreierlei Lösungen zuläßt. Es sind die folgenden:

$$a = a' = 0, \quad b = b' = 0, \quad \gamma = \gamma' = 0, \quad \lambda = \mu = 0. \tag{A}$$

Hier nehmen Gl. (8), (9) die Form an

$$\begin{gathered} \alpha^2 + \beta^2 + c^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 + c'^2 + lm, \\ \left(\frac{dc}{du}\right)^2 = \left(\frac{dc'}{du}\right)^2 + \frac{dl}{du}\cdot\frac{dm}{du}, \\ \left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dv}\right)^2 = \left(\frac{d\alpha'}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\beta'}{dv}\right)^2. \end{gathered}$$

Die erste Gleichung zerfällt in die beiden anderen:

$$\begin{gathered} c^2 = c'^2 + lm + h, \\ \alpha^2 + \beta^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 - h, \end{gathered}$$

wobei h eine Konstante ist. Verfährt man hier wie in (II, 1) § 12, so bekommt man

$$c' = l\int\sqrt{\left[\frac{d}{du}\left(\frac{c}{l}\right)\right]^2 - h\left[\frac{d}{du}\,\frac{1}{l}\right]^2}\,du,$$

$$\operatorname{arctg}\frac{\beta'}{\alpha'} = \int\frac{\sqrt{\left(\alpha\,\frac{d\beta}{dv} - \beta\,\frac{d\alpha}{dv}\right)^2 + h\left[\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dv}\right)^2\right]}}{\alpha^2+\beta^2+h}\,dv.$$

Ersetzen wir hier $\frac{c}{l}$, $\frac{c'}{l}$, $\frac{1}{l}$ durch c, c', l und tragen diese Ausdrücke in (1) ein, so bekommen wir folgende Gleichungen mit dem Biegungsparameter h:

$$
\begin{aligned}
&x = l\sqrt{\alpha^2+\beta^2+h}\cos\varphi,\\
&y = l\sqrt{\alpha^2+\beta^2+h}\sin\varphi,\\
(30)\qquad &z = \int\sqrt{\left(\frac{dc}{du}\right)^2 - h\left(\frac{dl}{du}\right)^2}\,du,\\
&\varphi = \int\frac{\sqrt{\left(\alpha\,\frac{d\beta}{dv} - \beta\,\frac{d\alpha}{dv}\right)^2 + h\left[\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dv}\right)^2\right]}}{\alpha^2+\beta^2+h}\,dv.
\end{aligned}
$$

Die Linien $u =$ const. sind hier der xy-Ebene parallel; es sind Berührungslinien der umgeschriebenen Kegel, deren Spitzen auf der z-Achse liegen. Die Linien $v =$ const. sind ebene Kurven, deren Ebenen durch die z-Achse hindurchgehen; sie sind Berührungslinien der umgeschriebenen Zylinder, deren Erzeugenden parallel der xy-Ebene verlaufen.

Die Flächen (30) können aus Rotationsflächen erzeugt werden. Hat man eine Rotationsfläche

$$x = l\cos\varphi,\quad y = l\sin\varphi,\quad z = \int\sqrt{\left(\frac{dc}{du}\right)^2 - h\left(\frac{dl}{du}\right)^2}\,du,$$

wobei φ den in (30) angegebenen Wert hat, so braucht man nur die Abstände ihrer Punkte von der Rotationsachse im Verhältnis $\sqrt{\alpha^2+\beta^2+h} : 1$ zu verändern, um die Fläche (29) zu haben.

Diese Flächen sind von mir im Bulletin des Sciences Mathématiques 2. sér., t. 15 ausführlich behandelt worden.

Setzt man in (30) $\alpha = \cos v$, $\beta = \sin v$, so entstehen die bekannten Biegungen von Rotationsflächen. Setzt man aber

$$\alpha = A\cos v,\quad \beta = B\sin v,\quad c = C\sin u,\quad l = \cos u,$$

wobei A, B, C Konstanten bedeuten, so hat man aus (30)

$$
\begin{aligned}
&x = \cos u\sqrt{A^2\cos^2 v + B^2\sin^2 v + h}\,\cos\varphi,\\
&y = \cos u\sqrt{A^2\cos^2 v + B^2\sin^2 v + h}\,\sin\varphi,\\
(31)\qquad &z = \int\sqrt{C^2\cos^2 u - h\sin^2 u}\,du,\\
&\varphi = \int\frac{\sqrt{A^2B^2 + h(A^2\sin^2 v + B^2\cos^2 v)}}{A^2\cos^2 v + B^2\sin^2 v + h}\,dv.
\end{aligned}
$$

Für $h = 0$ haben wir

$$x = A \cos u \cos v, \quad y = B \cos u \sin v, \quad z = C \sin u.$$

Demnach sind (31) Biegungen von Mittelpunktsflächen 2ter Ordnung.

