Zur Theorie des relativbiquadratischen Zahlkörpers.*)

Von

Stephan Bochníček in Agram (Kroatien).

In W. Lietzmanns Inaugural-Dissertation: „Über das biquadratische Reziprozitätsgesetz in algebraischen Zahlkörpern" (Göttingen 1904) befinden sich Sätze, die einen Teil des Beweises des biquadratischen Reziprozitätsgesetzes in algebraischen Zahlkörpern ausmachen. Wir knüpfen an diese Dissertation an.

Im ersten Teile der vorliegenden Arbeit soll als Grundkörper k ein beliebiger Oberkörper des durch die Einheitswurzel $i = \sqrt{-1}$ definierten Körpers $k(i)$ mit ungerader Klassenzahl genommen und für ihn die Sätze über die primären Primideale und das spezielle biquadratische Reziprozitätsgesetz in der Gestalt

$$\left(\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right)\right) = \left(\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right)\right)^n \quad (n = 1 \text{ oder } 3)$$

allgemein bewiesen werden.

Im zweiten Teile wird dann angenommen, daß für den Körper k auch das Gesetz

$$\left(\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right)\right) = \left(\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right)\right)$$

als richtig nachgewiesen sei, und auf Grund dieser Annahme das allgemeine biquadratische Reziprozitätsgesetz in Hilbertscher Fassung für den Körper k bewiesen.

I. Teil.

§ 1.

Die Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$.

Es sei k ein beliebiger Oberkörper des Körpers $k(i)$ und μ eine ganze Zahl in k, die nicht das Quadrat einer ganzen Zahl desselben Körpers k ist.

*) Kroatisch erschienen in den Sitzungsberichten der Südslavischen Akademie der Wissenschaften und Künste in Agram, Bd. 163.

Bezeichnet man mit $D_{\sqrt[4]{\mu},k}$ die Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu}, k)$ in bezug auf k, ferner mit $D_{\sqrt[4]{\mu},\sqrt{\mu}}$ die Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ bezüglich $K(\sqrt{\mu}, k)$ und schließlich mit $D_{\sqrt{\mu},k}$ die Relativdiskriminante von $K(\sqrt{\mu})$ in bezug auf k, so gilt die Beziehung

$$(1) \qquad D_{\sqrt[4]{\mu},k} = D^2_{\sqrt{\mu},k} N_{\sqrt{\mu},k}\left(D_{\sqrt[4]{\mu},\sqrt{\mu}}\right),$$

wobei unter $N_{\sqrt{\mu},k}$ die Norm in $K(\sqrt{\mu})$ genommen in bezug auf k zu verstehen ist.

Demzufolge enthält $D_{\sqrt[4]{\mu},k}$ nur diejenigen Primideale des Körpers k als Faktoren, welche in mindestens einer der Zahlen

$$D_{\sqrt{\mu},k}, \quad N_{\sqrt{\mu},k}\left(D_{\sqrt[4]{\mu},\sqrt{\mu}}\right)$$

aufgehen. Es kann leicht gezeigt werden, daß jeder Primfaktor des Körpers k, welcher in $D_{\sqrt{\mu},k}$ aufgeht, auch in $N_{\sqrt{\mu},k}\left(D_{\sqrt[4]{\mu},\sqrt{\mu}}\right)$ aufgehen muß. Durch solche Primideale müssen jedoch noch nicht sämtliche Primfaktoren von $D_{\sqrt[4]{\mu},k}$ erschöpft sein; es kann vorkommen, daß $D_{\sqrt[4]{\mu},k}$ auch solche Primfaktoren enthält, welche nicht in $D_{\sqrt{\mu},k}$, wohl aber in

$$N_{\sqrt{\mu},k}\left(D_{\sqrt[4]{\mu},\sqrt{\mu}}\right)$$

aufgehen.

Über diejenigen Primideale $\mathfrak{p}$, die zu $1+i$ prim und in $D_{\sqrt[4]{\mu},k}$ als Faktoren enthalten sind, vergleiche man Satz 5 der Lietzmannschen Dissertation.

Über diejenigen Primideale, die in $1+i$ aufgehen, wollen wir folgenden Satz beweisen:

Satz 1. Es sei $\mathfrak{l}$ ein in $1+i$ genau zur l^{ten} Potenz aufgehendes Primideal des Körpers k; es sei ferner μ eine genau durch die a^{te} Potenz von $\mathfrak{l}$ teilbare ganze Zahl in k, die nicht das Quadrat einer ganzen Zahl desselben Körpers k ist; schließlich sei $\bar{\mathfrak{l}}$ ein in $\mathfrak{l}$ aufgehendes Primideal des Körpers $K(\sqrt{\mu})$; so ist die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu},k}$ dann und nur dann prim zu $\mathfrak{l}$, wenn die Beziehungen

$$(2) \qquad \mu \equiv \alpha^2, \quad (\mathfrak{l}^{4l+a}),$$

$$(2^*) \qquad \sqrt{\mu} \equiv \bar{\alpha}^2, \quad \left(\bar{\mathfrak{l}}^{4l+\frac{a}{2}}\right)$$

statthaben, wobei α eine ganze Zahl in k, $\bar{\alpha}$ eine ganze Zahl in $K(\sqrt{\mu})$ bedeutet und a eine gerade positive ganze rationale Zahl ist, die sich durch 4 teilbar erweisen wird.

Ist $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right) = +1$, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß μ dem

Biquadrate einer ganzen Zahl in k nach dem Modul $\mathfrak{l}^{6l+a}$ kongruent werde; ist hingegen $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right) = -1$, so ist dazu notwendig, daß μ dem Biquadrate einer ganzen Zahl in k nach dem Modul $\mathfrak{l}^{4l+a}$ kongruent werde; diese Bedingung ist jedoch nicht ausreichend und wir werden später (man vergleiche hierzu Satz 22) auch eine solche aufstellen.

Beweis. Die Beziehungen (2) und (2*) folgen sofort aus der Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers, wenn man die Gleichung (1) beachtet.

Nun sei weiter $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right) = +1$: dann zerfällt das Primideal $\mathfrak{l}$ im Körper $K(\sqrt{\mu})$ in zwei voneinander verschiedene Primideale $\bar{\mathfrak{l}}$, $S\bar{\mathfrak{l}}$ nach der Gleichung

$$\mathfrak{l} = \bar{\mathfrak{l}} \cdot S\bar{\mathfrak{l}},$$

wobei unter S die Substitution $S = (\sqrt{\mu} : -\sqrt{\mu})$ zu verstehen ist. Aus (2*) ergibt sich leicht die Gleichung

(3) $$\mu \equiv \bar{\alpha}^4, \quad (\bar{\mathfrak{l}}^{6l+a}).$$

Wir beachten jetzt die Beziehung

$$n_{\sqrt{\mu}}(\bar{\mathfrak{l}}^e) = n(\mathfrak{l}^e),$$

wo e eine beliebige positive ganze rationale Zahl bedeutet und unter $n_{\sqrt{\mu}}$ die Norm genommen in $K(\sqrt{\mu})$, unter n die Norm genommen in k zu verstehen ist. Dieser Beziehung zufolge ist die Anzahl der untereinander inkongruenten Reste des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ bezüglich des Moduls $\bar{\mathfrak{l}}^e$ genau gleich der Anzahl der untereinander inkongruenten Reste des Körpers k in bezug auf den Modul $\mathfrak{l}^e$. Es sind aber zwei untereinander nach dem Modul $\mathfrak{l}^e$ inkongruente ganze Zahlen α, β des Körpers k auch nach $\bar{\mathfrak{l}}^e$ inkongruent, denn wäre

$$\alpha \equiv \beta, \quad (\bar{\mathfrak{l}}^e),$$

so würde hieraus weiter folgen, daß auch

$$\alpha \equiv \beta, \quad (S\bar{\mathfrak{l}}^e)$$

sein muß, und es müßte dann, weil $\bar{\mathfrak{l}}^e$ und $S\bar{\mathfrak{l}}^e$ relativ prime Ideale sind, auch $\alpha \equiv \beta$ nach $\mathfrak{l}^e$ sein. Da auch umgekehrt zwei untereinander nach dem Modul $\bar{\mathfrak{l}}^e$ inkongruente ganze Zahlen α, β des Körpers k gewiß auch nach $\mathfrak{l}^e$ inkongruent sind, so kann jede ganze Zahl $\bar{\alpha}$ des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ einer ganzen Zahl α des Körpers k nach $\bar{\mathfrak{l}}^e$ kongruent gesetzt werden. Tun wir dies insbesondere in der Kongruenz (3), indem wir

$$\bar{\alpha} \equiv \alpha, \quad (\bar{\mathfrak{l}}^{6l+a})$$

annehmen, so ergibt sich

$$\mu \equiv \alpha^4, \quad (\mathfrak{l}^{6l+a})$$

und hieraus

$$\mu \equiv \alpha^4, \quad (S\mathfrak{l}^{6l+a});$$

beides zusammengenommen liefert den Beweis für die Behauptung des Satzes 1.

Die Umkehrung ergibt sich wie bei Lietzmann, pag. 16.

Nun sei weiter $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right) = -1$, so bleibt $\mathfrak{l}$ in $K(\sqrt{\mu})$ unzerlegt. Wir schreiben (2*) folgendermaßen

$$\sqrt{\mu} \equiv \left(\frac{\varrho + \sigma\sqrt{\mu}}{\tau}\right)^2, \quad \left(\mathfrak{l}^{4l+\frac{a}{2}}\right), \tag{4}$$

wobei $\frac{\varrho + \sigma\sqrt{\mu}}{\tau}$ eine ganze Zahl in $K(\sqrt{\mu})$, ϱ, σ, τ ganze Zahlen in k sein sollen. Es sei das Primideal $\mathfrak{l}$ in den Zahlen ϱ, σ, τ der Reihe nach genau zur r^{ten}, s^{ten}, t^{ten} Potenz enthalten. Da $\frac{\varrho + \sigma\sqrt{\mu}}{\tau}$ eine ganze Zahl sein soll, so muß es auch $\frac{\varrho - \sigma\sqrt{\mu}}{\tau}$ sein, folglich auch ihre Summe $\frac{2\varrho}{\tau}$ und ihre Differenz $\frac{2\sigma\sqrt{\mu}}{\tau}$. Hieraus ist zu entnehmen, daß

$$r + 2l \geqq t, \quad s + \frac{a}{2} + 2l \geqq t \tag{5}$$

sein muß.

Weiter muß $N_{\sqrt{\mu}, k}\left(\frac{\varrho + \sigma\sqrt{\mu}}{\tau}\right) = \frac{\varrho^2 - \sigma^2\mu}{\tau^2}$ eine ganze Zahl sein, woraus wegen (4) die Beziehung

$$\varrho^2 - \sigma^2\mu \equiv 0, \quad \left(\mathfrak{l}^{2t+\frac{a}{2}}\right) \tag{6}$$

folgt. Nun folgern wir aus (4) die Kongruenz

$$-\sqrt{\mu} \equiv \left(\frac{\varrho - \sigma\sqrt{\mu}}{\tau}\right)^2, \quad \left(\mathfrak{l}^{4l+\frac{a}{2}}\right). \tag{7}$$

Addiert man (7) zu (4), so ergibt sich

$$\frac{\varrho^2 + \sigma^2\mu}{\tau^2} \equiv 0, \quad \left(\mathfrak{l}^{2l+\frac{a}{2}}\right);$$

somit muß

$$\varrho^2 + \sigma^2\mu \equiv 0, \quad \left(\mathfrak{l}^{2l+\frac{a}{2}+2t}\right) \tag{8}$$

sein, woraus wir weiter die folgende Kongruenz ableiten:

$$\varrho^2 - \sigma^2\mu \equiv -2\sigma^2\mu, \quad \left(\mathfrak{l}^{2l+\frac{a}{2}+2t}\right).$$

Vergleicht man diese Kongruenz mit (6), so ersieht man unmittelbar, daß

$$s = t - \frac{a}{4} - l \tag{9}$$

sein muß. In ähnlicher Weise schließen wir, indem wir (8) auf die Form

$$\sigma^2\mu - \varrho^2 \equiv -2\varrho^2, \quad \left(\mathfrak{l}^{2l+\frac{a}{2}+2t}\right)$$

bringen, durch Vergleichung mit (6), daß

$$r = t + \frac{a}{4} - l \tag{10}$$

ist.

Nachdem die Beziehungen (9) und (10) festgestellt sind, leiten wir aus (2) die Kongruenz

$$\sqrt{\mu} \equiv \alpha, \quad \left(\mathfrak{l}^{2l+\frac{a}{2}}\right)$$

ab und überzeugen uns leicht von der Richtigkeit der folgenden Kongruenz:

$$\sqrt{\mu} \equiv \left(\frac{\varrho+\sigma\alpha}{\tau}\right)^2, \quad \left(\mathfrak{l}^{2l+\frac{a}{2}}\right).$$

Bestimmen wir nun eine ganze Zahl β in k, so daß

$$\frac{\varrho+\sigma\alpha}{\tau} \equiv \beta, \quad \left(\mathfrak{l}^{2l+\frac{a}{2}}\right)$$

wird, was hier möglich ist, so können wir die Beziehung

$$\sqrt{\mu} \equiv \beta^2, \quad \left(\mathfrak{l}^{2l+\frac{a}{2}}\right)$$

aufschreiben. Da aber auch

$$-\sqrt{\mu} \equiv \beta^2, \quad \left(\mathfrak{l}^{2l+\frac{a}{2}}\right)$$

sein muß, so ergibt sich schließlich

$$\mu \equiv \beta^4, \quad \left(\mathfrak{l}^{4l+a}\right), \tag{11}$$

wie Satz 1 behauptet.

Umgekehrt kann aber nicht geschlossen werden, daß aus (11) die Kongruenzen (2) und (2*) folgen, es kann vielmehr vorkommen, daß die Kongruenzen (2) und (2*) nicht erfüllt werden können, obwohl die Beziehung (11) statthat. So sind beispielsweise im Körper der imaginären Zahlen $k(i)$ die Zahlen $1+4i$ und -3 beide kongruent 1 nach 4. Im Körper $K\left(\sqrt{1+4i}\right)$ besteht die Beziehung

$$\sqrt{1+4i} \equiv \left(\frac{1-i\sqrt{1+4i}}{1+i}\right)^2, \quad (4);$$

folglich ist die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{1+4i},\, k(i)}$ prim zu $1+i$. Die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{-3},\, k(i)}$ ist hingegen teilbar durch $1+i$. In der Tat ist die ganze Zahl

$$A = \frac{2+i+(1+i)\sqrt[4]{-3}+\sqrt{-3}}{2}$$

des Körpers $K(\sqrt[4]{-3})$ nicht mehr teilbar durch $1+i$, ihre Norm $N_{\sqrt[4]{-3},\, k(i)}(A)$ jedoch genau durch 2 teilbar, woraus zu folgern ist, daß das Primideal $1+i$ des Körpers $k(i)$, welches in $K(\sqrt{-3})$ unzerlegt bleibt, im Körper $K(\sqrt[4]{-3})$ das Quadrat eines Primideals wird, weil es wegen $\left(\frac{-3}{1+i}\right) = -1$ nicht in zwei voneinander verschiedene Primideale des Körpers $K(\sqrt[4]{-3})$ zerfallen kann.

Wir wollen hier nun noch den folgenden Satz über die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu},\, k}$ ableiten:

Satz 2. Es seien μ, μ^* zwei beliebige ganze Zahlen des Körpers k, die nicht dem Quadrate ganzer Zahlen desselben Körpers k gleich sind, und es sei das in $1+i$ aufgehende Primideal $\mathfrak{l}$ des Körpers k in den Zahlen μ, μ^* genau in der a^{ten} Potenz enthalten. Besteht dann die Beziehung

$$(12) \qquad \mu \equiv \mu^*, \quad (\mathfrak{l}^{6l+a}),$$

so sind die Relativdiskriminanten $D_{\sqrt[4]{\mu},\, k}$, $D_{\sqrt[4]{\mu^*},\, k}$ entweder beide zugleich prim zu $\mathfrak{l}$ oder beide zugleich durch $\mathfrak{l}$ teilbar.

Beweis. Es sei die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu},\, k}$ zu $\mathfrak{l}$ prim. Soll jetzt bewiesen werden, daß auch die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu^*},\, k}$ zu $\mathfrak{l}$ prim sein muß, so genügt es zu zeigen, daß die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu\mu^*},\, k}$ zu $\mathfrak{l}$ prim ist, weil der Körper, der durch Zusammensetzung der Körper $K(\sqrt[4]{\mu})$ und $K(\sqrt[4]{\mu^*})$ entsteht, mit dem Körper, der sich durch Zusammensetzung von $K(\sqrt[4]{\mu})$ mit $K(\sqrt[4]{\mu\mu^*})$ ergibt, identisch ist.

Es sei ferner $\bar{\mathfrak{l}}$ ein Primfaktor von $\mathfrak{l}$ im Körper $K(\sqrt{\mu\mu^*})$; es gibt dann in diesem Körper $K(\sqrt{\mu\mu^*})$ eine Zahl $\bar{\alpha}$, so daß

$$(13) \qquad \mu \equiv \bar{\alpha}^2, \quad (\bar{\mathfrak{l}}^{4l+a})$$

wird, weil die Relativdiskriminante desjenigen Körpers, der durch Zusammensetzung der Körper $K(\sqrt{\mu\mu^*})$ und $K(\sqrt{\mu})$ entsteht, in bezug auf den Körper $K(\sqrt{\mu\mu^*})$ zu $\bar{\mathfrak{l}}$ prim ist. Nach Voraussetzung (12) ist aber

$$\mu\mu^* \equiv \mu^2, \quad (\bar{\mathfrak{l}}^{6l+2a});$$

daher muß

$$(\sqrt{\mu\mu^*}+\mu)(\sqrt{\mu\mu^*}-\mu)\equiv 0, \quad (\mathfrak{l}^{6l+2a})$$

sein. Folglich ist entweder

$$\sqrt{\mu\mu^*}+\mu\equiv 0, \quad (\mathfrak{l}^{4l+a}),$$

oder

$$\sqrt{\mu\mu^*}-\mu\equiv 0, \quad (\mathfrak{l}^{4l+a}).$$

Es gibt daher, wie man mit Hilfe von (13) schließt, eine Zahl $\bar{\beta}$ in $K(\sqrt{\mu\mu^*})$, so daß

$$\sqrt{\mu\mu^*}\equiv\bar{\beta}^2, \quad (\mathfrak{l}^{4l+a})$$

wird, d. h. die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu\mu^*},\,k}$ ist zu $\mathfrak{l}$ prim, w. z. b. w.

Da auch umgekehrt in derselben Weise folgt, daß die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu},\,k}$ zu $\mathfrak{l}$ prim sein muß, wenn es $D_{\sqrt[4]{\mu^*},\,k}$ ist, so ist damit Satz 2 bewiesen.

§ 2.

Die Zerlegung der Primideale des Körpers k im Körper $K(\sqrt[4]{\mu})$.

Betreffs der Zerlegung der Primideale des Körpers k im Körper $K(\sqrt[4]{\mu})$ verweisen wir auf die Lietzmannsche Dissertation. Es möge jedoch darauf hingewiesen werden, daß im Falle $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right)=-1$ die Beziehung $\left(\frac{\sqrt{\mu}}{\mathfrak{l}}\right)_{\sqrt{\mu}}=-1$ möglich ist, so daß das Primideal $\mathfrak{l}$ in $K(\sqrt[4]{\mu})$ unzerlegt bleibt.

Das Symbol $\left(\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right)\right)$ ist folgendermaßen zu definieren:

Definition 1. Es sei μ eine ganze Zahl des Körpers k, die nicht das Quadrat einer Zahl in k ist, und $\mathfrak{l}$ ein in $1+i$ zur l^{ten}, in μ zur a^{ten} Potenz aufgehendes Primideal in k. Dann soll $\left(\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right)\right)=0$ sein, wenn die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu},\,k}$ durch $\mathfrak{l}$ teilbar ist; ferner sei $\left(\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right)\right)=+1$, wenn μ dem Biquadrate einer ganzen Zahl in k nach dem Modul $\mathfrak{l}^{6l+a+1}$ kongruent ist, und $\left(\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right)\right)=-1$, wenn μ dem Biquadrate einer ganzen Zahl in k nach $\mathfrak{l}^{6l+a}$, aber nicht mehr nach $\mathfrak{l}^{6l+a+1}$ kongruent ausfällt; schließlich $\left(\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right)\right)=\pm i$, wenn $\left(\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right)\right)\neq 0$ und $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right)=-1$ ist.

Bei Anwendung dieser Definition gilt für die Zerlegung der Primideale des Körpers k Satz 10 der Lietzmannschen Dissertation; ebenso Satz 11.

§ 3.

Der Begriff des biquadratischen Normenrestes und das biquadratische Normenrestsymbol.

Hinsichtlich dieser Begriffe vergleiche man § 6 und § 7 der Lietzmannschen Dissertation.

§ 4.

Die relativen Grundeinheiten des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ in bezug auf den Körper $K(\sqrt{\mu})$.

Der Körper k vom Grade $2m$ sei nebst seinen konjugierten Körpern $k', \cdots, k^{(2m-1)}$ imaginär. Wir beweisen folgenden Satz:

Satz 3. Das System der relativen Grundeinheiten des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ in bezug auf den Körper $K(\sqrt{\mu})$ läßt sich stets in der Gestalt

$$\mathsf{H}_1,\ S\mathsf{H}_1,\ \cdots,\ \mathsf{H}_m,\ S\mathsf{H}_m$$

darstellen, wo $\mathsf{H}_1, \cdots, \mathsf{H}_m$ gewisse Einheiten in $K(\sqrt[4]{\mu})$ sind, und S die Substitution $(\sqrt[4]{\mu} : i\sqrt[4]{\mu})$ bedeutet.

Beweis. Es sei $\bar{\varepsilon}_1, \cdots, \bar{\varepsilon}_{2m-1}$ ein System von Grundeinheiten des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ und E_1 eine solche Einheit in $K(\sqrt[4]{\mu})$, daß das System $\mathsf{E}_1, \bar{\varepsilon}_1, \cdots, \bar{\varepsilon}_{2m-1}$ ein System von unabhängigen Einheiten vorstellt; dann müssen auch die Einheiten $\mathsf{E}_1, S\mathsf{E}_1, \bar{\varepsilon}_1, \cdots, \bar{\varepsilon}_{2m-1}$ ein System von unabhängigen Einheiten darstellen. Wir machen die gegenteilige Annahme und denken uns $\mathsf{E}_1^{a_1+b_1S} = \bar{\varepsilon}$, wo a_1, b_1 ganze rationale Zahlen bedeuten, die nicht beide 0 sind, und $\bar{\varepsilon}$ eine Einheit in $K(\sqrt{\mu})$ vorstellt. Beachten wir nun die Identität

$$(a_1 + b_1S)(a_1 - b_1S) + b_1^2(1 + S^2) = a_1^2 + b_1^2,$$

in welcher die Summe $a_1^2 + b_1^2$ der gemachten Voraussetzung gemäß nicht verschwinden kann, so folgt hieraus sofort, wenn man beachtet, daß $\mathsf{E}_1^{1+S^2}$ eine Einheit in $K(\sqrt{\mu})$ darstellt, eine Beziehung von der Form

$$\mathsf{E}_1^{a_1^2+b_1^2} = \bar{\varepsilon}^*,$$

wo $\bar{\varepsilon}^*$ eine Einheit in $K(\sqrt{\mu})$ ist, was unserer Annahme zuwiderläuft.

Nunmehr wählen wir eine Einheit E_2 in $K(\sqrt[4]{\mu})$, so daß $\mathsf{E}_2, \mathsf{E}_1, \mathsf{E}_1^S, \bar{\varepsilon}_1, \cdots, \bar{\varepsilon}_{2m-1}$ ein System unabhängiger Einheiten bilden, und beweisen in ähnlicher Weise, daß dann auch die Einheiten $\mathsf{E}_2, \mathsf{E}_2^S, \mathsf{E}_1, \mathsf{E}_1^S, \bar{\varepsilon}_1, \cdots, \bar{\varepsilon}_{2m-1}$ voneinander unabhängig sind. So fortfahrend, gelangen wir zu $4m-1$ Einheiten

$$\mathsf{E}_s,\ \mathsf{E}_s^S,\ \bar{\varepsilon}_1, \cdots, \bar{\varepsilon}_{2m-1} \qquad (s = 1, 2, \cdots, m),$$

die ein System von unabhängigen Einheiten bilden. Die Anzahl der Grundeinheiten in $K(\sqrt{\mu})$ beträgt aber auch $4m-1$, und wir können auf Grund dessen ebenso wie Hilbert*) (H. A. Z. § 55, Seite 274) zeigen, daß man immer eine Potenz 2^m von 2 finden kann, so daß ein Ausdruck von der Form

$$\mathsf{E}_1^{a_1+b_1 S} \cdots \mathsf{E}_m^{a_m+b_m S}[\theta] \tag{1}$$

nicht anders eine $2^{m\text{te}}$ Potenz einer Einheit in $K(\sqrt[4]{\mu})$ werden kann, als wenn die ganzen rationalen Zahlen $a_1, \cdots, a_m$, $b_1, \cdots, b_m$ sämtlich gerade sind; und ebenso, daß der Ausdruck (1) nicht anders eine $(1-S)^{2m\text{te}}$ symbolische Potenz einer Einheit in $K(\sqrt[4]{\mu})$ werden kann, als wenn die ganzen algebraischen Zahlen $a_1 + b_1 i, \cdots, a_m + b_m i$ sämtlich durch $1 - i$ teilbar sind.

