Werk

Titel: Mathematische Annalen
Ort: Leipzig
Jahr: 1907
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN235181684_0063
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0063

LOG Id: LOG_0014
LOG Titel: Periodical issue
LOG Typ: issue

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684

Terms and Conditions

Contact

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, ADOLPH MAYER, CARL NEUMANN, MAX NOETHER
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther v. Dyck
in München.

David Hilbert
in Göttingen.

Otto Blumenthal
in Aachen.

63. Band. 2. Heft.

Mit 2 Figuren im Text.

Ausgegeben am 30. November 1906.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1906.

Über die Verteilung der Primideale in den Idealklassen eines algebraischen Zahlkörpers.

Von

Edmund Landau in Berlin.

Vorwort.

In einer Reihe von Arbeiten*) habe ich die wichtigsten bekannten Gesetze über die Verteilung der Primzahlen und speziell der Primzahlen einer arithmetischen Progression mit vereinfachten Hilfsmitteln bewiesen und zum Teil verschärft. Die von mir angewandten Methoden benutzen nur die Elemente der Funktionentheorie, in erster Linie den Cauchyschen Integralsatz; ich habe keinen Gebrauch von den neueren Untersuchungen der Herren Hadamard, v. Mangoldt und de la Vallée Poussin über die Dichtigkeit der Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion und einiger verwandter Funktionen gemacht. Dies war darum von Bedeutung, weil es für die von Herrn Dedekind eingeführte Zetafunktion, welche einem beliebigen algebraischen Zahlkörper entspricht, unbekannt ist, ob sie in der ganzen Ebene existiert und ob sie Nullstellen besitzt. Meine neuen analytischen Kunstgriffe waren imstande, zum ersten Mal**) den *„Primidealsatz“* zu beweisen:

*) „Neuer Beweis des Primzahlsatzes und Beweis des Primidealsatzes“, Mathematische Annalen, Bd. 56, 1903, S. 645—670; „Über die Primzahlen einer arithmetischen Progression“, Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Bd. 112, Abt. 2a, 1903, S. 493—535; „Über die zahlentheoretische Funktion $\mu(k)$“, ebenda, S. 537—570; „Bemerkungen zu der Abhandlung von Herrn Kluyver: Reeksen afgeleid uit de reeks $\sum \frac{\mu(m)}{m}$“, Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Verslagen, Bd. 13, 1904, S. 71—83. Ich habe hier nur diejenigen Arbeiten erwähnt, an welche die vorliegende Abhandlung anknüpft. Übrigens setze ich aus ihnen nichts als bekannt voraus.

**) S. die in Anm. 1 zuerst genannte Arbeit; der dort gegebene Beweis des Primidealsatzes benutzt einige Ergebnisse meiner Abhandlung: „Über die zu einem algebraischen Zahlkörper gehörige Zetafunktion und die Ausdehnung der Tschebyschefschen Primzahlentheorie auf das Problem der Verteilung der Primideale“, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 125, 1903, S. 64—188.

Die Anzahl der Primideale eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers, deren Norm $\leqq x$ *ist, ist asymptotisch gleich* $\frac{x}{\log x}$, *d. h. ihr Quotient durch* $\frac{x}{\log x}$ *nähert sich für* $x = \infty$ *der Grenze* 1.

Im ersten und zweiten Teil der vorliegenden Abhandlung untersuche ich die Verteilung der Primideale eines algebraischen Zahlkörpers auf die einzelnen Klassen äquivalenter Ideale. Mein wichtigstes Resultat ist als Hauptsatz 1*) bezeichnet. Die Methode der Beweisführung ist analog zu meinen früheren Untersuchungen über die arithmetische Progression, welche in dem a. a. O. zum erstenmal bewiesenen Satze**) gipfelten:

k und l seien zwei teilerfremde Zahlen, $\varrho(x)$ die Anzahl der Primzahlen $ky + l \leqq x$, $\operatorname{Li}(x)$ der Integrallogarithmus von x, $\varphi(k)$ die Eulersche zahlentheoretische Funktion, m eine beliebige reelle Größe. Dann ist

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log^m x}{x} \left(\varrho(x) - \frac{1}{\varphi(k)} \operatorname{Li}(x)\right) = 0.$$

Im dritten Teil der vorliegenden Abhandlung werde ich u. a. einen Satz (Hauptsatz 3)***) beweisen, der sowohl den Hauptsatz 1 (und dadurch den Primidealsatz) als auch den soeben angeführten Satz über die Primzahlen einer arithmetischen Progression als Spezialfälle enthält.

Im vierten Teil ziehe ich aus den allgemeinen Sätzen einige besonders wichtige Folgerungen.

Meine neuen Sätze besagen durchweg, daß gewisse Grenzwerte existieren oder gewisse unendliche Reihen konvergieren. Es ist leicht, heuristische Gründe anzugeben, welche die Sätze wahrscheinlich machen, und der Wortlaut der neuen Sätze wird den Kenner nicht überraschen. Jedoch hat es mich selbst aufs Höchste überrascht, daß meine Methoden kräftig genug sind, um Beweise für diese Sätze zu liefern.

Um dem Leser das Verständnis zu erleichtern, setze ich in der Theorie der Zetafunktion und der verwandten Funktionen nichts aus meinen früheren Arbeiten oder denen anderer Autoren (Riemann, Hadamard, v. Mangoldt, de la Vallée Poussin usw.) als bekannt voraus. Wohl aber muß der Leser mit der Theorie der algebraischen Zahlkörper vertraut sein.

Der erste Paragraph jedes der drei ersten Teile dient ihm als Einleitung.

---

*) s. S. 147.

**) S. die zweite der auf S. 145, Anm. 1 zitierten Arbeiten, S. 507 und 532.

***) s. S. 197.

Erster Teil.

§ 1

(Einleitung).

Das Ziel der §§ 2—10 ist der

Hauptsatz 1. *Ein algebraischer Zahlkörper $\varkappa$ habe die Eigenschaft, daß die über alle Primideale der Hauptklasse (im engeren Sinne*)) erstreckte Summe**)*

$$\sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}}$$

divergiert. h sei die Anzahl der Idealklassen. Es sei $\varrho(x)$ die Anzahl der Primideale einer bestimmten Klasse, deren Norm $\leqq x$ ist, m eine beliebige reelle Zahl. Dann ist

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log^m x}{x}\left(\varrho(x) - \frac{1}{h}\operatorname{Li}(x)\right) = 0. \tag{1}$$

Dies besagt insbesondere für $m = 1$ mit Rücksicht auf

$$\lim_{x=\infty} \frac{\operatorname{Li}(x)\log x}{x} = 1,$$

daß für jede Klasse

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varrho(x)}{\frac{x}{\log x}} = \frac{1}{h}$$

ist, also für zwei beliebig gegebene Klassen, wenn $\varrho_1(x)$ und $\varrho_2(x)$ die zugehörigen Anzahlen bezeichnen, daß

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varrho_1(x)}{\varrho_2(x)}$$

existiert und $= 1$ ist.

Mit anderen Worten:

In jeder Klasse eines algebraischen Zahlkörpers, für welchen die über alle Primideale der Hauptklasse erstreckte Summe

$$\sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}}$$

divergiert, gibt es asymptotisch gleich viele Primideale.

Daß unter der gemachten Voraussetzung für jede Klasse

$$\sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^s} = \frac{1}{h}\log\frac{1}{s-1} + G(s) \qquad (s > 1) \tag{2}$$

---

*) D. h. zwei Ideale heißen äquivalent, wenn ihr Quotient eine (ganze oder gebrochene) Zahl des Körpers mit positiver Norm ist.

**) $N\mathfrak{n}$ bezeichnet die Norm des Ideals $\mathfrak{n}$; ich schreibe keine Klammer, auch nicht in der Folge bei $N\mathfrak{n}^s$ (s^{te} Potenz von $N\mathfrak{n}$).

ist, wo $\lim\limits_{s=1} G(s)$ existiert, folgt ohne weiteres aus den Untersuchungen von Herrn Weber „über Zahlengruppen in algebraischen Körpern"*), also durch Anwendung der klassischen Dirichletschen Methode. Aber die Gleichung (2) berechtigt noch bei weitem nicht zu dem Schluß, daß jede Klasse des Körpers asymptotisch gleich viele Primideale enthält. Um diesen Schluß zu rechtfertigen, besteht die Hauptschwierigkeit in dem Nachweise der Existenz der Grenzwerte

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varrho_1(x)}{\frac{x}{\log x}}, \qquad \lim_{x=\infty} \frac{\varrho_2(x)}{\frac{x}{\log x}}. \tag{3}$$

Aus

$$\begin{aligned} \sum_{\mathfrak{p}_1} \frac{1}{N\mathfrak{p}_1^{\,s}} &= \frac{1}{h} \log \frac{1}{s-1} + G_1(s), \\ \sum_{\mathfrak{p}_2} \frac{1}{N\mathfrak{p}_2^{\,s}} &= \frac{1}{h} \log \frac{1}{s-1} + G_2(s)^{**)} \end{aligned} \tag{4}$$

läßt sich unmittelbar nur folgern: wenn die Grenzwerte (3) existieren, so sind sie $= 1$.

Wie groß die zwischen (4) und der Gleichung

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varrho_1(x)}{\varrho_2(x)} = 1 \tag{5}$$

noch vorhandene Lücke ist, ergibt sich aus folgenden historischen Daten.

In einem wichtigen analogen Fall — für zwei arithmetische Progressionen $ky + l_1$ und $ky + l_2$ mit derselben Differenz k, wo l_1 und l_2 zu k relativ prim sind — hatte Dirichlet***) im Jahre 1837 bewiesen, daß, $\varphi(k) = h$ gesetzt,

$$\begin{aligned} \sum_{p_1} \frac{1}{p_1^{\,s}} &= \frac{1}{h} \log \frac{1}{s-1} + G_1(s), \\ \sum_{p_2} \frac{1}{p_2^{\,s}} &= \frac{1}{h} \log \frac{1}{s-1} + G_2(s) \end{aligned}$$

ist, wo p_1 die Primzahlen durchläuft, welche $\equiv l_1 \pmod{k}$ sind, und p_2 die Primzahlen $\equiv l_2 \pmod{k}$. $G_1(s)$ und $G_2(s)$ sind Funktionen, welche gegen einen endlichen Grenzwert konvergieren, falls die reelle Variable s zu 1

*) Zweite Abhandlung, Mathematische Annalen, Bd. 49, 1897, S. 83—89.

**) Wo $\mathfrak{p}_1$ bezw. $\mathfrak{p}_2$ die Primideale der betreffenden Klasse durchläuft.

***) „Beweis des Satzes, daß jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Faktor sind, unendlich viele Primzahlen enthält", Abhandlungen der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, S. 45—71; Werke, Bd. 1, 1889, S. 313—342.

abnimmt. Aber erst 59 Jahre später hat Herr de la Vallée Poussin*) den Nachweis geführt, daß für die Anzahlen $\varrho_1(x)$ und $\varrho_2(x)$ der Primzahlen $p_1 \leqq x$ bezw. $p_2 \leqq x$

$$(5) \qquad \lim_{x=\infty} \frac{\varrho_1(x)}{\varrho_2(x)} = 1$$

ist. Dirichlet hatte diese Gleichung (5) in der Einleitung seiner berühmten Arbeit nur vermutungsweise mit den klaren und unzweideutigen Worten ausgesprochen: „Die aufmerksame Betrachtung der natürlichen Reihe der Primzahlen läßt an derselben eine Menge von Eigenschaften wahrnehmen, deren Allgemeinheit durch fortgesetzte Induktion zu jedem beliebigen Grade von Wahrscheinlichkeit erhoben werden kann, während die Auffindung eines Beweises, der allen Anforderungen der Strenge genügen soll, mit den größten Schwierigkeiten verbunden ist. Eines der merkwürdigsten Resultate dieser Art bietet sich dar, wenn man sämtliche Glieder der Reihe durch dieselbe, übrigens ganz beliebige Zahl dividiert. Nimmt man die Primzahlen aus, die im Divisor aufgehen und mithin unter den ersten Gliedern der Reihe vorkommen, so werden alle übrigen einen Rest lassen, welcher relative Primzahl zum Divisor ist, und das Resultat, welches sich bei fortgesetzter Division herausstellt, besteht darin, daß jeder Rest der genannten Art unaufhörlich wiederkehrt, *und zwar so, daß das Verhältnis der Zahlen, welche für irgend zwei solche Reste bezeichnen, wie oft sie bis zu einem gewissen Gliede erschienen sind, bei immer weiter fortgesetzter Division die Einheit zur Grenze hat.* Abstrahiert man von der zunehmenden Gleichmäßigkeit des Vorkommens der einzelnen Reste und beschränkt das Beobachtungsresultat auf die nie aufhörende Wiederkehr eines jeden derselben, so läßt sich dasselbe in dem Satze aussprechen: daß jede unbegrenzte arithmetische Reihe, deren erstes Glied und Differenz keinen gemeinschaftlichen Faktor haben, unendlich viele Primzahlen enthält."

Dirichlet beweist die letztere Behauptung auf Grund seiner Gleichung

$$\sum_{p \equiv l} \frac{1}{p^s} = \frac{1}{h} \log \frac{1}{s-1} + G(s);$$

der hier kursiv gedruckte Satz spricht offenbar genau die zuerst von Herrn de le Vallée Poussin bewiesene Gleichung (5) aus. Übrigens habe ich dieselbe erheblich einfacher bewiesen und dahin verschärft, daß für jedes m

*) „Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers. Deuxième Partie. Les fonctions de Dirichlet et les nombres premiers de la forme linéaire $Mx + N$", Annales de la société scientifique de Bruxelles, Bd. 20, Teil 2, 1896, S. 281—362.

(6) $$\lim_{x=\infty} \log^m x \left(\frac{\varrho_1(x)}{\varrho_2(x)} - 1\right) = 0$$

ist. Dies folgt nämlich unmittelbar aus dem a. a. O.*) von mir bewiesenen Satze

$$\varrho(x) = \frac{1}{h}\,\mathrm{Li}(x) + O(x e^{-\sqrt[d]{\log x}}),$$

wo d eine passend wählbare positive Konstante ist.

Analog werde ich in §§ 2—10 für die Primideale der gegebenen Klasse beweisen, daß

$$\varrho(x) = \frac{1}{h}\,\mathrm{Li}(x) + O(x e^{-\sqrt[d]{\log x}})$$

ist; daraus folgt unmittelbar die Gleichung (1), also der Hauptsatz 1 und auch die in der Schreibweise mit (6) übereinstimmende Gleichung, in welcher $\varrho_1(x)$ und $\varrho_2(x)$ die auf S. 147 angegebene Bedeutung haben.

§ 2.

Satz I. *Es sei $f(n)$ eine zahlentheoretische Funktion**), welche den beiden Bedingungen***)*

(7) $$\sum_{n=1}^{x} \frac{|f(n)|}{n} = O(\log x)$$

und

(8) $$\sum_{n=1}^{x} f(n) = O(x^{1-\gamma})$$

genügt, wo γ eine zwischen 0 *(exkl.) und* 1 *(inkl.) gelegene Konstante ist. Dann konvergiert die Reihe*

(9) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

für $\Re(s) > 1 - \gamma$ und stellt dort eine reguläre Funktion $\varphi(s)$ dar; ferner besteht, wenn $s = \sigma + ti$ gesetzt wird, für

(10) $$t \geqq e^{\frac{2}{\gamma}}, \quad 1 - \frac{1}{\log t} \leqq \sigma \leqq 2$$

die Ungleichung

---

*) l. c., S. 532.

**) D. h. $f(n)$ ist für jedes ganzzahlige $n \geqq 1$ definiert, braucht aber nicht ganzzahlig und auch nicht reell zu sein.

***) Unter $O(g(x))$ wird eine Funktion von x verstanden, deren Quotient durch $g(x)$ dem absoluten Betrage nach für alle x von einer gewissen Stelle an unterhalb einer endlichen Schranke gelegen ist.

(11) $$|\varphi(s)| < c_1 \log t,$$

*wo c_1 eine Konstante bezeichnet.**)

Das Gebiet (10) erstreckt sich ins Unendliche.

Beweis. Zunächst ist klar, daß $\varphi(s)$ für die durch (10) bestimmten Werte von s konvergiert; denn es ist für jedes solche s

$$\Re(s) \geqq 1 - \frac{1}{\log t} \geqq 1 - \frac{1}{\frac{2}{\gamma}} = 1 - \frac{\gamma}{2} > 1 - \gamma,$$

und wegen (8) ist bekanntlich die Reihe (9) für $\Re(s) > 1 - \gamma$ konvergent, und zwar gleichmäßig in einer gewissen Umgebung jeder Stelle dieser Halbebene. Der Vollständigkeit wegen will ich dies beweisen. Wenn

$$S(0) = 0$$

und für $x \geqq 1$

$$\sum_{n=1}^{x} f(n) = S(x)$$

gesetzt wird, so ist nach (8) für alle $x \geqq 1$

$$|S(x)| < Ax^{1-\gamma},$$

wo A eine Konstante bezeichnet. Es ist

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{f(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{x} \frac{S(n) - S(n-1)}{n^s} = \sum_{n=1}^{x} S(n) \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right) + \frac{S(x)}{(x+1)^s}$$

(12) $$= \sum_{n=1}^{x} S(n)\, s \int_{n}^{n+1} \frac{du}{u^{s+1}} + \frac{S(x)}{(x+1)^s},$$

und für alle s des Rechtecks

(13) $$\sigma_0 \leqq \sigma \leqq \sigma_1, \quad -t_1 \leqq t \leqq t_1,$$

wo $\sigma_0 > 1 - \gamma$ ist,

$$\left| S(n)\, s \int_{n}^{n+1} \frac{du}{u^{s+1}} \right| < An^{1-\gamma}(\sigma_1 + t_1)\, \frac{1}{n^{1+\sigma_0}} = \frac{A(\sigma_1 + t_1)}{n^{\sigma_0 + \gamma}},$$

$$\left| \frac{S(x)}{(x+1)^s} \right| < \frac{Ax^{1-\gamma}}{(x+1)^{\sigma_0}} < \frac{A}{x^{\sigma_0 + \gamma - 1}}.$$

Hieraus folgt nach (12) die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (9) im Rechteck (13), also in einer gewissen Umgebung jeder Stelle der Halbebene $\Re(s) > 1 - \gamma$. Die Reihe (9) stellt also für $\Re(s) > 1 - \gamma$ eine reguläre analytische Funktion $\varphi(s)$ dar.

---

*) c_1 hängt also nur von der Funktion $f(n)$ ab. Analog werden in der Folge mit $c_2, c_3, \cdots$ Konstanten bezeichnet, welche gewisse Relationen für alle s eines Gebietes erfüllen. Die Bezeichnung wird stets so gewählt sein, daß jede solche Konstante $c_2, c_3, \cdots$ durch jede größere Zahl ersetzt werden kann.

Es sei nun s eine beliebige Zahl, welche die Ungleichungen (10) erfüllt; dann zerlege ich in

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

die Summe in zwei durch $\left[t^{\frac{1}{\gamma}}\right]$ getrennte Teile*) und erhalte dadurch

$$(14) \qquad \varphi(s) = \sum_{n=1}^{t^{\frac{1}{\gamma}}} \frac{f(n)}{n^s} + \sum_{n=t^{\frac{1}{\gamma}}+1}^{\infty} \frac{S(n) - S(n-1)}{n^s}.$$

Hierbei und im folgenden verstehe ich der bequemeren Schreibweise wegen unter einer Summe mit einer nicht ganzzahligen oberen oder unteren Summationsgrenze y, daß der Summationsbuchstabe bis $[y]$ bezw. von $[y]$ an läuft. Aus (14) folgt weiter

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{t^{\frac{1}{\gamma}}} \frac{f(n)}{n^s} + \sum_{n=t^{\frac{1}{\gamma}}+1}^{\infty} S(n) \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right) - \frac{S\left(\left[t^{\frac{1}{\gamma}}\right]\right)}{\left(\left[t^{\frac{1}{\gamma}}\right]+1\right)^s}$$

$$= \sum_{n=1}^{t^{\frac{1}{\gamma}}} \frac{f(n)}{n^s} + s \sum_{n=t^{\frac{1}{\gamma}}+1}^{\infty} S(n) \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{s+1}} - \frac{S\left(\left[t^{\frac{1}{\gamma}}\right]\right)}{\left(\left[t^{\frac{1}{\gamma}}\right]+1\right)^s},$$

$$|\varphi(s)| < \sum_{n=1}^{t^{\frac{1}{\gamma}}} \frac{|f(n)|}{n^{1-\frac{1}{\log t}}} + (2+t) \sum_{n=t^{\frac{1}{\gamma}}+1}^{\infty} A n^{1-\gamma} \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{2-\frac{1}{\log t}}} + \frac{A\left(\left[t^{\frac{1}{\gamma}}\right]\right)^{1-\gamma}}{\left(\left[t^{\frac{1}{\gamma}}\right]+1\right)^{1-\frac{1}{\log t}}}$$

$$< \sum_{n=1}^{t^{\frac{1}{\gamma}}} \frac{|f(n)|}{n} n^{\frac{1}{\log t}} + (2+t) A \sum_{n=t^{\frac{1}{\gamma}}+1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{u^{1-\gamma}\,du}{u^{2-\frac{1}{\log t}}} + \frac{A t^{\frac{1}{\gamma}(1-\gamma)}}{t^{\frac{1}{\gamma}\left(1-\frac{1}{\log t}\right)}}$$

$$\leqq t^{\frac{1}{\gamma}\frac{1}{\log t}} \sum_{n=1}^{t^{\frac{1}{\gamma}}} \frac{|f(n)|}{n} + (2+t) A \int_{\left[t^{\frac{1}{\gamma}}\right]+1}^{\infty} \frac{du}{u^{1+\gamma-\frac{1}{\log t}}} + \frac{A t^{\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\log t}}}{t},$$

*) $[y]$ bezeichnet für reelle y die größte ganze Zahl $\leqq y$.

also wegen

$$t^{\frac{1}{\gamma}\frac{1}{\log t}} = e^{\frac{1}{\gamma}}, \quad 2 + t < 2t$$

(15)
$$|\varphi(s)| < e^{\frac{1}{\gamma}} \sum_{n=1}^{t^{\frac{1}{\gamma}}} \frac{|f(n)|}{n} + 2tA \int_{t^{\frac{1}{\gamma}}}^{\infty} \frac{du}{u^{1+\gamma-\frac{1}{\log t}}} + \frac{Ae^{\frac{1}{\gamma}}}{t}.$$

Nach der Voraussetzung (7) ist für alle ganzzahligen $x \geqq 2$

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{|f(n)|}{n} < B \log x,$$

wo B eine Konstante bezeichnet, also

(16)
$$\sum_{n=1}^{t^{\frac{1}{\gamma}}} \frac{|f(n)|}{n} < B \log\left[t^{\frac{1}{\gamma}}\right] \leqq \frac{B}{\gamma} \log t;$$

ferner ist

(17)
$$\int_{t^{\frac{1}{\gamma}}}^{\infty} \frac{du}{u^{1+\gamma-\frac{1}{\log t}}} = \frac{1}{\gamma - \frac{1}{\log t}} \cdot \frac{1}{t^{\frac{1}{\gamma}}\left(\gamma - \frac{1}{\log t}\right)} \leqq \frac{1}{\gamma - \frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{e^{\frac{1}{\gamma}}}{t} = \frac{2}{\gamma}\, e^{\frac{1}{\gamma}}\, \frac{1}{t}$$

aus (15), (16) und (17) ergibt sich

$$|\varphi(s)| < e^{\frac{1}{\gamma}} \frac{B}{\gamma} \log t + 2tA\, \frac{2}{\gamma}\, e^{\frac{1}{\gamma}}\, \frac{1}{t} + \frac{Ae^{\frac{1}{\gamma}}}{t},$$

also wegen

$$1 < \log t, \quad \frac{1}{t} < \log t$$

$$|\varphi(s)| < e^{\frac{1}{\gamma}} \frac{B}{\gamma} \log t + e^{\frac{1}{\gamma}} \frac{4A}{\gamma} \log t + e^{\frac{1}{\gamma}} A \log t = c_1 \log t,$$

womit der Satz I bewiesen ist.

Satz II. *Die für $\Re(s) > 1$ durch die Reihe*

(18)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

definierte Funktion $\zeta(s)$ hat im Punkte $s = 1$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum 1, ist im übrigen für $\Re(s) > 0$ regulär und genügt für

$$t \geqq 3, \quad 1 - \frac{1}{\log t} \leqq \sigma \leqq 2 \tag{19}$$

der Ungleichung

$$|\zeta(s)| < c_2 \log t, \tag{20}$$

wo c_2 eine Konstante bezeichnet.

Beweis. Wenn $\varepsilon > 0$ ist, ist die Reihe (18) für $\Re(s) \geqq 1 + \varepsilon$ wegen

$$\left|\frac{1}{n^s}\right| \leqq \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$$

gleichmäßig konvergent; (18) definiert also für $\Re(s) > 1$ eine reguläre Funktion $\zeta(s)$. Ferner ist für $\Re(s) > 1$

$$\zeta(s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^s}$$

$$= 1 + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}} - \frac{1}{n^{s-1}}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^s}$$

$$= 1 + \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}} - \frac{1}{n^{s-1}}\right) + \frac{1}{(n+1)^s}\right\}, \tag{21}$$

also wegen

$$\frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}} - \frac{1}{n^{s-1}}\right) + \frac{1}{(n+1)^s} = -s \int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}} \tag{22}$$

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}}. \tag{23}$$

Die in (23) auftretende unendliche Reihe ist wegen

$$\left|\int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}}\right| \leqq \int_0^1 \frac{du}{n^{1+\sigma}} = \frac{1}{n^{1+\sigma}}$$

für $\Re(s) \geqq \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ gleichmäßig konvergent und stellt daher für $\Re(s) > 0$ eine reguläre Funktion dar; folglich ist

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$$

für $\Re(s) > 0$ regulär.*)

*) Der vorangehende Beweis der bekannten Eigenschaft von $\zeta(s)$ rührt von Herrn de la Vallée Poussin her und steht zuerst in seiner „Démonstration simplifiée du théorème de Dirichlet sur la progression arithmétique", Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie Royale de Belgique, Bd. 53, 1896, S. 6—8.