Wir gehen nun zur zweiten Lösung unserer Aufgabe über:

$$\text{(B)} \qquad a = h^{-1}a', \quad \alpha = h\alpha', \quad b = b' = 0, \quad \gamma = \gamma' = 0, \quad l + \lambda = 1.$$

Die Gleichungen (8), (9) verwandeln sich in

$$a^2(1 - h^2) + \alpha^2(1 - h^{-2}) + \beta^2 + c^2 = \beta'^2 + c'^2 + m + \mu,$$
$$\left(\frac{da}{du}\right)^2(1 - h^2) + \left(\frac{dc}{du}\right)^2 = \left(\frac{dc'}{du}\right)^2,$$
$$\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2(1 - h^{-2}) + \left(\frac{d\beta}{dv}\right)^2 = \left(\frac{d\beta'}{dv}\right)^2.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen bestimmt man durch Quadraturen c und β', worauf die erste Gleichung $m + \mu$ liefert. Die Gleichungen (1) ergeben dann

$$\text{(32)} \qquad \begin{aligned} x &= ah + \alpha h^{-1}, \\ y &= \int \sqrt{\left(\frac{d\beta}{dv}\right)^2 + (1 + h^{-2})\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2}\, dv, \\ z &= \int \sqrt{\left(\frac{dc}{du}\right)^2 + (1 - h^2)\left(\frac{da}{du}\right)^2}\, du. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen stellen aufeinander abwickelbare Translationsflächen dar, mit dem Biegungsparameter h. Dieser Fall kann als Grenzfall des vorangehenden betrachtet werden, der entsteht, wenn wir in (30) die z-Achse ins Unendliche rücken lassen, wie das in meinem oben zitierten Aufsatze im Bulletin des Sciences Mathématiques gezeigt worden ist. Das konjugierte System (u, v) besteht hier aus zwei Scharen von zylindrischen Linien, die parallel zu den xy- und xz-Ebenen verlaufen.

Die dritte Lösung entspricht den Voraussetzungen

$$\text{(C)} \qquad a = h^{-1}a', \; \alpha = h\alpha', \; b = h^{-1}b', \; \beta = h\beta', \; c = h^{-1}c', \; \gamma = h\gamma', \; l + \lambda = 1.$$

Hier erhalten (8), (9) die Form

$$(a^2 + b^2 + c^2)(1 - h^2) + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(1 - h^{-2}) = m + \mu,$$
$$\left(\frac{da}{du}\right)^2 + \left(\frac{db}{du}\right)^2 + \left(\frac{dc}{du}\right)^2 = 0,$$
$$\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{dv}\right)^2 = 0,$$

Die beiden letzten Gleichungen zeigen, daß die Linien $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ Minimalkurven sind; da sie ein konjugiertes System bilden, so sind die dieser Lösung entsprechenden Flächen Minimalflächen. Um reelle Flächen zu haben, müssen wir u und v konjugiert imaginär nehmen, für a, b, c und α, β, γ drei Paare konjugierter Funktionen dieser Veränderlichen wählen und $h = e^{ik}$ bei reellem k setzen. Dann geben (1) die Gleichungen von aufeinander abwickelbaren Minimalflächen

$$x = e^{ik}a + e^{-ik}\alpha, \quad y = e^{ik}b + e^{-ik}\beta, \quad z = e^{ik}c + e^{-ik}\gamma, \tag{33}$$

mit k als Biegungsparameter.

Die Fälle (A), (B), (C) sind, abgesehen von Kegeln und Zylindern, die einzigen, bei denen eine kontinuierliche Biegung von P-Flächen in andere P-Flächen möglich ist. Dieselben sind bereits 1866 von Peterson angegeben worden.