Weiter bilden wir analog wie Hilbert ein System von Einheiten $\mathsf{H}_1, \cdots, \mathsf{H}_m$ folgendermaßen: Es sei e_1 die größte ganze rationale Zahl $\geqq 0$ von der Art, daß ein Ausdruck von der Gestalt (1) eine $(1-S)^{e_1\text{te}}$ symbolische Potenz einer Einheit ist, ohne daß sämtliche Zahlen $a_1 + b_1 i, \cdots, a_m + b_m i$ durch $1 - i$ teilbar sind; wir nehmen an, es sei ein solcher Ausdruck

$$\mathsf{E}_1^{a_1+b_1 S} \cdots \mathsf{E}_m^{a_m+b_m S}[\bar{\varepsilon}] = \mathsf{H}_1^{(1-S)^{e_1}},$$

wo $a_1, \cdots, a_m$, $b_1, \cdots, b_m$ ganze rationale Zahlen bedeuten und etwa $a_1 + b_1 i$ nicht durch $1 - i$ teilbar sein möge; $[\bar{\varepsilon}]$ hat die frühere Bedeutung und H_1 ist eine gewisse Einheit des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$. In ähnlicher Weise bestimmen wir $\mathsf{H}_2, \cdots, \mathsf{H}_m$. Man vergleiche hierzu durchweg H. A. Z. § 55.

Dann bilden die Einheiten H_1, $S\mathsf{H}_1, \cdots, \mathsf{H}_m$, $S\mathsf{H}_m$ ein System von relativen Grundeinheiten des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ in bezug auf $K(\sqrt{\mu})$. Davon überzeugt man sich leicht, wie bei H. A. Z. § 55. Man hat dabei nur zu beachten, daß $\mathsf{H}_s^{a_s+b_s S}$, wenn $a_s + b_s i$ durch $1 - i$ teilbar ist, das Produkt aus einer symbolischen $(1-S)^{\text{ten}}$ Potenz einer Einheit in $K(\sqrt[4]{\mu})$ mit einer Einheit in $K(\sqrt{\mu})$ vorstellt.

Mit Hilfe der eben bestimmten relativen Grundeinheiten $\mathsf{H}_1, S\mathsf{H}_1, \cdots, \mathsf{H}_m, S\mathsf{H}_m$ beweist man nun den folgenden Satz:

Satz 4. Bedeutet H_1, $S\mathsf{H}_1, \cdots, \mathsf{H}_m$, $S\mathsf{H}_m$ ein System von relativen Grundeinheiten des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ in bezug auf $K(\sqrt{\mu})$, dann gilt für eine beliebige Einheit E in $K(\sqrt[4]{\mu})$ jedesmal eine Gleichung von der Gestalt

$$\mathsf{E}^f = \mathsf{H}_1^{a_1+b_1 S} \cdots \mathsf{H}_1^{a_m+b_m S}[\bar{\varepsilon}], \tag{2}$$

wobei f eine ungerade ganze rationale Zahl ist; $a_1, \cdots, a_m$, $b_1, \cdots, b_m$ bedeuten gewisse ganze rationale Zahlen und $[\bar{\varepsilon}]$ eine Einheit in $K(\sqrt{\mu})$ oder eine solche Einheit in $K(\sqrt[4]{\mu})$, deren Quadrat in $K(\sqrt{\mu})$ liegt.

---

*) D. Hilbert: Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1897 (zitiert mit H. A. Z.).

Der Beweis dieses Satzes schließt sich genau an H. A. Z. § 146 an und wir wollen ihn deshalb übergehen.

Im Körper $K(\sqrt[4]{\mu})$ besteht nur dann eine solche Einheit, deren Quadrat in $K(\sqrt{\mu})$ liegt, wenn $\sqrt{\mu}$ von der Gestalt $\bar{\xi}\bar{\alpha}^2$ ist, wobei $\bar{\xi}$ eine Einheit und $\bar{\alpha}$ eine ganze Zahl in $K(\sqrt{\mu})$ ist. In diesem Falle wird man $[\bar{\varepsilon}]$ in der Form

$$[\bar{\varepsilon}] = \bar{\eta}\left(\sqrt{\bar{\xi}}\right)^e$$

darstellen können, wobei $\bar{\eta}$ eine Einheit in $K(\sqrt{\mu})$ bedeutet und e einen der Werte 0 oder 1 vorstellt.

Gleichung (2) wird demnach, wenn $\sqrt{\mu}$ nicht von der Gestalt $\bar{\xi}\bar{\alpha}^2$ ist, die Form

$$\mathsf{E}^f = \mathsf{H}_1^{a_1+b_1 S} \cdots \mathsf{H}_m^{a_m+b_m S}\,\bar{\eta} \tag{3}$$

und, wenn $\sqrt{\mu} = \bar{\xi}\bar{\alpha}^2$ ist, die Form

$$\mathsf{E}^f = \mathsf{H}_1^{a_1+b_1 S} \cdots \mathsf{H}_m^{a_m+b_m S}\,\bar{\eta}\left(\sqrt{\bar{\xi}}\right)^e \tag{3*}$$

annehmen.

Mit Hilfe der Gleichungen (3) und (3*) beweisen wir nun den folgenden Hilfssatz:

Satz 5. Es mögen die obigen Bezeichnungen beibehalten und überdies die Relativnormen $N_{\sqrt[4]{\mu},k}$ der relativen Grundeinheiten des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ in bezug auf k, nämlich

$$\eta_1 = N_{\sqrt[4]{\mu},k}(\mathsf{H}_1), \cdots, \eta_m = N_{\sqrt[4]{\mu},k}(\mathsf{H}_m)$$

gebildet werden; dann läßt sich jede Einheit ε in k, welche die Relativnorm $N_{\sqrt[4]{\mu},k}$ einer Einheit E des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ ist, in einer der Formen

$$\varepsilon = \eta_1^{u_1} \cdots \eta_m^{u_m}\left[N_{\sqrt{\mu},k}(\bar{\eta})\right]^2 \tag{4}$$

oder

$$\varepsilon = \eta_1^{u_1} \cdots \eta_m^{u_m}\left[N_{\sqrt{\mu},k}(\bar{\eta})\right]^2\left(-\bar{\xi}\cdot S\bar{\xi}\right)^e \tag{4*}$$

darstellen, wo die Exponenten $u_1, \cdots, u_m, e$ gewisse Werte 0, 1 haben und $\bar{\eta}$ eine Einheit in $K(\sqrt{\mu})$ bedeutet. Gleichung (4) gilt, wenn $\sqrt{\mu}$ nicht von der Gestalt $\bar{\xi}\bar{\alpha}^2$ ist, und (4*), wenn $\sqrt{\mu}$ die Form $\sqrt{\mu} = \bar{\xi}\bar{\alpha}^2$ besitzt.

Beweis. Um diesen Hilfssatz zu beweisen, bilden wir die Relativnormen $N_{\sqrt[4]{\mu},k}$ auf beiden Seiten der Gleichungen (3) und (3*). Es ergibt sich, wenn $\varepsilon = N_{\sqrt[4]{\mu},k}(\mathsf{E})$ gesetzt wird,

$$\varepsilon^f = \eta_1^{a_1+b_1} \cdots \eta_m^{a_m+b_m}\left[N_{\sqrt{\mu},k}(\bar{\eta})\right]^2 \tag{5}$$

beziehungsweise

$$\varepsilon^f = \eta_1^{a_1+b_1} \cdots \eta_m^{a_m+b_m} \left[N_{\sqrt{\mu},k}(\overline{\eta})\right]^2 (-\bar{\xi}\cdot S\bar{\xi})^e. \tag{5*}$$

Hieraus folgen sofort Gleichungen von der Form (4) und (4*), wenn man beachtet, daß $\varepsilon, \eta_1, \cdots, \eta_m$ gewiß auch Relativnormen $N_{\sqrt{\mu},k}$ von Einheiten in $K(\sqrt{\mu})$ darstellen.

Bedeutet nun $\overline{\eta}_1, \cdots, \overline{\eta}_m$ ein System von relativen Grundeinheiten des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ *) (man sehe H. Rq. Z. § 14), und setzt man

$$\vartheta_1 = N_{\sqrt{\mu},k}(\overline{\eta}_1), \cdots, \vartheta_m = N_{\sqrt{\mu},k}(\overline{\eta}_m),$$

so kann bekanntermaßen jede Einheit ϑ in k, welche der Relativnorm $N_{\sqrt{\mu},k}$ einer Einheit in $K(\sqrt{\mu})$ gleich ist, in der Gestalt

$$\vartheta = \vartheta_1^{v_1} \cdots \vartheta_m^{v_m} N_{\sqrt{\mu},k}([\zeta])$$

dargestellt werden, wobei $v_1, \cdots, v_m$ gewisse Werte 0, 1 bedeuten und $[\zeta]$ eine Einheit in k vorstellt oder eine solche Einheit in $K(\sqrt{\mu})$, deren Quadrat in k liegt.

Demnach besteht der Satz:

Satz 6. Es seien $\mathsf{H}_1, S\mathsf{H}_1, \cdots, \mathsf{H}_m, S\mathsf{H}_m$ relative Grundeinheiten des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ in bezug auf $K(\sqrt{\mu})$, ferner $\overline{\eta}_1, \cdots, \overline{\eta}_m$ relative Grundeinheiten des Körpers $K(\sqrt{\mu})$. Setzen wir dann

$$\eta_1 = N_{\sqrt[4]{\mu},k}(\mathsf{H}_1), \cdots, \eta_m = N_{\sqrt[4]{\mu},k}(\mathsf{H}_m);$$

$$\vartheta_1 = N_{\sqrt{\mu},k}(\overline{\eta}_1), \cdots, \vartheta_m = N_{\sqrt{\mu},k}(\overline{\eta}_m),$$

so kann jede Einheit ε in k, welche die Relativnorm $N_{\sqrt[4]{\mu},k}$ von einer Einheit in $K(\sqrt[4]{\mu})$ ist, in einer der Formen

$$\varepsilon = \eta_1^{u_1} \cdots \eta_m^{u_m} \vartheta_1^{2v_1} \cdots \vartheta_m^{2v_m} \left\{N_{\sqrt{\mu},k}([\zeta])\right\}^2$$

oder

$$\varepsilon = \eta_1^{u_1} \cdots \eta_m^{u_m} \vartheta_1^{2v_1} \cdots \vartheta_m^{2v_m} \left\{N_{\sqrt{\mu},k}([\zeta])\right\}^2 (-\bar{\xi}\cdot S\bar{\xi})^e$$

dargestellt werden. Hierbei haben die Exponenten $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m, e$ gewisse Werte 0, 1; $[\zeta]$ und $\bar{\xi}$ haben dieselbe Bedeutung wie oben. Die erstere dieser Gleichungen gilt, wenn $\sqrt{\mu}$ nicht von der Gestalt $\bar{\xi}\bar{\alpha}^2$ ist, die letztere hingegen, wenn $\sqrt{\mu} = \bar{\xi}\bar{\alpha}^2$ ist.

---

*) D. Hilbert: Über die Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers. Mathem. Annalen Bd. 51 (zitiert mit H. Rq. Z.).

§ 5.

Die ambigen Komplexe des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$.

Bedeutet ε eine beliebige Einheit in k, so soll das System von Einheiten, welches aus dem Produkte $\varepsilon\xi^2$ entsteht, wenn ξ alle Einheiten des Körpers k durchläuft, ein *quadratischer Einheitenverband*, hingegen das System von Einheiten, welches aus $\varepsilon\xi^4$ entsteht, wenn ξ wieder alle Einheiten des Körpers k durchläuft, ein *biquadratischer Einheitenverband* genannt werden.

Wir machen nun für die Folge über den Körper k vom Grade $2m$, der nebst seinen konjugierten Körpern $k', \cdots, k^{(2m-1)}$ imaginär ist, noch die Annahme, *die Klassenzahl h sei im Körper k ungerade.*

Indem wir dann den Begriff der ambigen Idealklasse und des ambigen Komplexes wie bei Lietzmann (L. § 9) fassen, wollen wir zunächst den folgenden Satz beweisen:

Satz 7. Es sei die Anzahl der verschiedenen Primideale des Körpers k, welche in der Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu},k}$ des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ aufgehen, gleich $t_1 + t_2$, und es seien hiervon genau t_1 in der Relativdiskriminante $D_{\sqrt{\mu},k}$ des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ als Faktoren enthalten; ferner mögen diejenigen Einheiten in k, welche Relativnormen $N_{\sqrt[4]{\mu},k}$ von Einheiten in $K(\sqrt[4]{\mu})$ sind, 2^{w^*} verschiedene biquadratische Einheitenverbände bilden: dann gilt, wenn wir die Anzahl aller ambigen Komplexe in $K(\sqrt[4]{\mu})$, die aus ambigen Idealen entspringen, mit 4^{a^*} bezeichnen und

$$t = t_1 + \frac{t_2}{2}, \qquad v^* = \frac{w^*}{2}$$

setzen, für a^* die Beziehung

$$a^* \leqq t + v^* - m - 1.$$

Beweis. Wir nehmen zunächst an, daß die Zahl μ, die den Körper $K(\sqrt[4]{\mu})$ bestimmt, nicht das Produkt einer Einheit in k mit dem *Quadrate* einer Zahl in k ist.

Darnach gilt für jede Einheit ε in k, welche Relativnorm $N_{\sqrt[4]{\mu},k}$ einer Einheit in $K(\sqrt[4]{\mu})$ ist, nach Hilfssatz 6 eine Gleichung von der Form

$$\varepsilon = \eta_1^{u_1} \cdots \eta_m^{u_m} \vartheta_1^{2v_1} \cdots \vartheta_m^{2v_m} \zeta^4,$$

wo ζ eine Einheit in k und die Bedeutung der übrigen Größen aus Hilfssatz 6 zu ersehen ist.

Unter den Einheiten $\vartheta_1, \cdots, \vartheta_m$ wird es eine bestimmte Maximalanzahl $v_2{}^*$ voneinander quadratisch unabhängiger geben, es seien dies etwa $\vartheta_1, \cdots, \vartheta_{v_2^*}$, so daß keine Relation von der Gestalt

$$\vartheta_1^{a_1} \cdots \vartheta_{v_2^*}^{a_{v_2^*}} = \zeta^2$$

stattfinden kann, wenn man unter ζ eine Einheit in k versteht und den Exponenten $a_1, \cdots, a_{v_2^*}$ beliebige Werte 0, 1 erteilt, außer es sind sämtliche Exponenten $a_1, \cdots, a_{v_2^*}$ gleich Null.

Dann kann jede Einheit ϑ in k, welche Relativnorm $N_{\sqrt{\mu}, k}$ einer Einheit in $K(\sqrt{\mu})$ ist, eindeutig in die Form

$$\vartheta = \vartheta_1^{a_1} \cdots \vartheta_{v_2^*}^{a_{v_2^*}} \zeta^2$$

gebracht werden, wo ζ eine bestimmte Einheit in k ist und die Exponenten $a_1, \cdots, a_{v_2^*}$ gewisse Werte 0, 1 haben. Infolgedessen wird man jede Einheit ϑ^2, welche das Quadrat der Relativnorm $N_{\sqrt{\mu}, k}$ einer Einheit in $K(\sqrt{\mu})$ ist, eindeutig in der Form

$$\vartheta^2 = \vartheta_1^{2a_1} \cdots \vartheta_{v_2^*}^{2a_{v_2^*}} \zeta^4$$

darstellen können.

Nun nahmen wir an, daß diejenigen Einheiten in k, welche Relativnormen $N_{\sqrt[4]{\mu}, k}$ von Einheiten in $K(\sqrt[4]{\mu})$ sind, insgesamt 2^{w^*} biquadratische Einheitenverbände bilden. Demgemäß wird man unter den Einheiten $\eta_1, \cdots, \eta_m$ genau $v_1^* = w^* - v_2^*$ Einheiten bestimmen können, es seien dies etwa $\eta_1, \cdots, \eta_{v_1^*}$, so daß jede Einheit ε in k, welche Relativnorm $N_{\sqrt[4]{\mu}, k}$ einer Einheit in $K(\sqrt[4]{\mu})$ ist, auf eine und nur auf eine Weise in der Form

$$\varepsilon = \eta_1^{a_1} \cdots \eta_{v_1^*}^{a_{v_1^*}} \vartheta_1^{2b_1} \cdots \vartheta_{v_2^*}^{2b_{v_2^*}} \zeta^4$$

dargestellt werden kann, wobei die Exponenten $a_1, \cdots, a_{v_1^*}, b_1, \cdots, b_{v_2^*}$ gewisse Werte 0, 1 haben und ζ eine Einheit in k bedeutet.

Wir wenden dies insbesondere auf die Einheiten $\eta_{v_1^*+1}, \cdots, \eta_m$; $\vartheta_{v_2^*+1}, \cdots, \vartheta_m$ an. Es sei

$$\eta_s = \eta_1^{a_1^{(s)}} \cdots \eta_{v_1^*}^{a_{v_1^*}^{(s)}} \vartheta_1^{2b_1^{(s)}} \cdots \vartheta_{v_2^*}^{2b_{v_2^*}^{(s)}} \zeta_s^4,$$
$$(s = v_1^* + 1, \cdots, m);$$
$$\vartheta_u = \vartheta^{a_1^{(u)}} \cdots \vartheta_{v_2^*}^{a_{v_2^*}^{(u)}} \zeta_u^2,$$
$$(u = v_2^* + 1, \cdots, m),$$

wo ζ_s, ζ_u bestimmte Einheiten in k sind und die Exponenten a, b gewisse Werte 0, 1 haben.

Hieraus folgt, daß die $m - v_1^*$ Ausdrücke

$$\mathsf{H}_s' = \mathsf{H}_s \mathsf{H}_1^{-a_1^{(s)}} \cdots \mathsf{H}_{v_1^*}^{-a_{v_1^*}^{(s)}} \overline{\vartheta}_1^{-b_1^{(s)}} \cdots \overline{\vartheta}_{v_2^*}^{-b_{v_2^*}^{(s)}} \zeta_s^{-1}, \tag{1}$$
$$(s = v_1^* + 1, \cdots, m),$$

Einheiten in $K(\sqrt[4]{\mu})$ vorstellen, deren Relativnorm $N_{\sqrt[4]{\mu}, k}$ gleich 1 ist. Ebenso sind die $m - v_2^*$ Ausdrücke

$$\bar{\vartheta}_u' = \bar{\vartheta}_u \bar{\vartheta}_1^{-a_1^{(u)}} \cdots \bar{\vartheta}_{v_2^*}^{-a_{v_2^*}^{(u)}} \zeta_u^{-1}, \tag{2}$$
$$(u = v_2^* + 1, \cdots, m),$$

Einheiten in $K(\sqrt{\mu})$, deren Relativnorm $N_{\sqrt{\mu}, k}$ gleich 1 wird.

Somit wird man stets ganze Zahlen M_s, $\bar{\mu}_u$ in $K(\sqrt[4]{\mu})$ beziehungsweise in $K(\sqrt{\mu})$ finden können derart, daß die Gleichungen

$$\mathsf{H}_s' = \mathsf{M}_s^{1-S}, \quad \bar{\vartheta}_u' = \bar{\mu}^{1-S}, \tag{3}$$
$$(s = v_1^* + 1, \cdots, m; \ u = v_2^* + 1, \cdots, m)$$

statthaben. Man vergleiche hierzu H. A. Z., § 54. Die Ideale (M_s), $(\bar{\mu}_u)$ sind dann, ebenso wie $\mathsf{M} = (\sqrt[4]{\mu})$ und $\bar{\mu} = (\sqrt{\mu})$, ambige Hauptideale des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$.

Nun bezeichnen wir die ambigen Primideale des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ mit $\bar{\mathfrak{d}}_1, \cdots, \bar{\mathfrak{d}}_{t_1}$ und die in diesen Idealen aufgehenden Primideale des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ entsprechend mit $\mathfrak{D}_1, \cdots, \mathfrak{D}_{t_1}$. Außer diesen ambigen Primidealen können im Körper $K(\sqrt[4]{\mu})$ im allgemeinen noch solche Primideale vorkommen, deren Quadrate Ideale in k sind. Schließlich kann es in $K(\sqrt[4]{\mu})$ auch noch solche Primideale $\mathfrak{P}$ geben, die zwar nicht ambig sind, deren Produkt aber mit dem relativ konjugierten Ideal $S\mathfrak{P}$ ein ambiges Ideal $\mathfrak{D} = \mathfrak{P} \cdot S\mathfrak{P}$ ergibt. Es mögen unter $\mathfrak{D}_{t_1+1}, \cdots, \mathfrak{D}_{t_1+t_2}$ zum Teile die außer den bereits angeführten in $K(\sqrt[4]{\mu})$ noch vorhandenen ambigen Primideale, zum Teil solche Produkte $\mathfrak{D} = \mathfrak{P} \cdot S\mathfrak{P}$ verstanden werden. Dann wird man die Hauptideale (M), $(\mathsf{M}_{v_1^*+1}), \cdots, (\mathsf{M}_m)$; $(\bar{\mu})$, $(\bar{\mu}_{v_2^*+1}), \cdots, (\bar{\mu}_m)$ stets in der Form

$$(\mathsf{M}) = \mathfrak{D}_1^{a_1} \cdots \mathfrak{D}_{t_1+t_2}^{a_{t_1+t_2}} \bar{\mathfrak{d}}_1^{b_1} \cdots \bar{\mathfrak{d}}_{t_1}^{b_{t_1}} \mathfrak{j}, \tag{4}$$
$$(\mathsf{M}_s) = \mathfrak{D}_1^{a_1^{(s)}} \cdots \mathfrak{D}_{t_1+t_2}^{a_{t_1+t_2}^{(s)}} \bar{\mathfrak{d}}_1^{b_1^{(s)}} \cdots \bar{\mathfrak{d}}_{t_1}^{b_{t_1}^{(s)}} \mathfrak{j}^{(s)};$$

$$\bar{\mu} = \bar{\mathfrak{d}}_1^{c_1} \cdots \bar{\mathfrak{d}}_{t_1}^{c_{t_1}} \mathfrak{j}_1,$$
$$(\bar{\mu}_u) = \bar{\mathfrak{d}}_1^{c_1^{(u)}} \cdots \bar{\mathfrak{d}}_{t_1}^{c_{t_1}^{(u)}} \mathfrak{j}_1^{(u)}, \tag{5}$$
$$(s = v_1^* + 1, \cdots, m; \ u = v_2^* + 1, \cdots, m)$$

darstellen können, so daß die Exponenten a, b, c gewisse Werte 0, 1 haben und $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{j}^{(s)}$, $\mathfrak{j}_1$, $\mathfrak{j}_1^{(u)}$ Ideale in k bedeuten.

Wir wollen nun nachweisen, daß diese Relationen voneinander unabhängig sind, d. h. daß keine Beziehung

$$(6)\qquad (\mathsf{M})^{e}(\mathsf{M}_{v_1^*+1})^{e_{v_1^*+1}}\cdots(\mathsf{M}_m)^{e_m}(\bar{\mu})^{e'}(\bar{\mu}_{v_2^*+1})^{e'_{v_2^*+1}}\cdots(\bar{\mu}_m)^{e'_m}=\mathfrak{j}^*$$

bestehen kann, wobei die Exponenten $e, e_{v_1^*+1}, \cdots, e_m, e', e'_{v_2^*+1}, \cdots, e'_m$ irgendwelche Werte 0, 1 haben und $\mathfrak{j}^*$ ein Ideal in k ist, außer wenn $e = e_{v_1^*+1} = \cdots = e_m = e' = e'_{v_2^*+1} = \cdots = e'_m = 0$ und $\mathfrak{j}^* = 1$ ist.

Zu diesem Behufe erheben wir (6) in die h^{te} Potenz und erhalten

$$(7)\qquad \mathsf{M}^{eh}\mathsf{M}_{v_1^*+1}^{e_{v_1^*+1}h}\cdots\mathsf{M}_m^{e_m h}\,\bar{\mu}^{e'h}\,\bar{\mu}_{v_2^*+1}^{e'_{v_2^*+1}h}\cdots\bar{\mu}_m^{e'_m h}=\iota\mathsf{E},$$

wo ι eine ganze Zahl aus k und E eine Einheit aus K ist. Indem wir (7) symbolisch mit $1 - S$ potenzieren, erhalten wir

$$\left(\mathsf{M}^{1-S}\right)^{eh}\left(\mathsf{M}_{v_1^*+1}^{1-S}\right)^{e_{v_1^*+1}h}\cdots\left(\mathsf{M}_m^{1-S}\right)^{e_m h}\left(\bar{\mu}^{1-S}\right)^{e'h}\left(\bar{\mu}_{v_2^*+1}^{1-S}\right)^{e'_{v_2^*+1}h}\cdots\left(\bar{\mu}_m^{1-S}\right)^{e'_m h}=\mathsf{E}^{1-S}$$

oder nach (3)

$$i^{-eh}\,\mathsf{H}'^{\,e_{v_1^*+1}h}_{v_1^*+1}\cdots\mathsf{H}'^{\,e_m h}_m\,(-1)^{e'h}\,\bar{\vartheta}^{\,e'_{v_2^*+1}h}_{v_2^*+1}\cdots\bar{\vartheta}^{\,e'_m h}_m=\mathsf{E}^{1-S}.$$

Führen wir nun für $\mathsf{H}'_{v_1^*+1}, \cdots, \mathsf{H}'_m$ die Werte aus (1) ein und beachten dann die in Satz 3 ausgesprochene Eigenschaft der Einheiten $\mathsf{H}_1, \cdots, \mathsf{H}_m$, so erkennen wir sofort, daß die Exponenten $e_{v_1^*+1}, \cdots, e_m$ sämtlich gleich 0 sein müssen. Ebenso überzeugen wir uns, daß auch die Exponenten $e'_{v_2^*+1}, \cdots, e'_m$ sämtlich gleich 0 sein müssen, wenn wir für $\bar{\vartheta}_{v_2^*+1}, \cdots, \bar{\vartheta}_m$ die Werte aus (2) einsetzen und dann die Eigenschaft der relativen Grundeinheiten $\bar{\vartheta}_1, \cdots, \bar{\vartheta}_m$ beachten (man sehe hierzu H. Rq. Z., § 14). Es ist also jetzt noch zu zeigen, daß auch $e = e' = 0$ sein muß. Aus (7) folgt $\mathsf{M}^{(2e'+e)h} = \iota\mathsf{E}$, oder wenn man mit 4 potenziert

$$\mu^{(2e'+e)h} = \iota^4\mathsf{E}^4.$$

Da nun E^4 eine Einheit in k sein muß, so ergibt sich aus unserer speziellen Voraussetzung über μ, daß $e = e' = 0$ sein muß. Es kann daher keine Relation von der Gestalt (7) bestehen. Dann folgt aber, daß man mit Hilfe der Gleichungen (4) und (5) $2m - w^* + 2$ unter den Idealen $\mathfrak{D}_1, \cdots, \mathfrak{D}_{t_1+t_2}, \bar{\mathfrak{d}}_1, \cdots, \bar{\mathfrak{d}}_{t_1}$ — es seien dazu etwa $\mathfrak{D}_1, \cdots, \mathfrak{D}_\sigma, \bar{\mathfrak{d}}_1, \cdots, \bar{\mathfrak{d}}_\tau$, wo $\sigma + \tau = 2m - w^* + 2$ ist, geeignet — durch die übrigen, die wir mit $\mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_{2t_1+t_2-2m+w^*-2}$ bezeichnen, in der Gestalt

$$(8)\qquad \begin{gathered}\mathfrak{D}_s = (\mathsf{B}_s)\,\mathfrak{B}_1^{a_1^{(s)}}\cdots\mathfrak{B}_{2t_1+t_2-2m+w^*-2}^{a^{(s)}_{2t_1+t_2-2m+w^*-2}}\,\mathfrak{j}_s,\\ \bar{\mathfrak{d}}^u = (\Gamma_u)\,\mathfrak{B}_1^{b_1^{(u)}}\cdots\mathfrak{B}_{2t_1+t_2-2m+w^*-2}^{b^{(u)}_{2t_1+t_2-2m+w^*-2}}\,\mathfrak{j}_u,\\ (s = 1, 2, \cdots, \sigma;\ u = 1, 2, \cdots, \tau)\end{gathered}$$

darstellen kann, wobei die Exponenten $a^{(s)}, b^{(u)}$ gewisse Werte 0, 1 haben, B_s, Γ_u Hauptideale in $K(\sqrt[4]{\mu})$, $\mathfrak{j}_s, \mathfrak{j}_u$ Ideale in k bedeuten.