Es sei nun s ein Wert, der die Ungleichungen (19) erfüllt. Nach (21) und (22) ist

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{t} \left\{ \frac{1}{s-1} \left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}} - \frac{1}{n^{s-1}} \right) + \frac{1}{(n+1)^s} \right\} - s \sum_{n=t+1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}}$$

$$= \frac{1}{s-1} \frac{1}{([t]+1)^{s-1}} + \sum_{n=1}^{t+1} \frac{1}{n^s} - s \sum_{n=t+1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}},$$

$$|\zeta(s)| < \frac{1}{t-1} \frac{1}{([t]+1)^{-\frac{1}{\log t}}} + \sum_{n=1}^{t+1} \frac{1}{n^{1-\frac{1}{\log t}}} + (2+t) \sum_{n=t+1}^{\infty} \int_0^1 \frac{du}{(n+u)^{2-\frac{1}{\log t}}}$$

$$< \frac{1}{t-1} (t+1)^{\frac{1}{\log t}} + (t+1)^{\frac{1}{\log t}} \sum_{n=1}^{t+1} \frac{1}{n} + 2t \sum_{n=t+1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{2-\frac{1}{\log t}}}$$

$$< \frac{1}{\frac{t}{2}} (2t)^{\frac{1}{\log t}} + (2t)^{\frac{1}{\log t}} \left(1 + \int_1^t \frac{du}{u} + \frac{1}{t+1} \right) + 2t \int_{[t]+1}^{\infty} \frac{du}{u^{2-\frac{1}{\log t}}}$$

$$< \frac{2}{t} \cdot 2^{\frac{1}{\log t}} \cdot e + 2^{\frac{1}{\log t}} \cdot e (\log t + 2) + 2t \int_t^{\infty} \frac{du}{u^{2-\frac{1}{\log t}}}$$

$$< 1 \cdot 2 \cdot e + 2 \,.\, e(\log t + 2) + 2t \frac{1}{1 - \frac{1}{\log t}} \cdot \frac{1}{t^{1-\frac{1}{\log t}}}$$

$$\leqq 2e + 2e \log t + 4e + 2 \frac{1}{1 - \frac{1}{\log 3}} \cdot e$$

$$< c_2 \log t,$$

womit der Satz II bewiesen ist.

Es sei nun $\varkappa$ ein beliebiger algebraischer Zahlkörper, k sein Grad; $\zeta_\varkappa(s)$ sei die von Herrn Dedekind*) (für reelle s) eingeführte Funktion, welche durch die unendliche Reihe definiert ist:

$$\zeta_\varkappa(s) = \sum_{\mathfrak{n}} \frac{1}{N\mathfrak{n}^s}, \tag{24}$$

---

*) Vergl. z. B. die von ihm herausgegebenen Vorlesungen Dirichlets über Zahlentheorie, 3. Aufl., 1879, S. 578; 4. Aufl., 1894, S. 610.

wo $\mathfrak{n}$ alle Ideale des Körpers durchläuft.*) Herr Dedekind hat bewiesen, daß die Reihe in (24) für $s > 1$ konvergiert, und daß bei Annäherung von rechts der Grenzwert

$$\lim_{s=1} (s-1)\,\zeta_\varkappa(s)$$

existiert und gleich einer positiven Konstanten

$$gh$$

ist, wo h die Anzahl der Idealklassen des Körpers und g eine andere durch den Körper wohlbestimmte positive Konstante ist.

Aus der von Herrn Dedekind bewiesenen Konvergenz für $s > 1$ folgt für $\Re(s) > 1$ wegen

$$\left|\frac{1}{N\mathfrak{n}^s}\right| = \frac{1}{N\mathfrak{n}^\sigma}$$

die Konvergenz, für $\Re(s) \geqq 1 + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ die gleichmäßige Konvergenz der Reihe in (24); dieselbe definiert also eine für $\Re(s) > 1$ reguläre analytische Funktion $\zeta_\varkappa(s)$, welche wegen

$$\lim_{s=1} (s-1)\,\zeta_\varkappa(s) = gh \neq 0$$

in $s = 1$ nicht regulär ist; falls sie dort einen Pol besitzt, ist derselbe von der ersten Ordnung.

Mehr folgt aus Herrn Dedekinds Entwickelungen nicht über den analytischen Charakter dieser Funktion. Für $\Re(s) > 1$ läßt sich die Gleichung (24) auch so schreiben:

$$\zeta_\varkappa(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^s}, \tag{25}$$

wo $F(n)$ die Anzahl der Ideale des Körpers bezeichnet, deren Norm gleich der ganzen rationalen Zahl n ist.

Herr Weber**) hat folgende Sätze 1., 2., 3. bewiesen, von denen 2. leicht aus 1. folgt, 3. unmittelbar aus 2.:

1. Die Anzahl $T(x)$ aller Ideale der Hauptklasse, welche durch ein

---

*) u^s bezeichnet für positive u die ganze transzendente Funktion $e^{s \log u}$ von s, wo $\log u$ der reelle Wert des Logarithmus ist.

**) „Über einen in der Zahlentheorie angewandten Satz der Integralrechnung", Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, 1896, S. 275—281; vergl. ferner seine auf S. 148, Anm. 1 zitierte Arbeit, S. 89—94 und außerdem sein Lehrbuch der Algebra, Bd. 2, 2. Aufl., 1899, S. 672—678 und 712.

gegebenes Ideal $\mathfrak{a}$ teilbar sind und deren Norm $\leqq x$ ist, ist in der Gestalt darstellbar:

(26) $$T(x) = \frac{g}{N\mathfrak{a}}\, x + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right).$$

2. Die Anzahl $A(x)$ aller Ideale einer Klasse, deren Norm $\leqq x$ ist, hat die Form

(27) $$A(x) = gx + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right).$$

3. Die Anzahl $H(x)$ aller Ideale, deren Norm $\leqq x$ ist, ist

(28) $$H(x) = ghx + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right).\text{*)}$$

Mit Hilfe dieser Weberschen Gleichung (28) und der Sätze I und II beweise ich nun den

Satz III. *Die Funktion* $\zeta_\varkappa(s)$ *ist über die Gerade* $\Re(s) = 1$ *fortsetzbar, hat im Punkte* $s = 1$ *einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum* gh, *ist sonst regulär für* $\Re(s) > 1 - \frac{1}{k}$ *und genügt für*

(29) $$t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log t} \leqq \sigma \leqq 2$$

der Ungleichung

(30) $$|\zeta_\varkappa(s)| < c_3 \log t,$$

wo c_3 *eine (nur vom Körper abhängige) Konstante bezeichnet.*

Beweis. Ich betrachte die Funktion

$$\varphi(s) = \zeta_\varkappa(s) - gh\zeta(s);$$

sie ist nach (25) für $\Re(s) > 1$ durch die Dirichletsche Reihe

(31) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

definiert wo

$$f(n) = F(n) - gh$$

ist. Wegen

---

*) Schon Herr Dedekind hatte bewiesen, daß

$$\lim_{x=\infty} \frac{T(x)}{x} = \frac{g}{N\mathfrak{a}}, \quad \lim_{x=\infty} \frac{A(x)}{x} = g, \quad \lim_{x=\infty} \frac{H(x)}{x} = gh$$

ist.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{x} f(n) = \sum_{n=1}^{x} (F(n) - gh) = H(x) - ghx$$

ist nach (28)

$$S(x) = O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right),$$

so daß die zweite Voraussetzung (8) des Satzes I erfüllt ist, falls

$$\gamma = \frac{1}{k}$$

gesetzt wird. Wegen

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{|f(n)|}{n} \leqq \sum_{n=1}^{x} \frac{F(n)+gh}{n} = \sum_{n=1}^{x} \frac{F(n)}{n} + gh \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{x} \frac{H(n)-H(n-1)}{n} + O(\log x)$$

$$= \sum_{n=1}^{x} H(n)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{H(x)}{x+1} + O(\log x)$$

$$= O\sum_{n=1}^{x} n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + O(1) + O(\log x) = O\sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n+1} + O(\log x)$$

$$= O(\log x)$$

ist auch die erste Voraussetzung (7) jenes Satzes erfüllt. Aus Satz I folgt also, daß die Reihe (31) für $\Re(s) > 1 - \frac{1}{k}$ konvergiert, daß $\varphi(s)$ für $\Re(s) > 1 - \frac{1}{k}$ regulär ist und für jedes den Bedingungen (29) genügende s die Ungleichung

(11) $$|\varphi(s)| < c_1 \log t$$

erfüllt.

Nach Satz II ist

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$$

für $\Re(s) > 0$, also a fortiori für $\Re(s) > 1 - \frac{1}{k}$ regulär, und $\zeta(s)$ genügt für die s des Gebietes (19), also a fortiori für diejenigen des Gebietes (29) der Ungleichung

(20) $$|\zeta(s)| < c_2 \log t.$$

Folglich ist

$$\zeta_\varkappa(s) = \varphi(s) + gh\zeta(s)$$

für $\Re(s) > 1 - \frac{1}{k}$ regulär bis auf den Pol erster Ordung $s = 1$ mit dem Residuum gh und genügt für die s des Gebietes (29) der Ungleichung

$$|\zeta_\varkappa(s)| < c_1 \log t + ghc_2 \log t = c_3 \log t,$$

womit (30), also der Satz III bewiesen ist.

§ 3.

Satz IV. *Es erfülle die zahlentheoretische Funktion $f(n)$ die Voraussetzungen des Satzes I, d. h. es sei für $x \geqq 2$*

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{|f(n)|}{n} < B \log x$$

und

$$|S(x)| = \left|\sum_{n=1}^{x} f(n)\right| < A x^{1-\gamma},$$

wo $0 < \gamma \leqq 1$ ist. Es sei $\varphi(s)$ die für $\Re(s) > 1 - \gamma$ durch die Dirichletsche Reihe

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \tag{9}$$

definierte Funktion. Dann ist für

$$t \geqq e^{\frac{2}{\gamma}}, \quad 1 - \frac{1}{\log t} \leqq \sigma \leqq 2 \tag{10}$$

$$|\varphi'(s)| < c_4 \log^2 t. \tag{32}$$

Beweis. Es werde die für alle m gültige Gleichung*)

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{m} \frac{f(n)}{n^s} + s \sum_{n=m+1}^{\infty} S(n) \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{s+1}} - \frac{S(m)}{(m+1)^s}$$

nach s differentiiert:

$$\varphi'(s) = -\sum_{n=1}^{m} \frac{f(n)\log n}{n^s} + \sum_{n=m+1}^{\infty} S(n) \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{s+1}} - s \sum_{n=m+1}^{\infty} S(n) \int_n^{n+1} \frac{\log u\, du}{u^{s+1}}$$
$$+ \frac{S(m)\log(m+1)}{(m+1)^s}.$$

Wenn s dem Gebiete (10) angehört, setze ich $m = \left[t^{\frac{1}{\gamma}}\right]$ und erhalte:

---

*) s. S. 152.

$$|\varphi'(s)| < \sum_{n=1}^{t^{\frac{1}{\gamma}}} \frac{|f(n)|\log n}{n^{1-\frac{1}{\log t}}} + \sum_{n=t^{\frac{1}{\gamma}}+1}^{\infty} A n^{1-\gamma} \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{2-\frac{1}{\log t}}}$$

$$+ (2+t) \sum_{n=t^{\frac{1}{\gamma}}+1}^{\infty} A n^{1-\gamma} \int_n^{n+1} \frac{\log u\, du}{u^{2-\frac{1}{\log t}}} + \frac{A t^{\frac{1}{\gamma}(1-\gamma)} \log\left(t^{\frac{1}{\gamma}}+1\right)}{t^{\frac{1}{\gamma}}\left(1-\frac{1}{\log t}\right)}$$

$$< \log\left(t^{\frac{1}{\gamma}}\right) t^{\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\log t}} \sum_{n=1}^{t^{\frac{1}{\gamma}}} \frac{|f(n)|}{n} + A \sum_{n=t^{\frac{1}{\gamma}}+1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{u^{1-\gamma}\, du}{u^{2-\frac{1}{\log t}}}$$

$$+ 2tA \sum_{n=t^{\frac{1}{\gamma}}+1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{u^{1-\gamma} \log u\, du}{u^{2-\frac{1}{\log t}}} + \frac{A}{t}\, t^{\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\log t}} \log\left(t^{\frac{1}{\gamma}} + t^{\frac{1}{\gamma}}\right)$$

$$< \frac{1}{\gamma} \log t \cdot e^{\frac{1}{\gamma}} \cdot B \log\left(t^{\frac{1}{\gamma}}\right) + A \int_{t^{\frac{1}{\gamma}}}^{\infty} \frac{du}{u^{1+\gamma-\frac{1}{\log t}}} + 2tA \int_{t^{\frac{1}{\gamma}}}^{\infty} \frac{\log u\, du}{u^{1+\gamma-\frac{1}{\log t}}}$$

$$+ \frac{A e^{\frac{1}{\gamma}}}{t} \left(\log 2 + \frac{1}{\gamma} \log t\right)$$

$$= \frac{1}{\gamma^2} e^{\frac{1}{\gamma}}\, B \log^2 t + \frac{A}{\gamma - \frac{1}{\log t}} \frac{1}{t^{\frac{1}{\gamma}\left(\gamma-\frac{1}{\log t}\right)}}$$

$$+ 2tA \left(\frac{1}{\gamma - \frac{1}{\log t}} \frac{\log\left(t^{\frac{1}{\gamma}}\right)}{t^{\frac{1}{\gamma}\left(\gamma - \frac{1}{\log t}\right)}} + \frac{1}{\left(\gamma - \frac{1}{\log t}\right)^2} \frac{1}{t^{\frac{1}{\gamma}\left(\gamma - \frac{1}{\log t}\right)}} \right)$$

$$+ \frac{A e^{\frac{1}{\gamma}}}{t} \left(\log 2 + \frac{1}{\gamma} \log t\right)$$

$$\leqq \frac{1}{\gamma^2} e^{\frac{1}{\gamma}} B \log^2 t + \frac{A}{\gamma - \frac{\gamma}{2}} \frac{e^{\frac{1}{\gamma}}}{t} + 2tA \left(\frac{1}{\gamma - \frac{\gamma}{2}} \frac{\frac{1}{\gamma} e^{\frac{1}{\gamma}} \log t}{t} + \frac{1}{\left(\gamma - \frac{\gamma}{2}\right)^2} \frac{e^{\frac{1}{\gamma}}}{t} \right)$$

$$+ \frac{A e^{\frac{1}{\gamma}} \log 2}{t} + \frac{A e^{\frac{1}{\gamma}}}{t} \frac{1}{\gamma} \log t$$

$$= c_5 \log^2 t + \frac{c_6}{t} + c_7 \log t + c_8 + \frac{c_9}{t} + c_{10} \frac{\log t}{t},$$

(32) $$|\varphi'(s)| < c_4 \log^2 t,$$

womit der Satz IV bewiesen ist.

Satz V. *Es ist für*

(19) $$t \geqq 3, \quad 1 - \frac{1}{\log t} \leqq \sigma \leqq 2$$

(33) $$|\zeta'(s)| < c_{11} \log^2 t.$$

Beweis. Es ist für $\Re(s) > 0$ (exkl. $s = 1$) und jedes ganzzahlige $m \geqq 1$ nach S. 154—155

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} \frac{1}{(m+1)^{s-1}} + \sum_{n=1}^{m+1} \frac{1}{n^s} - s \sum_{n=m+1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}},$$

also

$$\zeta'(s) = -\frac{1}{(s-1)^2} \frac{1}{(m+1)^{s-1}} - \frac{1}{s-1} \frac{\log(m+1)}{(m+1)^{s-1}} - \sum_{n=1}^{m+1} \frac{\log n}{n^s}$$

$$-\sum_{n=m+1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}} + s \sum_{n=m+1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u \log(n+u)}{(n+u)^{s+1}}\,du.$$

Wenn nun s im Gebiet (19) liegt und $m = [t]$ gesetzt wird, so ergibt sich

$$|\zeta'(s)| < \frac{1}{(t-1)^2} \frac{1}{([t]+1)^{-\frac{1}{\log t}}} + \frac{1}{t-1} \frac{\log([t]+1)}{([t]+1)^{-\frac{1}{\log t}}} + \sum_{n=1}^{t+1} \frac{\log n}{n^{1-\frac{1}{\log t}}}$$

$$+ \sum_{n=t+1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{2-\frac{1}{\log t}}} + (2+t) \sum_{n=t+1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{\log u\,du}{u^{2-\frac{1}{\log t}}}$$

$$< c_{12} \frac{1}{t^2} + c_{13} \frac{\log t}{t} + (t+1)^{\frac{1}{\log t}} \sum_{n=1}^{t+1} \frac{\log n}{n} + \int_t^{\infty} \frac{du}{u^{2-\frac{1}{\log t}}}$$

$$+ 2t \int_t^{\infty} \frac{\log u\,du}{u^{2-\frac{1}{\log t}}}$$

$$< c_{12} + c_{13} + (2t)^{\frac{1}{\log t}} \sum_{n=1}^{t+1} \frac{\log n}{n} + \frac{1}{1-\frac{1}{\log t}} \frac{1}{t^{1-\frac{1}{\log t}}}$$

$$+ 2t \left(\frac{1}{1-\frac{1}{\log t}} \frac{\log t}{t^{1-\frac{1}{\log t}}} + \frac{1}{\left(1-\frac{1}{\log t}\right)^2} \frac{1}{t^{1-\frac{1}{\log t}}} \right)$$

$$< c_{12} + c_{13} + c_{14}\log^2 t + \frac{1}{1-\frac{1}{\log 3}}\,\frac{e}{t} + 2t\left(\frac{1}{1-\frac{1}{\log 3}}\,\frac{e\log t}{t} + \frac{1}{\left(1-\frac{1}{\log 3}\right)^2}\,\frac{e}{t}\right)$$

$$= c_{12} + c_{13} + c_{14}\log^2 t + \frac{c_{15}}{t} + c_{16}\log t + c_{17}$$

$$< c_{11}\log^2 t,$$

was im Satz V behauptet wurde.

Satz VI. *Es ist für*

(29) $$t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log t} \leqq \sigma \leqq 2$$

(34) $$|\zeta_\varkappa'(s)| < c_{18}\log^2 t.$$

Beweis. Wird

$$\varphi(s) = \zeta_\varkappa(s) - gh\,\zeta(s)$$

gesetzt, so erfüllt $\varphi(s)$ nach S. 157—158 die Voraussetzungen des Satzes I. Nach Satz IV ist also für das Gebiet (29)

$$|\varphi'(s)| < c_4\log^2 t;$$

nach Satz V ist dort

(33) $$|\zeta'(s)| < c_{11}\log^2 t,$$

also

$$|\zeta_\varkappa'(s)| \leqq |\varphi'(s)| + gh\,|\zeta'(s)| < c_4\log^2 t + ghc_{11}\log^2 t = c_{18}\log^2 t,$$

womit (34) bewiesen ist.

§ 4.

Es seien

$$\chi_1(\mathfrak{n}),\ \chi_2(\mathfrak{n}),\ \cdots,\ \chi_h(\mathfrak{n})$$

die h Charaktere der (Abelschen) Gruppe der Idealklassen des gegebenen Körpers. Jede dieser h „idealtheoretischen" Funktionen ist für jedes Ideal des Körpers definiert und genügt den drei Bedingungen:

(35) $$\chi(\mathfrak{a}) = \chi(\mathfrak{b}),$$

falls $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ derselben Idealklasse angehören;

(36) $$\chi(\mathfrak{a}) \neq 0$$

für alle Ideale;

(37) $$\chi(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \chi(\mathfrak{a})\,\chi(\mathfrak{b})$$

für zwei beliebige Ideale.

Bekanntlich gibt es h verschiedene (d. h. nicht für alle Ideale übereinstimmende) Funktionen, die den Bedingungen (35), (36), (37) genügen, und zwar ist $\chi(\mathfrak{n})$ stets eine Einheitswurzel, also speziell

$$|\chi(\mathfrak{n})| = 1. \tag{38}$$

Die Bezeichnung der h Charaktere sei so gewählt, daß $\chi_1(\mathfrak{n})$ der Hauptcharakter ist, d. h. diejenige Funktion, welche für alle $\mathfrak{n}$ gleich 1 ist. Für die Ideale der Hauptklasse ist jeder Charakter $= 1$. Es gelten bekanntlich folgende Sätze:

„Wenn $\mathfrak{n}$ alle h Ideale eines vollständigen Repräsentantensystems der Klassen durchläuft, so ist

$$\sum \chi_1(\mathfrak{n}) = h,$$

dagegen für $\nu = 2, 3, \cdots, h$

$$\sum \chi_\nu(\mathfrak{n}) = 0.\text{“} \tag{39}$$

„Wenn $\mathfrak{n}$ ein beliebiges Ideal ist, so ist

$$\sum_{\nu=1}^{h} \chi_\nu(\mathfrak{n}) = h, \tag{40}$$

falls $\mathfrak{n}$ der Hauptklasse angehört, dagegen

$$\sum_{\nu=1}^{h} \chi_\nu(\mathfrak{n}) = 0, \tag{41}$$

falls $\mathfrak{n}$ irgend einer anderen Klasse angehört.“

Aus (37) folgt für jeden Charakter und $s > 1$ die fundamentale Dedekindsche*) Identität

$$\sum_{\mathfrak{n}} \frac{\chi(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s} = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}}, \tag{42}$$

wo $\mathfrak{n}$ alle Ideale, $\mathfrak{p}$ alle Primideale des Körpers durchläuft (wegen der absoluten Konvergenz in beliebiger Reihenfolge). Offenbar gilt (42) für $\Re(s) > 1$. (42) lehrt, daß keine der h für $\Re(s) > 1$ durch die Dirichletschen Reihen

$$L_\nu(s) = \sum_{\mathfrak{n}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, h)$$

definierten analytischen Funktionen in dieser Halbebene eine Nullstelle besitzt.

Offenbar ist

$$L_1(s) = \sum_{\mathfrak{n}} \frac{1}{N\mathfrak{n}^s} = \zeta_\varkappa(s). \tag{43}$$

---

*) l. c., S. 581 bezw. 612.

Satz VII. *Wenn $\chi(\mathfrak{n})$ ein vom Hauptcharakter verschiedener Charakter ist, so konvergiert die Reihe*

$$\sum_{\mathfrak{n}} \frac{\chi(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s}$$

für $\Re(s) > 1 - \frac{1}{k}$ und stellt dort eine reguläre Funktion von s dar, falls die Ideale nach wachsenden Normen geordnet sind. Hierbei ist die Reihenfolge der Ideale gleicher Norm unerheblich.

Beweis. Es ist, wenn die Ideale auf die (durch $\mathfrak{n}_1, \cdots, \mathfrak{n}_h$ repräsentierten) h Klassen verteilt werden, nach (35)

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \chi(\mathfrak{n}) = \chi(\mathfrak{n}_1) A_1(x) + \cdots + \chi(\mathfrak{n}_h) A_h(x), \tag{44}$$

wo $A_1(x), \cdots, A_h(x)$ für die einzelnen Klassen die Anzahlen der Ideale bezeichnen, deren Norm $\leqq x$ ist. Nun ist nach (27) für jedes $\nu = 1, 2, \cdots, h$

$$A_\nu(x) = gx + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right),$$

wo die Konstante g von ν unabhängig ist, also nach (44) und (39)

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \chi(\mathfrak{n}) = \sum_{\nu=1}^{h} \chi(\mathfrak{n}_\nu)\left(gx + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right)\right) = gx \sum_{\nu=1}^{h} \chi(\mathfrak{n}_\nu) + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right)$$

$$= O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right); \tag{45}$$

ferner ist nach S. 158 und Gleichung (38)

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \frac{|\chi(\mathfrak{n})|}{N\mathfrak{n}} = \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \frac{1}{N\mathfrak{n}} = \sum_{n=1}^{x} \frac{F(n)}{n} = O(\log x). \tag{46}$$

Wird also für jedes ganzzahlige positive n

$$f(n) = \sum_{\mathfrak{n}} \chi(\mathfrak{n})$$

gesetzt, wo $\mathfrak{n}$ alle Ideale mit der Norm n durchläuft, so ist nach (46)

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{|f(n)|}{n} \leqq \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \frac{|\chi(\mathfrak{n})|}{N\mathfrak{n}} = O(\log x)$$

und nach (45)

$$\sum_{n=1}^{x} f(n) = O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right),$$

so daß,

$$\gamma = \frac{1}{k}$$

gesetzt, die Voraussetzungen der Sätze I und IV erfüllt sind.

Es ergibt sich also zunächst, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

für $\Re(s) > 1 - \frac{1}{k}$ konvergiert, d. h. daß für diese s

$$\lim_{x=\infty} \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \frac{\chi(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s}$$

existiert.

Hieraus folgt leicht, daß bei Anordnung der Ideale nach wachsender Norm die Reihe

$$\sum_{\mathfrak{n}} \frac{\chi(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s}$$

für $\Re(s) > 1 - \frac{1}{k}$ gegen einen von der Reihenfolge der Ideale mit gleicher Norm unabhängigen Grenzwert konvergiert. Denn die Summe der absoluten Beträge aller Glieder mit der Norm x (deren Anzahl nach (28)

$$= H(x) - H(x-1) = ghx + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right) - gh(x-1) + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right) = gh + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right)$$

$$= O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right)$$

ist) ist

$$\leqq \sum_{N\mathfrak{n}=x} \frac{1}{N\mathfrak{n}^\sigma} = \sum_{N\mathfrak{n}=x} \frac{1}{x^\sigma} = O\left(\frac{x^{1-\frac{1}{k}}}{x^\sigma}\right) = O\left(\frac{1}{x^{\sigma-1+\frac{1}{k}}}\right),$$

hat also für $x = \infty$ den Grenzwert 0.

$L_2(s), \cdots, L_h(s)$ sind also, da die Voraussetzungen des Satzes I erfüllt sind, für $\Re(s) > 1 - \frac{1}{k}$ regulär und durch die Reihen

$$\sum_{\mathfrak{n}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s} \qquad (\nu = 2, \cdots, h)$$

darstellbar, womit Satz VII bewiesen ist.

Zugleich ergeben sich aus Satz I für

$$(29) \qquad t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log t} \leqq \sigma \leqq 2$$

die Ungleichungen

$$(47) \qquad \begin{gathered} |L_2(s)| < c_{19} \log t, \\ \cdots\cdots\cdots \\ |L_h(s)| < c_{19} \log t. \end{gathered}$$

Die Konstante c_{19} kann ja für diese $h-1$ Ungleichungen gleichmäßig gewählt werden.

Wegen (43) ist nach Satz III für das Gebiet (29)

(48) $$|L_1(s)| = |\zeta_\varkappa(s)| < c_3 \log t.$$

Ebenso folgt, da Satz IV auf $L_2(s), \cdots, L_h(s)$ anwendbar ist, für (29)

(49) $$\begin{gathered} |L_2'(s)| < c_{20} \log^2 t, \\ \cdots\cdots \\ |L_h'(s)| < c_{20} \log^2 t \end{gathered}$$

und nach Satz VI

(50) $$|L_1'(s)| = |\zeta_\varkappa'(s)| < c_{18} \log^2 t.$$

Wird die größte der vier Zahlen c_3, c_{18}, c_{19}, c_{20} gleich c_{21} gesetzt, so ergibt die Zusammenfassung von (47), (48), (49) und (50) den

Satz VIII. *Es gibt eine Konstante* c_{21}*), *so daß für*

(29) $$t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log t} \leqq \sigma \leqq 2$$

und alle $\nu = 1, 2, \cdots, h$ *die Ungleichungen*

(51) $$|L_\nu(s)| < c_{21} \log t,$$

(52) $$|L_\nu'(s)| < c_{21} \log^2 t$$

bestehen.

§ 5.

Es bezeichne nun $L(s)$ die analytische Funktion, welche durch die Gleichung

$$L(s) = \prod_{\nu=1}^{h} L_\nu(s) = L_1(s)\, L_2(s) \cdots L_h(s)$$

definiert ist.

Da nach den Sätzen III und VII

$$(s-1) L_1(s),\ L_2(s), \cdots, L_h(s)$$

für $\Re(s) > 1 - \frac{1}{k}$ regulär sind, ist $(s-1)\,L(s)$ für $\Re(s) > 1 - \frac{1}{k}$ regulär. Ferner ist für $\Re(s) > 1$ wegen (42)

$$L_\nu(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}} = e^{-\sum\limits_{\mathfrak{p}} \log\left(1 - \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right)}$$

$$= e^{\sum\limits_{\mathfrak{p}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s} + \frac{1}{2} \sum\limits_{\mathfrak{p}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p}^2)}{N\mathfrak{p}^{2s}} + \cdots + \frac{1}{m} \sum\limits_{\mathfrak{p}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p}^m)}{N\mathfrak{p}^{ms}} + \cdots}$$

$$= e^{\sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum\limits_{\mathfrak{p}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p}^m)}{N\mathfrak{p}^{ms}}},$$

also

*) die also nur von dem gegebenen Körper abhängt.

(53) $$L(s) = e^{\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum\limits_{\mathfrak{p}}\frac{1}{N\mathfrak{p}^{ms}}\sum\limits_{\nu=1}^{h}\chi_\nu(\mathfrak{p}^m)}.$$

Nach (40) und (41) ist

$$\sum_{\nu=1}^{h}\chi_\nu(\mathfrak{p}^m)$$

dann und nur dann von Null verschieden, und zwar $= h$, wenn $\mathfrak{p}^m$ der Hauptklasse angehört. Ich will durch die Bezeichnung $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$ in der Folge andeuten, daß die Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ äquivalent sind, also die Ideale der Hauptklasse einfach durch $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{o}$ bezeichnen, wo $\mathfrak{o}$ das Einheitsideal ist. Aus (53) folgt alsdann für $\Re(s) > 1$

(54) $$L(s) = e^{h\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum\limits_{\mathfrak{p}^m \sim \mathfrak{o}}\frac{1}{N\mathfrak{p}^{ms}}}.$$

Nach der am Anfang des § 1 über den Körper gemachten Voraussetzung divergiert

$$\sum_{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{o}}\frac{1}{N\mathfrak{p}};$$

folglich wächst bei Abnahme der reellen Größe s zu 1 die Summe

$$\sum_{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{o}}\frac{1}{N\mathfrak{p}^s}$$

über alle Grenzen. Dies gilt a fortiori von dem Exponenten der rechten Seite von (54). Also existiert

$$\lim_{s=1} L(s)$$

nicht; folglich ist $s = 1$ keine reguläre Stelle von $L(s)$. Da $(s-1)L(s)$ für $s = 1$ regulär ist, hat $L(s)$ in $s = 1$ einen Pol erster Ordnung. Da

$$L(s) = L_1(s)\, L_2(s) \cdots L_h(s)$$

ist und $L_1(s)$ auch einen Pol erster Ordnung in $s = 1$ hat, sind die Funktionen $L_2(s), \cdots, L_h(s)$ für $s = 1$ von Null verschieden, d. h. es bestehen die Ungleichungen

(55) $$\sum_{\mathfrak{n}}\frac{\chi_\nu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}} \neq 0 \qquad (\nu = 2, 3, \cdots, h).$$

§ 6.

Aus (54) folgt weiter für $\varepsilon > 0$, $t \gtreqless 0$

$$|L(1+\varepsilon+ti)| = e^{\Re\left(h\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum\limits_{\mathfrak{p}^m \sim \mathfrak{o}}\frac{1}{N\mathfrak{p}^{m(1+\varepsilon+ti)}}\right)}$$

(56) $$= e^{h\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum\limits_{\mathfrak{p}^m \sim \mathfrak{o}}\frac{\cos(mt\log N\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^{m(1+\varepsilon)}}}.$$

und

$$(57) \qquad L(1+\varepsilon) = e^{h\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum\limits_{\mathfrak{p}^m \sim \mathfrak{d}}\frac{1}{N\mathfrak{p}^{m(1+\varepsilon)}}},$$

also

$$|L(1+\varepsilon+ti)|\,L(1+\varepsilon) = e^{h\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum\limits_{\mathfrak{p}^m \sim \mathfrak{d}}\frac{1+\cos(mt\log N\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^{m(1+\varepsilon)}}}.$$

Nun ist für jedes reelle α

$$4(1+\cos\alpha) \geqq 2(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha) = 2-2\cos^2\alpha = 1-\cos 2\alpha,$$

also

$$|L(1+\varepsilon+ti)|\,L(1+\varepsilon) \geqq e^{\frac{h}{4}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum\limits_{\mathfrak{p}^m \sim \mathfrak{d}}\frac{1-\cos(2mt\log N\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^{m(1+\varepsilon)}}}$$

$$= e^{\frac{h}{4}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum\limits_{\mathfrak{p}^m \sim \mathfrak{d}}\frac{1}{N\mathfrak{p}^{m(1+\varepsilon)}}}\cdot e^{-\frac{h}{4}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum\limits_{\mathfrak{p}^m \sim \mathfrak{d}}\frac{\cos(2mt\log N\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^{m(1+\varepsilon)}}};$$

aus (56) (wenn statt t darin $2t$ geschrieben wird) und (57) ergibt sich also

$$|L(1+\varepsilon+ti)|\,L(1+\varepsilon) \geqq (L(1+\varepsilon))^{\frac{1}{4}}\,|L(1+\varepsilon+2ti)|^{-\frac{1}{4}},$$

$$|L(1+\varepsilon+ti)| \geqq \frac{1}{(L(1+\varepsilon))^{\frac{3}{4}}\,|L(1+\varepsilon+2ti)|^{\frac{1}{4}}}.$$

Da $s=1$ ein Pol erster Ordnung von $L(s)$ ist, ist für $0<\varepsilon\leqq 1$

$$L(1+\varepsilon) < \frac{c_{22}}{\varepsilon},$$

also für $0<\varepsilon\leqq 1$, $t \gtreqless 0$

$$(58) \qquad |L(1+\varepsilon+ti)| > \frac{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{c_{23}\,|L(1+\varepsilon+2ti)|^{\frac{1}{4}}}.$$

Satz IX. *Jede der Funktionen $L_1(s), L_2(s), \cdots, L_h(s)$ ist in allen Punkten der Geraden $\Re(s)=1$ von Null verschieden.*

Beweis. Der Punkt $s=1$ ist für $L_1(s)$ ein Pol, für $L_2(s), \cdots, L_h(s)$ keine Nullstelle, wie auf S. 167 konstatiert wurde. Es sei $s=1+ti\,(t \lessgtr 0)$ Nullstelle einer jener Funktionen. Dann wäre bei positivem zu Null abnehmendem ε der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon=0}\frac{L(1+\varepsilon+ti)}{\varepsilon} = L'(1+ti)$$

vorhanden. Dies steht im Widerspruch damit, daß nach (58)

$$(59) \qquad \left|\frac{L(1+\varepsilon+ti)}{\varepsilon}\right| > \frac{1}{c_{23}\,\varepsilon^{\frac{1}{4}}\,|L(1+\varepsilon+2ti)|^{\frac{1}{4}}}$$

ist; denn der Nenner der rechten Seite in (59) konvergiert gegen Null, mag $L(1+2ti)$ verschwinden oder nicht; die linke Seite wächst also über alle Grenzen. Damit ist Satz IX bewiesen.

Aus Satz VIII folgt durch Multiplikation der h Ungleichungen (51) für

(29) $$t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log t} \leqq \sigma \leqq 2$$

$$|L(s)| = |L(\sigma+ti)| < c_{21}^h \log^h t < \log^{c_{24}} t,$$

also für

$$t \geqq \frac{1}{2} e^{2k}, \quad -\frac{1}{\log(2t)} \leqq \varepsilon \leqq 1,$$

$$|L(1+\varepsilon+2ti)| < \log^{c_{24}}(2t) < \log^{c_{25}} t$$

und speziell für

(60) $$t \geqq e^{2k}, \quad 0 < \varepsilon \leqq 1$$

(61) $$|L(1+\varepsilon+2ti)| < \log^{c_{25}} t.$$

Für (60) ist also nach (58) und (61)

(62) $$|L(1+\varepsilon+ti)| > \frac{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{c_{23} \log^{\frac{c_{25}}{4}} t} > \frac{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{\log^{c_{26}} t}.$$

Ferner ergibt sich aus (51) und (52) für das Gebiet (29)

$$|L'(s)| = |L_1'(s) L_2(s) \cdots L_h(s) + \cdots + L_1(s) L_2(s) \cdots L_h'(s)|$$
$$< h c_{21}^h \log^{h+1} t < \log^{c_{27}} t,$$

also für

(63) $$t \geqq e^{2k}, \quad -\frac{1}{\log t} \leqq \varepsilon \leqq 1$$

(64) $$|L(1+\varepsilon+ti) - L(1+ti)| = \left|\int_1^{1+\varepsilon} L'(\sigma+ti)\, d\sigma\right| \leqq |\varepsilon| \log^{c_{27}} t.$$

Satz X. *Für*

$$t \geqq e^{2k}$$

ist

(65) $$|L(1+ti)| > \frac{1}{\log^{c_{28}} t}.$$

Beweis. Aus (62) und (64) folgt für das in (63) enthaltene Gebiet

(60) $$t \geqq e^{2k}, \quad 0 < \varepsilon \leqq 1,$$

$$|L(1+ti)| = |L(1+\varepsilon+ti) - (L(1+\varepsilon+ti) - L(1+ti))|$$
$$\geqq |L(1+\varepsilon+ti)| - |L(1+\varepsilon+ti) - L(1+ti)| > \frac{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{\log^{c_{26}} t} - \varepsilon \log^{c_{27}} t$$
$$= \frac{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{\log^{c_{26}} t}\left(1 - \varepsilon^{\frac{1}{4}} \log^{c_{26}+c_{27}} t\right).$$

Wird hierin

$$\varepsilon = 2^{-4} \log^{-4c_{26}-4c_{27}} t$$

gesetzt (was für $t \geqq e^{2k}$ zwischen 0 und 1 liegt), so ergibt sich

$$|L(1+ti)| > \frac{2^{-3} \log^{-3c_{26}-3c_{27}} t}{\log^{c_{26}} t} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16 \log^{4c_{26}+3c_{27}} t} > \frac{1}{\log^{c_{28}} t},$$

womit der Satz X bewiesen ist.

Satz XI. *Es gibt eine Konstante c_{29}, so daß für*

(66) $$t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log^{c_{29}} t} \leqq \sigma \leqq 2$$

$L(s)$ von Null verschieden ist und der Ungleichung

$$|L(s)| > \frac{1}{\log^{c_{29}} t}$$

genügt.

Beweis. Einerseits ist für

$$t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log^{1+c_{27}+c_{28}} t} \leqq \sigma \leqq 1 + \frac{1}{\log^{1+c_{27}+c_{28}} t}$$

nach (64) und (65)

$$|L(\sigma+ti)| \geqq |L(1+ti)| - |L(\sigma+ti) - L(1+ti)|$$

$$> \frac{1}{\log^{c_{28}} t} - |\sigma - 1| \log^{c_{27}} t \geqq \frac{1}{\log^{c_{28}} t} - \frac{1}{\log^{1+c_{28}} t} = \frac{\log t \;\; -1}{\log^{1+c_{28}} t}$$

(67) $$\geqq \frac{2k-1}{\log^{1+c_{28}} t} > \frac{1}{\log^{c_{30}} t}.$$

Andererseits ist für

$$t \geqq e^{2k}, \quad 1 + \frac{1}{\log^{1+c_{27}+c_{28}} t} \leqq \sigma \leqq 2$$

nach (62)

(68) $$|L(\sigma+ti)| > \frac{(\sigma-1)^{\frac{3}{4}}}{\log^{c_{26}} t} \geqq \frac{1}{\log^{c_{26}+\frac{3}{4}(1+c_{27}+c_{28})} t} = \frac{1}{\log^{c_{31}} t}.$$

Wird die größere der beiden Zahlen c_{30} und c_{31} gleich c_{32} gesetzt, so ist also nach (67) und (68) für

$$t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log^{1+c_{27}+c_{28}} t} \leqq \sigma \leqq 2$$

$$|L(s)| > \frac{1}{\log^{c_{32}} t}.$$

Wird endlich die größere der beiden Zahlen $1 + c_{27} + c_{28}$ und c_{32} mit c_{29} bezeichnet, so ist damit der Satz XI bewiesen.

In dem Gebiete (66) ist $L(s)$, also jede einzelne der Funktionen

$$L_1(s), \; L_2(s), \cdots, \; L_h(s)$$

von Null verschieden.

Satz XII. *Es ist für*

(66) $$t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log^{c_{29}} t} \leqq \sigma \leqq 2$$

und alle $\nu = 1, 2, \cdots, h$

(69) $$|L_\nu(s)| > \frac{1}{\log^{c_{33}} t}.$$

Beweis. Für das Gebiet (66) ist nach Satz XI

$$|L(s)| = |L_1(s)|\,|L_2(s)| \cdots |L_h(s)| > \frac{1}{\log^{c_{29}} t},$$

ferner nach Satz VIII

$$|L_1(s)| < c_{21} \log t, \cdots, |L_h(s)| < c_{21} \log t;$$

also genügt jede der Funktionen $L_\nu(s)$ für (66) der Ungleichung

$$|L_\nu(s)| > \frac{1}{\log^{c_{29}} t} \, \frac{1}{c_{21}^{h-1} \log^{h-1} t} > \frac{1}{\log^{c_{33}} t}.$$

Satz XIII. *Es gibt eine Konstante* c_{34}, *so daß für*

(70) $$t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log^{c_{34}} t} \leqq \sigma \leqq 2$$

und alle $\nu = 1, 2, \cdots, h$

$$\left| \frac{L_\nu'(s)}{L_\nu(s)} \right| < \log^{c_{34}} t$$

ist.

Beweis. Für das Gebiet (66) ist nach Satz VIII

$$|L_\nu'(s)| < c_{21} \log^2 t, \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, h)$$

nach Satz XII

$$|L_\nu(s)| > \frac{1}{\log^{c_{33}} t}, \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, h)$$

also

$$\left| \frac{L_\nu'(s)}{L_\nu(s)} \right| < c_{21} \log^{2 + c_{33}} t < \log^{c_{35}} t;$$

wird die größere der beiden Zahlen c_{29} und c_{35} gleich c_{34} gesetzt, so ist damit der Satz XIII bewiesen.

§ 7.

Es sei nun eine durch das Ideal $\mathfrak{l}$ repräsentierte Idealklasse gegeben und für sie der Hauptsatz 1 zu beweisen. $\mathfrak{k}$ sei ein beliebiges Ideal der zu ihr inversen Klasse, so daß also

$$\mathfrak{k}\mathfrak{l} \sim \mathfrak{o}$$

ist, und es werde die Funktion

(71) $$\Phi(s) = \sum_{\nu=1}^{h} \chi_\nu(\mathfrak{k}) \frac{L_\nu'(s)}{L_\nu(s)}$$

betrachtet. Nach einer auf S. 170 gemachten Bemerkung verschwindet für

(66) $$t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log^{c_{29}} t} \leqq \sigma \leqq 2$$

keine der Funktionen $L_\nu(s)$; $\Phi(s)$ ist also in diesem Gebiete regulär und genügt nach dem Satz XIII für

(70) $$t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log^{c_{34}} t} \leqq \sigma \leqq 2$$

der Ungleichung

(72) $$|\Phi(s)| \leqq \sum_{\nu=1}^{h} \left| \frac{L'_\nu(s)}{L_\nu(s)} \right| < h \log^{c_{34}} t < \log^{c_{36}} t.$$

Ferner ist nach Satz IX $\Phi(s)$ für $\Re(s) = 1$ (exkl. $s = 1$) regulär. In $s = 1$ hat $\Phi(s)$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum -1, da

$$\chi_1(\mathfrak{k}) \frac{L'_1(s)}{L_1(s)} = \frac{L'_1(s)}{L_1(s)}$$

einen solchen hat, während sich die Funktionen

$$\chi_2(\mathfrak{k}) \frac{L'_2(s)}{L_2(s)}, \cdots, \chi_h(\mathfrak{k}) \frac{L'_h(s)}{L_h(s)}$$

im Punkte $s = 1$ regulär verhalten.

Nun ist für $\Re(s) > 1$ und jedes ν nach (42)

$$\frac{L'_\nu(s)}{L_\nu(s)} = \frac{d}{ds} \log L_\nu(s) = -\frac{d}{ds} \sum_{\mathfrak{p}} \log\left(1 - \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right)$$

$$= -\sum_{\mathfrak{p}} \frac{\frac{\chi_\nu(\mathfrak{p}) \log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s}}{1 - \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}} = -\sum_{\mathfrak{p}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p}) \log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s - \chi_\nu(\mathfrak{p})}$$

$$= -\sum_{\mathfrak{p}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p}) \log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s} \left(1 + \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s - \chi_\nu(\mathfrak{p})}\right)$$

(73) $$= -\sum_{\mathfrak{p}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p}) \log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s} - \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p}^2) \log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s (N\mathfrak{p}^s - \chi_\nu(\mathfrak{p}))}.$$

Hierin ist die letzte Summe wegen

$$\left| \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p}^2) \log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s (N\mathfrak{p}^s - \chi_\nu(\mathfrak{p}))} \right| \leqq \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^\sigma (N\mathfrak{p}^\sigma - 1)}$$

für $\Re(s) > \frac{1}{2}$ konvergent und zwar in einer Umgebung jeder Stelle dieser Halbebene gleichmäßig; jene Summe stellt also eine für $\Re(s) > \frac{1}{2}$ reguläre analytische Funktion dar, welche offenbar für $\Re(s) > \frac{3}{4}$ dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Schranke gelegen ist. Daher ist nach (71) und (73) für $\Re(s) > 1$

(74) $$\Phi(s) = \sum_{\nu=1}^{h} \chi_\nu(\mathfrak{k}) \frac{L_\nu'(s)}{L_\nu(s)} = -\sum_{\nu=1}^{h} \chi_\nu(\mathfrak{k}) \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p}) \log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s} + G(s),$$

wo $G(s)$ für $\Re(s) > \frac{3}{4}$ regulär ist und dort der Ungleichung

(75) $$|G(s)| < c_{37}$$

genügt.

Nun ist für $\Re(s) > 1$

$$\sum_{\nu=1}^{h} \chi_\nu(\mathfrak{k}) \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p}) \log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s} = \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s} \sum_{\nu=1}^{h} \chi_\nu(\mathfrak{k}\mathfrak{p});$$

nach (40) und (41) ist

$$\sum_{\nu=1}^{h} \chi_\nu(\mathfrak{k}\mathfrak{p})$$

dann und nur dann von Null verschieden und zwar $= h$, wenn $\mathfrak{k}\mathfrak{p}$ der Hauptklasse angehört, also $\mathfrak{p}$ der zu $\mathfrak{k}$ inversen Klasse, d. h. der gegebenen Klasse. Daher ist nach (74)

$$\Phi(s) = -h \sum_{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{l}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s} + G(s).$$

Die durch die für $\Re(s) > 1$ konvergente Dirichletsche Reihe

$$\sum_{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{l}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s}$$

definierte analytische Funktion $K(s)$ ist also im Gebiete (70) regulär und genügt ebenda nach (72) und (75) der Ungleichung

$$|K(s)| < \frac{1}{h} (\log^{c_{36}} t + c_{37}) < \log^{c_{38}} t.$$

Da $K(s)$ für konjugiert komplexe s konjugiert komplexe Werte annimmt, ist also für

$$t \leqq -e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log^{c_{34}}(-t)} \leqq \sigma \leqq 2$$

$K(s)$ regulär und genügt dort der Ungleichung

$$|K(s)| < \log^{c_{38}}(-t).$$

Ferner hat $K(s)$ im Punkte $s = 1$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum $\frac{1}{h}$ und ist sonst für $\Re(s) = 1$ regulär. Es gibt also eine Konstante c_{39}, so daß $K(s)$ für

$$-e^{2k} \leqq t \leqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{(2k)^{c_{39}}} \leqq \sigma \leqq 1$$

mit Ausschluß des Punktes $s = 1$ regulär ist.

Wenn a eine oberhalb der drei Zahlen c_{34}, c_{38}, c_{39} gelegene ganze Zahl bezeichnet, so ergibt sich also der (im folgenden für den Beweis des Hauptsatzes 1 allein anzuwendende)

Satz XIV. *$K(s)$ bezeichne die für $\Re(s) > 1$ durch die Dirichletsche Reihe*

$$\sum_{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{l}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s}$$

definierte analytische Funktion; dann gibt es eine positive ganze Zahl a mit folgenden Eigenschaften: $K(s)$ ist bis auf den Pol $s=1$ $\left(\text{mit dem Residuum } \frac{1}{h}\right)$ in demjenigen Teile der Ebene regulär, welcher rechts von der stetigen Kurve

$$\begin{cases} \sigma = 1 - \dfrac{1}{\log^a t} & \text{für } \; t \geqq e^{2k}, \\ \sigma = 1 - \dfrac{1}{(2k)^a} & \text{für } \; -e^{2k} \leqq t \leqq e^{2k}, \\ \sigma = 1 - \dfrac{1}{\log^a(-t)} & \text{für } \; t \leqq -e^{2k} \end{cases}$$

gelegen ist, inklusive der Kurve selbst, und $K(s)$ genügt für

$$t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log^a t} \leqq \sigma \leqq 2$$

der Ungleichung

(76) $$|K(\sigma+ti)| = |K(\sigma-ti)| < \log^a t.$$

§ 8.

Satz XV. *Es ist*

(77) $$\sum_{\substack{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{l} \\ N\mathfrak{p} \leqq x}} \log N\mathfrak{p} \log \frac{x}{N\mathfrak{p}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{x^s}{s^2} K(s)\, ds + O(1),$$

wo das Integral auf gerader Bahn zu erstrecken ist; d. h.*) die Differenz $\sum - \frac{1}{2\pi i}\int$ liegt für alle $x \geqq 1$ dem absoluten Betrage nach unterhalb einer von x unabhängigen Schranke.

Beweis. Bekanntlich ist das geradlinig erstreckte Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{y^s}{s^2}\, ds \begin{cases} = \log y & \text{für } \; y \geqq 1, \\ = 0 & \text{für } \; 0 < y \leqq 1. \end{cases}$$

*) Vergl. die Definition des Zeichens $O(g(x))$ auf S. 150, Anm. 3.

Wenn x eine positive Größe ist, so ist

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2-\infty i}^{2-x^2 i}\frac{y^s}{s^2}\,ds\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2+x^2 i}^{2+\infty i}\frac{y^s}{s^2}\,ds\right| < \frac{1}{2\pi}\int\limits_{x^2}^{\infty}\frac{y^2}{t^2}\,dt = \frac{y^2}{2\pi x^2} < \frac{y^2}{2x^2},$$

also

$$(78)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2-x^2 i}^{2+x^2 i}\frac{y^s}{s^2}\,ds \begin{cases} = \log y + \Theta\,\dfrac{y^2}{x^2} & \text{für } y \geqq 1, \\ = \qquad\quad \Theta\,\dfrac{y^2}{x^2} & \text{für } 0 < y \leqq 1, \end{cases}$$

wo die von x und y abhängige Größe

$$\Theta = \Theta(x, y)$$

dem absoluten Betrage nach < 1 ist.

Für $\Re(s) = 2$ ist die unendliche Reihe

$$\sum_{\mathfrak{p}\sim\mathfrak{l}}\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s},$$

welche für $\Re(s) > 1$ die Funktion $K(s)$ definiert, gleichmäßig konvergent, da dort

$$\left|\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s}\right| \leqq \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^2}$$

ist. Das Produkt der Reihe mit $\frac{x^s}{s^2}$ darf also von $2 - x^2 i$ bis $2 + x^2 i$ auf gerader Bahn gliedweise integriert werden, und es ergibt sich unter Anwendung von (78)

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2-x^2 i}^{2+x^2 i}\frac{x^s}{s^2}K(s)\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2-x^2 i}^{2+x^2 i}\sum_{\mathfrak{p}\sim\mathfrak{l}}\frac{x^s}{s^2}\,\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s}\,ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{\mathfrak{p}\sim\mathfrak{l}}\log N\mathfrak{p}\int\limits_{2-x^2 i}^{2+x^2 i}\frac{\left(\frac{x}{N\mathfrak{p}}\right)^s}{s^2}\,ds$$

$$= \sum_{\substack{\mathfrak{p}\sim\mathfrak{l}\\ N\mathfrak{p}\leqq x}}\left(\log N\mathfrak{p}\log\frac{x}{N\mathfrak{p}} + \log N\mathfrak{p}\cdot\Theta\cdot\frac{x^2}{N\mathfrak{p}^2\cdot x^2}\right) + \sum_{\substack{\mathfrak{p}\sim\mathfrak{l}\\ N\mathfrak{p}> x}}\log N\mathfrak{p}\cdot\Theta\cdot\frac{x^2}{N\mathfrak{p}^2\cdot x^2}$$

$$= \sum_{\substack{\mathfrak{p}\sim\mathfrak{l}\\ N\mathfrak{p}\leqq x}}\log N\mathfrak{p}\log\frac{x}{N\mathfrak{p}} + \sum_{\mathfrak{p}\sim\mathfrak{l}}\frac{\log N\mathfrak{p}\cdot\Theta}{N\mathfrak{p}^2}.$$

Hierin ist der absolute Wert der letzten Summe wegen

$$|\Theta| = \left|\Theta\left(x, \frac{x}{N\mathfrak{p}}\right)\right| < 1$$

unterhalb der von x unabhängigen Zahl

$$\sum_{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{l}}' \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^2}$$

gelegen; jene Summe kann also mit $O(1)$ bezeichnet werden, und aus

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{x^s}{s^2} K(s)\, ds = \sum_{\substack{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{l} \\ N\mathfrak{p} \leqq x}}' \log N\mathfrak{p} \log \frac{x}{N\mathfrak{p}} + O(1)$$

folgt die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes XV.

Satz XVI. *Es ist*

(79) $$\sum_{\substack{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{l} \\ N\mathfrak{p} \leqq x}}' \log N\mathfrak{p} \log \frac{x}{N\mathfrak{p}} = \frac{x}{h} + O\left(x e^{-\sqrt[b]{\log x}}\right),$$

wo b eine Konstante bezeichnet.