Um dies einzusehen, haben wir außer der bewiesenen Tatsache, daß eine Beziehung (6) nicht bestehen kann, wenn nicht sämtliche Exponenten $e, e_{v_1^*+1}, \cdots, e_m, e', e'_{v_1^*+1}, \cdots, e'_m$ gleich Null sind und $\mathfrak{j}^* = 1$ wird, nur noch den Umstand zu berücksichtigen, daß die Quadrate der Ideale $\mathfrak{D}_1, \cdots, \mathfrak{D}_{t_1+t_2}$; $(\mathsf{M}), (\mathsf{M}_{v_1^*+1}), \cdots, (\mathsf{M}_m)$ Ideale in $K(\sqrt{\mu})$ sind, die durch die Substitution $S = (\sqrt[4]{\mu}) : i\sqrt[4]{\mu})$ ungeändert bleiben, und daß die Biquadrate von

$$(\mathsf{M}),\ (\mathsf{M}_{v_1^*+1}),\ \cdots,\ (\mathsf{M}_m),$$

wie auch die Quadrate von $\bar{\mathfrak{b}}_{v_2^*+1}, \cdots, \bar{\mathfrak{b}}_m$ Ideale in k werden.

Aus (8) ergibt sich sofort die Beziehung

$$a^* \leqq t_1 + \frac{t_2}{2} + \frac{w^*}{2} - m - 1.$$

Die Abänderungen, welche der Beweis in den ausgeschlossenen Fällen, wo μ das Produkt einer Einheit in k mit dem Quadrate einer ganzen Zahl in k ist, zu erfahren hat, sind leicht zu treffen. Man überzeugt sich auch in diesen Fällen von der Richtigkeit des Satzes 7.

Wir wollen das erhaltene Resultat auf beliebige ambige Komplexe des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ ausdehnen, indem wir folgenden Satz beweisen.

Satz 8. Es sei die Anzahl der verschiedenen Primideale des Körpers k, welche in der Relativdiskriminante $\mathfrak{D}_{\sqrt[4]{\mu}, k}$ aufgehen, gleich $t_1 + t_2$ und es seien hiervon genau t_1 in der Relativdiskriminante $\mathfrak{D}_{\sqrt{\mu}, k}$ als Faktoren enthalten; ferner mögen diejenigen Einheiten in k, welche Relativnormen $N_{\sqrt[4]{\mu}, k}$ von Einheiten oder gebrochenen Zahlen in $K(\sqrt[4]{\mu})$ sind, 2^w verschiedene biquadratische Verbände bilden: Dann gilt, wenn wir die Anzahl aller ambigen Komplexe in $K(\sqrt[4]{\mu})$ mit 4^a bezeichnen und

$$t = t_1 + \frac{t_2}{2}, \quad v = \frac{w}{2}$$

setzen, für a die Beziehung

$$a \leqq t + v - m - 1.$$

Beweis. Wir behalten die Bezeichnungsweise des vorigen Satzes bei. Dann wird man offenbar $w - w^*$ Einheiten $\zeta_1, \cdots, \zeta_{w-w^*}$ in k finden können, die Relativnormen $N_{\sqrt[4]{\mu}, k}$ von gebrochenen Zahlen in $K(\sqrt[4]{\mu})$ sind, so daß eine Beziehung von der Form

$$\eta_1^{a_1} \cdots \eta_{v_1^*}^{a_{v_1^*}} \vartheta_1^{2b_1} \cdots \vartheta_{v_2^*}^{2b_{v_2^*}} \zeta_1^{c_1} \cdots \zeta_{w-w^*}^{c_{w-w^*}} \xi^4 = 1,$$

wo ξ eine Einheit in k bedeutet und die Exponenten

$$a_1, \cdots, a_{v_1^*},\ b_1, \cdots, b_{v_2^*},\ c_1, \cdots, c_{w-w^*}$$

beliebige Werte 0, 1 haben, nur dann bestehen kann, wenn sämtliche Exponenten $a_1, \cdots, a_{v_1^*}, b_1, \cdots, b_{v_2^*}, c_1, \cdots, c_{w-w^*}$ gleich 0 sind und $\xi^4 = 1$

wird. Wir denken uns die Einheiten $\zeta_1, \cdots, \zeta_{w-w^*}$ so bestimmt, daß für $\zeta^2_{w-w^*}, \zeta^2_{w-w^*-1}, \cdots, \zeta^2_1$ der Reihe nach Beziehungen von der Gestalt

$$\eta_1^{a_1^{(s)}} \cdots \eta_{v_1^*}^{a_{v_1^*}^{(s)}} \vartheta_1^{2b_1^{(s)}} \cdots \vartheta_{v_2^*}^{2b_{v_2^*}^{(s)}} \zeta_s^2 \zeta_{s+1}^{c_{s+1}^{(s)}} \cdots \zeta_{w-w^*}^{c_{w-w^*}^{(s)}} \xi_s^4 = 1,$$
$$(s = w - w^*, w - w^* - 1, \cdots, 1)$$

statthaben, wobei die Exponenten a, b, c gewisse Werte 0, 1 haben und ξ_s Einheiten in k vorstellen. Dann wird man jede Einheit ζ in k, welche Relativnorm $N_{\sqrt[4]{\mu},k}$ einer ganzen oder gebrochenen Zahl in $K(\sqrt[4]{\mu})$ ist, eindeutig in die Form

$$\zeta = \eta_1^{a_1} \cdots \eta_{v_1^*}^{a_{v_1^*}} \vartheta_1^{2b_1} \cdots \vartheta_{v_2^*}^{2b_{v_2^*}} \zeta_1^{c_1} \cdots \zeta_{w-w^*}^{c_{w-w^*}} \xi^4$$

bringen können, wo die Exponenten $a_1, \cdots, a_{v_1^*}, b_1, \cdots, b_{v_2^*}, c_1, \cdots, c_{w-w^*}$ gewisse Werte 0, 1 haben und ξ eine Einheit in k ist.

Wir bezeichnen mit $\mathsf{A}_1, \cdots, \mathsf{A}_{w-w^*}$ Zahlen in $K(\sqrt[4]{\mu})$, so daß

$$\zeta_1 = N_{\sqrt[4]{\mu},k}(\mathsf{A}_1), \cdots, \zeta_{w-w^*} = N_{\sqrt[4]{\mu},k}(\mathsf{A}_{w-w^*})$$

wird. Verfahren wir dann genau so, wie Hilbert in A. Z. § 148 oder Furtwängler in seiner Preisarbeit, § 5, Satz 20, so können wir $w - w^*$ Ideale $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_{w-w^*}$ bestimmen, so daß

$$\mathsf{A}_s = \mathfrak{A}_s^{1-S},$$
$$(s = 1, 2, \cdots, w - w^*),$$

wird.

Nach den Erläuterungen im Beweise zu Satz 7 kann jedes Ideal $\mathfrak{J}$ des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ mit der Eigenschaft $\mathfrak{J} = S\mathfrak{J}$ durch gewisse $2t_1 + t_2 - 2m + w^* - 2$ Ideale $\mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_{2t_1+t_2-2m+w^*-2}$, in der Form

$$\mathfrak{J} = (\mathsf{B})\mathfrak{B}_1^{a_1} \cdots \mathfrak{B}_{2t_1+t_2-2m+w^*-2}^{a_{2t_1+t_2-2m+w^*-2}}\, \mathfrak{j} \tag{9}$$

ausgedrückt werden, wo die Exponenten $a_1, \cdots, a_{2t_1+t_2-2m+w^*-2}$ gewisse Werte 0, 1 haben, (B) ein Hauptideal in $K(\sqrt[4]{\mu})$ und $\mathfrak{j}$ ein Ideal in k bedeutet. Bezeichnen wir nun die ambigen Komplexe, die aus den Idealen $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_{w-w^*}, \mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_{2t_1+t_2-2m+w^*-2}$ entspringen, mit $A_1, \cdots, A_{w-w^*}$, $B_1, \cdots, B_{2t_1+t_2-2m+w^*-2}$, so kann gezeigt werden, daß jeder ambige Komplex P des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ in der Form

$$P = A_1^{a_1}, \cdots, A_{w-w^*}^{a_{w-w^*}} B_1^{b_1}, \cdots, B_{2t_1+t_2-2m+w^*-2}^{b_{2t_1+t_2-2m+w^*-2}} \tag{10}$$

darstellbar ist, wo die Exponenten a, b gewisse Werte 0, 1 haben.

Es sei $\mathfrak{A}$ ein beliebiges Ideal des ambigen Komplexes P. Da jeder ambige Komplex in $K(\sqrt[4]{\mu})$ nur ambige Klassen enthält, so wird eine Beziehung

$$\left(\frac{S\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}}\right)^3 = \Theta$$

bestehen müssen, wo Θ eine Zahl in $K(\sqrt[4]{\mu})$ bedeutet. Da die Relativnorm $N_{\sqrt[4]{\mu},k}$ von Θ eine Einheit ζ wird, so können wir setzen

$$N_{\sqrt[4]{\mu},k}(\Theta) = \zeta = \eta_1^{a_1} \cdots \eta_{v_1^*}^{a_{v_1^*}} \vartheta_1^{2b_1} \cdots \vartheta_{v_2^*}^{2b_{v_2^*}} \zeta_1^{c_1} \cdots \zeta_{w-w^*}^{c_{w-w^*}} \xi^4,$$

so daß die Exponenten $a_1, \cdots, a_{v_1^*}, b_1, \cdots, b_{v_2^*}, c_1, \cdots, c_{w-w^*}$ gewisse Werte 0, 1 haben und ξ eine Einheit in k bedeutet. Bilden wir jetzt die Zahl

$$(11) \quad \Theta' = \Theta \mathsf{H}_1^{-a_1} \cdots \mathsf{H}_{v_1^*}^{-a_{v_1^*}} \bar{\vartheta}_1^{-2b_1} \cdots \bar{\vartheta}_{v_2^*}^{-2b_{v_2^*}} \mathsf{A}_1^{-c_1} \cdots \mathsf{A}_{w-w^*}^{-c_{w-w^*}} \xi^{-1},$$

so ist

$$N_{\sqrt[4]{\mu},k}(\Theta') = 1$$

und wir können demnach

$$\Theta' = \Lambda^{1-S}$$

setzen, wo Λ eine ganze Zahl in $K(\sqrt[4]{\mu})$ bedeutet. Führen wir dies in (10) ein und gehen zu den Idealen zurück, so erhalten wir eine Relation von der Gestalt

$$(\Lambda)^{1-S} = \left(\frac{S\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}}\right)^s \left(\mathfrak{A}_1^{-c_1} \cdots \mathfrak{A}_{w-w^*}^{-c_{w-w^*}}\right)^{1-S}.$$

Wenn wir daher

$$(12) \qquad \mathfrak{A}^s \mathfrak{A}_1^{c_1} \cdots \mathfrak{A}_{w-w^*}^{c_{w-w^*}} \Lambda = \mathfrak{J}$$

setzen, so wird

$$\mathfrak{J} = S\mathfrak{J}$$

und wir können demnach $\mathfrak{J}$ durch die Ideale $\mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_{2t_1+t_2-2m+w^*-2}$, wie Gleichung (9) lehrt, ausdrücken. Tun wir dies und beachten dann die im Beweise zu Satz 7 erläuterten Eigenschaften der Ideale

$$\mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_{2t_1+t_2-2m+w^*-2},$$

so folgt sofort aus (12) eine Relation von der Gestalt (10).

Damit ist Satz 8 für den Fall, daß μ nicht das Produkt aus einer Einheit in k mit dem Quadrate einer ganzen Zahl in k ist, bewiesen. Man überzeugt sich aber leicht, daß Satz 8 auch im ausgeschlossenen Falle seine Gültigkeit behält.

§ 6.

Die Geschlechter im Körper $K(\sqrt[4]{\mu})$.

Bezüglich der Begriffe: „Geschlecht“, „Charakterensystem einer Zahl und eines Ideals“, „charakteristische Einheiten“ verweisen wir auf § 8 der Lietzmannschen Dissertation.

Es gilt der Satz:

Satz 9. Wenn t und v dieselbe Bedeutung haben, wie in Satz 8, und man mit r_1 die Anzahl der vierwertigen, mit r_2 die Anzahl der zweiwertigen Charaktere eines Komplexes in K bezeichnet, so besteht die Beziehung

$$(1) \qquad t+v-m \leqq r,$$

wo $r = r_1 + \frac{r_2}{2}$ gesetzt worden ist.

Beweis. Bezeichnet man mit $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{r_1^*}$ die vierwertigen, mit $\varepsilon_{r_1^*+1}, \cdots, \varepsilon_{r_1^*+r_2^*}$ die zweiwertigen charakteristischen Einheiten des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ und haben $\eta_1, \cdots, \eta_{v_1^*}, \vartheta_1, \cdots, \vartheta_{v_2^*}, \zeta_1, \cdots, \zeta_{w-w^*}$ dieselbe Bedeutung wie im Beweise zu Satz 8, so kann keine Beziehung von der Form

$$(2) \qquad \varepsilon_1^{a_1} \cdots \varepsilon_{r_1^*}^{a_{r_1^*}} \varepsilon_{r_1^*+1}^{a_{r_1^*+1}} \cdots \varepsilon_{r_1^*+r_2^*}^{a_{r_1^*+r_2^*}} \eta_1^{b_1} \cdots \eta_{v_1^*}^{b_{v_1^*}} \vartheta_1^{2c_1} \cdots \vartheta_{v_2^*}^{2c_{v_2^*}} \zeta_1^{d_1} \cdots \zeta_{w-w^*}^{d_{w-w^*}} = \xi^4$$

bestehen, wo die Exponenten $a_1, \cdots, a_{r_1^*}$ gewisse Werte 0, 1, 2, 3, die Exponenten $a_{r_1^*+1}, \cdots, a_{r_1^*+r_1^*}, b_1, \cdots, b_{v_1^*}, c_1, \cdots, c_{v_2^*}, d_1, \cdots, d_{w-w^*}$ hingegen nur die Werte 0, 1 haben können, außer es sind sämtliche angeführten Exponenten gleich 0. Bestünde nämlich eine Relation (2), so müßte

$$\left(\left(\frac{\varepsilon_1^{a_1} \cdots \varepsilon_{r_1^*+r_2^*}^{a_{r_1^*+r_2^*}} \eta_1^{b_1} \cdots \eta_{v_1^*}^{b_{v_1^*}} \vartheta_1^{2c_1} \cdots \vartheta_{v_2^*}^{2c_{v_2^*}} \zeta_1^{d_1} \cdots \zeta_{w-w^*}^{d_{w-w^*}}, \mu}{\mathfrak{w}}\right)\right) = 1$$

sein für sämtliche Primideale $\mathfrak{w}$ der charakteristischen Symbole. Dies ist jedoch unmöglich, wenn nicht sämtliche Exponenten $a_1, \cdots, a_{r_1^*}$ durch 4 und die Exponenten $a_{r_1^*+1}, \cdots, a_{r_1^*+r_2^*}$ durch 2 teilbar sind und die übrigen Exponenten sämtlich gerade ausfallen.

Nun ist die Anzahl aller biquadratischen Einheitenverbände in k gleich 4^m. Lassen wir im Ausdrucke

$$\varepsilon_1^{a_1} \cdots \varepsilon_{r_1^*}^{a_{r_1^*}} \varepsilon_{r_1^*+1}^{a_{r_1^*+1}} \cdots \varepsilon_{r_1^*+r_2^*}^{a_{r_1^*+r_2^*}} \eta_1^{b_1} \cdots \eta_{v_1^*}^{b_{v_1^*}} \vartheta_1^{2c_1} \cdots \vartheta_{v_2^*}^{2c_{v_2^*}} \zeta_1^{d_1} \cdots \zeta_{w-w^*}^{d_{w-w^*}} \xi^4$$

die Exponenten $a_1, \cdots, a_{r_1^*}$ alle Werte 0, 1, 2, 3, die Exponenten

$$a_{r_1^*+1}, \cdots, a_{r_1^*+r_2^*}, b_1, \cdots, b_{v_1^*}, c_1, \cdots, c_{v_2^*}, d_1, \cdots, d_{w-w^*}$$

die Werte 0, 1 und ξ sämtliche Einheiten in k durchlaufen, so erhalten wir insgesamt $4^{r_1^* + \frac{r_2^*}{2} + v}$ biquadratische Einheitenverbände; folglich ist

$$r_1^* + \frac{r_2^*}{2} + v \leqq m$$

und demnach

$$(3) \qquad t+v-m \leqq r.$$

Wegen Satz 8 muß $r \geqq 1$ sein.

Bezeichnet man mit A die Anzahl aller ambigen Komplexe in $K(\sqrt[4]{\mu})$ und mit g die Anzahl der Geschlechter in $K(\sqrt[4]{\mu})$, so ist $g \leqq A$ (L. § 9). Beachten wir nun die im Satze 8 enthaltene Beziehung und (3), so ergibt sich für die Anzahl g der Geschlechter in $K(\sqrt[4]{\mu})$ die Relation

$$g \leqq 4^{r-1}. \tag{4}$$

§ 7.

Ein gewisses System von $m + z$ zu $1 + i$ primen Primidealen des Körpers k.

Es möge k ein Zahlkörper $2m^{\text{ten}}$ Grades sein, über den wir folgende Annahmen machen:

1) *Der Körper k enthalte den Körper der imaginären Zahlen $k(i)$ als Unterkörper und sei nebst seinen konjugierten Körpern $k', \cdots, k^{(2m-1)}$ imaginär.*

2) *Die Anzahl h der Idealklassen im Körper k sei ungerade.*

Wir verstehen ferner unter $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{m-1}$ ein volles System von Grundeinheiten des Körpers k, und es sei ε_m eine Einheitswurzel in k, deren Quadratwurzel nicht in k liegt, so daß jede beliebige Einheit ε des Körpers k sich auf eine und nur auf eine Weise in der Gestalt

$$\varepsilon = \varepsilon_1^{u_1}\varepsilon_2^{u_2}\cdots\varepsilon_m^{u_m}\xi^2$$

darstellen läßt, wo $u_1, u_2, \cdots, u_m$ gewisse Werte 0, 1 haben und ξ eine Einheit in k bedeutet.

Für die Primzahl $1 + i$ des Körpers $k(i)$ möge in k die Zerlegung

$$1 + i = \mathfrak{l}_1^{l_1}\mathfrak{l}_2^{l_2}\cdots\mathfrak{l}_z^{l_z}$$

gelten, wo $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \cdots, \mathfrak{l}_z$ voneinander verschiedene Primideale des Körpers k bedeuten, und es sei weiter

$$(\lambda_1) = \mathfrak{l}_1^{hh'}, \quad (\lambda_2) = \mathfrak{l}_2^{hh'}, \cdots, (\lambda_z) = \mathfrak{l}_z^{hh'},$$

wobei $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_z$ ganze Zahlen in k sind und h' derart bestimmt werden soll, daß es die Kongruenz $hh' \equiv 1, (4)$ befriedigt.

Wir wollen nun folgenden Satz beweisen:

Satz 10. Es seien $\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_m$ solche zu $1 + i$ prime Primideale des Körpers k, für welche

$$\left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{q}_s}\right)\right) = \pm i, \quad \left(\left(\frac{\varepsilon_k}{\mathfrak{q}_s}\right)\right) = +1 \qquad (s \neq k),$$

$$(s, k = 1, 2, \cdots, m)$$

ausfällt; ferner seien $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_m$ quadratisch primäre*) Primideale in k, für welche

$$\left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{p}_k}\right)\right) = +1, \qquad (s, k = 1, 2, \cdots, m);$$

$$\left(\frac{\lambda_k}{\mathfrak{p}_k}\right) = -1, \qquad \left(\frac{\lambda_k}{\mathfrak{p}_l}\right) = +1 \qquad (k \neq l)$$

$$(k, l = 1, 2, \cdots, z)$$

wird. Setzen wir nun

$$\mathfrak{q}_1^{hh'} = (\varkappa_1), \cdots, \mathfrak{q}_m^{hh'} = (\varkappa_m), \qquad \mathfrak{p}_1^{hh'} = (\pi_1), \cdots, \mathfrak{p}_z^{hh'} = (\pi_z),$$

so daß $\varkappa_1, \cdots, \varkappa_m, \pi_1, \cdots, \pi_z$ gewisse ganze Zahlen des Körpers k bedeuten und außerdem $\pi_1, \cdots, \pi_z$ quadratisch primäre Zahlen sind, dann gilt für jede beliebige zu $1 + i$ prime ganze Zahl ω in k nach dem Modul 8 eine Kongruenz von der Gestalt

(1) $$\omega \equiv \varepsilon_1^{u_1} \cdots \varepsilon_m^{u_m} \varkappa_1^{v_1} \cdots \varkappa_m^{v_m} \pi_1^{w_1} \cdots \pi_z^{w_z} \alpha^4, \quad (8),$$

worin die Exponenten $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m$ gewisse Werte $0, 1, 2, 3$, die Exponenten $w_1, \cdots, w_z$ nur die Werte $0, 1$ haben können und α eine geeignete ganze Zahl in k bedeutet.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß eine Zahl μ von der Form

(a) $$\mu = \varepsilon_1^{u_1} \cdots \varepsilon_m^{u_m} \varkappa_1^{v_1} \cdots \varkappa_m^{v_m} \pi_1^{w_1} \cdots \pi_z^{w_z},$$

wo $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m$ gewisse Werte $0, 1, 2, 3$, $w_1, \cdots, w_z$ nur die Werte $0, 1$ haben können, nicht dem Biquadrate einer ganzen Zahl in k nach 8 kongruent sein kann, es sei denn, daß die Exponenten

$$u_1, \cdots, u_m, \; v_1, \cdots, v_m, \; w_1, \cdots, w_z$$

sämtlich gleich 0 sind.

Wenn unter den Exponenten $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m, w_1, \cdots, w_z$ mindestens einer ungerade ist, so folgt die Richtigkeit unserer Behauptung aus dem Umstande, daß

$$\varepsilon_1^{u_1} \cdots \varepsilon_m^{u_m} \varkappa_1^{v_1} \cdots \varkappa_m^{v_m} \pi_1^{w_1} \cdots \pi_z^{w_z},$$

wo die Exponenten $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m, w_1, \cdots, w_z$ gewisse Werte $0, 1$ haben, nicht dem Quadrate einer ganzen Zahl in k nach dem Modul

$$\mathfrak{l}_1^{4l_1+1}\, \mathfrak{l}_2^{4l_2+1} \cdots \mathfrak{l}_z^{4l_z+1}$$

kongruent sein kann, es sei denn, daß die Exponenten $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m, w_1, \cdots, w_z$ sämtlich gleich 0 sind (H. Rq. Z. § 21, Satz 29). Soll also μ

*) Wir gebrauchen im Nachstehenden statt der Ausdrücke „primär“, „hyperprimär“ der Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers die ausführlicheren Ausdrücke „quadratisch primär“, „quadratisch hyperprimär“.

dem Biquadrate einer ganzen Zahl in k nach 8 kongruent sein, so müssen jedenfalls die Exponenten $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m, w_1, \cdots, w_z$ in (a) sämtlich gerade ausfallen.

Sind aber die Exponenten $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m, w_1, \cdots, w_z$ sämtlich gerade und setzen wir etwa

$$u_1 = 2a_1, \cdots, u_m = 2a_m, \quad v_1 = 2b_1, \cdots, v_m = 2b_m, \quad w_1 = 0, \cdots, w_z = 0,$$

wo $a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots, b_m$ gewisse Werte 0, 1 haben, so müßte eine Kongruenz von der Gestalt

$$\varepsilon_1^{2a_1} \cdots \varepsilon_m^{2a_m} \varkappa_1^{2b_1} \cdots \varkappa_m^{2b_m} \equiv \alpha^4, \quad (8)$$

bestehen, worin α eine ganze Zahl in k bedeutet.