Beweis. Ich wende, indem ich $x > e^k$ annehme, den Cauchyschen Satz auf den Integranden $\frac{x^s}{s^2} K(s)$ und folgenden Integrationsweg $ABCDEFA$ an. Es ist

$$A = 2 - x^2 i, \quad B = 2 + x^2 i, \quad C = 1 - \frac{1}{\log^\alpha (x^2)} + x^2 i,$$

$$D = 1 - \frac{1}{(2k)^\alpha} + e^{2k} i, \quad E = 1 - \frac{1}{(2k)^\alpha} - e^{2k} i, \quad F = 1 - \frac{1}{\log^\alpha (x^2)} - x^2 i$$

die Strecken AB, BC, DE, FA sind geradlinig, CD bezeichnet das Kurvenstück

$$s = 1 - \frac{1}{\log^\alpha t} + ti \qquad (x^2 \geqq t \geqq e^{2k})$$

und EF das Kurvenstück

$$s = 1 - \frac{1}{\log^\alpha (-t)} + ti \qquad (-e^{2k} \geqq t \geqq -x^2).$$

Nach Satz XIV besitzt die Funktion $K(s)$ in diesem ganzen geschlossenen Gebiete (mit Einschluß des Randes) als einzige Singularität den Pol erster Ordnung $s = 1$ mit dem Residuum $\frac{1}{h}$; also besitzt der Integrand $\frac{x^s}{s^2} K(s)$ in jenem Gebiet (mit Einschluß des Randes) als einzige Singularität den Pol erster Ordnung $s = 1$ mit dem Residuum $\frac{x}{h}$, und die Anwendung des Cauchyschen Satzes ergibt für das in (77) auftretende geradlinige Integral

$$(80)\qquad \int\limits_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{x^s}{s^2} K(s)\, ds = \int\limits_{AB} = \frac{2\pi i x}{h} + \int\limits_{AF} + \int\limits_{FE} + \int\limits_{ED} + \int\limits_{DC} + \int\limits_{CB}.$$

Hierin ist zunächst, da auf dem Wege ED

$$\left|\frac{1}{s^2} K(s)\right|$$

unterhalb einer von x unabhängigen Schranke liegt,

$$(81)\qquad \left|\int\limits_{ED}\right| = O\int\limits_{-e^{2k}}^{e^{2k}} \left| x^{1-\frac{1}{(2k)^a}+ti} \right| dt = O\left(x^{1-\frac{1}{(2k)^a}}\right) \cdot 2e^{2k} = O\left(x^{1-\frac{1}{(2k)^a}}\right).$$

Zweitens ist nach (76)

$$\left|\int\limits_{CB}\right| = \left|\int\limits_{AF}\right| = \left|\int\limits_{1-\frac{1}{\log^a(x^2)}}^{2} \frac{x^{\sigma+x^2 i}}{(\sigma+x^2 i)^2} K(\sigma+x^2 i)\, d\sigma\right|$$

$$(82)\qquad < \int\limits_{1-\frac{1}{\log^a(x^2)}}^{2} \frac{x^2}{x^4} \log^a(x^2)\, d\sigma < \frac{2\log^a(x^2)}{x^2} = O\left(\frac{\log^a x}{x^2}\right).$$

Drittens ist nach (76)

$$\left|\int\limits_{DC}\right| = \left|\int\limits_{FE}\right| = \left|\int\limits_{e^{2k}}^{x^2} \frac{x^{1-\frac{1}{\log^a t}+ti}}{\left(1-\frac{1}{\log^a t}+ti\right)^2} K\left(1-\frac{1}{\log^a t}+ti\right) d\left(1-\frac{1}{\log^a t}+ti\right)\right|$$

$$< \int\limits_{e^{2k}}^{x^2} \frac{x^{1-\frac{1}{\log^a t}}}{t^2} \log^a t \left|\frac{a}{t\log^{a+1} t} + i\right| dt$$

$$< \left(\frac{a}{e^{2k}(2k)^{a+1}} + 1\right) \int\limits_{e^{2k}}^{x^2} x^{1-\frac{1}{\log^a t}} \frac{\log^a t}{t^2}\, dt$$

$$= c_{40}\, x \int\limits_{e^{2k}}^{x^2} x^{-\frac{1}{\log^a t}} \frac{\log^a t}{t^2}\, dt.$$

Dies Integral werde in zwei durch $e^{\sqrt[2\alpha]{\log x}}$ geschiedene Teile zerlegt; (für alle hinreichend großen x ist

$$e^{2k} < e^{\sqrt[2\alpha]{\log x}} < x^2);$$

dadurch ergibt sich

$$\left|\int_{DC}\right| = \left|\int_{FE}\right| < c_{40} x \int_{e^{2k}}^{e^{\sqrt[2\alpha]{\log x}}} x^{-\frac{1}{\log^\alpha t}} \frac{\log^\alpha t}{t^2}\, dt + c_{40} x \int_{e^{\sqrt[2\alpha]{\log x}}}^{x^2} x^{-\frac{1}{\log^\alpha t}} \frac{\log^\alpha t}{t^2}\, dt$$

$$< c_{40}\, x \cdot x^{-\frac{1}{\log^\alpha\left(e^{\sqrt[2\alpha]{\log x}}\right)}} \int_{e^{2k}}^{e^{\sqrt[2\alpha]{\log x}}} \frac{\log^\alpha t}{t^2}\, dt + c_{40} x \int_{e^{\sqrt[2\alpha]{\log x}}}^{x^2} \frac{\log^\alpha t}{t^2}\, dt$$

$$< c_{40}\, x \cdot x^{-\frac{1}{\sqrt{\log x}}} \int_{e^{2k}}^{\infty} \frac{\log^\alpha t}{t^2}\, dt + c_{40} x \log^\alpha (x^2) \int_{e^{\sqrt[2\alpha]{\log x}}}^{x^2} \frac{dt}{t^2}$$

$$< c_{41}\, x\, e^{-\frac{\log x}{\sqrt{\log x}}} + c_{40} 2^\alpha x \log^\alpha x \int_{e^{\sqrt[2\alpha]{\log x}}}^{\infty} \frac{dt}{t^2}$$

$$= c_{41} x e^{-\sqrt{\log x}} + c_{40} 2^\alpha x \frac{\log^\alpha x}{e^{\sqrt[2\alpha]{\log x}}} = O\left(x e^{-\sqrt{\log x}}\right) + O\left(x e^{-\sqrt[3\alpha]{\log x}}\right)$$

(83) $$= O\left(x e^{-\sqrt[b]{\log x}}\right),$$

wo b eine ganzzahlige positive Konstante bezeichnet.

Setzt man (81), (82) und (83) in (80) ein, so ergibt sich

$$\int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{x^s}{s^2} K(s)\, ds = \frac{2\pi i x}{h} + O\left(x^{1-\frac{1}{(2k)^\alpha}}\right) + O\left(\frac{\log^\alpha x}{x^2}\right) + O\left(x e^{-\sqrt[b]{\log x}}\right)$$

$$= \frac{2\pi i x}{h} + O\left(x e^{-\sqrt[b]{\log x}}\right),$$

also nach (77) (Satz XV)

(79) $$\sum_{\substack{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{I} \\ N\mathfrak{p} \leq x}} \log N\mathfrak{p} \log \frac{x}{N\mathfrak{p}} = \frac{x}{h} + O\left(x e^{-\sqrt[b]{\log x}}\right),$$

womit der Satz XVI bewiesen ist.

§ 9.

Satz XVII. *Es ist*

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{l} \\ N\mathfrak{p} \leqq x}} \log N\mathfrak{p} = \frac{x}{h} + O\left(x e^{-\sqrt[c]{\log x}}\right), \tag{84}$$

wo c eine Konstante bezeichnet.

Hierin liegt speziell das wichtige Ergebnis enthalten, daß

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \sum_{\substack{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{l} \\ N\mathfrak{p} \leqq x}} \log N\mathfrak{p} = \frac{1}{h}$$

ist.

Beweis. Es werde zur Abkürzung die für $x = \infty$ zu Null abnehmende Funktion

$$e^{-\sqrt[2b]{\log x}} = \delta$$

gesetzt; wenn in (79) $(1 + \delta)x$ statt x geschrieben wird, so folgt, weil offenbar

$$(1 + \delta)\, x\, e^{-\sqrt[b]{\log((1+\delta)x)}} = O\left(x e^{-\sqrt[b]{\log x}}\right)$$

ist,

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{l} \\ N\mathfrak{p} \leqq (1+\delta)x}} \log N\mathfrak{p} \log \frac{(1+\delta)x}{N\mathfrak{p}} = \frac{(1+\delta)x}{h} + O\left(x e^{-\sqrt[b]{\log x}}\right), \tag{85}$$

folglich, wenn (79) von (85) subtrahiert wird,

$$\log(1+\delta) \sum_{\substack{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{l} \\ N\mathfrak{p} \leqq x}} \log N\mathfrak{p} + \sum_{\substack{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{l} \\ x < N\mathfrak{p} \leqq (1+\delta)x}} \log N\mathfrak{p} \log \frac{(1+\delta)x}{N\mathfrak{p}} = \frac{\delta x}{h} + O\left(x e^{-\sqrt[b]{\log x}}\right). \tag{86}$$

Hierin ist die zweite Summe

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{l} \\ x < N\mathfrak{p} \leqq (1+\delta)x}} \log N\mathfrak{p} \log \frac{(1+\delta)x}{N\mathfrak{p}} &\leqq \log(1+\delta) \sum_{\substack{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{l} \\ x < N\mathfrak{p} \leqq (1+\delta)x}} \log N\mathfrak{p} \\
&\leqq \delta \sum_{x < N\mathfrak{n} \leqq (1+\delta)x} \log N\mathfrak{n} \leqq \delta \log((1+\delta)x) \sum_{x < N\mathfrak{n} \leqq (1+\delta)x} 1 \\
&= \delta \log((1+\delta)x)\,(H((1+\delta)x) - H(x)) \\
&\leqq \delta \log(2x)\,(H((1+\delta)x) - H(x)) \\
&= \delta \log(2x)\left(gh(1+\delta)\,x + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right) - ghx - O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right)\right) \\
&= gh\delta^2 x \log(2x) + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\,\delta \log x\right) \\
&= O\left(x \log x\, e^{-2\sqrt[2b]{\log x}}\right) + O\left(x^{1-\frac{1}{k}} \log x\, e^{-\sqrt[2b]{\log x}}\right)
\end{aligned}$$

$$= O\left(x \log x\, e^{-2\sqrt[2b]{\log x}}\right). \tag{87}$$

Aus (86) und (87) folgt, wenn

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{l} \\ N\mathfrak{p} \leq x}} \log N\mathfrak{p} = \tau(x)$$

gesetzt wird,

$$\log(1+\delta)\,\tau(x) = \frac{\delta x}{h} + O\left(x \log x\, e^{-2\sqrt[2b]{\log x}}\right);$$

wegen

$$\lim_{\delta=0} \frac{\delta}{\log(1+\delta)} = 1$$

ist

$$\frac{1}{\log(1+\delta)} = O\left(e^{\sqrt[2b]{\log x}}\right),$$

also

$$\tau(x) = \frac{\delta}{\log(1+\delta)}\,\frac{x}{h} + O\left(x \log x\, e^{-\sqrt[2b]{\log x}}\right). \tag{88}$$

Nun ist

$$\lim_{\delta=0} \left(\frac{\delta}{\log(1+\delta)} - 1\right)\frac{1}{\delta} = \frac{1}{2},$$

also

$$\frac{\delta}{\log(1+\delta)} = 1 + O\left(e^{-\sqrt[b]{\log x}}\right);$$

dies gibt, in (88) eingesetzt,

$$\begin{aligned}\tau(x) &= \frac{x}{h} + O\left(x e^{-\sqrt[b]{\log x}}\right) + O\left(x \log x\, e^{-\sqrt[2b]{\log x}}\right) \\ &= \frac{x}{h} + O\left(x e^{-\sqrt[c]{\log x}}\right),\end{aligned}$$

falls c irgend eine ganze Zahl $> 2b$ bezeichnet. Damit ist (84), also der Satz XVII bewiesen.

§ 10.

Satz XVIII. *Wenn $\varrho(x)$ die Anzahl der Primideale bezeichnet, welche der gegebenen Idealklasse angehören und deren Norm $\leq x$ ist, so ist*

$$\varrho(x) = \frac{1}{h}\,\mathrm{Li}(x) + O\left(x e^{-\sqrt[d]{\log x}}\right), \tag{89}$$

wo d eine Konstante bezeichnet.

Beweis. Es sei $G(n)$ die Anzahl der Primideale $\mathfrak{p} \sim \mathfrak{l}$, deren Norm $= n$ ist. Dann ist

$$\varrho(x) = \sum_{\substack{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{l} \\ N\mathfrak{p} \leq x}} 1 = \sum_{n=1}^{x} G(n)$$

und

$$\tau(x) = \sum_{n=1}^{x} G(n) \log n,$$

also

$$\cdot\ \varrho(x) = \sum_{n=2}^{x} \frac{\tau(n) - \tau(n-1)}{\log n} = \sum_{n=2}^{x} \tau(n) \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right) + \frac{\tau(x)}{\log([x]+1)}$$

und nach (84)

$$\varrho(x) = \sum_{n=2}^{x} \frac{n}{h} \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right) + \frac{[x]}{h \log([x]+1)}$$

$$+ O \sum_{n=2}^{x} n e^{-\sqrt[c]{\log n}} \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right) + O\left(\frac{x e^{-\sqrt[c]{\log x}}}{\log([x]+1)}\right)$$

$$= \frac{1}{h} \sum_{n=2}^{x} \frac{1}{\log n} (n - (n-1)) + O \sum_{n=2}^{x} n e^{-\sqrt[c]{\log n}} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\log^2 n} + O\left(x e^{-\sqrt[c]{\log x}}\right)$$

$$= \frac{1}{h} \sum_{n=2}^{x} \frac{1}{\log n} + O \sum_{n=2}^{x} n e^{-\sqrt[c]{\log n}} \frac{\frac{1}{n}}{1} + O\left(x e^{-\sqrt[c]{\log x}}\right)$$

$$= \frac{1}{h} \int_2^x \frac{du}{\log u} + O \int_1^x e^{-\sqrt[c]{\log u}}\, du + O\left(x e^{-\sqrt[c]{\log x}}\right)$$

$$= \frac{1}{h} \operatorname{Li}(x) + O \int_1^{\sqrt{x}} e^{-\sqrt[c]{\log u}}\, du + O \int_{\sqrt{x}}^{x} e^{-\sqrt[c]{\log u}}\, du + O\left(x e^{-\sqrt[c]{\log x}}\right)$$

$$= \frac{1}{h} \operatorname{Li}(x) + O \int_1^{\sqrt{x}} du + O\left(e^{-\sqrt[c]{\log(\sqrt{x})}} \int_{\sqrt{x}}^{x} du\right) + O\left(x e^{-\sqrt[c]{\log x}}\right)$$

$$= \frac{1}{h} \operatorname{Li}(x) + O(\sqrt{x}) + O\left(e^{-\frac{1}{\sqrt[c]{2}} \sqrt[c]{\log x}} \cdot x\right) + O\left(x e^{-\sqrt[c]{\log x}}\right)$$

$$(89) \qquad = \frac{1}{h} \operatorname{Li}(x) + O\left(x e^{-\sqrt[d]{\log x}}\right),$$

womit der Satz XVIII bewiesen ist.

Für jedes reelle m ist

$$\lim_{x=\infty} \log^m x\, e^{-\sqrt[d]{\log x}} = 0;$$

daher folgt aus (89) (Satz XVIII)

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log^m x}{x}\left(\varrho(x) - \frac{1}{h}\,\mathrm{Li}\,(x)\right) = 0\,. \tag{1}$$

Damit habe ich den in § 1 ausgesprochenen Hauptsatz 1 bewiesen, also auch die ebenda angegebenen Folgerungen.

Zweiter Teil.

§ 11

(Einleitung).

Das Ziel der §§ 12—16 ist der

Hauptsatz 2. *Ein algebraischer Zahlkörper habe die Eigenschaft, daß*

$$\sum_{\mathfrak{p}\sim\mathfrak{o}} \frac{1}{N\mathfrak{p}}$$

divergiert. Man teile alle quadratfreien Ideale einer Klasse in zwei Abteilungen, je nachdem sie aus einer geraden oder ungeraden Anzahl von Primidealen zusammengesetzt sind. Es sei $R(x)$ bezw. $S(x)$ die Anzahl der Ideale der ersten bezw. zweiten Abteilung, deren Norm $\leqq x$ ist. Dann existiert

$$\lim_{x=\infty} \frac{R(x)}{S(x)}$$

und ist $= 1$.

Dasselbe gilt, wenn man alle Ideale einer Klasse in zwei Abteilungen teilt, je nachdem die Anzahl der Primidealfaktoren, aus denen sie bestehen (mehrfache mehrfach gerechnet), gerade oder ungerade ist.

Kurz ausgedrückt: In jeder Idealklasse ist asymptotisch ebenso oft $\mu(\mathfrak{k}) = +1$ als $\mu(\mathfrak{k}) = -1$; in jeder Idealklasse ist asymptotisch ebenso oft $\lambda(\mathfrak{k}) = +1$ als $\lambda(\mathfrak{k}) = -1$. Hierbei bedeuten $\mu(\mathfrak{k})$ und $\lambda(\mathfrak{k})$ die idealtheoretischen Funktionen, welche folgendermaßen definiert sind:

1. Für das Einheitsideal $\mathfrak{o}$ ist

$$\mu(\mathfrak{o}) = 1.$$

2. Wenn $\mathfrak{n}$ durch das Quadrat eines von $\mathfrak{o}$ verschiedenen Ideals teilbar ist, ist

$$\mu(\mathfrak{n}) = 0.$$

3. Wenn $\mathfrak{n}$ quadratfrei und das Produkt von ϱ verschiedenen Primidealen ist, ist

$$\mu(\mathfrak{n}) = (-1)^{\varrho}.$$

1. Für das Einheitsideal $\mathfrak{o}$ ist

$$\lambda(\mathfrak{o}) = 1.$$

2. Für das Ideal

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{p}_1^{\alpha_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{\alpha_r}$$

ist

$$\lambda(\mathfrak{n}) = (-1)^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_r}.$$

Nachdem in §§ 12—16 der Hauptsatz 2 bewiesen ist, folgt in § 17 die (ganz unmittelbare) Ausdehnung der Hauptsätze 1 und 2 auf den weiteren Klassenbegriff und in § 18 die Diskussion der jenen beiden Sätzen zugrunde liegenden Voraussetzung, daß die Reihe

$$\sum_{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{o}} \frac{1}{N\mathfrak{p}}$$

divergiert.

§ 12.

Es ist nach (42) für $\Re(s) > 1$

$$\frac{1}{L_\nu(s)} = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right) = \sum_{\mathfrak{n}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{n})\,\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s}.$$

Wenn $\mathfrak{l}$ die gegebene Idealklasse, $\mathfrak{k}$ die inverse Klasse repräsentiert, ist für $\Re(s) > 1$

$$\sum_{\nu=1}^{h} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{k})}{L_\nu(s)} = \sum_{\nu=1}^{h} \chi_\nu(\mathfrak{k}) \sum_{\mathfrak{n}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{n})\,\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s} = \sum_{\mathfrak{n}} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s} \sum_{\nu=1}^{h} \chi_\nu(\mathfrak{k}\mathfrak{n})$$
$$= h \sum_{\mathfrak{n} \sim \mathfrak{l}} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s}.$$

Wenn nun $\Psi(s)$ die für $\Re(s) > 1$ durch die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{\mathfrak{n} \sim \mathfrak{l}} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s}$$

definierte analytische Funktion bezeichnet, gilt der

Satz XIX. *$\Psi(s)$ ist auf der Geraden $\Re(s) = 1$ regulär, und es gibt eine Zahl c_{42}, so daß für*

$$t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log^{c_{42}} t} \leqq \sigma \leqq 2$$

$\Psi(s)$ regulär ist und der Ungleichung

$$|\Psi(s)| < \log^{c_{42}} t$$

genügt.

Beweis. Nach Satz IX sind $L_1(s), \cdots, L_h(s)$ auf der Geraden $\Re(s) = 1$ von Null verschieden, also $\Psi(s)$ dort regulär. Nach Satz XII sind diese Funktionen für

$$(66) \qquad t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log^{c_{29}} t} \leqq \sigma \leqq 2$$

regulär, von Null verschieden und genügen dort der Ungleichung

$$(69) \qquad |L_\nu(s)| > \frac{1}{\log^{c_{33}} t}.$$

Für das Gebiet (66) ist also $\Psi(s)$ regulär und

$$|\Psi(s)| \leqq \frac{1}{h} \sum_{\nu=1}^{h} \frac{1}{|L_\nu(s)|} < \frac{1}{h} h \log^{c_{33}} t = \log^{c_{33}} t;$$

setzt man die größere der Zahlen c_{29} und c_{33} gleich c_{42}, so ersieht man die Richtigkeit des Satzes XIX.

Es werde nun eine ganze Zahl $a > c_{42}$ so gewählt, daß $\frac{1}{(2k)^a}$ kleiner ist als der Abstand der Geraden $\sigma = 1$ von allen etwa vorhandenen singulären Stellen von $\Psi(s)$, deren imaginärer Teil zwischen $-e^{2k}i$ und $e^{2k}i$ liegt. Wenn dann noch die Gleichung

$$|\Psi(\sigma + ti)| = |\Psi(\sigma - ti)|$$

berücksichtigt wird, so ergibt sich der

Satz XX. *Die Funktion $\Psi(s)$ ist regulär in dem Teile der Ebene, welcher rechts von der stetigen Kurve*

$$\begin{cases} \sigma = 1 - \dfrac{1}{\log^a t} & \text{für} \quad t \geqq e^{2k}, \\ \sigma = 1 - \dfrac{1}{(2k)^a} & \text{für} \quad -e^{2k} \leqq t \leqq e^{2k}, \\ \sigma = 1 - \dfrac{1}{\log^a(-t)} & \text{für} \quad t \leqq -e^{-2k} \end{cases}$$

liegt, inklusive der Kurve selbst, und $\Psi(s)$ genügt für

$$t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log^a t} \leqq \sigma \leqq 2$$

der Ungleichung

$$|\Psi(\sigma + ti)| = |\Psi(\sigma - ti)| < \log^a t.$$

§ 13.

Wie in § 8 ergibt sich zunächst durch Vertauschung von Summation und Integration und Anwendung der Integralformel (78) bei geradlinigem Integrationsweg

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{x^s}{s^2} \Psi(s)\, ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{x^s}{s^2} \sum_{\mathfrak{n} \sim \mathfrak{I}} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s}\, ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{\mathfrak{n} \sim \mathfrak{I}} \mu(\mathfrak{n}) \int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{\left(\frac{x}{N\mathfrak{n}}\right)^s}{s^2}\, ds = \sum_{\substack{\mathfrak{n} \sim \mathfrak{I} \\ N\mathfrak{n} \leqq x}} \mu(\mathfrak{n}) \log \frac{x}{N\mathfrak{n}} + \sum_{\mathfrak{n} \sim \mathfrak{I}} \frac{\mu(\mathfrak{n})\,\Theta}{N\mathfrak{n}^4}$$

(90)
$$= \sum_{\substack{\mathfrak{n} \sim \mathfrak{I} \\ N\mathfrak{n} \leqq x}} \mu(\mathfrak{n}) \log \frac{x}{N\mathfrak{n}} + O(1).$$

Die Anwendung des Cauchyschen Satzes auf den Integranden $\frac{x^s}{s^2}\Psi(s)$ und den auf S. 176 angegebenen Integrationsweg ergibt nach Satz XX

$$(91)\qquad \int\limits_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{x^s}{s^2}\Psi(s)\,ds = \int\limits_{AB} = \int\limits_{AF} + \int\limits_{FE} + \int\limits_{ED} + \int\limits_{DC} + \int\limits_{CB}$$

Da $\Psi(s)$ nach Satz XX genau dieselbe Ungleichung erfüllt wie $K(s)$ nach Satz XIV, so folgt wörtlich wie in § 8

$$(92)\qquad \int\limits_{AF} + \int\limits_{FE} + \int\limits_{ED} + \int\limits_{DC} + \int\limits_{CB} = O\left(x e^{-\sqrt[b]{\log x}}\right).$$

Aus (90), (91) und (92) ergibt sich

$$(93)\qquad \sum_{\substack{\mathfrak{n} \sim \mathfrak{l} \\ N\mathfrak{n} \leq x}} \mu(\mathfrak{n}) \log \frac{x}{N\mathfrak{n}} = O\left(x e^{-\sqrt[b]{\log x}}\right).$$

Wird statt x hierin $(1+\delta)x$ geschrieben, wo

$$\delta = e^{-\sqrt[2b]{\log x}}$$

ist, und (93) von der so entstehenden Gleichung subtrahiert, so findet man

$$\log(1+\delta) \sum_{\substack{\mathfrak{n} \sim \mathfrak{l} \\ N\mathfrak{n} \leq x}} \mu(\mathfrak{n}) + \sum_{\substack{\mathfrak{n} \sim \mathfrak{l} \\ x < N\mathfrak{n} \leq (1+\delta)x}} \mu(\mathfrak{n}) \log \frac{(1+\delta)x}{N\mathfrak{n}} = O\left(x e^{-\sqrt[b]{\log x}}\right).$$

Hierin ist die zweite Summe dem absoluten Betrage nach

$$\leqq \log(1+\delta) \sum_{\substack{\mathfrak{n} \sim \mathfrak{l} \\ x < N\mathfrak{n} \leqq (1+\delta)x}} 1 \leqq \delta(H(1+\delta)x - H(x)) = O\left(x e^{-2\sqrt[2b]{\log x}}\right) *);$$

also ist, wenn

$$\sum_{\substack{\mathfrak{n} \sim \mathfrak{l} \\ N\mathfrak{n} \leq x}} \mu(\mathfrak{n}) = M(x)$$

gesetzt wird,

$$\log(1+\delta)\, M(x) = O\left(x e^{-2\sqrt[2b]{\log x}}\right),$$

$$M(x) = \frac{1}{\log(1+\delta)}\, O\left(x e^{-2\sqrt[2b]{\log x}}\right) = O\left(x e^{-\sqrt[2b]{\log x}}\right),$$

$$(94)\qquad M(x) = O\left(x e^{-\sqrt[c]{\log x}}\right).$$

Damit erhalte ich den

Satz XXI. *Für jedes reelle m ist*

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log^m x}{x} \sum_{\substack{\mathfrak{n} \sim \mathfrak{l} \\ N\mathfrak{n} < x}} \mu(\mathfrak{n}) = 0.$$

---

*) Vergl. S. 179.

§ 14.

Satz XXII. *Es sei $Q(x)$ die Anzahl der quadratfreien Ideale einer Klasse, deren Norm $\leqq x$ ist.*) Dann ist der Grenzwert*

$$\lim_{x=\infty} \frac{Q(x)}{x}$$

vorhanden und von Null verschieden, nämlich $= \frac{g}{\zeta_{\varkappa}(2)}$.

Dieser Wert ist von der Klasse unabhängig.

Beweis. Es ist bekanntlich, wenn $\mathfrak{m}$ alle Teiler des Ideals $\mathfrak{k}$ durchläuft,

$$\sum_{\mathfrak{m}|\mathfrak{k}} \mu(\mathfrak{m}) \begin{cases} = 1 & \text{für} \quad \mathfrak{k} = \mathfrak{o}, \\ = 0 & \text{für} \quad \mathfrak{k} \neq \mathfrak{o}. \end{cases}$$

Also ist

$$Q(x) = \sum_{\substack{\mathfrak{n} \sim \mathfrak{l} \\ N\mathfrak{n} \leqq x}} \sum_{\mathfrak{m}} \mu(\mathfrak{m}),$$

wo $\mathfrak{m}$ alle Ideale durchläuft, deren Quadrat in $\mathfrak{n}$ aufgeht. Daraus folgt

$$(95) \qquad Q(x) = \sum_{N\mathfrak{m} \leqq \sqrt{x}} \mu(\mathfrak{m}) A(x, \mathfrak{m}),$$

wo $A(x, \mathfrak{m})$ die Anzahl aller Ideale der gegebenen Klasse ist, welche durch $\mathfrak{m}^2$ teilbar sind, und deren Norm $\leqq x$ ist. $A(x, \mathfrak{m})$ ist die Anzahl der Ideale einer — bei gegebenem $\mathfrak{m}$ festen**) — Klasse, deren Norm $\leqq \frac{x}{N\mathfrak{m}^2}$ ist. Nach Herrn Webers Relation (27) gibt es eine Konstante B, so daß für alle $x \geqq 1$ die Anzahl $A(x)$ der Ideale jeder Klasse, deren Norm $\leqq x$ ist, der Ungleichung

$$|A(x) - gx| < Bx^{1-\frac{1}{k}}$$

genügt. Daher ist für alle $x \geqq 1$ und alle $\mathfrak{m}$, deren Norm $\leqq \sqrt{x}$ ist,

$$(96) \qquad \left| A(x, \mathfrak{m}) - g\frac{x}{N\mathfrak{m}^2} \right| < B\left(\frac{x}{N\mathfrak{m}^2}\right)^{1-\frac{1}{k}}.$$

Aus (95) und (96) folgt

$$Q(x) = \sum_{N\mathfrak{m} \leqq \sqrt{x}} \mu(\mathfrak{m}) g \frac{x}{N\mathfrak{m}^2} + O \sum_{N\mathfrak{m} \leqq \sqrt{x}} \left(\frac{x}{N\mathfrak{m}^2}\right)^{1-\frac{1}{k}}$$

$$(97) \qquad = gx \sum_{N\mathfrak{m} \leqq \sqrt{x}} \frac{\mu(\mathfrak{m})}{N\mathfrak{m}^2} + O\left(x^{1-\frac{1}{k}} \sum_{N\mathfrak{m} \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{N\mathfrak{m}^{2-\frac{2}{k}}}\right).$$

---

*) Übrigens ist $Q(x) = \sum_{\substack{\mathfrak{n} \sim \mathfrak{l} \\ N\mathfrak{n} \leqq x}} \mu^2(\mathfrak{n})$.

**) Es ist die Klasse der Ideale $\mathfrak{h}$, für die $\mathfrak{m}^2\mathfrak{h} \sim \mathfrak{l}$ ist.

Hierin ist

$$\sum_{N\mathfrak{m}\leq\sqrt{x}}\frac{\mu(\mathfrak{m})}{N\mathfrak{m}^2}=\sum_{\mathfrak{m}}\frac{\mu(\mathfrak{m})}{N\mathfrak{m}^2}-\sum_{N\mathfrak{m}>\sqrt{x}}\frac{\mu(\mathfrak{m})}{N\mathfrak{m}^2}=\frac{1}{\zeta_\varkappa(2)}+O\sum_{N\mathfrak{m}>\sqrt{x}}\frac{1}{N\mathfrak{m}^2}$$

$$=\frac{1}{\zeta_\varkappa(2)}+O\sum_{n=\sqrt{x}+1}^{\infty}\frac{H(n)-H(n-1)}{n^2}$$

$$=\frac{1}{\zeta_\varkappa(2)}+O\sum_{n=\sqrt{x}}^{\infty}H(n)\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)+O\left(\frac{H(\sqrt{x})}{([\sqrt{x}]+1)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{\zeta_\varkappa(2)}+O\sum_{n=\sqrt{x}}^{\infty}n\cdot\frac{1}{n^3}+O\left(\frac{\sqrt{x}}{x}\right)$$

$$(98)\qquad =\frac{1}{\zeta_\varkappa(2)}+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

und

$$(99)\qquad \sum_{N\mathfrak{m}\leq\sqrt{x}}\frac{1}{N\mathfrak{m}^{2-\frac{2}{k}}}\begin{cases}=O(\sqrt{x}) & \text{für } k=1,\\ =O(\log x) & \text{für } k=2,\\ =O(1) & \text{für } k>2.\end{cases}$$

Aus (97), (98) und (99) folgt für jedes k

$$Q(x)=\frac{g}{\zeta_\varkappa(2)}x+O(\sqrt{x})+O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\log x\right),$$

also

$$\lim_{x=\infty}\frac{Q(x)}{x}=\frac{g}{\zeta_\varkappa(2)},$$

wie im Satz XXII behauptet wurde.

Satz XXIII (erste Hälfte des Hauptsatzes 2). *Es ist*

$$\lim_{x=\infty}\frac{R(x)}{S(x)}=1,$$

wo $R(x)$ und $S(x)$ die auf S. 182 angegebene Bedeutung haben.

Beweis. Es ist

$$R(x)-S(x)=\sum_{\substack{\mathfrak{n}\sim\mathfrak{l}\\ N\mathfrak{n}\leq x}}\mu(\mathfrak{n})=M(x),$$

$$R(x)+S(x)=\sum_{\substack{\mathfrak{n}\sim\mathfrak{l}\\ N\mathfrak{n}\leq x}}\mu^2(\mathfrak{n})=Q(x),$$

$$R(x)=\frac{1}{2}(Q(x)+M(x)),$$

$$S(x)=\frac{1}{2}(Q(x)-M(x)),$$

$$(100) \qquad \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{Q(x)+M(x)}{Q(x)-M(x)} = \frac{\frac{Q(x)}{x}+\frac{M(x)}{x}}{\frac{Q(x)}{x}-\frac{M(x)}{x}}.$$

Nach Satz XXI ist (wenn dort $m=0$ angenommen wird)

$$\lim_{x=\infty} \frac{M(x)}{x} = 0,$$

nach Satz XXII

$$\lim_{x=\infty} \frac{Q(x)}{x} \neq 0;$$

aus (100) folgt daher

$$\lim_{x=\infty} \frac{R(x)}{S(x)} = 1,$$

wie im Satz XXIII behauptet wurde.

Man sieht zugleich, daß die Anzahl der Ideale jeder Klasse, deren Norm $\leqq x$ ist und für welche $\mu(\mathfrak{n}) = 1$ (bezw. $\mu(\mathfrak{n}) = -1$) ist, asymptotisch gleich $\frac{g}{2\zeta_\varkappa(2)}x$ ist.

§ 15.

Es sei noch eine wichtige Folgerung aus dem Satz XXI angegeben.

Satz XXIV. *Wenn m und t zwei beliebige reelle Zahlen sind, ist die nach wachsendem $N\mathfrak{n}$ geordnete Reihe*

$$\sum_{\mathfrak{n}\sim\mathfrak{l}} \frac{\mu(\mathfrak{n}) \log^m N\mathfrak{n}}{N\mathfrak{n}^{1+ti}}$$

konvergent.

Hierin liegt insbesondere (für $m=0$, $t=0$) enthalten, daß die Reihe

$$\sum_{\mathfrak{n}\sim\mathfrak{l}} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}}$$

konvergiert.

Beweis. Da die Summe der absoluten Beträge aller Glieder mit gleicher Norm x

$$\leqq \frac{\log^m x}{x}(H(x)-H(x-1)) = \frac{\log^m x}{x}\left(ghx + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right) - gh(x-1) - O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right)\right)$$

$$= O\left(\frac{\log^m x}{x^{\frac{1}{k}}}\right)$$

ist, also für $x=\infty$ den Grenzwert 0 hat, braucht zum Nachweise des Satzes XXIV nur gezeigt zu werden, daß

$$(101) \qquad \lim_{x=\infty} \sum_{\substack{\mathfrak{n}\sim\mathfrak{l} \\ N\mathfrak{n}\leqq x}} \frac{\mu(\mathfrak{n}) \log^m N\mathfrak{n}}{N\mathfrak{n}^{1+ti}}$$

existiert. Nun ist

$$\sum_{\substack{\mathfrak{n}\sim\mathfrak{l}\\ N\mathfrak{n}\leqq x}}\frac{\mu(\mathfrak{n})\log^m N\mathfrak{n}}{N\mathfrak{n}^{1+ti}}=\sum_{n=1}^{x}\frac{\log^m n}{n^{1+ti}}\sum_{\substack{\mathfrak{n}\sim\mathfrak{l}\\ N\mathfrak{n}=n}}\mu(\mathfrak{n})=\sum_{n=1}^{x}\frac{\log^m n}{n^{1+ti}}(M(n)-M(n-1))$$

(102) $$=\sum_{n=1}^{x}M(n)\left(\frac{\log^m n}{n^{1+ti}}-\frac{\log^m(n+1)}{(n+1)^{1+ti}}\right)+\frac{M(x)\log^m([x]+1)}{([x]+1)^{1+ti}}.$$

Nach Satz XXI ist für alle hinreichend großen n

(103) $$|M(n)|<\frac{n}{\log^{m+2}n};$$

daraus folgt zunächst

(104) $$\lim_{x=\infty}\frac{M(x)\log^m([x]+1)}{([x]+1)^{1+ti}}=0.$$

Ferner ist wegen

$$\left|\frac{\log^m n}{n^{1+ti}}-\frac{\log^m(n+1)}{(n+1)^{1+ti}}\right|=\left|\int_n^{n+1}\frac{m\log^{m-1}u-(1+ti)\log^m u}{u^{2+ti}}\,du\right|$$

$$\leqq\int_n^{n+1}\frac{|m|\log^{m-1}u+(1+|t|)\log^m u}{u^2}\,du$$

für alle hinreichend großen n

$$\left|\frac{\log^m n}{n^{1+ti}}-\frac{\log^m(n+1)}{(n+1)^{1+ti}}\right|<(2+|t|)\,\frac{\log^m n}{n^2};$$

hieraus folgt in Verbindung mit (103) wegen der Konvergenz von

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{\log^{m+2}n}\,\frac{\log^m n}{n^2}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log^2 n},$$

daß die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}M(n)\left(\frac{\log^m n}{n^{1+ti}}-\frac{\log^m(n+1)}{(n+1)^{1+ti}}\right)$$

konvergiert, und dies ergibt mit Rücksicht auf (102) und (104) die Existenz des Grenzwertes (101), womit der Satz XXIV bewiesen ist.

§ 16.

Die entsprechenden Sätze über die Funktion $\lambda(\mathfrak{n})$ könnte man direkt auf analogem Wege beweisen, von den erzeugenden Funktionen

$$\frac{1}{L_\nu(s)} \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1-\frac{\chi_\nu(\mathfrak{p}^2)}{N\mathfrak{p}^{2s}}} = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1-\frac{\chi_\nu(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}}{1-\frac{\chi_\nu(\mathfrak{p}^2)}{N\mathfrak{p}^{2s}}} = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1+\frac{\chi_\nu(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}}$$

$$= \prod_{\mathfrak{p}} \left(1-\frac{\chi_\nu(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}+\frac{\chi_\nu(\mathfrak{p}^2)}{N\mathfrak{p}^{2s}}-\cdots\right) = \sum_{\mathfrak{n}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{n})\,\lambda(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s}$$

ausgehend. Jedoch lassen sie sich auch aus den analogen Sätzen über $\mu(\mathfrak{n})$ herleiten, was im Folgenden der Kürze wegen geschehen soll.

Satz XXV. *Es ist für jedes reelle m*

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log^m x}{x} \sum_{\substack{\mathfrak{n}\sim\mathfrak{l} \\ N\mathfrak{n}\leqq x}} \lambda(\mathfrak{n}) = 0.$$

Beweis. Für alle Ideale $\mathfrak{n}$, die sich von demselben quadratfreien Ideal $\mathfrak{k}$ um einen quadratischen Faktor unterscheiden ($\mathfrak{n}=\mathfrak{k}\mathfrak{m}^2$), ist

$$\lambda(\mathfrak{n}) = \mu(\mathfrak{k}).$$

Daraus ergibt sich, wenn

$$\sum_{\substack{\mathfrak{n}\sim\mathfrak{l} \\ N\mathfrak{n}\leqq x}} \lambda(\mathfrak{n}) = L(x)$$

gesetzt wird, und $\mathfrak{h}$ die (von $\mathfrak{m}$ abhängige) Klasse repräsentiert, für welche $\mathfrak{h}\mathfrak{m}^2 \sim \mathfrak{l}$ ist,

$$L(x) = \sum_{N\mathfrak{m}\leqq\sqrt{x}} \sum_{\substack{\mathfrak{k}\sim\mathfrak{h} \\ N\mathfrak{k}\leqq\frac{x}{N\mathfrak{m}^2}}} \mu(\mathfrak{k}).$$

Hierin ist die innere Summe die auf die Klasse von $\mathfrak{h}$ bezügliche Funktion M mit dem Argument $\frac{x}{N\mathfrak{m}^2}$. Nach (94) gibt es zwei Konstanten A, c, so daß für jede dieser h Funktionen (die den h Klassen entsprechen) und alle $x \geqq 1$

$$|M(x)| < A x e^{-\sqrt[c]{\log x}}$$

ist, also für $x \geqq 1$ und $N\mathfrak{m} \leqq \sqrt{x}$

$$\left|M\left(\frac{x}{N\mathfrak{m}^2}\right)\right| < A \frac{x}{N\mathfrak{m}^2} e^{-\sqrt[c]{\log\frac{x}{N\mathfrak{m}^2}}}.$$

Daher ist

$$|L(x)| < Ax \sum_{N\mathfrak{m} \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{N\mathfrak{m}^2} e^{-\sqrt[c]{\log \frac{x}{N\mathfrak{m}^2}}}$$

$$= O\left(x \sum_{N\mathfrak{m} \leqq e^{\sqrt[c]{\log x}}} \frac{1}{N\mathfrak{m}^2} e^{-\sqrt[c]{\log x - 2\log N\mathfrak{m}}}\right) + O\left(x \sum_{e^{\sqrt[c]{\log x}} < N\mathfrak{m} \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{N\mathfrak{m}^2} e^{-\sqrt[c]{\log \frac{x}{N\mathfrak{m}^2}}}\right)$$

$$= O\left(x e^{-\sqrt[c]{\log x - 2\sqrt[c]{\log x}}} \sum_{N\mathfrak{m} \leqq e^{\sqrt[c]{\log x}}} \frac{1}{N\mathfrak{m}^2}\right) + O\left(x \sum_{e^{\sqrt[c]{\log x}} < N\mathfrak{m} \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{N\mathfrak{m}^2} \cdot 1\right)$$

$$= O\left(x e^{-\sqrt[c]{\log x}} \sum_{\mathfrak{m}} \frac{1}{N\mathfrak{m}^2}\right) + O\left(x \sum_{N\mathfrak{m} > e^{\sqrt[c]{\log x}}} \frac{1}{N\mathfrak{m}^2}\right)$$

$$= O\left(x e^{-\sqrt[c]{\log x}}\right) + O\left(\frac{x}{e^{\sqrt[c]{\log x}}}\right)$$

$$= O\left(x e^{-\sqrt[c]{\log x}}\right),$$

woraus der Satz XXV unmittelbar folgt.

Da nun für die Anzahl $A(x)$ aller Ideale einer Klasse, deren Norm $\leqq x$ ist,

$$\lim_{x=\infty} \frac{A(x)}{x} = g$$

existiert und > 0 ist, so folgt analog zur obigen Begründung des Satzes XXIII aus Satz XXV der

Satz XXVI (zweite Hälfte des Hauptsatzes 2). *Wenn $R_1(x)$ bezw. $S_1(x)$ die Anzahl der Ideale einer Klasse bezeichnet, welche das Produkt einer geraden bezw. ungeraden Anzahl von Primidealen sind, so ist*

$$\lim_{x=\infty} \frac{R_1(x)}{S_1(x)} = 1.$$

Endlich ergibt die Beweismethode des Satzes XXIV durch wörtliche Übertragung den

Satz XXVII. *Die unendliche, nach wachsenden Normen geordnete Reihe*

$$\sum_{\mathfrak{n}\sim\mathfrak{k}} \frac{\lambda(\mathfrak{n}) \log^m N\mathfrak{n}}{N\mathfrak{n}^{1+ti}}$$

konvergiert für jedes reelle Wertepaar m, t.

§ 17.

Im Vorangehenden war durchweg für die Klasseneinteilung der Ideale der engere Äquivalenzbegriff zugrunde gelegt: Zwei Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ heißen äquivalent, wenn es im Körper zwei ganze Zahlen α und β gibt, *deren Normen dasselbe Vorzeichen besitzen* und welche die Gleichung

$$\alpha\mathfrak{a} = \beta\mathfrak{b}$$

erfüllen. Kurz gesagt: Es ist $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$, wenn der Quotient $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ eine (ganze oder gebrochene) Zahl des Körpers *mit positiver Norm* ist.

Es ist leicht, aus dem Vorigen die entsprechenden Sätze für den weiteren Äquivalenzbegriff herzuleiten, nach welchem $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$ ist, falls der Quotient $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ überhaupt eine Zahl des Körpers (mit positiver oder negativer Norm) ist.

Bekanntlich besteht zwischen den Klassen beider Einteilungen folgender Zusammenhang.

1) Wenn der Körper Zahlen mit negativer Norm, aber keine Einheit mit negativer Norm enthält, zerfällt jede Klasse im weiteren Sinn in zwei Klassen im engeren Sinn.

2) Andernfalls stimmen die Klassen beider Einteilungen völlig überein.

Wenn also h' die Klassenzahl im weiteren Sinn bezeichnet, ist $h = 2h'$ bezw. $h = h'$. Der Hauptsatz 1 ergibt also, daß die Anzahl der Primideale, deren Norm $\leqq x$ ist, in jeder Klasse (im weiteren Sinn) die Gleichung

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log^m x}{x}\left(\varrho(x) - \frac{1}{h'}\operatorname{Li}(x)\right) = 0$$

erfüllt. Auch der Hauptsatz 2 bleibt wörtlich bestehen.

§ 18.

Beim Beweise beider Hauptsätze war nun über den Körper $\varkappa$ die (einzige) Voraussetzung gemacht worden, daß die über alle Primideale der Hauptklasse (im engeren Sinne) erstreckte Summe

$$\sum_{\mathfrak{p}\sim\mathfrak{o}} \frac{1}{N\mathfrak{p}} \tag{105}$$

divergiert. *Was bedeutet diese Voraussetzung und für welche Körper ist sie erfüllt?*

Ich beginne damit, einige Fälle anzugeben, in welchen mit einfachsten Mitteln nachgewiesen werden kann, daß die Reihe (105) divergiert, also meine beiden Hauptsätze gelten.

1) $\varkappa$ habe die Klassenzahl 1; dann divergiert die Reihe (105), da $\mathfrak{p}$ in ihr alle Primideale zu durchlaufen hätte und bekanntlich die Summe der reziproken Normen aller Primideale eines algebraischen Zahlkörpers divergiert (weil sonst die Funktion

$$\zeta_\varkappa(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}^s}}$$

bei Abnahme von s zu 1 nicht über alle Grenzen wachsen könnte). Doch ist hier der Hauptsatz 1 nicht neu, sondern ist in dem von mir im Jahre 1903 bewiesenen Primidealsatz*) enthalten. Ebenso ist der Hauptsatz 2 für $h = 1$ ein schon früher**) von mir bewiesenes Gesetz.

2) $\varkappa$ habe eine ungerade Klassenzahl > 1. Dann zeigt folgende Betrachtung die Divergenz der Reihe (105). Würde die Reihe konvergieren, so würde bei Annäherung von rechts

$$\lim_{s=1} \sum_{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{o}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^s}$$

existieren (und ihrem Summenwerte gleich sein); also würde auch

$$\lim_{s=1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{\mathfrak{p}^m \sim \mathfrak{o}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^{ms}}$$

existieren, da die hinzugefügte Reihe

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{\mathfrak{p}^m \sim \mathfrak{o}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^{ms}}$$

sich für $s = 1$ dem endlichen Grenzwert

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{\mathfrak{p}^m \sim \mathfrak{o}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^{m}}$$

nähert. Aus der für $\Re(s) > 1$ gültigen Gleichung

$$(54) \qquad L(s) = e^{h \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum\limits_{\mathfrak{p}^m \sim \mathfrak{o}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^{ms}}}$$

würde also folgen, daß die Funktion

$$L(s) = L_1(s) \cdot L_2(s) \cdots L_h(s)$$

für $s = 1$ regulär ist. Da $L_1(s)$ in $s = 1$ einen Pol erster Ordnung hat, würde also genau eine der Funktionen

$$L_2(s),\ L_3(s),\ \cdots,\ L_h(s)$$

*) S. die erste der auf S. 145, Anm. 1 zitierten Arbeiten, S. 670.

**) S. die dritte jener Arbeiten, S. 563 und 568.

für $s = 1$ verschwinden, also genau eine der Zahlen

$$\sum_{\mathfrak{n}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}} \quad (\nu = 2, 3, \cdots, h)$$

gleich Null sein.*) Wenn nun h ungerade ist, so gibt es außer dem Hauptcharakter ($\nu = 1$) keinen reellen Charakter; der zu $\chi_\nu(n)$ konjugierte Charakter $\chi_{\nu'}(n)$ ist also von $\chi_\nu(n)$ verschieden. Aus dem Verschwinden eines $L_\nu(1)$ würde also das Verschwinden eines anderen $L_{\nu'}(1)$ folgen, im Widerspruch mit dem Obigen.

3) $\varkappa$ sei ein beliebiger quadratischer Körper $\mathsf{P}(\sqrt{D})$, wo die ganze Zahl D positiv-nichtquadratisch oder negativ ist. Bekanntlich divergiert alsdann die Reihe (105); denn jede durch die Form $u^2 - Dv^2$ darstellbare Primzahl ist Norm eines oder zweier Hauptprimideale des Körpers, da sie in $(u + v\sqrt{D})(u - v\sqrt{D})$ zerlegbar ist, und Herr Weber**) hat — eine Lücke bei Dirichlet ausfüllend — bewiesen, daß die Form $u^2 - Dv^2$ unendlich viele Primzahlen darstellt und, was noch mehr besagt, daß die Summe der reziproken Werte der darstellbaren Primzahlen divergiert. Für jeden quadratischen Körper habe ich also die Hauptsätze 1 und 2 bewiesen.

4) Aus dem von Herrn Furtwängler***) gelieferten Nachweis der Existenz des Klassenkörpers eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers $\varkappa$ ergibt sich allgemein die Divergenz der Reihe (105), wie mir Herr Furtwängler freundlichst mitgeteilt hat. Derselbe wird jenen Beweis demnächst veröffentlichen†); alsdann werden also meine beiden Hauptsätze 1 und 2 für jeden algebraischen Zahlkörper gelten.

Ich habe mit Absicht diese Mitteilung bis hierher verschoben, um meine analytischen Untersuchungen von der modernen Hilbert-Furtwänglerschen Theorie des Klassenkörpers deutlich zu trennen. Meine vorliegende Arbeit liefert bereits für quadratische Körper — wo die Heranziehung des Klassenkörpers unnötig ist — eine Verschärfung der weitestgehenden bisher bekannten Sätze über die Primzahlen in binären quadratischen Formen (positiver und negativer Diskriminante), wie später††) näher ausgeführt werden wird.

---

*) Bisher galt alles auch für gerades h; aus den Ungleichungen (55) folgt allgemein die Divergenz der Reihe (105) und umgekehrt.

**) „Beweis des Satzes, daß jede eigentlich primitive quadratische Form unendlich viele Primzahlen darzustellen fähig ist“, Mathematische Annalen, Bd. 20, 1882, S. 301—329.

***) „Die Konstruktion des Klassenkörpers für beliebige algebraische Zahlkörper“, Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, 1904, S. 173—195.

†) Dies ist auf S. 37 seiner inzwischen in diesem Bande erschienenen Arbeit „Allgemeiner Existenzbeweis für den Klassenkörper eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers“ geschehen.

††) s. S. 202—203.

Dritter Teil.

§ 19

(Einleitung).

Die Tragweite der in den beiden ersten Teilen angewandten Methode ist noch größer, als bisher festgestellt wurde. Um nicht durch allzu große Allgemeinheit der Begriffe den Leser abzuschrecken, habe ich bisher nur von der Verteilung der Primideale auf die verschiedenen Idealklassen gesprochen. Nunmehr werde ich meiner Untersuchung diejenige allgemeinere Verteilung der Primideale in „Klassen" zugrunde legen, welche das Fundament der Weberschen, auf S. 148, Anm. 1 zitierten Abhandlung bildet. Ich werde zeigen, daß unter den von Herrn Weber gemachten Voraussetzungen nicht nur in jeder Klasse unendlich viele Primideale liegen — dies hat Herr Weber bereits festgestellt — sondern auch, daß die Anzahl $\varrho(x)$ der Primideale einer solchen Klasse asymptotisch gleich $\frac{1}{h}\operatorname{Li}(x)$ ist, wo h die Klassenzahl bezeichnet, und sogar, daß für jedes reelle m

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log^m x}{x}\left(\varrho(x) - \frac{1}{h}\operatorname{Li}(x)\right) = 0$$

ist.

Es sei also ein beliebiger algebraischer Zahlkörper $\varkappa$ zugrunde gelegt; der Grad von $\varkappa$ heiße k.

In dem Körper $\varkappa$ werde eine Idealgruppe*) $\bar{O}$ und eine Zahlengruppe O' angenommen, welche folgende vier Voraussetzungen erfüllen:

1) *Die Gruppe $\bar{O}$ soll alle Primideale des Körpers $\varkappa$ enthalten mit etwaiger Ausnahme einer endlichen Anzahl, und sie soll jedes Primideal enthalten, welches Teiler eines in ihr vorkommenden ganzen Ideals ist.* **)

Mit anderen Worten, die ganzen Ideale von $\bar{O}$ sind entweder alle ganzen Ideale des Körpers oder alle zu einer gegebenen endlichen Anzahl von Primidealen relativ primen ganzen Ideale des Körpers.

Es sei nun $\bar{E}$ die Gruppe der (funktionalen) Einheiten des Körpers $\varkappa$.

Es sei O' eine Zahlengruppe von der Art, daß $\bar{E}\,O'$ eine in $\bar{O}$ enthaltene Gruppe von Hauptidealen ist. Es werde angenommen:

---

*) Ich schließe mich jetzt möglichst an Herrn Webers Bezeichnungen an, verstehe also unter einer Idealgruppe ein System von (ganzen und gebrochenen) Idealen, welche sich durch Multiplikation und Division reproduzieren. In den beiden ersten Teilen dieser Arbeit habe ich durchweg — im Anschluß an Herrn Dedekinds Bezeichnungsweise — „Ideal" statt „ganzes Ideal" gesagt.

**) Den zweiten Teil dieser Voraussetzung spricht Herr Weber nicht aus, macht ihn jedoch stillschweigend, wie aus seinem Schluß auf S. 86, Z. 14—16 hervorgeht.

2) *Die Anzahl der Nebengruppen*) oder die Klassenzahl*

$$(\bar{O},\ \bar{E}\,O') = h$$

ist endlich (von Null verschieden).