Wir greifen nun unter den Primidealen, die in $1+i$ als Faktoren enthalten sind, ein beliebiges heraus und bezeichnen es mit $\mathfrak{l}$. Es möge $\mathfrak{l}$ in $1+i$ genau zur l^{ten} Potenz aufgehen, so folgt aus der letzten Kongruenz, daß

$$\varepsilon_1^{a_1} \cdots \varepsilon_m^{a_m} \varkappa_1^{b_1} \cdots \varkappa_m^{m} \equiv \pm \alpha^2, \quad (\mathfrak{l}^{4l})$$

sein muß. Beachten wir jetzt, daß $-1 = i^2$ und i eine Zahl in k ist, so können wir folgende Kongruenzen aufschreiben:

$$\varepsilon_1^{a_1} \cdots \varepsilon_m^{a_m} \varkappa_1^{b_1} \cdots \varkappa_m^{b_m} \equiv {\alpha_1}^2, \quad (\mathfrak{l}_1^{4l_1}),$$
$$\varepsilon_1^{a_1} \cdots \varepsilon_m^{a_m} \varkappa_1^{b_1} \cdots \varkappa_m^{b_m} \equiv {\alpha_2}^2, \quad (\mathfrak{l}_2^{4l_2}),$$
$$\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots$$
$$\varepsilon_1^{a_1} \cdots \varepsilon_m^{a_m} \varkappa_1^{b_1} \cdots \varkappa_m^{b_m} \equiv {\alpha_z}^2, \quad (\mathfrak{l}_z^{4l_z}),$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_z$ geeignete ganze Zahlen in k vorstellen. Man könnte demnach eine ganze Zahl β in k derart bestimmen, daß die Kongruenz

$$\varepsilon_1^{a_1} \cdots \varepsilon_m^{a_m} \varkappa_1^{b_1} \cdots \varkappa_m^{b_m} \equiv \beta^2, \quad (4)$$

stattfände. Dies ist jedoch nur möglich, wenn die Exponenten $a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots, b_m$ sämtlich gleich Null sind (H. Rq. Z. § 21). Damit ist die Aussage über die Zahl μ bewiesen.

Wir setzen nun zur Abkürzung

$$L_1 = n(\mathfrak{l}_1^{2l_1})\left(1 - \frac{1}{n(\mathfrak{l}_1)}\right),$$

wo n die Norm genommen im Körper k bedeutet, und verstehen unter

$$\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_1^{(L_1)}$$

ein volles System von ganzen zu $\mathfrak{l}_1$ primen und nach $\mathfrak{l}_1^{2l_1}$ einander inkongruenten Zahlen in k, die überdies sämtlich kongruent 1 nach dem Modul $\mathfrak{l}_2^{2l_2} \mathfrak{l}_3^{2l_3} \cdots \mathfrak{l}_z^{2l_z}$ sein sollen. Da allgemein

$$\alpha_1^{(k)} \not\equiv i\alpha_1^{(k)}, \quad (\mathfrak{l}_1^{2l_1})$$
$$(k = 1, 2, \cdots, L_1)$$

ist, so können wir annehmen, es sei etwa stets

$$i\alpha_1^{(k)} \equiv \alpha_1^{\left(\frac{L_1}{2}+k\right)}, \quad (\mathfrak{l}_1^{2l_1})$$
$$\left(k = 1, 2, \cdots, \frac{L_1}{2}\right).$$

Die $\frac{L_1}{2}$ Zahlen $\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_1^{\left(\frac{L_1}{2}\right)}$ haben dann offenbar die Eigenschaft, daß, wenn α_1 eine beliebige unter ihnen bedeutet, in diesem Systeme keine Zahl vorkommt, die kongruent $i\alpha_1$ nach dem Modul $\mathfrak{l}_1^{2l_1}$ wäre.

Ferner setzen wir zur Abkürzung

$$L_2 = n(\mathfrak{l}_2^{2l_2})\left(1 - \frac{1}{n(\mathfrak{l}_2)}\right),$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$L_z = n(\mathfrak{l}_z^{2l_z})\left(1 - \frac{1}{n(\mathfrak{l}_z)}\right)$$

und bilden in der entsprechenden Weise wie oben zunächst das System von $\frac{L_2}{2}$ ganzen, zu $\mathfrak{l}_2$ primen Zahlen

$$\alpha_2^{(1)}, \cdots, \alpha_2^{\left(\frac{L_2}{2}\right)},$$

die sämtlich kongruent 1 nach $\mathfrak{l}_1^{2l_1}\mathfrak{l}_3^{2l_3}\cdots\mathfrak{l}_z^{2l_z}$ sind und die Eigenschaft haben, daß, wenn α_2 eine beliebige Zahl dieses Systems ist, in diesem System keine Zahl vorkommt, die kongruent $i\alpha_2$ nach dem Modul $\mathfrak{l}_2^{2l_2}$ wäre, u. s. f.; endlich bilden wir ein System von $\frac{L_z}{2}$ ganzen, zu $\mathfrak{l}_z$ primen Zahlen

$$\alpha_z^{(1)}, \cdots, \alpha_z^{\left(\frac{L_z}{2}\right)},$$

die sämtlich kongruent 1 nach $\mathfrak{l}_1^{2l_1}\mathfrak{l}_2^{2l_2}\cdots\mathfrak{l}_{z-1}^{2l_{z-1}}$ sind und die Eigenschaft haben, daß, wenn α_z eine beliebige Zahl des Systems bedeutet, in diesem Systeme keine Zahl vorkommt, die kongruent $i\alpha_z$ nach dem Modul $\mathfrak{l}_z^{2l_z}$ wäre.

Der Ausdruck

$$(2) \qquad \varepsilon_1^{u_1}\cdots\varepsilon_m^{u_m}\varkappa_1^{v_1}\cdots\varkappa_m^{v_m}\pi_1^{w_1}\cdots\pi_z^{w_z}\left(\alpha_1^{(i_1)}\right)^4\cdots\left(\alpha_z^{(i_z)}\right)^4$$
$$\left(\begin{matrix} u_1, \cdots, u_m, \; v_1, \cdots, v_m = 0, 1, 2, 3; \; w_1, \cdots, w_z = 0, 1, \\ i_1 = 1, 2, \cdots, \frac{L_1}{2}; \cdots; i_z = 1, 2, \cdots, \frac{L_z}{2} \end{matrix}\right)$$

stellt ein System von

$$2^{6m}\left(1-\frac{1}{n(\mathfrak{l}_1)}\right)\left(1-\frac{1}{n(\mathfrak{l}_2)}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n(\mathfrak{l}_z)}\right)$$

ganzen Zahlen in k dar; diese sind sämtlich zu $1+i$ prim und nach 8 einander inkongruent. In der Tat, wären zwei Zahlen von der Gestalt (2) einander nach 8 kongruent, wäre etwa

$$\begin{aligned}(3)\qquad &\varepsilon_1^{u_1}\cdots\varepsilon_m^{u_m}\varkappa_1^{v_1}\cdots\varkappa_m^{v_m}\pi_1^{w_1}\cdots\pi_m^{w_m}\left(\alpha_1^{(i_1)}\right)^4\cdots\left(\alpha_z^{(i_z)}\right)^4\\ &\equiv\varepsilon_1^{u'_1}\cdots\varepsilon_m^{u'_m}\varkappa_1^{v'_1}\cdots\varkappa_m^{v'_m}\pi_1^{w'_1}\cdots\pi_m^{w'_z}\left(\alpha_1^{(i_1')}\right)^4\cdots\left(\alpha_z^{(i_z')}\right)^4,\quad(8),\end{aligned}$$

so würde, da die Zahlen $\alpha_1^{(i)},\cdots,\alpha_z^{(i)}$ sämtlich zu $1+i$ prim sind, aus dem vorhin Bewiesenen sofort folgen, daß die Exponenten $u_1,\cdots,u_m$, $v_1,\cdots,v_m$, $w_1,\cdots,w_z$ bez. mit den Exponenten $u'_1,\cdots,u'_m$, $v'_1,\cdots,v'_m$, $w'_1,\cdots,w'_z$ übereinstimmen und es wäre mithin

$$\left(\alpha_1^{(i_1)}\right)^4\cdots\left(\alpha_z^{(i_z)}\right)^4\equiv\left(\alpha_1^{(i'_1)}\right)^4\cdots\left(\alpha_z^{(i'_z)}\right)^4,\quad(8).$$

Aus dieser Kongruenz entnehmen wir der Reihe nach die z Kongruenzen

$$\left(\alpha_1^{(i_1)}\right)^4\equiv\left(\alpha_1^{(i'_1)}\right)^4,\quad\left(\mathfrak{l}_1^{6l_1}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\alpha_1^{(i_z)}\right)^4\equiv\left(\alpha_z^{(i'_z)}\right)^4,\quad\left(\mathfrak{l}_z^{6l_z}\right).$$

Betrachten wir nun eine beliebige unter diesen Kongruenzen, z. B. die folgende:

$$\left(\alpha_k^{(i_k)}\right)^4\equiv\left(\alpha_k^{(i'_k)}\right)^4,\quad\left(\mathfrak{l}_k^{6l_k}\right).$$

Aus dieser Kongruenz würde weiter folgen, daß

$$\left[\left(\alpha_k^{(i_k)}\right)^2+\left(\alpha_k^{(i'_k)}\right)^2\right]\left[\left(\alpha_k^{(i_k)}\right)^2-\left(\alpha_k^{(i'_k)}\right)^2\right]\equiv 0,\quad\left(\mathfrak{l}_k^{6l_k}\right)$$

sein muß. Demnach müßte entweder

$$\left(\alpha_k^{(i_k)}\right)^2+\left(\alpha_k^{(i'_k)}\right)^2\quad\text{oder}\quad\left(\alpha_k^{(i_k)}\right)^2-\left(\alpha_k^{(i'_k)}\right)^2$$

durch $\mathfrak{l}_k^{4l_k}$ teilbar sein. Im ersteren Falle könnten wir weiter schließen, daß $\alpha_k^{(i_k)}-i\alpha_k^{(i'_k)}$ durch $\mathfrak{l}_k^{2l_k}$ teilbar sein muß. Dies verstößt aber gegen die Eigenschaft der oben aufgestellten z Systeme der α. Im letzteren Falle würde wieder folgen, daß $\alpha_k^{(i_k)}-\alpha_k^{(i'_k)}$ durch $\mathfrak{l}_k^{2l_k}$ teilbar sein muß, woraus sich $i_k=i_k'$ ergibt. Dies gilt für $k=1,2,\cdots,z$, so daß wir allgemein

$$i_1=i_1',\quad i_2=i_2',\cdots,\ i_z=i_z'$$

hätten, d. h. die beiden Ausdrücke auf der linken und rechten Seite der Kongruenz (3) waren nicht voneinander verschieden.

Nun gibt es für den Modul 8 genau

$$2^{6m}\left(1-\frac{1}{n(\mathfrak{l}_1)}\right)\left(1-\frac{1}{n(\mathfrak{l}_2)}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n(\mathfrak{l}_z)}\right)$$

zu $1+i$ prime und untereinander inkongruente Zahlen; mithin bilden die ganzen Zahlen in (2) ein volles Restsystem der genannten Art nach 8. Dies ist die Aussage des Satzes 10.

Auch für den Modul $\mathfrak{l}_1^{6l_1+1}\mathfrak{l}_2^{6l_2+1}\cdots\mathfrak{l}_z^{6l_z+1}$ kann man eine der Kongruenz (1), die wir für den Modul 8 fanden, analoge Kongruenz bestimmen. Es gilt hier

Satz 10*. Wenn $\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_m, \mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_z; \varkappa_1, \cdots, \varkappa_m, \pi_1, \cdots, \pi_z$ dieselbe Bedeutung haben, wie in Satz 10, so gilt für jede beliebige zu $1+i$ prime ganze Zahl ω in k nach dem Modul $\mathfrak{l}_1^{6l_1+1}\mathfrak{l}_2^{6l_2+1}\cdots\mathfrak{l}_z^{6l_z+1}$ eine Kongruenz von der Gestalt

$$(4)\qquad \omega \equiv \varepsilon_1^{u_1}\cdots\varepsilon_m^{u_m}\varkappa_1^{v_1}\cdots\varkappa_m^{v_m}\pi_1^{w_1}\cdots\pi_z^{w_z}\alpha^4, \quad \left(\mathfrak{l}_1^{6l_1+1}\mathfrak{l}_2^{6l_2+1}\cdots\mathfrak{l}_z^{6l_z+1}\right),$$

worin die Exponenten $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots v_m, w_1, \cdots, w_z$ gewisse Werte 0, 1, 2, 3 haben und α eine geeignete ganze Zahl in k ist.

Beweis. Auch in diesem Falle können wir zunächst nachweisen, daß eine Zahl von der Form

$$\varepsilon_1^{u_1}\cdots\varepsilon_m^{u_m}\varkappa_1^{v_1}\cdots\varkappa_m^{v_m}\pi_1^{w_1}\cdots\pi_z^{w_z},$$

wo die Exponenten $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m, w_1, \cdots, w_z$ gewisse Werte 0, 1, 2, 3 haben, nicht dem Biquadrate einer ganzen Zahl in k nach dem Modul $\mathfrak{l}_1^{6l_1+1}\mathfrak{l}_2^{6l_2+1}\cdots\mathfrak{l}_z^{6l_z+1}$ kongruent sein kann, es sei denn, daß die Exponenten $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m, w_1, \cdots, w_z$ sämtlich gleich Null sind. Man beweist dies wie im analogen Falle des Satzes 10. Die Abänderungen, die an jenem Beweise anzubringen sind, weil die Exponenten $w_1, \cdots, w_z$ jetzt die vier Werte 0, 1, 2, 3 haben können, sind leicht zu treffen. (Man beachte hierzu H. Rq. Z. § 30.)

Wir setzen nun zur Abkürzung

$$L_1 = n(\mathfrak{l}_1^{2l_1})(n(\mathfrak{l}_1)-1)$$

und verstehen unter

$$(5)\qquad \alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_1^{(L_1)}$$

ein volles System von ganzen zu $\mathfrak{l}_1$ primen nach $\mathfrak{l}_1^{2l_1+1}$ einander inkongruenten Zahlen in k, die überdies sämtlich kongruent 1 nach dem Modul $\mathfrak{l}_2^{2l_2+1}\mathfrak{l}_3^{2l_3+1}\cdots\mathfrak{l}_z^{2l_z+1}$ sein sollen. Da allgemein

$$\alpha_1^{(l)} \not\equiv -\alpha_1^{(k)}, \quad \not\equiv \pm i\alpha_1^{(k)}, \quad (\mathfrak{l}_1^{2l_1+1})$$
$$(k = 1, 2, \cdots, L_1)$$

ist, so können wir die Zahlen des Systems (5) folgendermaßen anordnen:

$$\begin{array}{ll} \alpha_1^{(1)}, \cdots, & \alpha_1^{\left(\frac{L_1}{4}\right)}, \\ -\alpha_1^{(1)}, \cdots, & -\alpha_1^{\left(\frac{L_1}{4}\right)}, \\ i\alpha_1^{(1)}, \cdots, & i\alpha_1^{\left(\frac{L_1}{4}\right)}, \\ -i\alpha_1^{(1)}, \cdots, & -i\alpha_1^{\left(\frac{L_1}{4}\right)}. \end{array}$$

Die Zahlen der zweiten, dritten und vierten Reihe erhält man aus den Zahlen der ersten Reihe, indem man die Zahlen dieser Reihe beziehungsweise mit -1, i und $-i$ multipliziert. Die Zahlen der ersten Reihe haben dann offenbar die Eigenschaft, daß, wenn α_1 eine beliebige unter ihnen bedeutet, in diesem Systeme keine Zahl vorkommt, die kongruent $-\alpha$, $i\alpha$ oder $-i\alpha$ nach dem Modul $\mathfrak{l}_1^{2l_1+1}$ wäre.

Ferner setzen wir

$$\begin{aligned} L_2 &= n(\mathfrak{l}_2^{2l_2})\,(n(\mathfrak{l}_2)-1), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ L_z &= n(\mathfrak{l}_z^{2l_z})\,(n(\mathfrak{l}_z)-1) \end{aligned}$$

und bilden in der entsprechenden Weise für den Modul $\mathfrak{l}_2^{2l_2+1}$ ein analoges System von $\frac{L_2}{4}$ Zahlen u. s. f.; endlich für den Modul $\mathfrak{l}_z^{2l_z+1}$ ein analoges System von $\frac{L_z}{4}$ Zahlen. Man vergleiche hierzu den Beweis zu Satz 10. Bezeichnet man diese Systeme der Reihe nach mit

$$\begin{array}{l} \alpha_2^{(1)}, \cdots, \alpha_2^{\left(\frac{L_2}{4}\right)}, \\ \cdots\cdots \\ \alpha_z^{(1)}, \cdots, \alpha_z^{\left(\frac{L_z}{4}\right)}, \end{array}$$

so kann man, wie in Satz 10, nachweisen, daß der Ausdruck

$$\varepsilon_1^{u_1}\cdots\varepsilon_m^{u_m}\,\varkappa_1^{v_1}\cdots\varkappa_m^{v_m}\cdots\pi_1^{w_1}\cdots\pi_z^{w_z}\left(\alpha_1^{(i_1)}\right)^4\cdots\left(\alpha_z^{(i_z)}\right)^4, \tag{6}$$

$$\begin{pmatrix} u_1, \cdots, u_m;\ v_1, \cdots, v_m;\ w_1, \cdots, w_z = 0, 1, 2, 3, \\ i_1 = 1, 2, \cdots, \frac{L_1}{4}; \cdots; i_z = 1, 2, \cdots, \frac{L_z}{4} \end{pmatrix}$$

ein System von

$$2^{4m} L_1 L_2 \cdots L_z$$

ganzen Zahlen in k darstellt, die sämtlich zu $1+i$ prim und nach $\mathfrak{l}_1^{6l_1+1}\mathfrak{l}_2^{6l_2+1}\cdots\mathfrak{l}_z^{6l_z+1}$ einander inkongruent sind. Da es aber für den Modul $\mathfrak{l}_1^{6l_1+1}\mathfrak{l}_2^{6l_2+1}\cdots\mathfrak{l}_z^{6l_z+1}$ genau $2^{4m}L_1L_2\cdots L_z$ solcher Zahlen gibt, so bilden die ganzen Zahlen (6) ein volles Restsystem der genannten Art nach $\mathfrak{l}_1^{6l_1+1}\mathfrak{l}_1^{6l_2+1}\cdots\mathfrak{l}_z^{6l_z+1}$; dies ist die Aussage des Satzes 10*.

§ 8.

Ein Satz aus der Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers.

Wir wollen in diesem Paragraphen einen Satz ableiten, von welchem wir später Gebrauch machen werden.

Satz 11. Es seien $\mathfrak{l}_1, \cdots, \mathfrak{l}_z$ die voneinander verschiedenen Primfaktoren von $1+i$ in k und es gehe $\mathfrak{l}_1$ genau zur l_1^{ten}, ferner die Primideale $\mathfrak{l}_2, \cdots, \mathfrak{l}_z$ bez. genau zur $l_2, \cdots, l_z^{\text{ten}}$ Potenz in $1+i$ auf. Wir setzen

$$\mathfrak{l}_1^h = (\lambda_1), \cdots, \mathfrak{l}_z^h = (\lambda_z),$$

so daß $\lambda_1, \cdots, \lambda_z$ ganze Zahlen im k sind, und bestimmen ein quadratisch primäres Primideal $\mathfrak{p}_1$ in k derart, daß es die Gleichungen

$$(1) \qquad \left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}_1}\right) = -1, \quad \left(\frac{\lambda_2}{\mathfrak{p}_1}\right) = +1, \cdots, \left(\frac{\lambda_z}{\mathfrak{p}_1}\right) = +1$$

befriedigt; es sei endlich $\mathfrak{p}_1^h = (\pi_1)$, wo π_1 eine quadratisch primäre Zahl bedeutet.

Ist dann μ eine quadratisch primäre Zahl in k, für welche die Gleichungen

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}_1}\right) = -1, \quad \left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}_s}\right) = +1, \quad (s = 2, 3, \cdots, z)$$

bestehen, so gilt für μ nach dem Modul $\mathfrak{l}_1^{4l_1+1} \cdots \mathfrak{l}_z^{4l_z+1}$ eine Kongruenz von der Gestalt

$$\mu \equiv \pi_1 \alpha^2, \quad (\mathfrak{l}_1^{4l_1+1} \cdots \mathfrak{l}_z^{4l_z+1}),$$

wo α eine ganze Zahl in k bedeutet.

Beweis. Wegen (1) müssen auch die Beziehungen

$$\left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{l}_1}\right) = -1, \quad \left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{l}_2}\right) = +1, \cdots, \left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{l}_z}\right) = +1$$

stattfinden; daher ist

$$\left(\frac{\pi_1 \mu}{\mathfrak{l}_s}\right) = +1, \quad (s = 1, 2, \cdots, z),$$

d. h. $\pi_1 \mu$ ist eine quadratisch hyperprimäre Zahl in k, womit Satz 11 bewiesen ist.

§ 9.

Das primäre Ideal und die primäre Zahl.

Definition 3. Ist das zu $1+i$ prime Ideal $\mathfrak{a}$ in k so beschaffen, daß für jede Einheit ε in k das Symbol $\left(\left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{a}}\right)\right)$ den Wert $+1$ hat, so heiße $\mathfrak{a}$ ein *biquadratisch primäres* oder kurz *primäres Ideal.* Alle Ideale, die diese Eigenschaft nicht haben, heißen *biquadratisch nichtprimäre* oder kurz *nichtprimäre Ideale.*

Definition 4. Es sei α eine beliebige ganze Zahl in k, die nicht das Quadrat einer ganzen Zahl in k ist. Fällt dann die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\alpha}, k}$ des Körpers $K(\sqrt[4]{\alpha})$ prim zu $1+i$ aus, so heiße α eine *biquadratisch primäre* oder kurz *primäre Zahl.*

§ 10.

Eigenschaften der primären Primideale.

Die primären Ideale zeichnen sich durch besondere Eigenschaften aus, zu deren Herleitung uns folgender Hilfssatz verhelfen wird.

Satz 12. Bedeutet μ eine *quadratisch primäre* Zahl des Körpers k, so kann man stets ganze Zahlen ξ in k bestimmen derart, daß die Zahl $\xi^2\mu$ *primär* wird.

Beweis. Es sei $\mathfrak{l}$ ein Primideal des Körpers k, welches in $1+i$, u. zw. genau zur l^{ten} Potenz aufgeht. Da nach Voraussetzung μ eine quadratisch primäre Zahl ist, so ist das Symbol $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right)$ entweder gleich $+1$ oder -1. Im ersteren Falle zerfällt $\mathfrak{l}$ im Körper $K(\sqrt{\mu})$ in zwei voneinander verschiedene Primideale $\overline{\mathfrak{l}}$, $S\overline{\mathfrak{l}}$ nach der Gleichung $\mathfrak{l} = \overline{\mathfrak{l}} \cdot S\overline{\mathfrak{l}}$. Nun ist $n(\mathfrak{l}^e) = n_{\sqrt{\mu}}(\overline{\mathfrak{l}}^e)$, wo e eine beliebige positive ganze rationale Zahl ist, und es wird jede ganze Zahl in $K(\sqrt{\mu})$ kongruent einer ganzen Zahl des Körpers k nach $\mathfrak{l}^e$. Insbesondere muß eine ganze Zahl ξ in k bestehen derart, daß

$$(1) \qquad \sqrt{\mu} \equiv \xi, \quad (\overline{\mathfrak{l}}^{4l})$$

wird.

Ist hingegen $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right) = -1$ und etwa

$$(2) \qquad \mu \equiv \alpha^2, \quad (\mathfrak{l}^{4l}),$$

wo α eine ganze Zahl in k bedeutet, so bestimmen wir eine ganze Zahl λ in k, die genau durch $\mathfrak{l}$ teilbar ist und eine zu $\mathfrak{l}$ prime ganze Zahl ϱ, die durch $\frac{\lambda}{\mathfrak{l}}$ teilbar ist. Dann ist

$$\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^l (\alpha + i\sqrt{\mu})$$

eine ganze zu $\mathfrak{l}$ prime Zahl in $K\sqrt{\mu}$).

Wir zeigen nun, daß man stets eine ganze Zahl ξ in k bestimmen kann derart, daß die Kongruenz

$$(3) \qquad \varrho^{2l}\xi\sqrt{\mu} \equiv \left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^{2l}(\alpha + i\sqrt{\mu})^2, \quad (\mathfrak{l}^{4l})$$

befriedigt wird. Diese Kongruenz kann folgendermaßen geschrieben werden

$$\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^{2l}(\alpha^2-\mu)-\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^{2l}(\lambda^{2l}\xi+2\alpha i)\sqrt{\mu}\equiv 0, \quad (\mathfrak{l}^{4l}).$$

Bezeichnet man die linke Seite dieser Kongruenz etwa mit $\bar{\sigma}$, so muß $\bar{\sigma}+S\bar{\sigma}$ durch $\mathfrak{l}^{4l}$ und $\bar{\sigma}\cdot S\bar{\sigma}$ durch $\mathfrak{l}^{8l}$ teilbar sein. Das erstere ist immer der Fall, und es muß demnach ξ so bestimmt werden, daß die Kongruenz

$$\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^{4l}(\alpha^2-\mu)^2-\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^{4l}(\lambda^{2l}\xi+2\alpha i)^2\mu\equiv 0, \quad (\mathfrak{l}^{8l})$$

stattfindet. Multipliziert man diese Kongruenz mit μ, so kann sie auch in der Gestalt

$$\left(\varrho^{2l}\xi+\frac{2\varrho^{2l}\alpha i}{\lambda^{2l}}\right)^2\mu^2\equiv\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^{4l}(\alpha^2-\mu)^2\mu, \quad (\mathfrak{l}^{8l})$$

geschrieben werden oder weiter, wenn man (2) beachtet, in der Form

$$\left(\varrho^{2l}\xi+\frac{2\varrho^{2l}\alpha i}{\lambda^{2l}}\right)^2\mu^2\equiv\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^{4l}(\alpha^2-\mu)^2\alpha^2, \quad (\mathfrak{l}^{8l}).$$

Bestimmt man jetzt ξ nach der Kongruenz

$$\left(\varrho^{2l}\xi+\frac{2\varrho^{2l}\alpha i}{\lambda^{2l}}\right)\mu\equiv\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^{2l}(\alpha^2-\mu)\alpha, \quad (\mathfrak{l}^{6l}),$$

so befriedigt es die oben gestellte Anforderung.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \cdots, \mathfrak{l}_z$ die sämtlichen in $1+i$ aufgehenden Primideale des Körpers k, und es gehe $\mathfrak{l}_1$ genau zur l_1^{ten}, $\mathfrak{l}_2$ genau zur l_2^{ten}, usf., $\mathfrak{l}_z$ genau zur l_z^{ten} Potenz in $1+i$ auf, dann lehren die Kongruenzen (1) und (3), daß man zu diesen Primidealen stets ganze Zahlen $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_z$ in k finden kann derart, daß Kongruenzen von der Gestalt

$$\xi_1\sqrt{\mu}\equiv\bar{\alpha}_1^{\,2}, \quad (\mathfrak{l}_1^{4l_1}),$$
$$\xi_2\sqrt{\mu}\equiv\bar{\alpha}_2^{\,2}, \quad (\mathfrak{l}_2^{4l_2}),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\xi_z\sqrt{\mu}\equiv\bar{\alpha}_z^{\,2}, \quad (\mathfrak{l}_z^{4l_z})$$

statthaben, wo $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \cdots, \bar{\alpha}_z$ ganze Zahlen in $K(\sqrt{\mu})$ bedeuten. Bestimmt man ferner eine ganze Zahl ξ nach folgenden Kongruenzen:

$$\xi\equiv\xi_1, \quad (\mathfrak{l}_1^{4l_1}),$$
$$\xi\equiv\xi_2, \quad (\mathfrak{l}_2^{4l_2}),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\xi\equiv\xi_z, \quad (\mathfrak{l}_z^{4l_z}),$$

so wird für diese Zahl ξ offenbar auch eine Kongruenz von der Form

$$\xi\sqrt{\mu}\equiv\bar{\alpha}^2, \quad (4)$$

bestehen müssen, wo $\bar{\alpha}$ eine ganze Zahl in $K(\sqrt{\mu})$ bedeutet, und dies ist die Aussage des Hilfssatzes 12.

Nun sind wir imstande, folgenden Satz zu beweisen:

Satz 13. Ist $\mathfrak{p}$ ein beliebiges primäres Primideal in k, so kann man stets eine primäre Zahl π in k bestimmen derart, daß $\mathfrak{p}^{hh'} = (\pi)$ wird.

Beweis. Da $\mathfrak{p}$ ein primäres Primideal sein soll, so können wir zunächst eine quadratisch primäre Zahl π^* in k bestimmen, so daß $\mathfrak{p}^{hh'} = (\pi^*)$ wird. Nun bestehen nach dem vorigen Satze immer solche ganze Zahlen ω in k, die eine Kongruenz von der Form

$$(4) \qquad \omega\sqrt{\pi^*} \equiv \bar{\alpha}^2, \quad (4)$$

befriedigen, wo $\bar{\alpha}$ eine ganze Zahl in $K(\sqrt{\pi^*})$ bedeutet. Wir bestimmen ferner die Primideale $\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_m$ in k derart, daß die Beziehungen

$$(5) \qquad \left(\left(\frac{\pi^*}{\mathfrak{q}_s}\right)\right) = \pm i, \quad \left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{q}_s}\right)\right) = \pm i, \quad \left(\left(\frac{\varepsilon_t}{\mathfrak{q}_s}\right)\right) = +1 \quad (t \neq s)$$

$$(s = 1, 2, \cdots, m)$$

bestehen, und setzen

$$\mathfrak{q}_s^{hh'} = (\varkappa_s), \quad (s = 1, 2, \cdots, m),$$

so daß $\varkappa_1, \cdots, \varkappa_m$ ganze Zahlen in k bedeuten. Dann gilt für ω eine Kongruenz von der Gestalt

$$\omega \equiv \varepsilon\varkappa_1^{u_1} \cdots \varkappa_m^{u_m}\alpha^2, \quad (4),$$

wo die Exponenten $u_1, \cdots, u_m$ gewisse Werte 0, 1 haben, ε eine Einheit und α eine ganze Zahl in k vorstellt. Demnach können wir die Kongruenz (4) auf die Form

$$(6) \qquad \varepsilon\varkappa_1^{u_1} \cdots \varkappa_m^{u_m}\sqrt{\pi^*} \equiv \bar{\beta}^2, \quad (4)$$

bringen, wo $\bar{\beta}$ eine ganze Zahl in $K(\sqrt{\pi^*})$ ist. Sind nun sämtliche Exponenten $u_1, \cdots, u_m$ gleich Null, so ist $\pi = \varepsilon^2\pi^*$ eine Zahl, wie sie Satz (13) fordert. Wir machen demzufolge die gegenteilige Annahme, es seien etwa die Exponenten $u_1, \cdots, u_e$ gleich 1, die übrigen gleich 0, setzen

$$\varepsilon\varkappa_1^{u_1} \cdots \varkappa_e^{u_e}\sqrt{\pi^*} = \bar{\pi}$$

und betrachten den Körper $K(\sqrt{\bar{\pi}})$. Im Körper $K(\sqrt{\pi^*})$ bleiben die Primideale $\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_m$ wegen (5) unzerlegt, $\mathfrak{p}$ hingegen wird das Quadrat eines Primideals $\bar{\mathfrak{p}}$. Die Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt{\bar{\pi}})$ bezüglich $K(\sqrt{\pi^*})$ enthält die Primideale $\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_e, \bar{\mathfrak{p}}$ als Faktoren und keine anderen mehr. Wir wollen zeigen, daß die Anzahl der (quadratischen) Geschlechter in $K(\sqrt{\bar{\pi}})$ gleich 1 ist.

Zu diesem Behufe beachten wir zunächst, daß die Klassenzahl des Körpers $K(\sqrt{\pi^*})$ eine ungerade Zahl ist (H. Rq. Z. § 33 im Beweise zu

Satz 47) und daß jede beliebige Einheit ε in k der Relativnorm $N_{\sqrt{\pi^*},\,k}(\bar{\varepsilon})$ einer Einheit in $K(\sqrt{\pi^*})$ gleich ist (H. Rq. Z. Satz 33). Bestehen ferner in $K(\sqrt{\pi^*})$ die Kongruenzen

$$\bar{\varepsilon}^{\frac{n(\mathfrak{q}_s)-1}{4}} \equiv i^{w_s}, \quad (\mathfrak{q}_s)$$
$$(s = 1, 2, \cdots, e),$$
$$\bar{\varepsilon}^{\frac{n(\bar{\mathfrak{p}})-1}{4}} \equiv i^{w}, \quad (\bar{\mathfrak{p}}),$$

wo $n(\mathfrak{q}_s)$, $n(\bar{\mathfrak{p}})$ die Normen genommen in $K(\sqrt{\pi^*})$ bedeuten und die Exponenten $w_1, \cdots, w_e$, w gewisse Werte 0, 1, 2, 3 haben, so müssen zugleich auch die Kongruenzen

$$S\bar{\varepsilon}^{\frac{n(\mathfrak{q}_s)-1}{4}} \equiv i^{w_s}, \quad (\mathfrak{q}_s)$$
$$(s = 1, 2, \cdots, m),$$
$$S\bar{\varepsilon}^{\frac{n(\bar{\mathfrak{p}})-1}{4}} \equiv i^{w}, \quad (\bar{\mathfrak{p}})$$

statthaben, wo $S = (\sqrt{\pi^*} : -\sqrt{\pi^*})$ ist. Es bestehen somit in $K(\sqrt{\pi^*})$ die Gleichungen

$$\left(\left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\mathfrak{q}_s}\right)\right) = \left(\left(\frac{S\bar{\varepsilon}}{\mathfrak{q}_s}\right)\right)$$
$$(s = 1, 2, \cdots, m), \tag{7}$$
$$\left(\left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)\right) = \left(\left(\frac{S\bar{\varepsilon}}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)\right).$$

Bedeutet schließlich $\bar{\mathfrak{r}}$ ein beliebiges Ideal in $K(\sqrt{\pi^*})$, so gilt stets die Gleichung

$$\left(\left(\frac{\varepsilon}{\bar{\mathfrak{r}}}\right)\right)_{K(\sqrt{\pi^*})} = \left(\left(\frac{\varepsilon}{N_{\sqrt{\pi^*},\,k}(\bar{\mathfrak{r}})}\right)\right)_k.$$

Hieraus folgern wir, daß wegen (5)

$$\left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{q}_s}\right)\right) = \left(\left(\frac{\bar{\varepsilon}_s}{\mathfrak{q}_s}\right)\right)\left(\left(\frac{S\bar{\varepsilon}_s}{\mathfrak{q}_s}\right)\right) = -1,$$
$$\left(\left(\frac{\varepsilon_t}{\mathfrak{q}_s}\right)\right) = \left(\left(\frac{\bar{\varepsilon}_t}{\mathfrak{q}_s}\right)\right)\left(\left(\frac{S\bar{\varepsilon}_t}{\mathfrak{q}_s}\right)\right) = +1 \qquad (t \neq s) \tag{8}$$
$$(s = 1, 2, \cdots, m),$$
$$\left(\left(\frac{\varepsilon}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)\right) = \left(\left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)\right)\left(\left(\frac{S\bar{\varepsilon}}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)\right) = +1 \tag{8*}$$

sein muß, wo sämtliche Gleichungen für den Körper $K(\sqrt{\pi^*})$ gelten und $\varepsilon_s = N_{\sqrt{\pi^*},\,k}(\bar{\varepsilon}_s)$ gesetzt wurde.

Aus (8) und (8*) ergibt sich weiter bei Berücksichtigung von (6)

$$\left(\left(\frac{\bar{\varepsilon}_s}{\mathfrak{q}_s}\right)\right) = \pm i, \quad \left(\left(\frac{\bar{\varepsilon}_t}{\mathfrak{q}_s}\right)\right) = \pm 1 \qquad (t \neq s)$$

$$(s = 1, 2, \cdots, e),$$

$$\left(\left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)\right) = \pm 1,$$

woraus wir folgende Gleichungen ableiten:

$$\left(\frac{\bar{\varepsilon}_s}{\mathfrak{q}_s}\right) = -1, \quad \left(\frac{\bar{\varepsilon}_t}{\mathfrak{q}_s}\right) = +1 \qquad (t \neq s)$$

$$(s = 1, 2, \cdots, e),$$

$$\left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\mathfrak{p}}}\right) = +1.$$

Demzufolge ist die Anzahl der geschlechtsbestimmenden Charaktere für den Körper $K(\sqrt{\bar{\pi}})$ gleich 1, womit unsere Behauptung als richtig erwiesen ist.

Aus dieser Tatsache ergibt sich, weil $\bar{\mathfrak{p}}$ ein quadratisch primäres Primideal in $K(\sqrt{\pi^*})$ ist, genau in derselben Weise, wie bei Hilbert, Rq. Z. § 23, daß die oben gemachte Annahme, es seien einige der Exponenten $u_1, \cdots, u_m$ in (6) von Null verschieden, unstatthaft ist, womit Satz 13 vollständig bewiesen ist.

Auch die Umkehrung dieses Satzes ist gültig, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 14. Wenn π eine primäre Zahl in k ist und wenn überdies $(\pi) = \mathfrak{p}^{hh'}$ ist, wo $\mathfrak{p}$ ein Primideal in k bedeutet, so ist dieses Primideal $\mathfrak{p}$ stets primär.

Beweis. Nach Voraussetzung ist die Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt[4]{\pi})$ bezüglich k prim zu $1+i$; sie enthält nur das eine Primideal $\mathfrak{p}$ des Körpers k als Faktor. Die Relativdiskriminante von $K(\sqrt[4]{\pi})$ bezüglich $K(\sqrt{\pi})$ enthält nur das in $\mathfrak{p}$ aufgehende Primideal $\mathfrak{p}$ des Körpers $K(\sqrt{\pi})$ als Faktor. Bezeichnen wir mit 2^{v^*} die Anzahl der Einheitenverbände, welche von denjenigen Einheiten in $K(\sqrt{\pi})$ gebildet werden, welche Relativnormen $N_{\sqrt[4]{\pi}, \sqrt{\pi}}$ von Einheiten in $K(\sqrt[4]{\pi})$ sind, so besteht, weil die Klassenzahl in $K(\sqrt{\pi})$ ungerade ist, die Beziehung

$$1 + v^* - 2m > 0.$$

Es ist also $v^* \geqq 2m$, und weil v^* nicht größer als $2m$ sein kann, muß $v^* = 2m$ sein. Somit ist jede Einheit in $K(\sqrt{\pi})$ die Relativnorm $N_{\sqrt[4]{\pi}, \sqrt{\pi}}$ einer Einheit des Körpers $K(\sqrt[4]{\pi})$. Da jedoch auch jede Einheit in k der Relativnorm $N_{\sqrt{\pi},\,k}$ einer Einheit in $K(\sqrt{\pi})$ gleich ist, so folgt hieraus, daß jede Einheit in k die Relativnorm $N_{\sqrt[4]{\pi},\,k}$ von einer Einheit in $K(\sqrt[4]{\pi})$ sein muß. Es ist demnach, wenn ξ eine beliebige Einheit in k vorstellt,

$$\left(\left(\frac{\xi,\ \pi}{\mathfrak{p}}\right)\right) = \left(\left(\frac{\xi}{\mathfrak{p}}\right)\right) = +1,$$

d. h. $\mathfrak{p}$ ist ein primäres Primideal.

II. Teil.

§ 11.

Eigenschaften primärer Ideale und Zahlen.

Satz 15. Sind α_1 und α_2 primäre Zahlen, so ist auch ihr Produkt $\alpha_1\alpha_2$ primär.

Beweis. Wegen der über α_1 und α_2 gemachten Voraussetzung sind die Relativdiskriminanten $D_{\sqrt[4]{\alpha_1},\,k}$ und $D_{\sqrt[4]{\alpha_2},\,k}$ zu $1+i$ prim; demnach muß auch die Relativdiskriminante des aus $K(\sqrt[4]{\alpha_1})$ und $K(\sqrt[4]{\alpha_2})$ zusammengesetzten Körprrs K' in bezug auf k zu $1+i$ prim ausfallen; folglich auch die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\alpha_1\alpha_2},\,k}$ des Unterkörpers $K(\sqrt[4]{\alpha_1\alpha_2})$ von K'.

Auf Grund des speziellen Reziprozitätsgesetzes, welches wir nunmehr für den Körper k als gültig annehmen, und der bisher bewiesenen Sätze beweist man nun leicht die Sätze 37, 38 und 39 der Lietzmannschen Dissertation. Sonach kann Satz 13 folgendermaßen verallgemeinert werden:

Satz 16. Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges primäres Ideal in k, so ist es stets möglich, eine primäre Zahl α in k derart zu bestimmen, daß $\mathfrak{a}^{hh'} = (\alpha)$ wird.

Beweis. Es sei α^* eine ganze Zahl in k, so daß $\mathfrak{a}^{hh'} = (\alpha^*)$ wird. Nach Satz 10 besteht für α^* nach dem Modul 8 eine Kongruenz von der Form

$$\alpha^* \equiv \varepsilon\varkappa_1^{v_1}\cdots\varkappa_m^{v_m}\pi_1^{w_1}\cdots\pi_z^{w_z}\beta^4, \quad (8),$$

wo ε eine Einheit in k ist und die Bedeutung der übrigen Größen in dieser Kongruenz aus Satz 10 zu entnehmen ist. Wir nehmen hier insbesondere an, die Zahlen $\pi_1, \cdots, \pi_z$ seien *biquadratisch* primäre Zahlen. Es ist dann $\alpha\varepsilon^{-1}\varkappa_1^{4-v_1}\cdots\varkappa_m^{4-v_m}$ eine primäre Zahl. Es gilt demnach nach Satz 38 der Lietzmannschen Dissertation die Gleichung

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\left(\frac{\nu,\ \alpha^*\varepsilon^{-1}\varkappa_1^{4-v_1}\cdots\varkappa_m^{4-v_m}}{\mathfrak{w}}\right)\right) = +1$$

für jede beliebige zu $1+i$ prime ganze Zahl ν in k, wenn das Produkt $\prod_{(\mathfrak{w})}'$ über sämtliche zu $1+i$ prime Primideale des Körpers k erstreckt wird. Setzen wir insbesondere für ν die Einheiten $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$ ein, so ergibt sich bei Berücksichtigung der Eigenschaften der Primideale $\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_m$ sofort, daß $v_1, \cdots, v_m$ sämtlich gleich 0 sein müssen; daher ist $\alpha = \alpha^* \varepsilon^{-1}$ eine primäre Zahl, w. z. b. w.

Auch die Umkehrung dieses Satzes gilt. Sie lautet:

Satz 17. Wenn $\mathfrak{a}$ ein zu $1+i$ primes Ideal in k und α eine ganze Zahl in k ist, so daß $\mathfrak{a}^{hh'} = (\alpha)$ wird und überdies die Zahl α primär ausfällt, so ist $\mathfrak{a}$ ein primäres Ideal in k.

Den Beweis dieses Satzes gewinnen wir aus Satz 38 der Lietzmannschen Dissertation, wenn wir in der Gleichung dieses Satzes für ν eine beliebige Einheit ξ in k und für μ die Zahl α nehmen.

Wir wollen nun folgenden Satz beweisen:

Satz 18. Eine beliebige ganze Zahl μ des Körpers k ist stets dann und nur dann primär, wenn sie einer Kongruenz von der Gestalt

$$(1) \qquad \mu \equiv \pi_1^{w_1} \cdots \pi_z^{w_z} \alpha^4, \quad (8)$$

Genüge leistet, wo $w_1, \cdots, w_z$ gewisse Werte 0, 1 haben, α eine ganze Zahl in k ist und die *biquadratisch* primären Zahlen $\pi_1, \cdots, \pi_z$ gemäß Satz 10 bestimmt worden sind.

Beweis. Genügt μ der Kongruenz (1), so ist $\mu \pi_1^{4-w_1} \cdots \pi_z^{4-w_z}$ eine primäre Zahl. Da aber auch $\pi_1^{w_1} \cdots \pi_z^{w_z}$ primär ist, so muß auch das Produkt μ dieser Zahlen primär sein.

Ist umgekehrt μ primär, so gilt für μ sicher eine Kongruenz

$$\mu \equiv \varepsilon \varkappa_1^{v_1} \cdots \varkappa_m^{v_m} \pi_1^{w_1} \cdots \pi_z^{w_z} \alpha^4, \quad (8),$$

wo ε eine Einheit in k ist und die Bedeutung der übrigen Größen aus Satz 10 zu entnehmen ist. Dieser Kongruenz zufolge muß auch

$$\mu \varepsilon^{-1} \varkappa_1^{4-v_1} \cdots \varkappa_m^{4-v_m}$$

eine primäre Zahl sein. Berücksichtigen wir nun den Satz 38 der Lietzmannschen Dissertation und verfahren wie im Beweise zu Satz 17, so überzeugen wir uns leicht, daß $v_1 = v_2 = \cdots = v_m = 0$ sein muß. Es ist daher auch $\mu \varepsilon^{-1}$ primär und somit auch ε. Demnach muß ε die vierte Potenz einer Einheit in k sein, weil die Klassenzahl von k ungerade ist. Man vergleiche hierzu H. Rq. Z., Satz 28. Somit gilt wirklich für μ eine Kongruenz von der Form (1).

§ 12.

Die hyperprimären Ideale und Zahlen.

Definition 5. Ist α eine ganze Zahl in k, für welche eine Kongruenz von der Form

$$\alpha \equiv \beta^4, \quad (\mathfrak{l}_1^{6l_1+1} \cdots \mathfrak{l}_z^{6l_z+1})$$

statthat, wo β eine ganze Zahl in k ist und $\mathfrak{l}_1, \cdots, \mathfrak{l}_z$; $l_1, \cdots, l_z$ die frühere Bedeutung haben, so heiße α eine *biquadratisch hyperprimäre* oder kurz *hyperprimäre Zahl* des Körpers k.

Für hyperprimäre Zahlen gilt Satz 41 der Lietzmannschen Dissertation.

Definition 6. Ist $\mathfrak{a}$ ein primäres Ideal in k, für welches die Gleichungen

$$\left(\left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{a}}\right)\right) = +1, \cdots, \left(\left(\frac{\lambda_z}{\mathfrak{a}}\right)\right) = +1$$

bestehen, so heiße $\mathfrak{a}$ ein *biquadratisch hyperprimäres* oder kurz *hyperprimäres Ideal* des Körpers k.

Es gilt der Satz:

Satz 19. Ist $\mathfrak{a}$ ein hyperprimäres Ideal in k, so kann man stets eine hyperprimäre Zahl α in k derart bestimmen, daß $\mathfrak{a}^{hh'} = (\alpha)$ wird.

Beweis. Es sei α^* irgend eine ganze Zahl in k, so daß $\mathfrak{a}^{hh'} = (\alpha^*)$ wird, so können wir dem Satze 10* gemäß für α^* eine Kongruenz von der Form

$$\alpha^* \equiv \varepsilon^* \varkappa_1^{v_1} \cdots \varkappa_m^{v_m} \pi_1^{w_1} \cdots \varkappa_z^{w_z} \beta^4, \quad (\mathfrak{l}_1^{6l_1+1} \cdots \mathfrak{l}_z^{6l_z+1})$$

aufstellen, wo ε^* eine Einheit, β eine ganze Zahl in k bedeutet und die Bedeutung der übrigen Größen aus Satz 10* zu ersehen ist.

Die Zahl

$$\mu = \alpha^* \varepsilon^{*3} \varkappa_1^{4-v_1} \cdots \varkappa_m^{4-v_m} \pi_1^{4-w_1} \cdots \pi_z^{4-w_z}$$

ist eine hyperprimäre Zahl in k. Folglich müssen die Gleichungen

$$(1) \quad \begin{cases} \prod\limits_{(\mathfrak{w})}' \left(\left(\frac{\varepsilon_s, \mu}{\mathfrak{w}}\right)\right) = +1, \quad (s = 1, 2, \cdots, m), \\ \prod\limits_{(\mathfrak{w})}' \left(\left(\frac{\lambda_t, \mu}{\mathfrak{w}}\right)\right) = +1, \quad (t = 1, 2, \cdots, z) \end{cases}$$

statthaben. Aus (1) ergeben sich weiter die Beziehungen

$$\left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\alpha^* \varkappa_1^{4-v_1} \cdots \varkappa_m^{4-v_m} \pi_1^{4-w_1} \cdots \pi_z^{4-w_z}}\right)\right)$$

$$(2) \quad = \left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{a}}\right)\right) \left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{q}_1}\right)\right)^{-v_1} \cdots \left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{q}_m}\right)\right)^{-v_m} \left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{p}_1}\right)\right)^{-w_1} \cdots \left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{p}_z}\right)\right)^{-w_z} = +1,$$

$$(s = 1, 2, \cdots, m),$$

$$\left(\left(\frac{\lambda_t}{\alpha^* \varkappa_1^{4-v_1} \cdots \varkappa_m^{4-v_m} \pi_1^{4-w_1} \cdots \pi_z^{4-w_z}}\right)\right)$$

(3) $$= \left(\left(\frac{\lambda_t}{\mathfrak{a}}\right)\right) \left(\left(\frac{\lambda_t}{\mathfrak{q}_1}\right)\right)^{-v_1} \cdots \left(\left(\frac{\lambda_t}{\mathfrak{q}_m}\right)\right)^{-v_m} \left(\left(\frac{\lambda_t}{\mathfrak{p}_1}\right)\right)^{-w_1} \cdots \left(\left(\frac{\lambda_t}{\mathfrak{p}_z}\right)\right)^{-w_z} = +1,$$

$$(t = 1, 2, \cdots, z).$$

Berücksichtigen wir jetzt die Eigenschaften der Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_m, \mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_z$, so ergibt sich zunächst aus (2), daß sämtliche Exponenten $v_1, \cdots, v_m$ gleich 0 sein müssen; dann folgt aber aus (3), daß auch die Exponenten $w_1, \cdots, w_z$ sämtlich gleich 0 werden müssen. Demnach ist $\alpha = \varepsilon^{*3}\alpha^*$ eine Zahl von der im Satz 19 verlangten Eigenschaft.

Die Umkehrung des Satzes 20 lautet wie folgt:

Satz 20. Ist α eine hyperprimäre Zahl in k, so ist

$$\left(\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right)\right) = +1, \cdots, \left(\left(\frac{\varepsilon_m}{\alpha}\right)\right) = +1,$$
$$\left(\left(\frac{\lambda_1}{\alpha}\right)\right) = +1, \cdots, \left(\left(\frac{\lambda_m}{\alpha}\right)\right) = +1.$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz 41 der Lietzmannschen Dissertation.

§ 13.

Das Symbol $\left(\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right)\right)$ und das biquadratische Reziprozitätsgesetz.

Es gelingt jetzt leicht, nach dem Vorbilde Hilberts (H. Rq. Z. § 32 ff.) das biquadratische Reziprozitätsgesetz im Körper k abzuleiten.

Es seien $\mathfrak{l}_1, \cdots, \mathfrak{l}_z$ die in $1+i$ aufgehenden Primideale des Körpers k, und es gehe $\mathfrak{l}_1$ in $1+i$ genau zur l_1^{ten}; $\mathfrak{l}_2, \cdots, \mathfrak{l}_z$ bez. genau zur $l_2^{\text{ten}}, \cdots, l_z^{\text{ten}}$ Potenz in $1+i$ auf.

Sind ν, μ zwei zu $1+i$ prime ganze Zahlen in k, so bestimme man eine ganze Zahl μ^* nach den Kongruenzen

(1) $$\begin{aligned} \mu^* &\equiv \mu, \quad (\mathfrak{l}_1^{6 l_1}), \\ \mu^* &\equiv \alpha^4, \quad (\mathfrak{l}_2^{6 l_2} \cdots \mathfrak{l}_z^{6 l_z}); \end{aligned}$$

wenn hingegen ν, μ beliebige ganze Zahlen in k sind und $\mathfrak{l}_1$ in μ genau zur a^{ten} Potenz aufgeht, bestimme man μ^*, so daß

(2) $$\begin{aligned} \mu^* &\equiv \mu, \quad (\mathfrak{l}_1^{6 l_1 + a + 1}), \\ \mu^* &\equiv \alpha^4, \quad (\mathfrak{l}_2^{6 l_2 + 1} \cdots \mathfrak{l}_z^{6 l_z + 1}) \end{aligned}$$

wird; hierbei ist α eine beliebige zu $\mathfrak{l}_2, \cdots, \mathfrak{l}_z$ prime ganze Zahl in k.