Die nächste Voraussetzung lautet:

3) *Es sei* $\mathfrak{m}$ *ein ganzes Ideal in* $\bar{O}$ *und* T *oder* $T(x)$ *die Anzahl der in* $\bar{E}\,O'$ *enthaltenen, durch* $\mathfrak{m}$ *teilbaren ganzen Hauptideale, deren Norm nicht größer als die positive Zahl* x *ist. Dann soll*

$$T = \frac{gx}{N\mathfrak{m}} + Mx^{1-\frac{1}{k}} \tag{106}$$

sein, worin g *eine endliche, von Null verschiedene, positive Größe ist, die nur von der Natur der Gruppen* $\bar{O}$, O' *abhängt, aber von* x *und von dem besonderen Ideal* $\mathfrak{m}$ *unabhängig ist, während* M *eine Funktion von* x *ist, von der nur vorausgesetzt wird, daß sie mit unendlich wachsendem* x *nicht unendlich wird.*

Mit anderen Worten, es soll

$$T(x) = \frac{g}{N\mathfrak{m}}\,x + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right)$$

sein, also speziell

$$\lim_{x=\infty} \frac{T(x)}{x} = \frac{g}{N\mathfrak{m}}.$$

4) *Die über alle Primideale von* $\bar{E}\,O'$ *erstreckte Summe*

$$\sum \frac{1}{N\mathfrak{p}} \tag{107}$$

divergiert.

Die Voraussetzungen 1), 2), 3) stimmen genau mit den Weberschen überein. Meine Voraussetzung 4) verlangt weniger als die Webersche**); die folgenden Entwicklungen gelten also a fortiori, wenn Herrn Webers Voraussetzungen vollständig erfüllt sind. Es ist ein glücklicher Umstand, daß meine Voraussetzung 4) ausreicht; denn bereits für den Fall, daß $\bar{O}$ gleich der Gruppe aller Ideale, O' gleich der Gruppe aller total positiven Zahlen des Körpers ist, ist durch Herrn Furtwängler zwar bewiesen, daß der Klassenkörper existiert und daß die Reihe (107) divergiert, aber noch nicht, daß der Klassenkörper die von Herrn Weber unter 4) geforderte Eigenschaft besitzt: Jedes Primideal ersten Grades der Hauptklasse von $\varkappa$ (mit etwaiger Ausnahme einer endlichen Anzahl) zerfällt

*) Diese „Nebengruppen" sind bekanntlich — bis auf eine — keine Gruppen, sondern Komplexe, welche ihrerseits als Elemente einer Abelschen Gruppe aufzufassen sind.

**) Herr Weber folgert die Divergenz von (107) aus seiner Voraussetzung 4).

in lauter Primideale ersten Grades; alle anderen Primideale von $\varkappa$ enthalten im Klassenkörper höchstens eine endliche Anzahl von Primidealen ersten Grades.

Unter den obigen Voraussetzungen 1), 2), 3), 4) besteht nun, wie ich im § 20 zeigen will, der

Hauptsatz 3. *Die Anzahl $\varrho(x)$ der Primideale in jeder Klasse von $\overline{O}$ nach $\overline{E}\,O'$ ist*

$$= \frac{1}{h}\ \mathrm{Li}\,(x) + O\left(x e^{-\sqrt[d]{\log x}}\right).$$

Speziell ist also

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varrho(x)\log x}{x} = \frac{1}{h}$$

und für zwei beliebige Klassen

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varrho_1(x)}{\varrho_2(x)} = 1.$$

Ebenso beweise ich in § 21 unter den Voraussetzungen 1) bis 4) den

Hauptsatz 4. *In jeder Klasse von $\overline{O}$ nach $\overline{E}\,O'$ gibt es asymptotisch ebensoviele quadratfreie ganze Ideale, die aus einer geraden Anzahl von Primidealen bestehen, als solche, die aus einer ungeraden Anzahl von Primidealen zusammengesetzt sind. Dasselbe gilt, wenn das Wort „quadratfreie“ weggelassen wird.*

Die Hauptsätze 1 und 2 sind hierin als Spezialfälle enthalten, wenn man $\overline{O}$ gleich dem System aller Ideale, O' gleich dem System aller Zahlen des Körpers mit positiver Norm setzt. Denn dann ist 1) von selbst erfüllt, 2) nach dem Dedekindschen Satze von der Endlichkeit der Klassenzahl, 3) nach dem Weberschen Satze (26), und die Voraussetzung 4) hatte ich ausdrücklich im Wortlaut der Hauptsätze 1 und 2 gemacht.

Andererseits ist der Beweis der Hauptsätze 3 und 4 dem der Hauptsätze 1 und 2 ganz analog, so daß ich ihn sehr kurz darstellen kann, indem ich nur die zu modifizierenden Überlegungen genau angebe.

§ 20.

Es seien $\chi_1(\mathfrak{n}), \cdots, \chi_h(\mathfrak{n})$ die h Charaktere der Gruppe der h Klassen („Nebengruppen“) von $\overline{O}$ nach $\overline{E}\,O'$, $\chi_1(\mathfrak{n})$ der Hauptcharakter. Für diejenigen ganzen Ideale, welche nicht in $\overline{O}$ vorkommen, setze ich

$$\chi_1(\mathfrak{n}) = 0,\ \chi_2(\mathfrak{n}) = 0, \cdots, \chi_h(\mathfrak{n}) = 0.$$

Dann gilt für zwei beliebige ganze Ideale des Körpers die Gleichung

$$\chi(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \chi(\mathfrak{a})\,\chi(\mathfrak{b});$$

denn nach Voraussetzung 1) kommt $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ dann und nur dann in $\overline{O}$ vor, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in $\overline{O}$ vorkommen.

Es gilt also für $\Re(s) > 1$ und $\nu = 1, 2, \cdots, h$ die — auch von Herrn Weber für $s > 1$ angewandte — Identität

$$(108) \qquad \sum_{\mathfrak{n}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s} = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}},$$

wo links $\mathfrak{n}$ alle ganzen Ideale, rechts $\mathfrak{p}$ alle Primideale des Körpers durchläuft.

Wenn $\mathfrak{n}_1, \cdots, \mathfrak{n}_h$ ein Repräsentantensystem der h Klassen von $\bar{O}$ ist, so ist für einen vom Hauptcharakter verschiedenen Charakter*)

$$(109) \qquad \sum_{N\mathfrak{n} \leq x} \chi(\mathfrak{n}) = \chi(\mathfrak{n}_1) A_1(x) + \cdots + \chi(\mathfrak{n}_h) A_h(x),$$

wo $A_1(x), \cdots, A_h(x)$ für die einzelnen Klassen von $\bar{O}$ die Anzahlen der ganzen Ideale bezeichnen, deren Norm $\leqq x$ ist. Wird eine Klasse betrachtet, so ist, wenn das ganze Ideal $\mathfrak{a}$ ihr angehört und $\mathfrak{m}$ ein festes ganzes Ideal der inversen Klasse bezeichnet, $\mathfrak{m}\mathfrak{a} = \mathfrak{k}$ ein ganzes Hauptideal der Gruppe $\bar{E}O'$, und umgekehrt liefert jedes ganze durch $\mathfrak{m}$ teilbare Hauptideal $\mathfrak{m}\mathfrak{a} = \mathfrak{k}$ in $\bar{E}O'$ ein ganzes Ideal $\mathfrak{a}$ der gegebenen Klasse. Daher ist für $\nu = 1, 2, \cdots, h$

$$A_\nu(x) = T(N\mathfrak{m} \cdot x),$$

d. h. nach (106)

$$A_\nu(x) = gx + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right);$$

also erhält man in Verbindung mit (109) und (39)

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leq x} \chi(\mathfrak{n}) = O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right),$$

ferner

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leq x} \frac{|\chi(\mathfrak{n})|}{N\mathfrak{n}} \leqq \sum_{N\mathfrak{n} \leq x} \frac{1}{N\mathfrak{n}} = O(\log x).$$

Daher gilt der Satz VII, und die für $\Re(s) > 1 - \frac{1}{k}$ durch die Reihen

$$(110) \qquad L_\nu(s) = \sum_{\mathfrak{n}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s} \qquad (\nu = 2, 3, \cdots, h)$$

definierten analytischen Funktionen erfüllen die Relationen (47) und (49).

Was die für $\Re(s) > 1$ durch (110) definierte Funktion $L_1(s)$ betrifft, so ist nach (108)

$$L_1(s) = \prod_{\mathfrak{p}}{}' \frac{1}{1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}^s}},$$

*) (109) ist in der Schreibweise mit (44) gleichlautend.

wo $\mathfrak{p}$ alle Primideale mit Ausnahme der etwa in $\overline{O}$ nicht vorkommenden durchläuft. Also ist, falls $\overline{O}$ gleich der Gruppe aller Ideale ist,

$$L_1(s) = \zeta_\varkappa(s),$$

falls dagegen $\overline{O}$ die Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_\varrho$ nicht enthält,

$$L_1(s) = \zeta_\varkappa(s) \prod_{\alpha=1}^{\varrho} \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}_\alpha^s}\right). \tag{111}$$

Die ganze transzendente Funktion

$$\prod_{\alpha=1}^{\varrho} \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}_\alpha^s}\right)$$

ist offenbar für $\Re(s) \geqq \frac{1}{2}$, also für $\Re(s) \geqq 1 - \frac{1}{2k}$ dem absoluten Betrage nach nicht oberhalb der endlichen Schranke

$$\prod_{\alpha=1}^{\varrho} \left(1 + \frac{1}{N\mathfrak{p}_\alpha^{\frac{1}{2}}}\right)$$

gelegen; ferner ist ihre Ableitung

$$\prod_{\alpha=1}^{\varrho} \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}_\alpha^s}\right) \cdot \sum_{\alpha=1}^{\varrho} \frac{\dfrac{\log N\mathfrak{p}_\alpha}{N\mathfrak{p}_\alpha^s}}{1 - \dfrac{1}{N\mathfrak{p}_\alpha^s}}$$

für $\Re(s) \geqq \frac{1}{2}$, also für $\Re(s) \geqq 1 - \frac{1}{2k}$ dem absoluten Betrage nach

$$\leqq \prod_{\alpha=1}^{\varrho} \left(1 + \frac{1}{N\mathfrak{p}_\alpha^{\frac{1}{2}}}\right) \cdot \sum_{\alpha=1}^{\varrho} \frac{\log N\mathfrak{p}_\alpha}{N\mathfrak{p}_\alpha^{\frac{1}{2}} - 1}.$$

Die Funktion $L_1(s)$ erfüllt also auch die Ungleichungen (51) und (52), so daß der Satz VIII wörtlich gilt.

Wird nun, wie in § 5, die analytische Funktion $L(s)$ durch die Gleichung

$$L(s) = \prod_{\nu=1}^{h} L_\nu(s)$$

definiert, so ist für $\Re(s) > 1$

$$L(s) = e^{h \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum \frac{1}{N\mathfrak{p}^{ms}}},$$

wo in der inneren Summe $\mathfrak{p}$ die Primideale durchläuft, deren m^{te} Potenz der Hauptklasse von $\overline{O}$ von $\overline{E}\,O'$, d. h. der Gruppe $\overline{E}\,O'$ angehört. Wegen der Voraussetzung 4) wächst $L(s)$ bei Abnahme von s zu 1 über alle Grenzen, so daß die Ungleichungen (55) bestehen.

§ 6 bleibt ganz ungeändert, ebenso § 7; in § 7 hat hier $\mathfrak{k}$ ein Ideal zu bedeuten, welches die zur gegebenen Klasse von $\bar{O}$ nach $\bar{E}\,O'$ inverse repräsentiert. Auch die §§ 8—10 bleiben vollkommen ungeändert, womit der Hauptsatz 3 bewiesen ist.

Ich will von demselben eine allgemeine Anwendung machen. $\chi(\mathfrak{n})$ bezeichne einen vom Hauptcharakter verschiedenen Charakter; es werde die Relation

$$\varrho(x) = \frac{1}{h}\,\mathrm{Li}(x) + O\left(x e^{-\sqrt[d]{\log x}}\right)$$

für alle h Klassen angesetzt, mit $\chi(\mathfrak{n}_\nu)$ multipliziert, und es werde alsdann die Summe jener h Relationen gebildet. Dies gibt

$$(112)\qquad \sum_{N\mathfrak{p}\leq x} \chi(\mathfrak{p}) = \frac{1}{h}\,\mathrm{Li}(x) \sum_{\nu=1}^{h} \chi(\mathfrak{n}_\nu) + O\left(x e^{-\sqrt[d]{\log x}}\right) = O\left(x e^{-\sqrt[d]{\log x}}\right).$$

Genau so, wie in § 15 aus (94) der Satz XXIV erschlossen wurde, ergibt sich aus (112) die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\mathfrak{p}} \frac{\chi(\mathfrak{p}) \log^m N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{1+ti}}$$

für jedes reelle Wertepaar m, t. Hieraus folgt speziell für $m = 0$ die Konvergenz der unendlichen Reihe

$$\sum_{\mathfrak{p}} \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^{1+ti}},$$

also des unendlichen Produktes

$$\prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - \dfrac{\chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^{1+ti}}}$$

und das Bestehen der bisher nur für $\Re(s) > 1$ bekannten Relation (108) auch für die Gerade $\Re(s) = 1$, falls ν einen der Werte $2, 3, \cdots, h$ hat.

Für den Hauptcharakter ist übrigens analog auf der Geraden $\Re(s) = 1$ (exkl. $s = 1$)

$$(113)\qquad L_1(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - \dfrac{\chi_1(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}};$$

denn ich habe a. a. O.*) die Gleichung

$$(114)\qquad \zeta_\varkappa(1+ti) = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - \dfrac{1}{N\mathfrak{p}^{1+ti}}} \qquad (t \gtrless 0)$$

bewiesen, und aus (111), (114) folgt (113).

*) S. die auf S. 145, Anm. 2 zitierte Arbeit, S. 127.

§ 21.

Ebenso zeigt die wörtliche Wiederholung der Entwicklungen aus den §§ 12—13 die Richtigkeit des Satzes XXI in der vorliegenden allgemeineren Bedeutung. Der Satz XXII besagt hier auch, daß

$$\lim_{x=\infty} \frac{Q(x)}{x} > 0$$

ist; nur ist der Wert des Grenzwertes hier

$$\frac{g}{\zeta_\varkappa(2)} \frac{1}{\prod\limits_{\alpha=1}^{\varrho}\left(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}_\alpha^2}\right)}.$$

In der Tat gilt die beim Beweise auftretende Ungleichung (96) nur für solche $\mathfrak{m}$, die in $\bar{O}$ vorkommen; für die anderen $\mathfrak{m}$ ist

$$A(x, \mathfrak{m}) = 0.$$

An Stelle von (97) ergibt sich also hier

$$Q(x) = gx \sum_{N\mathfrak{m} \leq \sqrt{x}}{}' \frac{\mu(\mathfrak{m})}{N\mathfrak{m}^2} + O\left(x^{1-\frac{1}{k}} \sum_{N\mathfrak{m}\leq\sqrt{x}}{}' \frac{1}{N\mathfrak{m}^{2-\frac{2}{k}}}\right),$$

wo $\mathfrak{m}$ die ganzen Ideale von $\bar{O}$ durchläuft, also

$$Q(x) = gx \sum_{\mathfrak{m}}{}' \frac{\mu(\mathfrak{m})}{N\mathfrak{m}^2} + O(\sqrt{x}) + O\left(x^{1-\frac{1}{k}} \log x\right),$$

was wegen

$$\sum_{\mathfrak{m}}{}' \frac{\mu(\mathfrak{m})}{N\mathfrak{m}^2} = \prod_{\mathfrak{p}}{}' \left(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}^2}\right) = \frac{1}{\zeta_\varkappa(2)} \frac{1}{\prod\limits_{\alpha=1}^{\varrho}\left(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}_\alpha^2}\right)}$$

den obigen Satz liefert.

Aus ihm folgt analog wie in § 14 die erste Hälfte des Hauptsatzes 4; § 15 bleibt ganz unverändert, und die Schlüsse des § 16 ergeben, wenn man sie auf die Identität

$$L(x) = \sum_{N\mathfrak{m}\leq\sqrt{x}}{}' \sum_{\substack{\mathfrak{k}\sim\mathfrak{h} \\ N\mathfrak{k}\leq\frac{x}{N\mathfrak{m}^2}}} \mu(\mathfrak{k})$$

anwendet, die zweite Hälfte des Hauptsatzes 4.

Vierter Teil.

§ 22.

Von dem Hauptsatz 3 will ich zum Schluß durch Spezialisierung auf quadratische Körper einige Anwendungen machen; dieselben knüpfen an drei klassische Untersuchungen der analytischen Zahlentheorie an, in welchen Dirichlet den ersten Schritt getan hat.

a) Es sei eine eigentlich primitive binäre quadratische Form

$$au^2 + 2buv + cv^2$$

mit positiv-nichtquadratischer oder negativer Diskriminante $D = b^2 - ac$ gegeben; im Falle $D < 0$ sei die Form positiv. Herr Weber*) hat gezeigt, daß sich im Körper $\mathsf{P}(\sqrt{D})$ eine Idealgruppe $\overline{O}$ und eine Zahlengruppe O' angeben läßt, so daß einerseits die Voraussetzungen 1), 2), 3) erfüllt sind, und andererseits die durch die Form darstellbaren Primzahlen (von endlich vielen abgesehen) mit den Normen der Primideale ersten Grades in einer gewissen Klasse von $\overline{O}$ nach $\overline{E}\,O'$ übereinstimmen. Was meine Voraussetzung 4) betrifft, so folgt aus Herrn Webers auf S. 194, Anm. 2 zitierter Arbeit, daß sie erfüllt ist. Der Hauptsatz 3 gilt also und liefert: In jeder Klasse von $\overline{O}$ nach $\overline{E}\,O'$ ist die Anzahl der Primideale, deren Norm $\leqq x$ ist,

$$= \frac{1}{h}\,\mathrm{Li}(x) + O\left(x e^{-\sqrt[d]{\log x}}\right),$$

wo h gleichzeitig die Anzahl der Klassen eigentlich primitiver (positiver) Formen der Diskriminante D und die Anzahl der Klassen von $\overline{O}$ nach $\overline{E}\,O'$ darstellt. Also ist auch die Anzahl der Primideale ersten Grades unter ihnen

$$= \frac{1}{h}\,\mathrm{Li}(x) + O\left(x e^{-\sqrt[d]{\log x}}\right),$$

da die Anzahl der Primideale zweiten und höheren Grades, deren Norm $\leqq x$ ist, $= O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\right)$ ist. Je nachdem nun die betreffende Klasse von $\overline{O}$ (oder, was dasselbe bedeutet, die Klasse der zu $au^2 + 2buv + cv^2$ äquivalenten Formen) zweiseitig ist oder nicht, entsprechen jeder durch die Form darstellbaren Primzahl (mit Ausnahme endlich vieler) zwei Primideale der Klasse oder eines, deren Norm jene Primzahl ist. *Daher ist die Anzahl der durch die quadratische Form darstellbaren Primzahlen* $\leqq x$ *für eine zweiseitige Klasse*

$$= \frac{1}{2h}\,\mathrm{Li}(x) + O\left(x e^{-\sqrt[d]{\log x}}\right),$$

für jede andere Klasse

$$= \frac{1}{h}\,\mathrm{Li}(x) + O\left(x e^{-\sqrt[d]{\log x}}\right).$$

Bisher war nur bekannt, daß jene Anzahl, durch $\mathrm{Li}(x)$ dividiert, für

*) l. c., S. 94—95.

$x=\infty$ den Grenzwert $\frac{1}{2h}$ bezw. $\frac{1}{h}$ besitzt. Herr de la Vallée Poussin*) hatte dies unter Heranziehung schwieriger analytischer Hilfsmittel (welche an sich von hohem Interesse sind) bewiesen.

b) A. Meyer**) hat zuerst den von Dirichlet ohne vollständigen Beweis ausgesprochenen Satz nachgewiesen: „Jede eigentlich primitive (positive) binäre quadratische Form mit nichtquadratischer Diskriminante stellt unendlich viele Primzahlen dar, welche zugleich in einer gegebenen, mit den Charakteren des Geschlechtes jener quadratischen Form verträglichen primitiven Linearform enthalten sind.“ Er hat zugleich gezeigt, daß die Summe der reziproken Werte jener Primzahlen p divergiert, indem er die Gleichung bewies:

$$\sum_p{}' \frac{1}{p^s} = c \log \frac{1}{s-1} + G(s),$$

wo

$$\lim_{s=1} G(s)$$

existiert und c die positive Konstante bezeichnet:

$$c = \frac{2g}{eh\varphi(M)},$$

wo $e=2$ für zweiseitige Klassen ist, sonst $e=1$, ferner h die Klassenzahl eigentlich primitiver (positiver) Formen, g die Anzahl der Geschlechter, M die Differenz der arithmetischen Progression. Herr de la Vallée Poussin***) hat das Verdienst, die schärfere Relation

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varrho(x)}{\mathrm{Li}(x)} = c$$

bewiesen zu haben, wo $\varrho(x)$ die Anzahl jener Primzahlen $\leqq x$ bezeichnet.

Andererseits hat Herr Weber†) gezeigt, daß jene Primzahlen (mit Ausnahme einer endlichen Anzahl) die Normen der Primideale ersten Grades einer Klasse eines $\overline{O}$ nach einem $\overline{E}\,O'$ sind, wo die Voraussetzungen 1), 2), 3) erfüllt sind. In Verbindung mit dem Meyerschen Satz ergibt sich die Divergenz der Reihe (107), also die Richtigkeit der Voraussetzung 4) und daher nach dem Hauptsatz 3 die Gleichung

$$\varrho(x) = c\,\mathrm{Li}(x) + O\left(x e^{-\sqrt[\alpha]{\log x}}\right).$$

*) l. c. „Troisième partie. Les nombres premiers représentables par une forme quadratique de déterminant négatif“, S. 363—397; „Quatrième partie. Les nombres premiers représentables par une forme quadratique de déterminant positif“, Bd. 21, Teil 2, 1897, S. 251—342.

**) „Über einen Satz von Dirichlet“, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 103, 1888, S. 98—117.

***) l. c. „Cinquième partie. Nombres premiers représentables simultanément par une forme linéaire et une forme quadratique“, S. 343—368.

†) l. c., S. 95—96.

c) Dirichlet*) hat bewiesen, daß im Gaußschen Körper $\mathsf{P}(i)$ eine Linearform $\alpha\xi + \beta$ mit teilerfremden α, β unendlich viele komplexe Primzahlen, d. h. unendlich viele Primideale ersten Grades darstellt, und, was noch mehr besagt, daß die über jene komplexen Primzahlen q erstreckte Summe

$$\sum_q \frac{1}{Nq}$$

divergiert. Dirichlet hat nämlich die Relation bewiesen:

$$\sum_q \frac{1}{Nq^s} = \frac{4}{\varphi(\alpha)} \log \frac{1}{s-1} + G(s), \tag{115}$$

wo

$$\lim_{s=1} G(s)$$

existiert. Andererseits hat Herr Weber**) darauf aufmerksam gemacht, daß jene Primideale die Primideale ersten Grades einer Klasse von $\bar{O}$ nach $\bar{E}\,O'$ sind, wo $\bar{O}$ und O' gewisse Gruppen bezeichnen, welche die Voraussetzungen 1), 2), 3) erfüllen. Da nach (115) die Voraussetzung 4) auch gilt, ist der Hauptsatz 3 anwendbar und liefert:

Die Anzahl der komplexen Primzahlen $\alpha\xi + \beta$, deren Norm $\leqq x$ ist, ist

$$= \frac{4}{\varphi(\alpha)} \operatorname{Li}(x) + O\left(x e^{-\sqrt[\gamma]{\log x}}\right).$$

Berlin, den 5. März 1906.

---

*) „Untersuchungen über die Theorie der komplexen Zahlen", Abhandlungen der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1841, S. 141—161; Werke, Bd. 1, S. 509—532.

**) l. c., S. 96—97 und in seiner neueren ausführlichen Behandlung des vorliegenden Spezialfalles: „Über komplexe Primzahlen in Linearformen", Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 129, 1905, S. 35—62.

Zur Theorie allgemeiner Zetafunktionen. II.

Von

PAUL EPSTEIN in Straßburg i./E.

In einer kürzlich erschienenen Abhandlung hat Herr Herglotz*) das Problem der Inhaltsbestimmung einer von einer analytischen Kurve umschlossenen Fläche auf die Untersuchung einer Klasse von Funktionen

$$Z(s, n) = \sum_{a,b} \frac{(a+ib)^n}{(a^2+b^2)^{s+\frac{n}{2}}} \qquad (n = 0,\ 4,\ 8,\ 12, \cdots)$$

zurückgeführt, die eine nahe Verwandtschaft mit der Riemannschen Funktion $\zeta(s)$ zeigen. Dies veranlaßt mich, in der vorliegenden Arbeit den Nachweis zu führen, daß diese Funktionen in sehr engem Zusammenhang mit denjenigen Funktionen stehen, die ich in meiner ersten Arbeit**) als *Zetafunktionen zweiter Ordnung* bezeichnet habe, so daß sämtliche von Herrn Herglotz gefundenen Eigenschaften der Funktionen $Z(s, n)$ direkt aus den Eigenschaften jener abgeleitet werden können. Es wird dabei eine Begriffsbestimmung der Funktionen $Z(s, n)$ mit Hilfe gewisser Differentialoperationen zugrunde gelegt, die sich — wie weiterhin gezeigt wird — in sehr allgemeiner Weise auf Zetafunktionen *beliebiger* Ordnung übertragen läßt.

§ 1.

Mit einer geringen Modifikation der in meiner ersten Arbeit gegebenen Definition soll unter einer *Zetafunktion* p^{ter} *Ordnung* mit der Charakteristik $\begin{vmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_p \\ h_1 & h_2 & \cdots & h_p \end{vmatrix}$ zunächst die p-fache Reihe

$$(1) \qquad Z\begin{vmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_p \\ h_1 & h_2 & \cdots & h_p \end{vmatrix}(s)_\varphi = \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p} \frac{e^{2\pi i \sum_\mu m_\mu h_\mu}}{\varphi((m+g))^{\frac{ps}{2}}}$$

---

*) „Über die analytische Fortsetzung gewisser Dirichletscher Reihen". Math. Ann. Bd. 61, S. 551.

**) Math. Ann. Bd. 56, S. 615.

verstanden werden. Darin bedeutet

$$\varphi((x)) = \sum_{\mu=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{p} a_{\mu\nu} x_\mu x_\nu$$

eine quadratische Form mit nicht verschwindender Determinante Δ, deren reeller Teil positiv ist; $g_1, g_2, \cdots, g_p$; $h_1, h_2, \cdots, h_p$ sind irgend welche reellen Zahlen, und die Summationsindizes durchlaufen alle ganzzahligen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$; nur wenn alle Zahlen $g_1, \cdots, g_p$ *ganze* Zahlen sind, ist diejenige Kombination der Summationsbuchstaben wegzulassen, bei der der Nenner identisch verschwinden würde.