Definiert man dann das Symbol $\left(\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right)$ durch die Gleichung

(3) $$\left(\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\left(\frac{\nu, \mu^*}{\mathfrak{w}}\right)\right)^{-1},$$

wo das Produkt $\prod\limits_{(\mathfrak{w})}'$ über sämtliche zu $1+i$ primen Primideale in k zu erstrecken ist, so ist ν dann und nur dann biquadratischer Normenrest des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ nach $\mathfrak{l}_1$, wenn

$$(4) \qquad \left(\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right) = +1$$

ausfällt.

Sind ν, μ zwei beliebige von Null verschiedene ganze Zahlen in k, dann gilt stets die Gleichung

$$(5) \qquad \prod_{(\mathfrak{w})} \left(\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right)\right) = +1,$$

wo das Produkt über alle Primideale $\mathfrak{w}$ des Körpers k zu erstrecken ist (L. § 17, Satz 48).

Die Gleichung (5) stellt das biquadratische Reziprozitätsgesetz in allgemeinster Gestalt dar.

Wir möchten an dieser Stelle nur noch eines besonderen Falles dieses allgemeinen Reziprozitätsgesetzes erwähnen.

Satz 21. Sind $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ zwei beliebige *quadratisch primäre Primideale* und setzt man

$$\mathfrak{p}_1^{hh'} = (\pi_1), \quad \mathfrak{p}_2^{hh'} = (\pi_2),$$

so daß π_1, π_2 *quadratisch primäre Zahlen* in k vorstellen, so gilt das Reziprozitätsgesetz

$$\left(\left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{p}_2}\right)\right) = \left(\left(\frac{\pi_2}{\mathfrak{p}_1}\right)\right).$$

Beweis. Es seien die Primideale $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ etwa so beschaffen, daß

$$\left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{p}_1}\right)\right) = c_s, \quad \left(\frac{\lambda_t}{\mathfrak{p}_1}\right) = d_t,$$
$$\left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{p}_2}\right)\right) = c_s', \quad \left(\frac{\lambda_t}{\mathfrak{p}_2}\right) = d_t',$$
$$(s = 1, 2, \cdots, m, \quad t = 1, 2, \cdots, z)$$

wird; dabei haben $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$; $\lambda_1, \cdots, \lambda_z$ die vorige Bedeutung und c_s, c_s', d_t, d_t' bedeuten gewisse Werte ± 1, Wir bestimmen ein Primideal $\mathfrak{r}$ in k, welches die Gleichungen

$$\left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{r}}\right)\right) = \pm c_s'', \quad \left(\left(\frac{\lambda_t}{\mathfrak{r}}\right)\right) = \pm d_t'',$$
$$(s = 1, 2, \cdots, m; \quad t = 1, 2, \cdots, z)$$

befriedigt; hierbei ist unter c_s'', d_t'' der Wert $+1$ zu verstehen, wenn $c_s = c_s'$ bez. $d_t = d_t'$ ist, und der Wert i, wenn $c_s = -c_s'$ bez. $d_t = -d_t'$ ausfällt. Dann ist das Ideal $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{r}^2$ primär. Setzen wir $\mathfrak{r}^{hh'} = (\varrho)$, so daß ϱ eine ganze Zahl in k wird, so kann man eine Einheit ε in k bestimmen derart, daß $\varepsilon\pi_1\pi_2\varrho^2$ primär wird. Nun muß für $\varepsilon\pi_1\pi_2\varrho^2$ gewiß eine Kongruenz von der Form

$$\varepsilon\pi_1\pi_2\varrho^2 \equiv \alpha^2, \quad (4)$$

bestehen, wo α eine ganze Zahl in k vorstellt, woraus sich für ε eine Kongruenz von der Gestalt

$$\varepsilon \equiv \beta^2, \quad (4)$$

ergibt, wo β wieder eine ganze Zahl in k bedeutet. Demnach muß ε gleich dem Quadrate einer Einheit η in k werden. (H. Rq. Z. § 21, Satz 28), so daß $\eta^2\pi_1\pi_2\varrho^2$ eine primäre Zahl ist.

Beachten wir nun, daß das Produkt

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\left(\frac{\pi_1,\ \eta^2\pi_1\pi_2\varrho^2}{\mathfrak{w}}\right)\right) = +1$$

sein muß, wenn man es über alle zu $1+i$ primen Primideale $\mathfrak{w}$ des Körpers k erstreckt (L. § 14, Satz 38), so folgt hieraus unmittelbar die Gleichung

$$(6) \qquad \left(\left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{p}_2}\right)\right)\left(\left(\frac{\pi_2}{\mathfrak{p}_1}\right)\right)^{-1}\left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{r}}\right)\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}_1}\right) = +1.$$

Es ist aber nach der Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers (H. Rq. Z. § 25, Satz 36)

$$\left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{r}}\right)\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}_1}\right) = +1,$$

womit sich aus (6) die Richtigkeit des Satzes 21 ergibt.

§ 14.

Ein Satz über die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu},k}$.

Satz 22. Es sei $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_1$ ein beliebiges in $1+i$ genau zur l^{ten} Potenz enthaltenes Primideal des Körpers k und μ eine ganze Zahl in k, die genau durch $\mathfrak{l}^a$ teilbar und nicht das Quadrat einer ganzen Zahl in k ist. Soll die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu},k}$ prim zu $\mathfrak{l}$ sein, so muß nach Satz 1 a durch 4 teilbar sein, und wir können dann stets eine zu $\mathfrak{l}$ prime ganze Zahl μ_1 in k bestimmen, so daß $K(\sqrt[4]{\mu}) = K(\sqrt[4]{\mu_1})$ wird.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{l}_2, \cdots, \mathfrak{l}_z$ die noch außer $\mathfrak{l}$ in $1+i$ aufgehenden Primideale des Körpers k und bestimmen die ganzen Zahlen $\lambda = \lambda_1$, $\lambda_2, \cdots, \lambda_z$ derart, daß

$$\mathfrak{l}^{hh'} = (\lambda), \quad \mathfrak{l}_2^{hh'} = (\lambda_2), \cdots, \mathfrak{l}_z^{hh'} = (\lambda_z)$$

wird. Ferner möge $\mathfrak{p}$ ein primäres Primideal in k sein, für welches die Beziehungen

(1) $$\left(\left(\frac{\lambda}{\mathfrak{p}}\right)\right) = \pm i, \quad \left(\left(\frac{\lambda_2}{\mathfrak{p}}\right)\right) = +1, \cdots, \left(\left(\frac{\lambda_z}{\mathfrak{p}}\right)\right) = +1$$

gelten. Bedeutet dann π eine primäre Zahl in k, so daß man $\mathfrak{p}^{hh'} = (\pi)$ setzen kann, so ist die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu}, k}$ stets dann und nur dann prim zu $\mathfrak{l}$, wenn eine Kongruenz von der Form

(2) $$\mu_1 \equiv \pi^w \alpha^4, \quad (\mathfrak{l}^{6l})$$

statthat, wo w einen der Werte 0, 1 hat und α eine ganze Zahl in k bedeutet.

Beweis. Besteht eine Kongruenz von der Gestalt (2), so ist wegen Satz 2, weil $\pi^w \alpha^4$ eine primäre Zahl ist, gewiß die Diskriminante $D_{\sqrt{\mu_1}, k}$ zu $\mathfrak{l}$ prim. Somit haben wir nur noch die Umkehrung davon zu beweisen.

Es mögen die Primideale $\mathfrak{l}_2, \cdots, \mathfrak{l}_z$ beziehungsweise genau zur $l_2^{\text{ten}}, \cdots, l_z^{\text{ten}}$ Potenz in $1+i$ aufgehen. Dann bestimmen wir eine ganze Zahl μ^* in k, so daß die Kongruenzen

(3) $$\mu_1 \equiv \mu^*, \quad (\mathfrak{l}^{6l}),$$

(4) $$\mu^* \equiv \beta^4, \quad (\mathfrak{l}_2^{6l_2} \cdots \mathfrak{l}_z^{6l_z})$$

stattfinden, wo β eine zu $\mathfrak{l}_2 \cdots \mathfrak{l}_z$ prime ganze Zahl in k vorstellt. Die Zahl μ^* ist diesen Kongruenzen zufolge sicherlich primär, und es muß für dieselbe nach Satz 10 und Satz 18 eine Kongruenz von der Form

$$\mu^* \equiv \pi^w \pi_2^{w_2} \cdots \pi_z^{w_z} \gamma^4, \qquad (8)$$

bestehen, wo die Exponenten $w, w_2, \cdots, w_z$ gewisse Werte 0, 1 haben und γ eine ganze Zahl in k bedeutet. Hierbei seien $\pi_2, \cdots, \pi_z$ primäre Zahlen und die entsprechenden Primideale $\mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_z$ des Satzes 10 als primäre Primideale so bestimmt, daß für dieselben die Gleichungen

$$\left(\left(\frac{\lambda_s}{\mathfrak{p}_s}\right)\right) = \pm i, \quad \left(\left(\frac{\lambda_t}{\mathfrak{p}_s}\right)\right) = +1, \qquad (s \neq t),$$
$$(s = 2, 3, \cdots, z)$$

gelten.

Ist nun μ^* quadratisch hyperprimär, so müssen die Exponenten $w, w_2, \cdots, w_z$ sämtlich gleich 0 sein; ist es jedoch nur quadratisch primär und nicht hyperprimär, so ist wegen (4)

$$\left(\frac{\mu^*}{\mathfrak{l}_2}\right) = +1, \cdots, \left(\frac{\mu^*}{\mathfrak{l}_z}\right) = +1;$$

folglich muß $\left(\frac{\mu^*}{\mathfrak{l}}\right) = -1$ sein. Demnach muß nach Satz 11 $w_2 = 0, \cdots, w_z = 0$ und $w_1 = 1$ ausfallen, und es besteht in der Tat für μ_1 eine Kongruenz von der Form (2). Da aber wegen (1) auch stets

$$\left(\left(\frac{\pi}{\mathfrak{l}}\right)\right) = \pm i, \quad \left(\left(\frac{\pi}{\mathfrak{l}_2}\right)\right) = +1, \cdots, \left(\left(\frac{\pi}{\mathfrak{l}_z}\right)\right) = +1$$

ist, so befriedigt die laut (2) bestimmte Zahl $\pi^w \alpha^4$ schon von selbst eine Kongruenz von der Gestalt

$$\pi^w \alpha^4 \equiv \beta^4, \qquad (\mathfrak{l}_2^{6\,l_2} \cdots \mathfrak{l}_z^{6\,l_z})$$

und kann als μ^* der Kongruenz (3) und (4) genommen werden. Beachtet man endlich, daß wegen (3) die Diskriminanten $D_{\sqrt[4]{\mu_1},k}$ und $D_{\sqrt[4]{\mu^*},k}$ entweder beide durch $\mathfrak{l}$ teilbar oder beide zu $\mathfrak{l}$ prim sind, so ist damit Satz 22 bewiesen.

§ 15.

Die Anzahl der biquadratischen Normenreste.

Satz 23. Wenn $\mathfrak{p}$ ein zu $1+i$ primes Primideal des Körpers k ist, das nicht in der Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu},k}$ des relativbiquadratischen Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ aufgeht, so ist *jede* zu $\mathfrak{p}$ prime Zahl ν biquadratischer Normenrest des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ nach $\mathfrak{p}$.

Ist dagegen $\mathfrak{p}$ ein zu $1+i$ primes Primideal des Körpers k, das wohl in der Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu},k}$ des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$, aber nicht in der Relativdiskriminante $D_{\sqrt{\mu},k}$ des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ aufgeht, und bedeutet e einen beliebigen positiven ganzen rationalen Exponenten, so sind von allen vorhandenen zu $\mathfrak{p}$ primen und nach $\mathfrak{p}^e$ einander inkongruenten Zahlen in k die *Hälfte* biquadratische Normenreste des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ nach $\mathfrak{p}$; geht hingegen $\mathfrak{p}$ auch in der Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu},k}$ des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ auf, so sind von den erwähnten zu $\mathfrak{p}$ primen Zahlen nur der *vierte Teil* biquadratische Normenreste des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ nach $\mathfrak{p}$.

Der Beweis für diesen Satz ergibt sich leicht aus den Eigenschaften des Symbols $\left(\left(\frac{\nu,\,\mu}{\mathfrak{p}}\right)\right)$. Man sehe hierzu L. § 7.

Wir gehen nun zur Bestimmung der Anzahl der biquadratischen Normenreste nach einem in $1+i$ aufgehenden Primideal über und wollen den folgenden Satz beweisen:

Satz 24. Es sei $\mathfrak{l}_1$ ein Primfaktor von $1+i$ und zwar gehe $\mathfrak{l}_1$ genau zur l_1^{ten} Potenz in $1+i$ auf: Wenn dann die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu},k}$ des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ nicht durch $\mathfrak{l}_1$ teilbar ist, so ist *jede* zu $\mathfrak{l}_1$ prime ganze Zahl ν in k Normenrest des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ nach $\mathfrak{l}_1$. Ist dagegen die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu},k}$ durch $\mathfrak{l}_1$ teilbar, die Relativdiskriminante $D_{\sqrt{\mu},k}$ des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ jedoch zu $\mathfrak{l}_1$ prim, und bezeichnet man mit L einen beliebigen Exponenten größer als $6l$, so sind von allen vorhandenen zu $\mathfrak{l}_1$ primen und nach $\mathfrak{l}_1^L$ inkongruenten Zahlen ν in k genau die *Hälfte* Normenreste des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ nach $\mathfrak{l}_1$. Ist endlich auch die Relativdiskriminante $D_{\sqrt{\mu},k}$ durch $\mathfrak{l}_1$ teilbar, so sind von allen vorhandenen zu $\mathfrak{l}_1$ primen und nach $\mathfrak{l}_1^L$ inkongruenten Zahlen ν in k genau der *vierte Teil* Normenreste des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ nach $\mathfrak{l}_1$.

Beweis. Wenn $\mathfrak{l}_1$ nicht in der Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu},k}$ von $K(\sqrt[4]{\mu})$ aufgeht, so können wir μ prim zu $\mathfrak{l}_1$ annehmen. Eine gemäß (1) des § 13 zu μ bestimmte Zahl μ^* wird dann laut Satz 18 und 11 einer Kongruenz von der Form

$$\mu^* \equiv \pi_1^{w_1}\beta^4, \quad (8)$$

Genüge leisten müssen, wo π_1 eine wie in Satz 18 bestimmte primäre Zahl ist, w_1 einen der Werte 0 oder 1 hat, und β eine ganze Zahl in k bedeutet. Wir können demnach setzen

$$\left(\left(\frac{\nu,\,\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\left(\frac{\nu,\,\pi_1^{w_1}}{\mathfrak{w}}\right)\right)^{-1}.$$

Es wird somit, weil π_1 primär ist, $\left(\left(\frac{\nu,\,\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right) = +1$, wie es Satz 24 fordert.

Um aber die zweite Aussage des Satzes zu beweisen, nehmen wir zunächst an, μ sei prim zu $\mathfrak{l}_1$. Nun stellen wir für die zu μ nach (1) des § 13 bestimmte ganze Zahl μ^* eine Kongruenz von der Form (1) des § 7 auf, verstehen jedoch hier wie in der Folge stets unter $\pi_1, \cdots, \pi_z$ *primäre* Zahlen. Es sei

(1) $$\mu^* \equiv \varepsilon_1^{u_1} \cdots \varepsilon_m^{u_m} \varkappa_1^{v_1} \cdots \varkappa_m^{v_m} \pi_1^{w_1} \cdots \pi_z^{w_z} \alpha^4, \quad (8),$$

wo die Exponenten $u_1, \cdots, u_m;\ v_1, \cdots, v_m$ gewisse Werte 0, 1, 2, 3, hingegen die Exponenten $w_1, \cdots, w_z$ nur gewisse Werte 0, 1 haben können, und α eine geeignete ganze Zahl in k bedeutet.

Soll die Relativdiskriminante $D_{\sqrt{\mu},k}$ des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ durch $\mathfrak{l}_1$ teilbar sein, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß mindestens einer der Exponenten $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m$ in (1) ungerade sei. Denn es darf in diesem Falle μ nicht einer Quadratzahl in k nach dem Modul $\mathfrak{l}_1^{4l_1}$ kongruent ausfallen. Wären jedoch sämtliche Exponenten $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m$ gerade, so wäre nach (1) μ^* einer Quadratzahl in k nach dem Modul $\mathfrak{l}_1^{4l_1}$ kongruent und demzufolge würde dies wegen (1) des § 13 auch für μ der Fall sein. Wenn hingegen auch nur einer der Exponenten $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m$ ungerade ist, so kann μ keiner Quadratzahl in k nach dem Modul $\mathfrak{l}_1^{4l_1}$ kongruent sein. Denn wäre dies der Fall, so müßte wegen (1) des § 13 die Zahl μ^* einer Quadratzahl nach dem Modul 4 kongruent sein, was der Annahme über die Exponenten $u_1, \cdots, u_m$, $v_1, \cdots, v_m$ widerspricht, wie aus (1) zu ersehen ist.

Wir nehmen nun an, es gebe unter den Exponenten $u_1, \cdots, u_m$, $v_1, \cdots, v_m$ mindestens einen, der ungerade ist. Dann zeigt man leicht unter Zuhilfenahme der Eigenschaften der Primideale $\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_m, \mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_z$, daß das Symbol $\left(\left(\frac{\nu,\, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right)$ für solche Zahlen ν, die zu $\mathfrak{l}_1$ prim sind, die Werte $\pm i$ haben kann. In der Tat nehmen wir zunächst an, es seien sämtliche Exponenten v, aber nicht alle u gleich Null, und es sei etwa u_s von Null verschieden und ungerade, so wird

$$(2) \qquad \left(\left(\frac{\varkappa_s,\, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\left(\frac{\varkappa_s,\, \mu^*}{\mathfrak{w}}\right)\right) = \left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{q}_s}\right)\right)^{u_s} = \pm i.$$

Sind dagegen nicht alle v gleich Null und etwa v_s von Null verschieden und ungerade, so schließen wir ähnlich, daß

$$(3) \qquad \left(\left(\frac{\varepsilon_s,\, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\left(\frac{\varepsilon_s,\, \mu^*}{\mathfrak{w}}\right)\right) = \left(\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{q}_s}\right)\right)^{v_s} = \pm i$$

sein muß.

Soll ferner die Relativdiskriminante $D_{\sqrt{\mu},\, k}$ des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ prim zu $\mathfrak{l}_1$ sein, so folgt ähnlich, wie in dem eben erledigten Falle, daß dazu notwendig und hinreichend ist, daß die Exponenten $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m$ sämtlich gerade ausfallen; soll aber $D_{\sqrt[4]{\mu},\, k}$ durch $\mathfrak{l}_1$ teilbar sein, so muß mindestens einer dieser Exponenten von 0 verschieden sein.

Sind diese Exponenten nicht sämtlich gleich 0, so zeigt man leicht, wie oben, daß das Symbol $\left(\left(\frac{\nu,\, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right)$ für solche Zahlen ν, die zu $\mathfrak{l}_1$ prim sind, auch den Wert -1 erreichen kann. Das Symbol $\left(\left(\frac{\nu,\, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right)$ kann in diesem Falle für die in Rede stehenden Zahlen ν überhaupt nur die Werte $+1$ und -1 haben.

Wir sahen, daß das Symbol $\left(\left(\frac{\nu,\, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right)$ für solche Zahlen ν, μ, die zu $\mathfrak{l}_1$ prim sind, wenn die Relativdiskriminante $D_{\sqrt[4]{\mu},\, k}$ durch $\mathfrak{l}_1$ teilbar ist, beziehungsweise zwei oder vier Werte annehmen kann. Es ist nun leicht, die Aussage des Satzes 24 über die Anzahl der Normenreste für den gegenwärtigen Fall zu beweisen.

Wegen $L > 6 l_1$ sind zwei nach $\mathfrak{l}_1^L$ kongruente zu $\mathfrak{l}_1$ prime ganze Zahlen in k stets gleichzeitig Normenreste oder Normennichtreste nach $\mathfrak{l}_1$. Wir bezeichnen nun mit $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_s$ ein System ganzer Zahlen in k von folgender Beschaffenheit: Die Zahlen $\nu_1, \cdots, \nu_s$ sollen nach $\mathfrak{l}_1^L$ untereinander inkongruente und zu $\mathfrak{l}_1$ prime Normenreste nach $\mathfrak{l}_1$ sein; endlich soll jede zu $\mathfrak{l}_1$ prime Zahl, welche Normenrest nach $\mathfrak{l}_1$ ist, einer jener Zahlen $\nu_1, \cdots, \nu_s$ nach $\mathfrak{l}_1^L$ kongruent sein. Ist nun ν ein zu $\mathfrak{l}_1$ primer Normennichtrest nach $\mathfrak{l}_1$, für den etwa

$$\left(\left(\frac{\nu,\,\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right) = i$$

ausfällt, so sind die Zahlen

$$\begin{gathered} \nu\nu_1, \cdots, \nu\nu_s, \\ \nu^2\nu_1, \cdots, \nu^2\nu_s, \\ \nu^3\nu_1, \cdots, \nu^3\nu_s \end{gathered}$$

sämtlich Normennichtreste nach $\mathfrak{l}_1$, und wir können leicht zeigen, daß jeder beliebige zu $\mathfrak{l}_1$ prime Normennichtrest nach $\mathfrak{l}_1$ einer dieser $3s$ Zahlen nach $\mathfrak{l}_1^L$ kongruent ausfällt.

Es sei ν' irgend ein beliebiger Normennichtrest nach $\mathfrak{l}_1$ und etwa

$$\left(\left(\frac{\nu',\,\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right) = i^t,$$

wo t einen der Werte 1, 2 oder 3 haben kann, so bestimmen wir eine ganze Zahl ν^*, so daß

$$\nu^t\nu^* \equiv 1, \quad (\mathfrak{l}_1^L)$$

wird. Es folgt dann wegen $L > 6l_1$ die Gleichung

$$\left(\left(\frac{\nu^*,\,\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right) = \left(\left(\frac{\nu,\,\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right)^{-t} = i^{-t};$$

somit ist $\nu'\nu^*$ Normenrest nach $\mathfrak{l}_1$ und folglich einer der Zahlen $\nu_1, \cdots, \nu_s$ nach $\mathfrak{l}_1^L$ kongruent; es sei etwa $\nu'\nu^* \equiv \nu_i$ nach $\mathfrak{l}_1^L$; dann ist

$$\nu'\nu^t\nu^* \equiv \nu' \equiv \nu^t\nu_i, \quad (\mathfrak{l}_1^L).$$

Ist das Symbol $\left(\left(\frac{\nu,\,\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right)$ für solche Zahlen ν, die zu $\mathfrak{l}_1$ prim sind, nur der Werte $+1$ und -1 fähig, so zeigt man in ganz analoger Weise, daß von allen vorhandenen zu $\mathfrak{l}_1$ primen und nach $\mathfrak{l}_1^L$ inkongruenten Zahlen ν in k genau die Hälfte Normenreste des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ nach $\mathfrak{l}_1$ sind. Damit ist dann die Aussage des zweiten Teiles von Satz 24 für solche Zahlen μ, die zu $\mathfrak{l}_1$ prim sind, vollständig bewiesen.

Um nun diesen Teil des Satzes für beliebige Zahlen μ zu beweisen, nehmen wir an, das Primideal $\mathfrak{l}_1$ gehe in μ genau zur a_1^{ten} Potenz auf. Setzt man $\mathfrak{l}_1^{hh'} = (\lambda_1)$, so daß λ_1 eine ganze Zahl in k wird, so ist $\frac{\mu^{hh'}}{\lambda_1^{a_1}}$ eine ganze zu $\mathfrak{l}_1$ prime Zahl in k. Wir bestimmen eine ganze Zahl μ^* in k, welche die Kongruenzen

$$(4)\qquad \begin{aligned} \mu^* &\equiv \frac{\mu^{hh'}}{\lambda_1^{a_1}}, \quad (\mathfrak{l}_1^{6l_1+1}), \\ \lambda_1^{a_1}\mu^* &\equiv \alpha^4, \quad \left(\mathfrak{l}_2^{6l_2+1} \cdots \mathfrak{l}_z^{6l_z+1}\right), \end{aligned}$$

befriedigt, wo α eine beliebige zu $\mathfrak{l}_2, \cdots, \mathfrak{l}_z$ prime ganze Zahl in k vorstellt. Die auf diese Weise bestimmte Zahl μ^* fällt zu $1+i$ prim aus.

Es gilt, wie man leicht einsieht, die Beziehung

$$(5)\qquad \left(\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right) = \left(\left(\frac{\nu,\mu^{hh'}}{\mathfrak{l}_1}\right)\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\left(\frac{\nu,\lambda_1^{a_1}\mu^*}{\mathfrak{w}}\right)\right)^{-1},$$

wo, wie immer, das Produkt $\prod\limits_{(\mathfrak{w})}{}'$ über sämtliche zu $1+i$ primen Primideale in k zu erstrecken ist.