Die obige Reihe konvergiert, sobald der reelle Teil von s größer als 1 ist. Um die Zetafunktion für alle komplexen Werte von s zu definieren, benutzen wir die Integraldarstellung

$$\pi^{-\frac{ps}{2}} \Gamma\left(\frac{ps}{2}\right) Z \begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix} (s)_\varphi = \int_0^\infty dz \cdot z^{\frac{ps}{2}-1} \vartheta \begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix} (z)_\varphi,$$

worin $\vartheta \begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix} (z)_\varphi$ die Thetareihe p^{ter} Ordnung

$$(2) \qquad \vartheta \begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix} (z)_\varphi = \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p} e^{-\pi z \varphi((g+m)) + 2\pi i \sum\limits_\mu m_\mu h_\mu}$$

bedeutet. Für sie besteht die Transformationsformel*)

$$(3) \qquad \vartheta \begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix} (z)_\varphi = \frac{e^{-2\pi i \sum\limits_\mu g_\mu h_\mu}}{z^{\frac{p}{2}} \sqrt{\Delta}} \vartheta \begin{vmatrix} h \\ -g \end{vmatrix} \left(\frac{1}{z}\right)_{\overline{\varphi}},$$

wobei $\overline{\varphi}$ die zu φ *reziproke* Form ist. Mit Hilfe dieser Formel erhalten wir

$$(4) \qquad \pi^{-\frac{ps}{2}} \Gamma\left(\frac{ps}{2}\right) Z \begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix} (s)_\varphi = \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{ps}{2}-1} \vartheta \begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix} (z)_\varphi$$
$$+ \frac{e^{-2\pi i \sum\limits_\mu g_\mu h_\mu}}{\sqrt{\Delta}} \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{p(1-s)}{2}-1} \vartheta \begin{vmatrix} h \\ -g \end{vmatrix} (z)_{\overline{\varphi}}$$

und dies definiert die Zetafunktion p^{ter} Ordnung für jeden Wert von s, sobald nicht gleichzeitig alle Zahlen g und h ganzzahlig sind.

Sind aber alle Zahlen g oder h ganzzahlig, so genügt es, sie alle gleich Null anzunehmen, und es bestehen dann die Formeln:

*) Wegen des Vorzeichens von $\sqrt{\Delta}$ vgl. Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen.

1) alle g gleich Null:

$$\pi^{-\frac{ps}{2}} \Gamma\left(\frac{ps}{2}\right) Z \begin{vmatrix} 0 \\ h \end{vmatrix} (s)_\varphi = -\frac{2}{ps} + \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{ps}{2}-1} \left(\vartheta \begin{vmatrix} 0 \\ h \end{vmatrix} (z)_\varphi - 1\right)$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{p(1-s)}{2}-1} \vartheta \begin{vmatrix} h \\ 0 \end{vmatrix} (z)_{\bar{\varphi}};$$

2) alle h_μ gleich Null:

$$\pi^{-\frac{ps}{2}} \Gamma\left(\frac{ps}{2}\right) Z \begin{vmatrix} g \\ 0 \end{vmatrix} (s)_\varphi = \frac{2}{p\sqrt{\Delta}(s-1)} + \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{ps}{2}-1} \vartheta \begin{vmatrix} g \\ 0 \end{vmatrix} (z)_\varphi$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{p(1-s)}{2}-1} \left(\vartheta \begin{vmatrix} 0 \\ g \end{vmatrix} (z)_{\bar{\varphi}} - 1\right);$$

3) alle Zahlen g und h gleich Null:

$$\pi^{-\frac{ps}{2}} \Gamma\left(\frac{ps}{2}\right) Z \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} (s)_\varphi = \frac{2}{p\sqrt{\Delta}(s-1)} - \frac{2}{ps} + \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{ps}{2}-1} \left(\vartheta \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} (z)_\varphi - 1\right)$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{p(1-s)}{2}-1} \left(\vartheta \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} (z)_{\bar{\varphi}} - 1\right).$$

Aus diesen Formeln erkennt man den für alle Zetafunktionen geltenden *Fundamentalsatz:*

$$(5)\quad \pi^{-\frac{ps}{2}} \Gamma\left(\frac{ps}{2}\right) Z \begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix} (s)_\varphi = \frac{e^{-2\pi i \sum\limits_\mu g_\mu h_\mu}}{\sqrt{\Delta}} \pi^{-\frac{p(1-s)}{2}} \Gamma\left(\frac{p(1-s)}{2}\right) Z \begin{vmatrix} h \\ -g \end{vmatrix} (1-s)_{\bar{\varphi}}$$

Die Zetafunktionen haben folgende *allgemeinen Eigenschaften:*

1) Solange nicht alle Zahlen h ganze Zahlen sind, sind die Zetafunktionen ganze transzendente Funktionen von s.

2) Sind alle Zahlen h ganzzahlig, so wird die Zetafunktion nur für $s = 1$ zur ersten Ordnung unstetig, und es ist

$$(6)\qquad Z \begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix} (s)_\varphi = \frac{2\pi^{\frac{p}{2}}}{p\sqrt{\Delta}\,\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \frac{1}{s-1} + c_0 + c_1(s-1) + \cdots.$$

3) Alle Zetafunktionen verschwinden in den Punkten

$$s = -\frac{2k}{p}; \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots).$$

4) Für $s=0$ verschwinden die Zetafunktionen jeder Charakteristik, außer wenn alle Zahlen g ganze Zahlen sind. In diesem Fall ist

$$Z\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}(0) = -e^{-2\pi i \sum\limits_{\mu} g_\mu h_\mu}.$$

Auf Grund der Bemerkung von Herrn Minkowski, die Herrn Herglotz zu seiner Arbeit veranlaßt hat, kann man schließen, daß

$$\lim_{s=1}(s-1)\,Z\begin{vmatrix} 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots 0 \end{vmatrix}(s)_\varphi$$

das *Volumen des Ellipsoids* $\varphi((x)) \gtreqless 1$ darstellt, welches, wie bekannt, mit wichtigen Sätzen aus der Theorie der quadratischen Formen von p Variablen in engem Zusammenhang steht.*)

Es liegt nahe, nun auch Funktionen aufzusuchen, die der Riemannschen Funktion $\xi(t)$ entsprechen, jedoch ist der Fundamentalsatz (5) in der Form, wie er hier vorliegt, dazu nicht geeignet, denn zu beiden Seiten stehen zwei verschiedene Zetafunktionen. Definiert man aber neue Funktionen $\zeta\begin{vmatrix} g_1 \cdots g_p \\ h_1 \cdots h_p \end{vmatrix}(s)_\varphi$ durch die Gleichung

$$(7)\quad \sqrt[4]{\Delta}\, e^{\pi i \sum g_\mu h_\mu}\, Z\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}(s)_\varphi + \frac{1}{\sqrt[4]{\Delta}}\, e^{-\pi i \sum g_\mu h_\mu}\, Z\begin{vmatrix} h \\ -g \end{vmatrix}(s)_{\bar\varphi} = \frac{4}{p}\,\zeta\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}(s)_\varphi,$$

so ist zunächst

$$(8)\quad \zeta\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}(s)_\varphi = \zeta\begin{vmatrix} h \\ -g \end{vmatrix}(s)_{\bar\varphi}$$

und der Fundamentalsatz erhält eine Fassung, die ganz genau dem Satz über die Riemannsche ζ-Funktion entspricht, daß nämlich *das Produkt*

$$\pi^{-\frac{ps}{2}}\,\Gamma\left(\frac{ps}{2}\right)\zeta\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}(s)_\varphi$$

bei der Vertauschung von s *mit* $1-s$ *ungeändert bleibt.*

Zur Integraldarstellung dieser neuen Funktionen, die wir hier nicht im einzelnen ausführen wollen, wird man an Stelle der bisher benutzten Thetareihe ebenfalls eine modifizierte Funktion

$$(9)\quad \sqrt[4]{\Delta}\, e^{\pi i \sum\limits_{\mu} g_\mu h_\mu}\, \vartheta\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}(z)_\varphi + \frac{1}{\sqrt[4]{\Delta}}\, e^{-\pi i \sum\limits_{\pi} g_\mu h_\mu}\, \vartheta\begin{vmatrix} h \\ -g \end{vmatrix}(z)_{\bar\varphi} = \frac{4}{p}\,\Theta\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}(z)_\varphi$$

einführen; es ist dann

$$\Theta\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}(z)_\varphi = \Theta\begin{vmatrix} h \\ -g \end{vmatrix}(z)_{\bar\varphi}$$

und die Transformationsformel lautet

$$\Theta\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}(z)_\varphi = z^{-\frac{p}{2}}\,\Theta\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}\left(\frac{1}{z}\right)_\varphi.$$

*) Vgl. Minkowski, Geometrie der Zahlen, S. 122 u. S. 198; Journal für Math. Bd. 129, S. 254 ff.

Setzen wir jetzt

$$s = \frac{1}{2} + ti,$$

so ist die Funktion

(10) $$\frac{s(s-1)}{2}\pi^{-\frac{ps}{2}}\Gamma\left(\frac{ps}{2}\right)\zeta\left|\begin{matrix}g\\h\end{matrix}\right|(s)_\varphi = \xi\left|\begin{matrix}g\\h\end{matrix}\right|(t)_\varphi$$

eine *gerade* und *ganze transzendente Funktion* von t, für die man bei allgemeiner Charakteristik die Darstellung hat:

$$\xi\left|\begin{matrix}g\\h\end{matrix}\right|(t)_\varphi = -\left(\frac{1}{4}+t^2\right)\int_1^\infty \Theta\left|\begin{matrix}g\\h\end{matrix}\right|(z)_\varphi \cdot z^{\frac{p}{4}-1}\cos\left(\frac{pt}{2}\log z\right)dz.$$

Sind aber alle Zahlen g und h Null, so ist

$$\xi\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right|(t)_\varphi = \frac{1}{4}\left(\sqrt[4]{\Delta}+\frac{1}{\sqrt[4]{\Delta}}\right)$$
$$-\left(\frac{1}{4}+t^2\right)\int_1^\infty\left[\Theta\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right|(z)_\varphi - \frac{p}{4}\left(\sqrt[4]{\Delta}+\frac{1}{\sqrt[4]{\Delta}}\right)\right]z^{\frac{p}{4}-1}\cos\left(\frac{pt}{2}\log z\right)dz.$$

Daneben besteht die für *jede* Charakteristik gültige Darstellung

(11) $$\xi\left|\begin{matrix}g\\h\end{matrix}\right|(t)_\varphi = \frac{4}{p^2}\int_1^\infty \frac{d}{dz}\left(z^{\frac{p}{2}+1}\,\Theta'\left|\begin{matrix}g\\h\end{matrix}\right|(z)_\varphi\right)z^{-\frac{p}{4}}\cos\left(\frac{pt}{2}\log z\right)dz,$$

und so ist auch hier der genaueste Anschluß an die Riemannschen Entwicklungen gewonnen.

Alle ξ-Funktionen besitzen als Funktionen von t^2 die Höhe Null.

§ 2.

Der allgemeinen Zetafunktion *zweiter Ordnung* wird die quadratische Form

(1) $$\varphi = ax^2 + 2bxy + cy^2 = a(x-\omega y)(x-\omega' y)$$

mit der Determinante

$$\Delta = ac - b^2$$

zugrunde gelegt. Dabei sind

(2) $$\omega = -\frac{b}{a}+\frac{i\sqrt{\Delta}}{a}, \qquad \omega' = -\frac{b}{a}-\frac{i\sqrt{\Delta}}{a}$$

die Lösungen der quadratischen Gleichung $az^2+2bz+c=0$.

Die Elemente der Charakteristik sehen wir als *veränderlich* an und bezeichnen sie mit $\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix}$, ferner schreiben wir zur Abkürzung

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = [mu]$$

und weiter

$$(m_1 + v_1) - \omega (m_2 + v_2) = [m + v] \tag{3}$$

und haben dann als allgemeine Zetafunktion zweiter Ordnung

$$Z \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} (s)_\varphi = \sum_{m_1} \sum_{m_2} \frac{e^{2\pi i [mu]}}{\varphi((m+v))^s}. \tag{4}$$

Eine besondere Eigenschaft dieser Funktionen, die für Zetafunktionen höherer Ordnung nicht allgemein zutrifft, besteht darin, daß sich die mit der *reziproken* Form $\bar{\varphi}$ gebildeten Funktionen auf Funktionen desselben Arguments s zur Form φ zurückführen lassen. Es ist nämlich

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{\Delta} (cx^2 - 2bxy + ay^2), \tag{5}$$

und man sieht leicht, daß

$$Z \begin{vmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix} (s)_{\bar{\varphi}} = \Delta^s Z \begin{vmatrix} -g_2 & g_1 \\ -h_2 & h_1 \end{vmatrix} (s)_\varphi \tag{6}$$

ist. Aus diesem Grunde lautet der *Fundamentalsatz* für diese Funktionen:

$$\pi^{-s} \Gamma(s) Z \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} (s)_\varphi = \frac{e^{-2\pi i [uv]}}{\Delta^{s-\frac{1}{2}}} \pi^{-(1-s)} \Gamma(1-s) Z \begin{vmatrix} -u_2 & u_1 \\ v_2 & -v_1 \end{vmatrix} (1-s)_\varphi. \tag{7}$$

Sei nun Φ irgend eine Funktion, die von der Form φ und den Variablenpaaren u_1, u_2 und v_1, v_2 abhängt; wir definieren dann zwei *Differentialoperationen:*

$$\begin{aligned} D\Phi &= \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} - \omega \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} + 2\pi i (v_1 - \omega v_2) \Phi, \\ D_1 \Phi &= \omega \frac{\partial \Phi}{\partial v_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial v_2} \end{aligned} \tag{8}$$

und stellen zunächst fest, daß diese Operationen *vertauschbar* sind:

$$D D_1 \Phi = D_1 D \Phi. \tag{9}$$

Wenden wir sie auf die Zetafunktion an, so ergibt sich:

$$DZ \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} (s)_\varphi = 2\pi i \sum \sum \frac{[m+v] e^{2\pi i [mu]}}{\varphi((m+v))^s} \tag{10}$$

und

$$D_1 Z \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} (s)_\varphi = -2si\sqrt{\Delta} \sum \sum \frac{[m+v] e^{2\pi i [mu]}}{\varphi((m+v))^{s+1}},$$

also

$$(11)\qquad D_1 Z \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} (s)_\varphi = - s \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} D Z \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} (s+1)_\varphi .$$

Es lassen sich also die Operationen D und D_1 bei der Zetafunktion aufeinander zurückführen, und man braucht nur eine, z. B. die Operation D, beizubehalten. Die n-malige Wiederholung der Operationen liefert noch nach (11) die allgemeine Formel

$$(12)\qquad \begin{aligned} & D_1^n Z \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} (s)_\varphi \\ & = (-1)^n s(s+1)(s+2)\cdots(s+n-1)\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\right)^n D^n Z \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} (s+n)_\varphi . \end{aligned}$$

Man erhält nun unschwer

$$(13)\qquad D^n Z \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} (s)_\varphi = (2\pi i)^n \sum \sum \frac{[m+v]^n e^{2\pi i [mu]}}{\varphi((m+v))^s}$$

und wird so — wenn man noch $s + \frac{n}{2}$ an Stelle von s setzt — zu einer Reihe von Funktionen

$$(14)\qquad Z \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} (s, n)_\varphi = \sum \sum \frac{[m+v]^n e^{2\pi i [mu]}}{\varphi((m+v))^{s+\frac{n}{2}}}, \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

geführt, die wir als *abgeleitete Zetafunktionen* bezeichnen.

Unter diesen Funktionen sind die von Herrn Herglotz betrachteten als ganz spezielle Fälle enthalten; es liegt ihnen die Form $x^2 + y^2$ zugrunde und es sind nach Ausführung der Operation D^n alle Elemente der Charakteristik Null zu setzen.

Den Fundamentalsatz für die abgeleiteten Zetafunktionen findet man durch Anwendung der Operation D auf Gleichung (7). Dabei ist zu beachten, daß in den beiden dort auftretenden Zetafunktionen die Elemente der ersten und zweiten Reihe der Charakteristik vertauscht sind; dies hat zur Folge, daß eine Operation D auf der linken Seite eine Operation D_1 auf der rechten nach sich zieht. Man erhält so:

$$\pi^{-s}\Gamma(s) D^n Z \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} (s)_\varphi = \frac{e^{-2\pi i [uv]}}{\Delta^{s-\frac{1}{2}}} \pi^{-(1-s)} \Gamma(1-s) D_1^n Z \begin{vmatrix} -u_2 & u_1 \\ v_2 & -v_1 \end{vmatrix} (1-s)_\varphi ,$$

oder mit Benutzung von (12):

$$\begin{aligned} & \pi^{-s}\Gamma(s) D^n Z \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} (s)_\varphi \\ & = \frac{e^{-2\pi i [uv]}}{\Delta^{s-\frac{1}{2}}} \pi^{-(1-s)} \Gamma(1+n-s) \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\right)^n D^n Z \begin{vmatrix} -u_2 & u_1 \\ v_2 & -v_1 \end{vmatrix} (1+n-s)_\varphi . \end{aligned}$$

Setzt man jetzt $s + \frac{n}{2}$ an Stelle von s, so ergibt sich der *Fundamentalsatz der abgeleiteten Zetafunktionen:*

$$\pi^{-s}\Gamma\left(\frac{n}{2}+s\right) Z \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} (s,\, n)_\varphi$$

(15)
$$= \frac{e^{-2\pi i [uv]}}{\Delta^{s-\frac{1}{2}}}\, \pi^{-(1-s)}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1-s\right) Z \begin{vmatrix} -u_2 & u_1 \\ v_2 & -v_1 \end{vmatrix} (1-s,\, n)_\varphi .$$

Werden durch die Gleichung (14) die abgeleiteten Zetafunktionen nur innerhalb der Konvergenzgebiete der jeweiligen Doppelreihen dargestellt, so kann man aus der Definition mit Hilfe der D-Operation schließen, daß diese Funktionen über alle Werte von s fortsetzbar sind. Will man allgemein gültige Integraldarstellungen haben, so geht man von den entsprechenden Darstellungen der ursprünglichen Zetafunktionen zweiter Ordnung aus und wendet auf die dort auftretenden Thetareihen die Operationen D und D_1 an. Setzt man

(16)
$$\sum_{m_1}\sum_{m_2} [m+v]^n e^{-\pi z \varphi((m+v)) + 2\pi i [mu]} = \vartheta \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_1 \end{vmatrix} (z,\, n)_\varphi ,$$

so ist

$$D^n \vartheta \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} (z)_\varphi = (2\pi i)^n \vartheta \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} (z,\, n)_\varphi$$

und es besteht die Transformationsgleichung

$$\vartheta \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} (z,\, n)_\varphi = (-1)^n \frac{e^{-2\pi i [uv]}}{z^{n+1}(\sqrt{\Delta})^{n+1}}\, \vartheta \begin{vmatrix} -u_2 & u_1 \\ v_2 & -v_1 \end{vmatrix} \left(\frac{1}{z\Delta},\, n\right)_\varphi .$$

Hiermit findet man leicht die überall gültige Integraldarstellung*)

$$\pi^{-s-\frac{n}{2}}\Gamma\left(s+\frac{n}{2}\right) Z \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} (s,\, n)_\varphi = \int_1^\infty dz \cdot z^{s+\frac{n}{2}-1}\, \vartheta \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} (z,\, n)_\varphi$$
$$+ \frac{(-1)^n e^{-2\pi i [uv]}}{(\sqrt{\Delta})^{n+1}} \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{n}{2}-s}\, \vartheta \begin{vmatrix} -u_2 & u_1 \\ v_2 & -v_1 \end{vmatrix} \left(\frac{z}{\Delta},\, n\right)_\varphi ,$$

aus der man nochmals den Fundamentalsatz (15) ablesen kann. Man erkennt hieraus auch, daß *alle abgeleiteten Zetafunktionen ganze transzendente Funktionen von* s sind, und es folgt dann weiter, daß die Funktion $Z \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} (s,\, n)$ für $s = -\frac{n}{2},\ -\left(\frac{n}{2}+1\right),\ -\left(\frac{n}{2}+2\right), \cdots$ verschwindet.

*) Man sieht ohne weiteres, daß man bei den speziellen von Herrn Herglotz betrachteten Funktionen mit *einfachen* Thetareihen ausreicht.

§ 3.

Will man die Entwicklungen des vorigen Paragraphen auf Zetafunktionen von beliebiger Ordnung ausdehnen, so wird man in folgender Weise vorgehen.

Es sei Φ irgend eine Funktion, die von zwei Reihen von je p Variablen $u_1, u_2, \cdots, u_p, v_1, v_2, \cdots, v_p$, sowie von den Koeffizienten einer quadratischen Form $\varphi(\!(x)\!) = \Sigma\Sigma a_{\mu\nu} x_\mu x_\nu$ abhängt. Es mögen dann zwei Differentialoperationen definiert werden:

$$(1)\quad \begin{aligned} D\Phi &= \xi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} + \xi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} + \cdots + \xi_p \frac{\partial \Phi}{\partial u_p} + 2\pi i(\xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 + \cdots + \xi_p v_p)\Phi, \\ D_1\Phi &= x_1 \frac{\partial \Phi}{\partial v_1} + x_2 \frac{\partial \Phi}{\partial v_2} + \cdots + x_p \frac{\partial \Phi}{\partial v_p}, \end{aligned}$$

worin die Koeffizienten $\xi_1, \cdots, \xi_p, x_1, \cdots, x_p$ in noch näher zu bestimmender Weise von den $a_{\mu\nu}$ abhängen. Wir verlangen nun zunächst, daß die Operationen D und D_1 *vertauschbar* sein sollen, und finden leicht, daß dann die Koeffizienten die Bedingung

$$(2)\qquad \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_p x_p = 0$$

erfüllen müssen.

Wir wenden jetzt diese Operationen auf die allgemeine Zetafunktion

$$Z\left|\begin{matrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_p \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_p \end{matrix}\right|(s)_\varphi = \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p} \frac{e^{2\pi i [mu]}}{\varphi(\!(m+v)\!)^{\frac{ps}{2}}}$$

an, wobei

$$[mu] = m_1 u_1 + m_2 u_2 + \cdots + m_p u_p$$

ist, und finden, wenn zur Abkürzung

$$(3)\qquad \xi_1(m_1 + v_1) + \xi_2(m_2 + v_2) + \cdots + \xi_p(m_p + v_p) = [m+v]$$

gesetzt wird:

$$(4)\qquad DZ\left|\begin{matrix} v \\ u \end{matrix}\right|(s)_\varphi = 2\pi i \sum \cdots \sum \frac{[m+v]\, e^{2\pi i [mu]}}{\varphi(\!(m+v)\!)^{\frac{ps}{2}}}.$$

Dagegen wird:

$$D_1 Z\left|\begin{matrix} v \\ u \end{matrix}\right|(s)_\varphi = -ps \sum \cdots \sum \frac{y_1(m_1 + v_1) + \cdots + y_p(m_p + v_p)}{\varphi(\!(m+v)\!)^{\frac{ps}{2}+1}}\, e^{2\pi i [mu]},$$

und darin ist

$$y_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{ip} x_p.$$

Wir stellen nun die weitere Forderung auf, daß diese y_i den Zahlen ξ_i proportional sein sollen, d. h. es sollen die Bedingungsgleichungen

$$
(5)\qquad \begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p &= \mu\xi_1,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p &= \mu\xi_2,\\
&\vdots\\
a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pp}x_p &= \mu\xi_p
\end{aligned}
$$

erfüllt sein. *Dann gilt für die allgemeine Zetafunktion der Satz:*

$$
(6)\qquad D_1 Z \left| \begin{matrix} v \\ u \end{matrix} \right| (s)_\varphi = -\frac{ps\mu}{2\pi i} D Z \left| \begin{matrix} v \\ u \end{matrix} \right| \left(s + \frac{2}{p}\right)_\varphi,
$$

so daß sich also die Operation D_1 auf die Operation D zurückführen läßt.

Sind

$$
\bar{a}_{ik} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial a_{ik}}
$$

die Koeffizienten der zu φ *reziproken* Form $\bar{\varphi}$, so ergibt die Auflösung des Gleichungssystems (5):

$$
(7)\qquad \frac{1}{\mu} x_i = \bar{a}_{i1}\xi_1 + \bar{a}_{i2}\xi_2 + \cdots + \bar{a}_{ip}\xi_p, \qquad (i = 1, 2, \cdots, p),
$$

und wenn man zu (5) und (7) die Bedingung (2) hinzunimmt, so sieht man, daß *durch Einsetzung der $x_1, \cdots, x_p$ die Form φ, dagegen durch Einsetzung der $\xi_1, \cdots, \xi_p$ ihre Reziproke zum Verschwinden gebracht wird,* also

$$
(8)\qquad \varphi((x)) = 0, \quad \bar{\varphi}((\xi)) = 0.
$$

Solche Systeme der x und ξ lassen sich allgemein in folgender Weise ermitteln. Es sei

$$
(9)\qquad x_i = c_{i1}z_1 + c_{i2}z_2 + \cdots + c_{ip}z_p, \quad (i = 1, 2, \cdots, p)
$$

eine lineare Substitution, durch die die Form φ in eine *Summe von Quadraten* übergeführt wird, so daß also:

$$
(10)\qquad \varphi((x)) = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_p^2 = f((z)).
$$

Nun ist nach (5)

$$
\mu\xi_i = \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{1}{2}\sum_k \frac{\partial f}{\partial z_k}\frac{\partial z_k}{\partial x_i};
$$

sind also $\bar{c}_{ik}$ die Elemente des zum System der (c_{ik}) *reziproken* Systems, so ist

$$
(11)\qquad \mu\xi_i = \bar{c}_{1i}z_1 + \bar{c}_{2i}z_2 + \cdots + \bar{c}_{pi}z_p, \quad (i = 1, 2, \cdots, p).
$$

Die Gleichungssysteme (9) und (11) stellen lineare Substitutionen vor, durch die, *mit Erfüllung der Bedingung* (2), die Formen φ und $\bar{\varphi}$ simultan in eine Summe von Quadraten übergeführt werden. Nun verschwindet die Form $f((z))$ für solche Werte der $z_1, \cdots, z_p$, die durch eine *orthogonale* Substitution aus den p^{ten} *Einheitswurzeln* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_p$ hervorgehen.

Sind also q_{ik} die Elemente einer orthogonalen Substitution, so hat man in (9) und (11)

$$z_i = q_{i1}\varepsilon_1 + q_{i2}\varepsilon_2 + \cdots + q_{ip}\varepsilon_p \tag{12}$$

zu nehmen, um Werte der x und ξ mit den gewünschten Eigenschaften zu erhalten. Zu jeder Form φ gehören also in völlig angebbarer Weise Systeme von $2p$ Zahlen $\begin{pmatrix} x_1, x_2, \cdots, x_p \\ \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_p \end{pmatrix}$, die die Bedingungen (2) und (5) erfüllen, und wir können sagen: *Die Zahlen der ersten Reihe für eine Form φ sind Zahlen der zweiten Reihe für die reziproke Form $\overline{\varphi}$.* Die Größe μ bleibt unbestimmt, aber eine Vergleichung der Formeln (5) und (7) zeigt: Wählt man zu einer Form φ die Größe μ, so gehört zur reziproken Form die Größe $\frac{1}{\mu}$.