Wir können für μ^* nach Satz 10* eine Kongruenz nach dem Modul $\mathfrak{l}_1^{6l_1+1} \cdots \mathfrak{l}_z^{6l_z+1}$ aufstellen; sie laute etwa:

$$(6)\qquad \mu^* \equiv \varepsilon_1^{u_1} \cdots \varepsilon_m^{u_m} \varkappa_1^{v_1} \cdots \varkappa_m^{v_m} \pi_1^{w_1} \cdots \pi_z^{w_z} \alpha^4, \quad \left(\mathfrak{l}_1^{6l_1+1} \cdots \mathfrak{l}_z^{6l_z+1}\right),$$

wo die Bedeutung der einzelnen Größen dieser Kongruenz aus Satz 10* zu ersehen ist. Mithin ergibt sich aus (5) die folgende Gleichung

$$(7)\qquad \left(\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\left(\frac{\nu,\lambda_1^{a_1}\varepsilon_1^{u_1} \cdots \varepsilon_m^{u_m}\varkappa_1^{v_1} \cdots \varkappa_m^{v_m}\pi_1^{w_1}\cdots\pi_z^{w_z}}{\mathfrak{w}}\right)\right)^{-1}.$$

Soll nun die Relativdiskriminante $D_{\sqrt{\mu},k}$ des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ durch $\mathfrak{l}_1$ teilbar sein, so muß entweder a_1 ungerade sein, oder, wenn a_1 gerade ist, mindestens einer der Exponenten $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m$ ungerade ausfallen. Im letzteren Falle folgert man wie oben, daß das Symbol $\left(\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right)$ für solche Zahlen ν, die zu $\mathfrak{l}_1$ prim sind, der Werte $\pm i$ fähig ist. Im ersteren Falle setzen wir in (7) für ν die Zahl π_1 ein und erhalten die Gleichung

$$\left(\left(\frac{\pi_1,\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right) = \left(\left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}_1}\right)\right)^{\pm a_1} = \pm i.$$

Soll ferner die Relativdiskriminante $D_{\sqrt{\mu},k}$ des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ prim zu $\mathfrak{l}_1$ ausfallen, so muß jedenfalls a_1 gerade sein, ebenso die Exponenten $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m$. Man ersieht dann unmittelbar aus (6), daß in einem solchen Falle das Symbol $\left(\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right)$ für diejenigen Zahlen ν, die zu $\mathfrak{l}_1$ prim sind, höchstens die Werte $+1$ und -1 haben kann.

Nun sei zunächst $a_1 \equiv 2$, (4). Führt man dann in (7) für ν die Zahl π_1 ein, so ergibt sich die Gleichung

$$\left(\left(\frac{\pi_1,\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right) = \left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}_1}\right) = -1.$$

Ist ferner $a_1 \equiv 0$, (4), so überzeugt man sich leicht wie oben (man sehe die Gleichungen (2) und (3)), daß das Symbol $\left(\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)\right)$, wenn nicht sämtliche Exponenten $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m$ gleich 0 sind, für solche Zahlen ν, die zu $\mathfrak{l}_1$ prim sind, die Werte $+1$ und -1 erhalten kann.

Beachten wir endlich, daß die Schlüsse, die wir bei der Bestimmung der Anzahl der Normenreste im Falle eines zu $\mathfrak{l}_1$ primen μ gemacht haben, auch, wenn μ durch $\mathfrak{l}_1$ teilbar ist, uneingeschränkt gültig sind, so ist damit Satz 24 vollständig bewiesen.

§ 15.

Der Fundamentalsatz über die Geschlechter eines relativbiquadratischen Zahlkörpers.

Auf Grund der bisher erlangten Resultate beweist man nun leicht den Fundamentalsatz über die Geschlechter eines relativbiquadratischen Zahlkörpers. Das Beweisverfahren ist dem Hilbertschen Verfahren für den analogen Fall im relativquadratischen Zahlkörper vollkommen ähnlich. Wir wollen es hier nicht durchführen. Man gelangt zu folgendem Resultate:

Satz 25. Es sei r_1 die Anzahl der vierwertigen, r_2 die Anzahl der zweiwertigen Charaktere, welche ein Geschlecht des relativbiquadratischen Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ bestimmen: Ist dann ein System von r_1 beliebigen vierten und ein System von r_2 beliebigen zweiten Einheitswurzeln vorgelegt, so bilden diese Systeme dann und nur dann das Charakterensystem eines Geschlechtes in $K(\sqrt[4]{\mu})$, wenn das Produkt der sämtlichen $r_1 + r_2$ Einheitswurzeln gleich $+1$ ist. Die Anzahl der in $K(\sqrt[4]{\mu})$ vorhandenen Geschlechter ist daher 4^{r-1}, wenn $r = r_1 + \frac{r_2}{2}$ gesetzt wird.

Wir folgern aus diesem Satze sofort folgende Tatsache:

Satz 26. Die Anzahl g der Geschlechter in einem relativbiquadratischen Körper ist gleich der Anzahl A seiner ambigen Komplexe.

Beweis. Nach Satz 25 ist
$$g = 4^{r-1}.$$
Es ist aber weiter
$$g \leqq A \leqq 4^{t+v-m-1}, \tag{1}$$
(man sehe hierzu § 6); folglich muß
$$r \leqq t + v - m$$
sein und da nach Satz 9
$$r \geqq t + v - m$$
ist, so ergibt sich

$$r = t + v - m$$

und mithin nach (1) $g = A$.

Aus diesem Satze 26 folgt nun leicht der folgende wichtige Satz:

Satz 27. Jeder Komplex des Hauptgeschlechtes in einem relativbiquadratischen Zahlkörper $K(\sqrt[4]{\mu})$ ist die $(1-S)^{\text{te}}$ symbolische Potenz eines Komplexes in $K(\sqrt[4]{\mu})$, d. h. jede Klasse des Hauptgeschlechtes in $K(\sqrt[4]{\mu})$ ist gleich dem Produkte aus der $(1-S)^{\text{ten}}$ symbolischen Potenz einer Klasse und aus einer solchen Klasse, welche Ideale des Körpers k enthält.

Beweis. Bezeichnet man mit f die Anzahl der Komplexe des Hauptgeschlechtes und mit f' die Anzahl derjenigen Komplexe vom Hauptgeschlechte, welche $(1-S)^{\text{te}}$ symbolische Potenzen anderer Komplexe sind, so ist $Af' = gf$ (L. § 9). Da sich aber $A = g$ ergeben hat, muß auch $f = f'$ sein und dies ist eben die Aussage des Satzes 27.

Es möge zum Schluß hier noch bemerkt werden, daß auch für den relativbiquadratischen Zahlkörper ein Satz von den Relativnormen wie im relativquadratischen Körper besteht. Er lautet:

Satz 28. Wenn ν, μ irgend zwei beliebige ganze Zahlen $\neq 0$ des Körpers k bedeuten, von denen μ nicht das Quadrat einer Zahl in k ist, und welche für jedes Primideal $\mathfrak{w}$ in k die Bedingung:

$$\left(\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right)\right) = +1$$

erfüllen, so ist die Zahl ν stets gleich der Relativnorm $N_{\sqrt[4]{\mu}, k}$ einer ganzen oder gebrochenen Zahl des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$.

Der Beweis dieses Satzes schließt sich genau an den Hilbertschen für den analogen Fall im relativquadratischen Körper an (H. Rq. Z., § 43). Es ist wohl eine kleine Modifikation an demselben anzubringen wegen der charakteristischen Einheiten, deren Symbol den Wert -1 hat; diese ist jedoch leicht zu treffen.

§ 16.

Über den Körper der imaginären Zahlen.

Um ein Beispiel für die erhaltenen allgemeinen Resultate zu haben, bestimmen wir das biquadratische Reziprozitätsgesetz für zwei zu $\lambda = 1 + i$ prime Primzahlen des Körpers $k(i)$ der imaginären Zahlen und die Ergänzungssätze. Wir schlagen jedoch den gerade entgegengesetzten Weg zu demjenigen ein, der in Hilberts Theorie des ralativquadratischen Zahlkörpers und entsprechend in Lietzmanns Dissertation befolgt wird. Wir bestimmen zunächst die Werte des Symbols $\left(\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right)\right)$ für beliebige Primideale $\mathfrak{w}$, geben dann die Definition des Geschlechtes in $K(\sqrt[4]{\mu})$ gleich allgemein, die Fälle, wo die Relativdiskriminante von $K(\sqrt[4]{\mu})$ durch λ teilbar ist, nicht ausschließend, und ermitteln für die Anzahl der Geschlechter in den betrachteten Körpern $K(\sqrt[4]{\mu})$ eine *obere Grenze.* Auf Grund dieses Resultates ergibt sich dann das gesuchte Reziprozitätsgesetz mit den Ergänzungssätzen leicht unter Zuhilfenahme des Eisensteinschen speziellen Reziprozitätsgesetzes für eine rationale und eine imaginäre Primzahl.

Es seien μ, ν beliebige ganze Zahlen des Körpers k und es gehe die Primzahl $\lambda = 1 + i$ in μ genau zur a^{ten}, in ν genau zur b^{ten} Potenz auf; ferner sei π eine zu λ prime Primzahl in k. Wir setzen $\frac{\nu^a}{\mu^b} = \frac{\varrho}{\sigma}$, so daß ϱ und σ zu λ prime Zahlen werden, und definieren das Symbol $\left(\left(\frac{\nu,\,\mu}{\pi}\right)\right)$ durch die Gleichung

$$\left(\left(\frac{\nu,\,\mu}{\pi}\right)\right) = \left(\left(\frac{(-1)^{ab}\,\varrho\,\sigma^3}{\pi}\right)\right).$$

Man zeigt dann leicht auf Grund der Sätze der Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers, daß die Zahl ν dann und nur dann Normenrest des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ wird, wenn

$$\left(\left(\frac{\nu,\,\mu}{\pi}\right)\right) = +1$$

ausfällt.

Wir wollen nun weiter untersuchen, wann eine ganze Zahl ν des Körpers k Normenrest des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ nach der Primzahl λ wird.

Zu diesem Behufe stellen wir zunächst für die zu λ primen Zahlen ν Kongruenzen nach den Moduln 8 und λ^7 auf, entsprechend Satz 10 und 10*. Im Körper $k(i)$ gibt es keine Grundeinheit: wir nehmen für ε_m der Sätze 10 und 10* die Einheitswurzel i; ferner für $\varkappa$ die Primzahl $3 - 2i$ und endlich für π die Primzahl $1 + 4i$. Diese Primzahlen entsprechen den Anforderungen der Sätze 10 und 10*, denn es bestehen die Gleichungen

$$\left(\left(\frac{i}{3-2i}\right)\right) = -i, \quad \left(\left(\frac{i}{1+4i}\right)\right) = +1, \quad \left(\frac{\lambda}{1+4i}\right) = -1;$$

dabei ist $1 + 4i$ eine primäre Zahl.

Berücksichtigen wir nun, daß für jede zu λ prime Zahl α die Kongruenz

$$\alpha^4 \equiv 1, \quad (\lambda^7)$$

besteht, so können wir für jede zu λ prime Zahl ν Kongruenzen von der Form

(1) $$\nu \equiv i^a(3-2i)^b\,(1+4i)^c, \quad (8),$$

(2) $$\nu \equiv i^a(3-2i)^b\,(1+4i)^c, \quad (\lambda^7)$$

aufstellen, wobei die Exponenten a, b gewisse Werte 0, 1, 2, 3 haben, hingegen der Exponent c in (1) die Werte 0, 1 und in (2) die Werte 0, 1, 2, 3 haben kann. Es soll zur Abkürzung

$$i^a(3-2i)^b\,(1+4i)^c = (a\;b\;c)$$

gesetzt werden.

Es seien nun μ, ν zwei beliebige ganze Zahlen in k, und es gehe die Primzahl λ in μ genau zur e^{ten}, in ν genau zur e'^{ten} Potenz auf; ferner mögen die Kongruenzen

$$\mu \equiv \lambda^e(a\;b\;c), \quad (\lambda^{7+e}),$$
$$\nu \equiv \lambda^{e'}(a'\,b'\,c'), \quad (\lambda^{7+e'})$$

statthaben. Ich definiere dann das Symbol $\left(\left(\frac{\nu,\,\mu}{\lambda}\right)\right)$ durch die Gleichung

(3) $$\left(\left(\frac{\nu,\,\mu}{\lambda}\right)\right) = i^{a'b-ab'+2bb'+ce'-c'e}.$$

Die Rechnung zeigt, daß ν dann und nur dann Normenrest des Körpers $K(\sqrt[4]{\mu})$ wird, wenn

(4) $$\left(\left(\frac{\nu,\,\mu}{\lambda}\right)\right) = +1$$

ausfällt.

Für das Symbol $\left(\left(\frac{\nu,\,\mu}{\lambda}\right)\right)$ bestehen, wie unmittelbar aus (3) zu ersehen ist, die Beziehungen

(5) $$\begin{aligned} \left(\left(\frac{\nu,\,\mu}{\lambda}\right)\right)\left(\left(\frac{\mu,\,\nu}{\lambda}\right)\right) &= +1, \\ \left(\left(\frac{\nu,\,\mu}{\lambda}\right)\right)\left(\left(\frac{\nu,\,\mu'}{\lambda}\right)\right) &= \left(\left(\frac{\nu,\,\mu\mu'}{\lambda}\right)\right), \\ \left(\left(\frac{\nu,\,\mu}{\lambda}\right)\right)\left(\left(\frac{\nu',\,\mu}{\lambda}\right)\right) &= \left(\left(\frac{\nu\nu',\,\mu}{\lambda}\right)\right), \end{aligned}$$

wo μ, ν, μ', ν' ganz beliebige ganze Zahlen in k bedeuten.

Die Gleichung (4) steht in vollem Einklange mit Satz 24. Wir heben hier nur den Fall eines primären μ noch besonders hervor. μ ist primär, wenn eine Kongruenz von der Form

$$\mu \equiv (0\,0\,c), \quad (8)$$

besteht. Es wird dann in der Tat

$$\left(\left(\frac{\nu,\,\mu}{\lambda}\right)\right) = +1$$

für jede beliebige zu λ prime ganze Zahl ν in k.

Nun können wir zur Definition des Geschlechtes schreiten und zur Bestimmung der *oberen Grenze* 4^{r-1} für die Anzahl der Geschlechter auf Grund der Sätze 7 und 8. Dann ergibt sich das gesuchte Reziprozitätsgesetz leicht, wenn man die Hilbertsche Methode im Kummerschen Körper befolgt (H. A. Z.).

Für den biquadratischen Charakter der Einheit i in bezug auf die Zahl μ des Körpers $\varkappa$ gilt die Gleichung

$$\left(\left(\frac{i}{\mu}\right)\right) = i^{\frac{n(\mu)-1}{4}},$$

wo $n(\mu)$ die Norm der Zahl μ genommen im Körper k vorstellt.

Setzen wir nun $\mu \equiv (a\,b\,c),\ (\lambda^7)$, so wird

$$n(\mu) \equiv (-3)^b, \quad (16)$$

und es ist demnach

$$\frac{n(\mu)-1}{4} \equiv -b, \quad (4).$$

Folglich besteht die Beziehung

$$(6) \qquad \left(\left(\frac{i}{\mu}\right)\right) = i^{-b},$$

die wir mit bezug auf (3) auch folgendermaßen schreiben können:

$$(6^*) \qquad \left(\left(\frac{i}{\mu}\right)\right)^{-1} = \left(\left(\frac{i,\,\mu}{\lambda}\right)\right).$$

Die Gleichungen (6) und (6*) stellen *den ersten Ergänzungssatz* zum biquadratischen Reziprozitätsgesetz im Körper der imaginären Zahlen $k(i)$ dar.

Je nach dem Werte, den der biquadratische Charakter der Einheit i nach einer Primzahl in k hat, wollen wir diese Primzahlen in folgende drei Arten einteilen: zur ersten Art gehören diejenigen Primzahlen π in k, für welche

$$\left(\left(\frac{i}{\pi}\right)\right) = \pm i$$

wird; zur zweiten Art die Primzahlen $\varkappa_1$, für welche

$$\left(\left(\frac{i}{\varkappa_1}\right)\right) = -1$$

und endlich zur dritten Art diejenigen Primzahlen $\varkappa_2$, für welche

$$\left(\left(\frac{i}{\varkappa_2}\right)\right) = +1$$

ausfällt. Den Primzahlen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ der zweiten und der dritten Art wollen wir in der Folge stets eine solche Form erteilen, daß die Gleichungen

$$\varkappa_1 \equiv (2\,2\,c), \quad (\lambda^7),$$
$$\varkappa_2 \equiv (0\,0\,c), \quad (\lambda^7)$$

befriedigt werden, was durch Multiplikation mit einer geeigneten Potenz von i immer geschehen kann.

Am leichtesten findet man das biquadratische Reziprozitätsgesetz in $k(i)$ für zwei Primzahlen π und π_1 der ersten Art. Ist nämlich π_1 eine Primzahl der ersten Art, so kann man stets eine Potenz i^t der Einheit i bestimmen derart, daß

$$\left(\left(\frac{i^t\pi}{\pi_1}\right)\right) = +1 \tag{7}$$

wird. Demnach ist π_1 im Körper $K(\sqrt[4]{i^t\pi})$ die Relativnorm bezüglich k eines Primideals $\mathfrak{P}_1$ dieses Körpers $K(\sqrt[4]{i^t\pi})$. Die Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt[4]{i^t\pi})$ bezüglich k enthält nur die Primzahlen λ und π als Faktoren. Folglich besteht das Charakterensystem der Zahl π_1 im Körper $K(\sqrt[4]{i^t\pi})$ aus den Symbolen

$$\left(\left(\frac{\pi_1, i^t\pi}{\lambda}\right)\right), \quad \left(\left(\frac{\pi_1, i^t\pi}{\pi}\right)\right) = \left(\left(\frac{\pi_1}{\pi}\right)\right).$$

Da wir aber angenommen haben, daß π eine Primzahl der ersten Art sei, so können wir wieder eine Potenz i^{t_1} von i bestimmen derart, daß

$$\left(\left(\frac{i^{t_1}\pi_1}{\pi}\right)\right) = +1 \tag{8}$$

wird. Mithin besteht das Charakterensystem des Primideals $\mathfrak{P}_1$ aus dem einzigen Symbol

$$\left(\left(\frac{i^{t_1}\pi_1, i^t\pi}{\lambda}\right)\right).$$

Der Körper $K(\sqrt[4]{i^t\pi})$ enthält nur ein Geschlecht: das Hauptgeschlecht. Deshalb muß

$$\left(\left(\frac{i^{t_1}\pi_1, i^t\pi}{\lambda}\right)\right) = +1$$

sein.

Wir können diese Gleichung auch folgendermaßen schreiben:

$$\left(\left(\frac{i, i}{\lambda}\right)\right)^{tt_1} \left(\left(\frac{i, \pi}{\lambda}\right)\right)^{t_1} \left(\left(\frac{\pi, i}{\lambda}\right)\right)^{t} \left(\left(\frac{\pi_1, \pi}{\lambda}\right)\right) = +1. \tag{9}$$

Nun beachten wir die Beziehungen

$$\left(\left(\frac{i, i}{\lambda}\right)\right) = 1, \quad \left(\left(\frac{i, \pi}{\lambda}\right)\right)\left(\left(\frac{\pi, i}{\lambda}\right)\right) = 1,$$
$$\left(\left(\frac{\pi, i}{\lambda}\right)\right) = \left(\left(\frac{i}{\pi}\right)\right), \quad \left(\left(\frac{\pi_1, i}{\lambda}\right)\right) = \left(\left(\frac{i}{\pi_1}\right)\right),$$

die aus (3) und (5) unmittelbar folgen, und bringen die Gleichungen (7) und (8) auf die Form

$$\left(\left(\frac{i}{\pi_1}\right)\right)^t = \left(\left(\frac{\pi}{\pi_1}\right)\right)^{-1}, \quad \left(\left(\frac{i}{\pi}\right)\right)^{t_1} = \left(\left(\frac{\pi_1}{\pi}\right)\right)^{-1},$$

so ergibt sich leicht aus (9) für die Primzahlen π und π_1 *das biquadratische Reziprozitätsgesetz*

$$\left(\left(\frac{\pi}{\pi_1}\right)\right)\left(\left(\frac{\pi_1}{\pi}\right)\right)^{-1} = \left(\left(\frac{\pi_1,\,\pi}{\lambda}\right)\right) \tag{10}$$

oder nach (3) in der Gestalt

$$\left(\left(\frac{\pi}{\pi_1}\right)\right)\left(\left(\frac{\pi_1}{\pi}\right)\right)^{-1} = i^{a_1 b - a b_1 + 2 b b_1}, \tag{10*}$$

wobei die Kongruenzen

$$\pi \equiv (a\; b\; c); \qquad \pi \equiv (a_1\; b_1\; c_1), \quad (\lambda^7)$$

bestehen.

Auch für ganz beliebige Primzahlen π, π_1, die einer beliebigen Art angehören, gilt das Reziprozitätsgesetz in derselben Gestalt, wie es die Gleichungen (10) und (10*) darstellen, wovon wir uns schrittweise überzeugen werden.

Zu diesem Behufe leiten wir zunächst einige besondere Fälle des Reziprozitätsgesetzes ab.

Es sei zunächst $\varkappa_1$ eine Primzahl der zweiten Art, π eine beliebige Primzahl. Wir nehmen an, es sei

$$\left(\left(\frac{\varkappa_1}{\pi}\right)\right) = +1.$$

Dann ist π die Relativnorm bezüglich k eines bestimmten Primideals $\mathfrak{P}$ des Körpers $K(\sqrt[4]{\varkappa_1})$. Das Charakterensystem der Zahl π besteht aus den Symbolen

$$\left(\left(\frac{\pi,\,\varkappa_1}{\lambda}\right)\right), \qquad \left(\left(\frac{\pi,\,\varkappa_1}{\varkappa_1}\right)\right) = \left(\left(\frac{\pi}{\varkappa_1}\right)\right),$$

weil λ und π die einzigen Primzahlen in k sind, die in der Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt[4]{\varkappa_1})$ bezüglich k aufgehen. Nun kann man wegen der Annahme, die wir über $\varkappa_1$ machten, eine geeignete Potenz i^t von i bestimmen derart, daß

$$\left(\left(\frac{i^t\pi,\,\varkappa_1}{\lambda}\right)\right) = +1 \tag{11}$$

wird. Hieraus folgt aber weiter, daß das Charakterensystem des Ideals $\mathfrak{P}$ aus dem einen Symbol

$$\left(\left(\frac{i^t\pi,\,\varkappa_1}{\varkappa_1}\right)\right) = \left(\left(\frac{i^t\pi}{\varkappa_1}\right)\right)$$

besteht. Wir schließen jetzt, wie wir es oben taten, daß

$$\left(\left(\frac{i^t\pi,\,\varkappa_1}{\varkappa_1}\right)\right) = \left(\left(\frac{i^t\pi}{\varkappa}\right)\right) = +1 \tag{12}$$

sein muß. Es ist nur noch der Exponent t zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke schreiben wir die Gleichung (11) in der Gestalt

$$\left(\left(\frac{i,\ \varkappa_1}{\lambda}\right)\right)^t \left(\left(\frac{\pi,\ \varkappa_1}{\lambda}\right)\right) = +1$$

und berücksichtigen hiernach die Beziehungen

$$\left(\left(\frac{i,\ \varkappa_1}{\lambda}\right)\right) = -1, \quad \left(\left(\frac{\pi,\ \varkappa_1}{\lambda}\right)\right) = (-1)^{a+b},$$

wobei $\pi \equiv (a\ b\ c)$, (λ^7) gesetzt wurde; dann ergibt sich sofort für t die Kongruenz

$$t \equiv a + b, \quad (2).$$

Führen wir dies in (12) ein, so folgt wegen $\left(\left(\frac{i}{\varkappa_1}\right)\right) = -1$ folgende Gleichung

$$(-1)^{a+b}\left(\left(\frac{\pi}{\varkappa_1}\right)\right) = \left(\left(\frac{\pi,\varkappa_1}{\lambda}\right)\right)\left(\left(\frac{\pi}{\varkappa_1}\right)\right) = +1.$$

Dieselbe Gleichung folgt aber auch aus (10) für den gegenwärtigen Fall.

Es sei ferner $\varkappa_2$ eine Primzahl der dritten Art, π eine beliebige Primzahl.

Wir zeigen jetzt leicht, daß aus

$$\left(\left(\frac{\varkappa_2}{\pi}\right)\right) = +1$$

stets

$$\left(\left(\frac{\pi}{\varkappa_2}\right)\right) = +1$$

folgt. Wegen der ersten dieser Gleichungen ist die Zahl π die Relativnorm bezüglich k eines Primideals $\mathfrak{P}$ des Körpers $K(\sqrt{\varkappa_2})$. Nun enthält die Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt{\varkappa_2})$ bezüglich k nur den einen Primfaktor $\varkappa_2$ (Satz 1 nnd 19); folglich besteht das Charakterensystem der Zahl π aus dem einen Symbol $\left(\left(\frac{\pi,\ \varkappa_2}{\varkappa_2}\right)\right) = \left(\left(\frac{\pi}{\varkappa_2}\right)\right)$, ebenso aber auch das Charakterensystem von $\mathfrak{P}$, denn es ist $\left(\left(\frac{i,\varkappa_2}{\lambda}\right)\right) = +1$. Hieraus folgt, wie früher, die obige Behauptung.

Um nun auf Grund des Gefundenen das Reziprozitätsgesetz allgemein zu beweisen, setzen wir die Kenntnis des Eisensteinschen Reziprozitätsgesetzes zwischen einer rationalen und einer beliebigen komplexen Primzahl voraus. Bedeuten p, q zwei rationale Primzahlen, die erste von der Form $p \equiv 1$, (4), die zweite von der Form $q \equiv 3$, (4) und π eine beliebige komplexe Primzahl von der Form $\pi \equiv \pm 1$, oder $\equiv \pm 1 + 2i$, (4), so bestehen nach Eisenstein die Beziehungen

$$(14) \qquad \left(\left(\frac{p}{\pi}\right)\right) = \left(\left(\frac{\pi}{p}\right)\right), \quad \left(\left(\frac{-q}{\pi}\right)\right) = \left(\left(\frac{\pi}{q}\right)\right).$$

Es seien nun $\varkappa$ und $\varkappa_1$ zwei komplexe Primzahlen der zweiten oder der dritten Art. Wir zeigten bereits, daß in diesem Falle aus $\left(\left(\frac{\varkappa}{\varkappa_1}\right)\right) = +1$ stets $\left(\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa}\right)\right) = +1$ folgt. Jetzt nehmen wir an, es sei $\left(\left(\frac{\varkappa}{\varkappa_1}\right)\right) = i$, und bestimmen eine Primzahl ϱ in k derart, daß sie die Gleichungen

$$(15)\qquad \begin{aligned} &\left(\left(\frac{i}{\varrho}\right)\right) = \pm i, \quad \left(\left(\frac{\varkappa}{\varrho}\right)\right) = \mp i, \quad \left(\left(\frac{\varkappa'}{\varrho}\right)\right) = +1, \\ &\qquad\qquad\qquad\quad \left(\left(\frac{\varkappa_1}{\varrho}\right)\right) = \mp i, \quad \left(\left(\frac{\varkappa_1'}{\varrho}\right)\right) = +1 \end{aligned}$$

befriedigt; $\varkappa'$, $\varkappa_1'$ sind die zu $\varkappa$ bez. $\varkappa_1$ konjugierten Primzahlen.

Wegen der ersten dieser Gleichungen ist ϱ eine Primzahl der ersten Art. Wir wollen sie etwa in einer der Formen

$$(16)\qquad \varrho \equiv (3\ 3\ c) \quad \text{oder} \quad \equiv (1\ 1\ c), \quad (\lambda^7)$$

annehmen, dem Vorzeichen von i in der ersten Gleichung (15) entsprechend, was stets durch Multiplikation mit einer geeigneten Potenz i^i von i geschehen kann.

Aus (15) folgen unmittelbar die Gleichungen

$$\left(\left(\frac{\varkappa\varkappa'}{\varrho}\right)\right) = \mp i, \quad \left(\left(\frac{\varkappa_1\varkappa_1'}{\varrho}\right)\right) = \mp i;$$

hierin sind $\varkappa\varkappa'$, $\varkappa_1\varkappa_1'$ rationale Primzahlen von der Form $p \equiv 1$, (4). Um nun auf diese Gleichungen das Reziprozitätsgesetz (14) anwenden zu können, müssen wir ϱ etwa noch mit i multiplizieren, damit

$$i\varrho = \pm 1 + 2i, \quad (4)$$

werde. Tun wir das, so folgen aus den letzten Gleichungen die Beziehungen

$$(17)\qquad \left(\left(\frac{\varkappa\varkappa'}{\varrho}\right)\right) = \left(\left(\frac{i\varrho}{\varkappa\varkappa'}\right)\right), \quad \left(\left(\frac{\varkappa_1\varkappa_1'}{\varrho}\right)\right) = \left(\left(\frac{i\varrho}{\varkappa_1\varkappa_1'}\right)\right).$$

Da jedoch $\varkappa$, $\varkappa_1$ der Voraussetzung nach Primzahlen der ersten oder der zweiten Art vorstellen, so muß

$$\left(\left(\frac{i}{\varkappa\varkappa'}\right)\right) = +1, \quad \left(\left(\frac{i}{\varkappa_1\varkappa_1'}\right)\right) = +1$$

sein, und es folgt hiermit aus (17) weiter

$$\left(\left(\frac{\varkappa\varkappa'}{\varrho}\right)\right) = \left(\left(\frac{\varrho}{\varkappa}\right)\right)\left(\left(\frac{\varrho}{\varkappa'}\right)\right), \quad \left(\left(\frac{\varkappa_1\varkappa_1'}{\varrho}\right)\right) = \left(\left(\frac{\varrho}{\varkappa_1}\right)\right)\left(\left(\frac{\varrho}{\varkappa_1'}\right)\right).$$

Berücksichtigen wir jetzt, daß wegen (15) auf Grund der bereits entwickelten besonderen Reziprozitätsgesetze, weil wir ϱ in der Form (16) annahmen, die Gleichungen

$$\left(\left(\frac{\varrho}{\varkappa'}\right)\right) = -1, \quad \left(\left(\frac{\varrho}{\varkappa_1'}\right)\right) = +1$$

folgen, so ergeben sich schließlich die Gleichungen

$$(18)\qquad \left(\left(\frac{\varkappa}{\varrho}\right)\right)=\left(\left(\frac{\varrho}{\varkappa}\right)\right)=\mp i,\qquad \left(\left(\frac{\varkappa_1}{\varrho}\right)\right)=\left(\left(\frac{\varrho}{\varkappa_1}\right)\right)=\mp i.$$

Nun betrachten wir den Körper $K(\sqrt[4]{\varkappa\varrho})$. Wegen der über $\varkappa$ und ϱ gemachten Annahmen hat $\varkappa\varrho$ eine der Formen

$$\varkappa\varrho\equiv(1\ 1\ c)\quad\text{oder}\quad\equiv(3\ 3\ c),\quad(\lambda^7),$$

und es ist deshalb $\left(\left(\frac{i,\,\varkappa\varrho}{\lambda}\right)\right)=\mp i$. Die Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt[4]{\varkappa\varrho})$ enthält die Primzahlen λ, $\varkappa$, ϱ als Faktoren, so daß das Charakterensystem der Zahl ϱ aus den drei Symbolen

$$\left(\left(\frac{\varrho,\,\varkappa\varrho}{\lambda}\right)\right),\quad \left(\left(\frac{\varrho,\,\varkappa\varrho}{\varkappa}\right)\right)=\left(\left(\frac{\varrho}{\varkappa}\right)\right),\quad \left(\left(\frac{\varkappa\varrho,\,\varkappa\varrho}{\varrho}\right)\right)=\left(\left(\frac{-\varkappa}{\varrho}\right)\right)^{-1}$$

besteht. Da aber ϱ in der Relativdiskriminante von $K(\sqrt[4]{\varkappa\varrho})$ als Faktor enthalten ist, so muß es gleich der vierten Potenz eines Primideals $\mathfrak{R}$ in $K(\sqrt[4]{\varkappa\varrho})$ sein. Um nun das Charakterensystem von $\mathfrak{R}$ zu finden, hat man nur zu beachten, daß $\left(\left(\frac{\varrho,\,\varkappa\varrho}{\lambda}\right)\right)=-1$ ist, und demnach ϱ mit -1 zu multiplizieren derart, daß

$$\left(\left(\frac{-\varrho,\,\varkappa\varrho}{\lambda}\right)\right)=+1$$

wird. Dann ergibt sich das Charakterensystem von $\mathfrak{R}$ in der Gestalt

$$(19)\qquad \left(\left(\frac{-\varrho}{\varkappa}\right)\right)=\left(\left(\frac{\varrho}{\varkappa}\right)\right),\qquad \left(\left(\frac{-\varrho,\,\varkappa\varrho}{\varrho}\right)\right)=\left(\left(\frac{\varkappa}{\varrho}\right)\right)^{-1}.$$

Aus (18) ersieht man, daß die Ideale $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}^2$, $\mathfrak{R}^3$, $\mathfrak{R}^4$ verschiedenen Geschlechtern angehören. Außer diesen Geschlechtern gibt es in $K(\sqrt[4]{\varkappa\varrho})$ keine anderen Geschlechter mehr. Wir ersehen ferner aus (18) und (19), daß das Produkt der Charaktere jedes einzelnen Geschlechtes gleich $+1$ ist. Hieraus folgt allgemein, daß das Produkt der Charaktere jedes beliebigen Ideals in $K(\sqrt[4]{\varkappa\varrho})$ gleich $+1$ sein muß.

Es besteht aber die Gleichung

$$(20)\qquad \left(\left(\frac{\varkappa\varrho}{\varkappa_1}\right)\right)=+1,$$

und es wird demzufolge $\varkappa_1$ im Körper $K(\sqrt[4]{\varkappa\varrho})$ die Relativnorm bezüglich k von einem gewissen Ideal $\mathfrak{K}_1$. Das Charakterensystem der Zahl $\varkappa_1$ enthält folgende Symbole:

$$\left(\left(\frac{\varkappa_1,\,\varkappa\varrho}{\lambda}\right)\right),\quad \left(\left(\frac{\varkappa_1,\,\varkappa\varrho}{\varkappa}\right)\right)=\left(\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa}\right)\right),\quad \left(\left(\frac{\varkappa_1,\,\varkappa\varrho}{\varrho}\right)\right)=\left(\left(\frac{\varkappa_1}{\varrho}\right)\right).$$

Wegen der Voraussetzungen, die über die Zahlen $\varkappa$, $\varkappa_1$ und ϱ gemacht wurden, muß $\left(\left(\frac{\varkappa_1,\, \varkappa\varrho}{\lambda}\right)\right) = +1$ werden. Da ferner $\left(\left(\frac{i,\, \varkappa\varrho}{\lambda}\right)\right) = \pm i$ ist, so besteht das Charakterensystem des Ideals $\mathfrak{K}_1$ aus den Charakteren $\left(\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa}\right)\right)$, $\left(\left(\frac{\varkappa_1}{\varrho}\right)\right)$, und es muß dem oben Gesagten zufolge

$$\left(\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa}\right)\right)\left(\left(\frac{\varkappa_1}{\varrho}\right)\right) = +1$$

sein. Vergleicht man jetzt diese Gleichung mit (20) und berücksichtigt hierbei noch die zweite der Gleichungen (19), so ergibt sich endlich, daß

$$(21) \qquad \left(\left(\frac{\varkappa}{\varkappa_1}\right)\right) = \left(\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa}\right)\right)$$

sein muß, was auch aus (10) im gegenwärtigen Falle folgen würde.

Hätten wir anfangs angenommen, daß $\left(\left(\frac{\varkappa}{\varkappa_1}\right)\right) = -i$ sei, so hätten wir wieder in ähnlicher Weise die Gleichung (21) erhalten. Hieraus folgt schon, daß aus $\left(\left(\frac{\varkappa}{\varkappa_1}\right)\right) = -1$ stets $\left(\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa}\right)\right) = -1$ folgen muß.

Es bleibt nur noch übrig, den Fall, wo $\varkappa$ eine komplexe Primzahl der zweiten oder dritten, π eine Primzahl der ersten Art ist, näher zu betrachten.

Wir setzen $\pi \equiv (a\ b\ c)$, (λ^7) und können annehmen, daß $a + b = 4$ ist. Dann ergibt es sich aus dem früher bewiesenen Reziprozitätsgesetze, daß aus $\left(\left(\frac{\varkappa}{\pi}\right)\right) = +1$ stets $\left(\left(\frac{\pi}{\varkappa}\right)\right) = +1$ folgen muß. Ist aber $\left(\left(\frac{\varkappa}{\pi}\right)\right) = \pm i$, so kann durch ein ähnliches Verfahren, wie im oben ausführlich behandelten Falle, gezeigt werden, daß auch $\left(\left(\frac{\pi}{\varkappa}\right)\right) = \pm i$ ist.

Wir nehmen an, es sei $\left(\left(\frac{\varkappa}{\pi}\right)\right) = i$, und bestimmen ein Primideal ϱ derart, daß es die Gleichungen

$$\left(\left(\frac{i}{\varrho}\right)\right) = \pm i, \qquad \left(\left(\frac{\varkappa}{\varrho}\right)\right) = \mp i, \qquad \left(\left(\frac{\varkappa'}{\varrho}\right)\right) = 1,$$
$$\left(\left(\frac{\pi}{\varrho}\right)\right) = \mp i, \qquad \left(\left(\frac{\pi'}{\varrho}\right)\right) = 1$$

befriedigt; $\varkappa'$, π' sind die zu den Primzahlen $\varkappa$ bez. π konjugierten Primzahlen. Wir können wieder annehmen, es sei ϱ von der Form

$$\varrho \equiv (3\ 3\ c) \quad \text{bez.} \quad \equiv (1\ 1\ c), \quad (\lambda^7).$$

Da nach Voraussetzung $\left(\left(\frac{\pi'}{\varrho}\right)\right) = +1$ ist, so folgt hieraus wegen der Annahmen, die wir über die Zahlen π, ϱ gemacht haben, daß

$\left(\left(\frac{\varrho}{\pi'}\right)\right) = -1$ sein muß; denn es ist auch π' eine Primzahl von der ersten Art, so daß für π', ϱ die Reziprozitätsgleichung (10) gilt, und es wird, wenn wir $\pi' \equiv (a' b' c')$, (λ^7) setzen, $a' = b'$.

Nun können dieselben Schlüsse gemacht werden wie im oben behandelten Falle; man hat nur statt $\varkappa_1$ die Primzahl π zu nehmen. Es ergeben sich unter Berücksichtigung der Gleichung $\left(\left(\frac{i}{\pi\pi'}\right)\right) = -1$ die Beziehungen

$$\left(\left(\frac{\varkappa}{\varrho}\right)\right) = \left(\left(\frac{\varrho}{\varkappa}\right)\right) = \mp i, \quad \left(\left(\frac{\pi}{\varrho}\right)\right) = \left(\left(\frac{\varrho}{\pi}\right)\right) = \mp i. \tag{22}$$

Wie wir im vorigen Falle schlossen, daß der Körper $K(\sqrt[4]{\varkappa\varrho})$ vier voneinander verschiedene Geschlechter enthält und daß das Produkt der Charaktere, die ein Geschlecht bestimmen, gleich $+1$ ist, genau so können wir dasselbe im gegenwärtigen Falle schließen.

Nun ist dann weiter wegen der Gleichung $\left(\left(\frac{\varkappa\varrho}{\pi}\right)\right) = +1$ π die Relativnorm bezüglich k eines Primideals $\mathfrak{P}$ des Körpers $K(\sqrt[4]{\varkappa\varrho})$. Betrachtet man das Charakterensystem dieses Ideals $\mathfrak{P}$, so findet man bei Beachtung der Gleichung $\left(\left(\frac{\pi,\, \varkappa\varrho}{\lambda}\right)\right) = +1$, daß

$$\left(\left(\frac{\pi}{\varkappa}\right)\right)\left(\left(\frac{\pi}{\varrho}\right)\right) = +1$$

sein muß. Vergleichen wir diese Gleichung mit der Gleichung

$$\left(\left(\frac{\varkappa\varrho}{\pi}\right)\right) = +1$$

und mit der zweiten der Gleichungen (22), so ergibt sich schließlich die Reziprozitätsgleichung

$$\left(\left(\frac{\varkappa}{\pi}\right)\right) = \left(\left(\frac{\pi}{\varkappa}\right)\right). \tag{23}$$

Ähnlich verfährt man, wenn $\left(\left(\frac{\varkappa}{\pi}\right)\right) = -i$ ist, und erhält zuletzt dieselbe Reziprozitätsgleichung.

Auch wenn man annimmt, daß $\left(\left(\frac{\varkappa}{\pi}\right)\right) = -1$ ist, kommt man schließlich durch dasselbe Verfahren zur Reziprozitätsgleichung (23). Es ist jedoch in diesem Falle die Primzahl ϱ so zu bestimmen, daß sie den Gleichungen

$$\left(\left(\frac{i}{\varrho}\right)\right) = \pm i, \quad \left(\left(\frac{\varkappa}{\varrho}\right)\right) = -1, \quad \left(\left(\frac{\varkappa'}{\varrho}\right)\right) = +1,$$
$$\left(\left(\frac{\pi}{\varrho}\right)\right) = -1, \quad \left(\left(\frac{\pi'}{\varrho}\right)\right) = +1$$

Genüge leistet.

Wir haben uns somit überzeugt, daß die Gleichung (10) für die betrachteten Fälle wirklich das Reziprozitätsgesetz liefert. Wir nahmen die Primzahlen, die wir der Betrachtung unterzogen, in besonderen Gestalten an, die stets durch Multiplikation mit einer geeigneten Potenz der Einheit i erreicht werden können. Lassen wir jedoch diese Annahme fallen und nehmen die Primzahlen π, π_1 in (10) in ganz beliebiger Form an, so überzeugt man sich leicht, daß auch dann noch immer jene Gleichung (10) richtig ist.

Wir wollen hier noch bemerken, daß aus (10) unmittelbar das besondere Reziprozitätsgesetz des Satzes 22 folgt.

Es soll jetzt schließlich *der zweite Ergänzungssatz* zum biquadratischen Reziprozitätsgesetze im Körper $k(i)$ abgeleitet werden. Bezeichnet man mit π eine beliebige zu λ prime Primzahl in k, für welche die Kongruenz $\pi \equiv (abc)$, (λ^7) besteht, so gilt die Gleichung

$$\left(\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)\right)^{-1} = \left(\left(\frac{\lambda,\, \pi}{\lambda}\right)\right) \tag{24}$$

oder in einer anderen Form geschrieben:

$$\left(\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)\right) = i^{-c}. \tag{24*}$$

Es sei zunächst π eine Primzahl der ersten Art. Dann können wir eine Potenz i^s von i bestimmen derart, daß

$$\left(\left(\frac{i^s \lambda}{\pi}\right)\right) = +1 \tag{25}$$

wird. Zufolge dieser Gleichung zerfällt π im Körper $K(\sqrt[4]{i^s\lambda})$ in vier voneinander verschiedene Primideale. Die Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt[4]{i^s\lambda})$ enthält nur den einen Faktor λ. Die Einheit i ist im gegenwärtigen Falle Normenrest des Körpers $K(\sqrt[4]{i^s\lambda})$ nach λ, so daß das Charakterensystem eines Primideals $\mathfrak{P}$ des Körpers $K(\sqrt[4]{i^s\lambda})$, welches in π aufgeht, aus dem einzigen Charakter $\left(\left(\frac{\pi,\, i^s\lambda}{\varkappa}\right)\right)$ besteht; folglich muß

$$\left(\left(\frac{\pi,\, i^s\lambda}{\lambda}\right)\right) = +1$$

sein. Beachtet man ferner die Beziehung $\left(\left(\frac{\pi,\, i}{\lambda}\right)\right) = \left(\left(\frac{i}{\pi}\right)\right)$, so folgt mit Bezug auf (25) sofort die Gleichung (24), weil nach (5)

$$\left(\left(\frac{\pi,\, \lambda}{\lambda}\right)\right)\left(\left(\frac{\lambda,\, \pi}{\lambda}\right)\right) = +1$$

ist.

Nun sei $\varkappa$ eine Primzahl der dritten Art, so folgt aus $\left(\left(\frac{\lambda}{\varkappa}\right)\right) = +1$, weil der Körper $K(\sqrt[4]{\lambda})$ nur ein Geschlecht enthält und $\left(\left(\frac{i}{\varkappa}\right)\right) = +1$ ist, sofort die Gleichung

$$\left(\left(\frac{\varkappa, \lambda}{\lambda}\right)\right) = +1,$$

wie es der Ergänzungssatz (24) fordert.

Ist jedoch $\left(\left(\frac{\lambda}{\varkappa}\right)\right) = i$, so bestimmen wir eine Primzahl ϱ, welche die Gleichungen

$$\left(\left(\frac{i}{\varrho}\right)\right) = \pm i, \quad \left(\left(\frac{\varkappa}{\varrho}\right)\right) = \mp i$$

befriedigt. Dann ist nach dem biquadratischen Reziprozitätsgesetze

$$\left(\left(\frac{\varrho}{\varkappa}\right)\right) = \mp i;$$

folglich wird

$$\left(\left(\frac{\lambda\varrho}{\varkappa}\right)\right) = +1.$$

Die Relativdiskriminante bezüglich k von $K(\sqrt[4]{\lambda\varrho})$ enthält die zwei Faktoren λ und ϱ. Da jedoch

$$\left(\left(\frac{i, \lambda\varrho}{\varrho}\right)\right) = \left(\left(\frac{i}{\varrho}\right)\right) = \pm i$$

wird, so bilden die Idealklassen in $K(\sqrt[4]{\lambda\varrho})$ nur ein Geschlecht. Die Primzahl $\varkappa$ wird die Relativnorm bezüglich k eines Primideals $\mathfrak{K}$ in $K(\sqrt[4]{\lambda\varrho})$. Für den Charakter dieses Primideals finden wir die Gleichung

$$\left(\left(\frac{i\varkappa, \lambda\varrho}{\lambda}\right)\right) = \left(\left(\frac{i\varkappa}{\varrho}\right)\right) = +1.$$

Aus dieser Gleichung folgern wir weiter, daß

$$\left(\left(\frac{i, \lambda}{\lambda}\right)\right) \left(\left(\frac{i, \varrho}{\lambda}\right)\right)^{-1} \left(\left(\frac{\varkappa, \lambda}{\lambda}\right)\right) \left(\left(\frac{\varkappa, \varrho}{\lambda}\right)\right)^{-1} = +1$$

sein muß. Da jedoch $\left(\left(\frac{i, \lambda}{\lambda}\right)\right) = 1$, $\left(\left(\frac{\varkappa, \varrho}{\lambda}\right)\right) = 1$ ausfällt, folgt schließlich

$$\left(\left(\frac{\varkappa, \lambda}{\lambda}\right)\right) = \left(\left(\frac{i, \varrho}{\lambda}\right)\right) = \left(\left(\frac{\varrho, i}{\lambda}\right)\right)^{-1} = \left(\left(\frac{i}{\varrho}\right)\right)^{-1} = \left(\left(\frac{\lambda}{\varkappa}\right)\right)^{-1};$$

dies war zu beweisen.

Falls $\left(\left(\frac{\lambda}{\varkappa}\right)\right) = -i$ ist, trifft man leicht die Abänderungen, die in dem eben entwickelten Beweise anzubringen sind. Folglich bleibt nur noch der Fall, daß $\left(\left(\frac{\lambda}{\varkappa}\right)\right) = -1$ ausfällt, zu betrachten. In diesem Falle bestimmen wir eine Primzahl ϱ in k derart, daß sie die Gleichungen

$$\left(\left(\frac{i}{\varrho}\right)\right) = \pm i, \quad \left(\left(\frac{\varkappa}{\varrho}\right)\right) = -1$$

befriedigt. Dann ist gewiß auch $\left(\left(\frac{\varrho}{\varkappa}\right)\right) = -1$, oder noch weiter

$$\left(\left(\frac{\lambda\varrho}{\varkappa}\right)\right) = +1.$$

Dieser Gleichung zufolge ist die Zahl $\varkappa$ die Relativnorm bezüglich k eines bestimmten Primideals $\mathfrak{K}$ in $K(\sqrt[4]{\lambda\varrho})$. Das Charakterensystem der Zahl $\varkappa$ enthält die Symbole

$$\left(\left(\frac{\varkappa,\, \lambda\varrho}{\lambda}\right)\right), \quad \left(\left(\frac{\varkappa,\, \lambda\varrho}{\varrho}\right)\right).$$

Es ist ferner $\left(\left(\frac{i,\, \lambda\varrho}{\varrho}\right)\right) = i$. Berücksichtigt man nun, daß

$$\left(\left(\frac{\varkappa,\, \lambda\varrho}{\varrho}\right)\right) = -1$$

ist, so folgt hieraus, daß das Charakterensystem von $\mathfrak{K}$ aus dem einen Charakter $\left(\left(\frac{-\varkappa,\, \lambda\varrho}{\lambda}\right)\right)$ besteht; mithin muß

$$\left(\left(\frac{-\varkappa,\, \lambda\varrho}{\lambda}\right)\right) = \left(\left(\frac{-\varkappa,\, \lambda}{\lambda}\right)\right)\left(\left(\frac{-\varkappa,\, \varrho}{\lambda}\right)\right)^{-1} = +1$$

sein. Hieraus folgt aber wegen der Gleichungen

$$\left(\left(\frac{-1,\, \lambda}{\lambda}\right)\right) = +1, \quad \left(\left(\frac{-1,\, \varrho}{\lambda}\right)\right) = -1, \quad \left(\left(\frac{\varkappa,\, \varrho}{\lambda}\right)\right) = +1$$

die Beziehung

$$\left(\left(\frac{\varkappa,\, \lambda}{\lambda}\right)\right) = -1,$$

was zu beweisen war.

Schließlich nehmen wir an, $\varkappa$ sei eine Primzahl der zweiten Art. Wir erkennen leicht, daß aus $\left(\left(\frac{\lambda}{\varkappa}\right)\right) = +1$ auch die Gleichung

$$\left(\left(\frac{\varkappa,\, \lambda}{\lambda}\right)\right) = +1$$

folgt. Zu diesem Behufe hat man den Körper $K(\sqrt[4]{\lambda})$ zu betrachten und zu beachten, daß wegen $\left(\left(\frac{i,\, \lambda}{\lambda}\right)\right) = +1$ in diesem Körper nur ein Geschlecht besteht.

Ist jedoch $\left(\left(\frac{\lambda}{\varkappa}\right)\right) = i$, so bestimmen wir eine Primzahl ϱ in k, welche den Gleichungen

$$\left(\left(\frac{i}{\varrho}\right)\right) = \pm i, \quad \left(\left(\frac{\varkappa}{\varrho}\right)\right) = \mp i$$

Genüge leistet, und nehmen ϱ in einer der Formen $\varrho \equiv (33c)$ bez. $\equiv (11c)$, (λ^7) an. Dann verfahren wir weiter wie zuvor. Die Fälle, wo $\left(\left(\frac{\lambda}{\varkappa}\right)\right) = -i$ oder $\left(\left(\frac{\lambda}{\varkappa}\right)\right) = -1$ ausfällt, bedürfen keiner weiteren Erläuterung mehr.

Damit ist der zweite Ergänzungssatz vollständig bewiesen für den Fall, daß die Primzahlen von derjenigen Gestalt sind, die wir ihnen bei der abgeschlossenen Untersuchung verliehen dachten. Da jedoch

$$\left(\left(\frac{i^s \lambda}{\lambda}\right)\right) = +1$$

ist, wenn s einen der Werte 0, 1, 2, 3 hat, so gilt die Gleichung (24) auch dann noch, wenn die Primzahl π in einer beliebigen Form genommen wird.

Vinkovci, am 18. Juni 1905.

Berichtigung

zu der Arbeit von G. Zemplén: Über die Kompatibilitätsbedingungen bei Unstetigkeiten in der Elektrodynamik in Band 62.

p. 578 ist in der Formel für $\overline{J}^L$ statt $x_t \mathfrak{A}_t^x + y_t \mathfrak{A}_t^y + z_t \mathfrak{A}_t^z$ zu setzen $x_t \mathfrak{A}^x + y_t \mathfrak{A}^y + z_t \mathfrak{A}^z$;

p. 580 ist in den Formeln (27), (28) und in der Zeile 11 v. u. überall statt σ zu setzen $\sigma\sqrt{\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2}$.