Wir definieren nun die *abgeleiteten Zetafunktionen*, indem wir

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} D^n Z \begin{vmatrix} v_1 \cdots v_p \\ u_1 \cdots u_p \end{vmatrix} \left(s + \frac{n}{p}\right)_\varphi = Z \begin{vmatrix} v_1 \cdots v_p \\ u_1 \cdots u_p \end{vmatrix} (s, n)_\varphi, \tag{13}$$
$$(n = 1, 2, 3, \cdots)$$

setzen, und erhalten für sie unschwer die Reihendarstellung:

$$Z \begin{vmatrix} v \\ u \end{vmatrix} (s, n)_\varphi = \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p} \frac{[m+v]^n e^{2\pi i [mu]}}{\varphi((m+v))^{\frac{1}{2}(ps+n)}}. \tag{14}$$

Zur Ableitung des Fundamentalsatzes für diese Funktionen haben wir zunächst durch wiederholte Anwendung der Formel (6):

$$\begin{aligned} & D_1^n Z \begin{vmatrix} v \\ u \end{vmatrix} (s)_\varphi \\ (15) \quad & = \left(\frac{\mu i}{\pi}\right)^n \frac{ps}{2}\left(\frac{ps}{2}+1\right)\left(\frac{ps}{2}+2\right)\cdots\left(\frac{ps}{2}+n-1\right) D^n Z \begin{vmatrix} v \\ u \end{vmatrix} \left(s + \frac{2n}{p}\right)_\varphi. \end{aligned}$$

Übt man nun auf Formel (5) in § 1 wiederholt unsere Operationen aus, so ist nach den obigen Festsetzungen über die Zahlen x und ξ klar, daß eine Operation D auf der linken Seite eine Operation D_1 auf der rechten nach sich zieht; man erhält so mit Rücksicht auf (15):

$$\begin{aligned} & \pi^{-\frac{ps}{2}} \Gamma\left(\frac{ps}{2}\right) D^n Z \begin{vmatrix} v \\ u \end{vmatrix} (s)_\varphi \\ & = \left(\frac{i}{\mu}\right)^n \frac{e^{-2\pi i [uv]}}{\sqrt{\Delta}} \pi^{-\frac{p(1-s)}{2}-n} \Gamma\left(\frac{p(1-s)}{2}+n\right) D^n Z \begin{vmatrix} u \\ -v \end{vmatrix} \left(1 - s + \frac{2n}{p}\right)_{\overline{\varphi}}, \end{aligned}$$

und wenn man jetzt $s + \frac{n}{p}$ an Stelle von s einführt, so folgt der *Fundamentalsatz der abgeleiteten Zetafunktionen*):*

*) Die unbestimmt gelassene Größe μ tritt hier, wie in (15), nur scheinbar auf.

$$\pi^{-\frac{ps}{2}} \Gamma\left(\frac{ps+n}{2}\right) Z \begin{vmatrix} v \\ u \end{vmatrix} (s, n)_{\varphi}$$

$$= \left(\frac{i}{\mu}\right)^n \frac{e^{-2\pi i [uv]}}{\sqrt{\Delta}} \pi^{-\frac{p(1-s)}{2}} \Gamma\left(\frac{p(1-s)+n}{2}\right) Z \begin{vmatrix} u \\ -v \end{vmatrix} (1-s, n)_{\bar{\varphi}}.$$

Diese Funktionen sind, wie man aus der leicht angebbaren Integraldarstellung ersieht, sämtlich ganze transzendente Funktionen von s, und die n^{te} abgeleitete Zetafunktion besitzt reelle Nullpunkte für

$$s = -\frac{2k+n}{p}, \quad (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

Straßburg i. E., Februar 1906.

Über die Grundlagen der Mengenlehre und das Kontinuumproblem.

Von

JULIUS KÖNIG in Budapest.

(Zweite Mitteilung.)

Die folgenden Zeilen schließen sich genau an die Entwicklungen an, die ich unter demselben Titel vor einigen Monaten (Math. Annalen, Bd. 61, S. 156—160) gegeben habe. Es wird jedoch die dort unter 3. gegebene Schlußweise*) hier gar nicht benützt. An ihre Stelle tritt, zur Erhärtung meiner unverändert gebliebenen Ansichten, eine neue Methode, die im wesentlichen auf einer Verschärfung und Verallgemeinerung des Begriffs „endlichdefiniert" beruht.

Diesen Auseinandersetzungen möchte ich eine prinzipielle Bemerkung vorausschicken. In den Grundlagen der Mengenlehre handelt es sich um die Formalisierung und Legalisierung von Tatsachen, die der inneren Anschauung unseres Bewußtseins entnommen sind, so daß unser „wissenschaftliches Denken" selbst Objekt des wissenschaftlichen Denkens ist. Dieser Zusammenhang der Mengenlehre mit Logik und Erkenntnistheorie ist unlösbar und tritt schon in den Elementen der Arithmetik zutage.

So nützlich auch in dieser Richtung die bisher nach mathematischen Analogieen erfolgte Algebraisierung der Logik ist, so kann uns diese allein über die vorhandenen Schwierigkeiten nicht weghelfen. Die „Tatsachen" und „Gesetze", die unserem wissenschaftlichen Denken zugrunde liegen, müssen genauer als bisher untersucht werden, und — vor allem — eine Disziplin geschaffen werden, die ich nach Analogien der „mathematischen Physik" eine Theorie der logischen Evidenz nennen würde.

Diese Richtung hoffe ich sehr bald in einer ausführlicheren Publikation weiter zu verfolgen.

*) Diese Schlußweise muß und kann im Sinne der hier gegebenen neuen Begriffsentwicklungen umgeformt werden.

1. Die endlich definierten Elemente des Kontinuums bilden eine abzählbare Menge, die man im Typus ω folgendermaßen schreiben kann:

$$
\text{(I)} \qquad \begin{array}{l}
(a_{11}, a_{12}, a_{13}, \cdots, a_{1k}, \cdots) \\
(a_{21}, a_{22}, a_{23}, \cdots, a_{2k}, \cdots) \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
(a_{k1}, a_{k2}, a_{k3}, \cdots, a_{kk}, \cdots) \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{array}
$$

Die a_{ik} sind hier beliebige positive ganze Zahlen, da wir das Kontinuum als die Menge der Dinge

$$(a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots)$$

definiert haben, wo a_k jede beliebige positive ganze Zahl sein kann. Mit Hilfe der Reihe (I) kann nun durch das dem Cantorschen Diagonalverfahren nachgebildete Gesetz

$$\text{(II)} \qquad a_k = a_{kk} + d$$

ein neues Kontinuumelement $(a_1, a_2, \cdots) = a^{(d)}$ definiert werden, wenn $d > 0$ eine fest gegebene positive ganze Zahl ist. Die Definition von $a^{(d)}$ ist aber nur dann widerspruchsfrei, wenn man voraussetzt, daß $a^{(d)}$ in der Reihe (I) nicht vorkommt, d. h. nicht endlich definiert ist. Würde $a^{(d)}$ (z. B. an der n-ten Stelle) in (I) vorkommen, so könnte (II) für $k = n$ nicht erfüllt werden, da $a_n = a_{nn}$ ist und zugleich $a_n = a_{nn} + d$ verlangt wird. Es scheint demnach, daß die Definition von $a^{(d)}$, die wir in einer endlichen Anzahl von Zeichen fixieren, in der Tat sich selbst widerspricht, also unmöglich ist. Andrerseits ist es uns aber ebenso unmöglich, die unmittelbar unsrer Anschauung entlehnte „Tatsache" als unrichtig abzulehnen, daß mit Hilfe jenes Diagonalverfahrens ein neues Kontinuumelement wirklich gebildet werden *kann*. Gerade dieses äußerst merkwürdige scheinbare Paradoxon führt aber zu einer fundamentalen Vertiefung der in der Mengenlehre anzuwendenden logischen Methoden. Der *Sinn* des Diagonalverfahrens ist klar *und unanfechtbar*, der Widerspruch *entsteht nur* durch die Forderung, diesen *Sinn* in der *Form* einer endlichen Definition auszudrücken. Die Erfüllung *dieser* Forderung ist unmöglich. Könnte man aber — ohne den Sinn zu ändern — die Form unserer Definition so umändern, daß sie *keine* endliche Definition ist, so hätten wir es mit einer wirklichen, widerspruchsfreien Definition des Kontinuumelementes $a^{(d)}$ zu tun. Wir müssen demnach, wie dies auch sonst häufig, eigentlich sogar bei jeder wesentlichen Verschärfung unsres wissenschaftlichen Denkens geschieht, unsere „Sprache" vervollkommen, und dies kann in der Tat folgendermaßen geschehen.

Zu den endlichen Definitionen ziehen wir gewisse „pseudoendliche" Definitionen heran, die aus (abzählbar) unendlich vielen Zeichen (Wörtern, Buchstaben) bestehen sollen und zwar so, daß von einer gewissen, n-ten Stelle an (n eine endliche Ordnungszahl) nur ein gewisses Zeichen (*N. V.*)*) vorkommen soll. Um nun auch diesen Definitionen einen Sinn (Inhalt) zu geben, sagen wir: diese pseudoendliche Definition soll dem Sinne nach mit der endlichen Definition äquivalent sein, die aus der unendlichen entsteht, wenn sämtliche (*N. V.*) weggelassen werden, d. h. die aus den ersten n Zeichen gebildet ist. Die unendliche Zeichenfolge ist dann und nur dann eine logische Definition, wenn die entsprechende endliche Zeichenfolge, die wir auch als den *Hauptteil* der pseudoendlichen Definition bezeichnen wollen, dem Sinne (aber nicht notwendigerweise auch der Form) nach ohne Willkür und Widerspruch ein Kontinuumelement definiert.

Aus einer endlichen Definition können auf diesem Wege verschiedene pseudoendliche Definitionen entstehen, indem man das (*N. V.*) ω-mal, $\omega + 1$-mal, $\omega + 2$-mal, $\cdots$, im allgemeinen α-mal hinzusetzt, wo α eine beliebige Zahl der zweiten Zahlenklasse $Z(\aleph_0)$ ist.

2. Nach dem Vorstehenden gibt es Elemente des Kontinuums, die durch den endlichen Hauptteil ihrer Definition wohl vollständig bestimmt sind, deren Definition jedoch der Form nach nur dann widerspruchsfrei wird, wenn diesem endlichen Hauptteile (H) das Zeichen (*N. V.*) ω-mal hinzugefügt wird. Die Definition eines solchen Elementes wird durch das „*Bild*" $H(N.\ V.)^{\omega}$ vollständig charakterisiert; doch muß dieses Bild von der Definition selbst streng unterschieden werden, da diese letztere, um auch formell widerspruchsfrei zu sein, unendlich viele Zeichen enthalten muß. Die Gesamtheit jener Elemente des Kontinuums, deren Definition durch ein solches Bild $H(N.\ V.)^{\omega}$ gegeben ist, muß — auch nach Heranziehung aller endlich definierten Elemente — eine abzählbare Menge bilden, da zwei verschiedenen Elementen gewiß auch verschiedene endliche Hauptteile entsprechen müssen und diese eine abzählbare Menge bilden.

Jene abzählbare Menge von Elementen der Kontinuums ist aber — auch mit den endlich definierten zusammen — durch ihre endlich definierten Hauptteile im Typus ω gegeben. Auf diese abzählbare Menge vom Typus ω, die ausführlich geschrieben

$$\text{(III)}\qquad \begin{array}{c} (b_{11},\ b_{12},\ b_{13},\ \cdots,\ b_{1k},\ \cdots) \\ (b_{21},\ b_{22},\ b_{23},\ \cdots,\ b_{2k},\ \cdots) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (b_{k1},\ b_{k2},\ b_{k3},\ \cdots,\ b_{kk},\ \cdots) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

*) (*N. V.*) = ne varietur.

sei, kann nun wieder das Diagonalverfahren angewendet werden. Das Gesetz

$$b_k = b_{kk} + d$$

ist seiner Form nach, da es endlich ist, wieder keine widerspruchsfreie Definition für $(b_1, b_2, \cdots) = b^{(d)}$. Der Widerspruch verschwindet aber nun auch dann nicht, wenn $(N.\ V.)$ ω-mal hinzugesetzt wird, da die Definition auch in dieser Form in (III) vorkommen muß, z. B. an der n-ten Stelle, so daß $b_n = b_{nn} + d$ nicht erfüllt werden kann. Wird aber $(N.\ V.)$ $\omega + 1$-mal oder „öfters" hinzugesetzt, so erhalten wir eine widerspruchslose Definition. Verfährt man so weiter, so erhält man endliche Zeichenfolgen, die erst durch $\omega + 2, \omega + 3, \cdots$ malige Hinzufügung von $(N.\ V.)$ eine widerspruchsfreie Definition geben.

Es sei nun α die kleinste Zahl der zweiten Zahlenklasse von der Beschaffenheit, daß die bestimmte endliche Zeichenfolge H (Hauptteil) eine widerspruchslose Definition wird, wenn $(N.\ V.)$ α-mal hinzugetzt wird; wir sagen dann, daß H den *Rang* α besitzt. Die so entstandene pseudoendliche Definition wollen wir durch

$$H(N.\ V.)^\alpha$$

bezeichnen. Dies ist aber natürlich wieder nicht als die Definition selbst aufzufassen, denn diese muß ja unendlich viele Zeichen enthalten. Sie ist nur ein charakteristisches *Bild* jener Definition. Gehört zu einem α ein solches H, so nennen wir α *von der ersten Art.* Dies ist also der Fall, wenn

$$H(N.\ V.)^\alpha$$

das Bild einer widerspruchslosen pseudoendlichen Definition ist, aber für jedes α', das $< \alpha$ ist

$$H(N.\ V.)^{\alpha'}$$

noch einen formellen Widerspruch enthält.

3. Die bisherigen Auseinandersetzungen ergeben schließlich das Resultat, daß die zweite Zahlenklasse, wenn sie als Menge, d. h. als Gesamtheit durchwegs begrifflich gesonderter Elemente aufgefaßt werden könnte, auch abzählbar sein müßte. Wir beweisen nämlich, daß unter dieser Annahme einerseits die Zahlen erster Art abzählbar sind, und daß andererseits jede Zahl der zweiten Zahlenklasse von der ersten Art ist.

In der Tat: die Menge der endlichen Zeichenfolgen H ist abzählbar, also gilt dasselbe für die Menge der Zahlen erster Art, da der Definition nach verschiedenen α verschiedene H zugeordnet sind.

Wäre andererseits nicht jede Zahl der zweiten Zahlenklasse von der ersten Art, so gäbe es jedenfalls ein kleinstes (erstes) α_0, das *nicht* von der ersten Art ist, während ω, $\omega + 1$ usw. von der ersten Art sind

Das führt aber zu einem Widerspruch. Die endlichen Zeichenfolgen, die eine Zahl der zweiten Klasse als Rang besitzen, sind nämlich abzählbar, da das für die Menge aller endlichen Zeichenfolgen gilt. Sie können also folgendermaßen im ω-Typus geschrieben werden: $H_1, H_2, \cdots$ Sei $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ der entsprechende Rang. Die pseudoendlichen Definitionen

(IV) $$H_1(N.\ V.)^{\alpha_1}, \quad H_2(N.\ V.)^{\alpha_2}, \cdots$$

sollen nun die folgenden Kontinuumelemente definieren:

(IV′) $$\begin{matrix} (a_{11}, & a_{12}, & \cdots) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ (a_{i1}, & a_{i2}, & \cdots) \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

Das Diagonalgesetz

$$a_k = a_{kk} + d,$$

welches sich auf (IV′) beziehen soll, bezeichnen wir mit H_0. Nun enthält

$$H_0(N.\ V.)^{\alpha_0}$$

keinen Widerspruch, da nach unserer Annahme (IV) keine Definition der Form $H_0(N.\ V.)^{\alpha_0}$ enthält. Jedes α_i, das kleiner als α_0 ist, erscheint in der Reihe (IV); und die Definition $H_0(N.\ V.)^{\alpha_i}$ ergibt demnach einen Widerspruch. D. h. H_0 ist vom Range α_0; oder mit andern Worten die transfinite Ordnungszahl α_0 ist von der ersten Art. Die Annahme, daß die zweite Zahlenklasse auch Zahlen der zweiten Art enthält, hat somit einen Widerspruch ergeben.

Budapest, 2. Jänner 1906.

Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten.

Von

J. Lüroth in Freiburg i./Br.

Die beiden Arbeiten über die gegenseitig eindeutige und stetige Abbildung von Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimensionen aufeinander, die ich in den Jahrgängen 1878 und 1899 der Sitzungsberichte der Erlanger physikalisch-medizinischen Gesellschaft veröffentlichte, sind sehr kurz gehalten, und manche Beweise nicht gegeben. Ich zögerte immer mit einer ausführlicheren Darstellung, weil ich glaubte einen weiteren Spezialfall und damit vielleicht auch den allgemeinen Fall erledigen zu können. Trotz vieler Mühe, die ich mir in dieser Hinsicht gegeben habe, ist mir dies aber bis jetzt nicht geglückt. Deshalb gebe ich im folgenden eine Ausarbeitung der oben genannten Noten, die, im wesentlichen an sie anschließend, noch einige allgemeine Betrachtungen beifügt.

Der Grundgedanke ist der folgende.

Es seien zwei Mannigfaltigkeiten M_m und M_n von verschiedener Dimensionenzahl m und n in die Beziehung zueinander gesetzt, daß für $m = n + 1 + p$ die Koordinaten $y_1, y_2, \cdots, y_n$ eines Punktes der M_n eindeutige und stetige Funktionen der Koordinaten $t_0, t_1, \cdots, t_n, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_p$ eines Punktes der M_m sind (wenn $p = 0$ ist, fehlen hier und in den folgenden Formeln die $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_p$), indem etwa:

$$(1) \qquad y_i = f_i(t_0, t_1, \cdots, t_n, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_p), \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, n)$$

ist. Dabei möge der Punkt der M_m einem zusammenhängenden Gebiete Φ angehören, und der entsprechende Punkt der M_n einem Gebiete Ψ. Ist nun $(a_0, a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_p)$ ein Punkt aus Φ und a gehörig klein, so liegen die Punkte der M_m, welche den Gleichungen:

$$(2)\qquad \begin{gathered}(t_0 - a_0)^2 + (t_1 - a_1)^2 + \cdots + (t_n - a_n)^2 = a^2,\\ \xi_1 = b_1,\quad \xi_2 = b_2, \cdots, \xi_p = b_p\end{gathered}$$

genügen, alle in Φ und bilden eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit K_n. Die Bilder dieser Punkte sind durch die Formeln

$$(3)\qquad \begin{gathered}y_i = f_i(t_0, t_1, \cdots, t_n, b_1, b_2, \cdots, b_p),\\ (i = 1, 2, 3, \cdots, n)\end{gathered}$$

gegeben, in denen $t_0, t_1, \cdots, t_n$ nur durch die Gleichung:

$$(t_0 - a_0)^2 + (t_1 - a_1)^2 + \cdots + (t_n - a_n)^2 = a^2$$

miteinander verbunden sind. Die Gleichungen (3) definieren die y als eindeutige und stetige Funktionen eines Punktes der Mannigfaltigkeit K_n. Wenn es gelingt nachzuweisen, daß zwei *verschiedenen* Punkten der K_n das nämliche Wertsystem der y entspricht, so ist damit gezeigt, daß eine *gegenseitig eindeutige und stetige* Abbildung der M_m auf die M_n nicht möglich ist.

Im folgenden soll für $n = 1, 2, 3$ der Beweis geliefert werden. Für $n = 4$ ist er mir nicht gelungen, weil ich es nicht fertig brachte, im Raume von drei Dimensionen eine Kurve oder im Raume von vier Dimensionen eine Fläche zu konstruieren, die mit unendlich vielen Kurven verschlungen ist, wenigstens bei der hier anzunehmenden Allgemeinheit der Voraussetzungen.

§ 1.

Statt die y als Funktionen der t anzusehen, die durch die Gleichung (einer Kugel)

$$(1)\qquad (t_0 - a_0)^2 + (t_1 - a_1)^2 + \cdots + (t_n - a_n)^2 = a^2$$

miteinander verbunden sind, ist es bequemer sie als Funktionen von n unabhängigen Variabeln darzustellen.

Ich betrachte die beiden Punkte A und B, für die t_0 die Werte $a_0 + a$ bezw. $a_0 - a$ und $t_1, t_2, \cdots, t_n$ die Werte $a_1, \cdots, a_n$ haben. Ich kann voraussetzen, daß das Wertsystem, welches die y in A annehmen, von dem in B verschieden ist, weil ja sonst der zu beweisende Satz erfüllt wäre.

Ich projiziere nun vom Punkte B aus die Kugel (1) stereographisch auf die ebene Mannigfaltigkeit, welche die Kugel in A berührt, und deren Gleichung

$$t_0 = a_0 + a$$

ist. Wenn ich für einen Punkt dieser Mannigfaltigkeit die Werte der n Größen t gleich $s_1 + a_1, s_2 + a_2, \cdots, s_n + a_n$ setze, so finde ich die Beziehungen:

$$(2)\qquad \begin{aligned} t_0 - a_0 &= a\,\frac{4a^2 - s^2}{4a^2 + s^2}, \\ t_i - a_i &= a\,\frac{4as_i}{4a^2 + s^2}, \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \end{aligned}$$

wo $s^2 = s_1{}^2 + s_2{}^2 + \cdots + s_n{}^2$ sein soll.

Umgekehrt wird, wenn die t die Gleichung (1) erfüllen,

$$(3)\qquad s_i = \frac{2a(t_i - a_i)}{t_0 - a_0 + a}, \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Die n Funktionen y erscheinen nun als eindeutige und stetige Funktionen der unabhängigen Veränderlichen $s_1, \cdots, s_n$. Für

$$(s_1, \cdots, s_n) = (0, \cdots, 0)$$

folgt $t_0 = a_0 + a$, $t_i = a_i$, d. h. der Punkt A; für unendlich große s wird $t_0 = a_0 - a$, $t_i = a_i$, und ihnen entspricht der Punkt B.

§ 2.

Ich schicke nun einige allgemeine Erörterungen voraus, die für Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension gelten und im späteren wiederholt verwendet werden können.

Sind die Koordinaten eines Punktes der Mannigfaltigkeit $s_1, s_2, \cdots, s_n$, so nenne ich die Gesamtheit der Wertsysteme, welche eine Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{n} (s_i - m_i)^2 - r^2 = 0$$

befriedigen, eine *Kugel;* der Punkt $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ sei ihr *Mittelpunkt*, r ihr *Radius*. Ist der Mittelpunkt durch einen Buchstaben P bezeichnet, so will ich die Kugel auch (P, r) nennen. Die Punkte, für die

$$\sum_{i=1}^{n} (s_i - m_i)^2 \gtrless r^2,$$

seien im *Äußeren*, bezw. im *Inneren* der Kugel gelegen. Sind (p) und (q) zwei Punkte P und Q, so heiße

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (p_i - q_i)^2}$$

der *Abstand* PQ.

Für jeden dritten Punkt R gilt dann, wie im gewöhnlichen Raume, die Ungleichung:

$$PQ + QR \geqq PR.$$

Von den Punkten, welche durch die Gleichungen:

$$s_i = p_i + \lambda v_i, \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

gegeben werden, wenn λ zwischen 0 und $+\infty$ variiert, möge gesagt werden, daß sie auf einem Strahle liegen, dessen Endpunkt der Punkt (p) ist.

Die Punkte der Kugel (1), die gleichzeitig dem Inneren einer mit dem Radius r um B gelegten Kugel angehören, genügen der Ungleichung

$$(t_0 - a_0 + a)^2 + \sum_{i=1}^{n} (t_i - a_i)^2 \leqq r^2.$$

In der Projektion entsprechen ihnen daher Punkte, deren Koordinaten die Ungleichung

$$\sum_{1}^{n} s_i^2 \geqq 4a^2 \left(\frac{4a^2}{r^2} - 1\right)$$

erfüllen, also außerhalb einer mit dem Radius $2a\sqrt{\frac{4a^2}{r^2} - 1}$ um den Punkt A geschlagenen Kugel liegen.

§ 3.

In einem endlichen Gebiete von beliebiger Dimensionszahl n sei eine unendliche Anzahl von zusammenhängenden Gebilden m^{ter} Dimension $(m < n)$ gegeben. Sie seien $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \mathsf{A}_3, \cdots$ und ihre Gesamtheit (A) genannt. Wenn man auf unendlich vielen dieser Gebilde, nach beliebigem Gesetz, je einen Punkt P annimmt, so ist deren Zahl entweder endlich oder unendlich groß. Im ersten Falle ist unter den Punkten wenigstens einer P_0, durch den unendlich viele der Gebilde A hindurch gehen.

Im zweiten Falle gibt es mindestens einen Häufungspunkt der Punkte P, und wenn man diesen mit P_0 bezeichnet, liegen in jeder Kugel (P_0, r), wie klein r auch sein mag, unendlich viele der Punkte P. Oder mit anderen Worten: Es treten in diese Kugel unendlich viele der Gebilde A ein. In beiden Fällen kann ich also sagen: In jede Umgebung von P_0, sei sie auch noch so klein, treten unendlich viele der A ein. Die Punkte, deren Existenz hier bewiesen ist, will ich *Staupunkte* der Gebilde A nennen.*) Ihre Anzahl kann endlich oder unendlich sein. Ich setze hier das letztere voraus.

§ 4.

Es sei nun unter (A) die Menge der Staupunkte verstanden. *Sie ist abgeschlossen.* Denn ist A_0 ein Häufungspunkt dieser Menge, so liegen in einer Kugel $\left(A_0, \frac{a}{2}\right)$ stets Staupunkte, wie klein auch a sein mag.

*) Peano hat in dem Buche „Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale“ (Torino 1887), pag. 302, schon solche Punkte betrachtet.

Es sei A_1 einer von ihnen. In eine Kugel $\left(A_1, \frac{a}{2}\right)$ treten dann unendlich viele der Gebilde A ein.

Auf einem von diesen sei P ein Punkt in $\left(A_1, \frac{a}{2}\right)$. Dann ist $A_0 P \leqq A_0 A_1 + A_1 P \leqq a$. Also treten in die Kugel (A_0, a) unendlich viele der A ein, wie klein auch a sei. D. h. A_0 ist ein Staupunkt der A.*)

Legt man durch den beliebigen Punkt B der Menge (A) einen Strahl, dessen Endpunkt B ist, so ist entweder B der einzige auf dem Strahle liegende Staupunkt, oder es gibt noch andere. Ist deren Zahl endlich, so ist einer, C, am weitesten von B entfernt. Ist aber die Zahl unendlich, so gibt es entweder einen entferntesten Punkt C oder einen Häufungspunkt C, so daß alle auf dem Strahle liegenden Punkte von (A) zwischen B und C liegen. Da aber (A) abgeschlossen ist, ist im letzten Falle C selbst ein Punkt von (A). Wie im ersten Falle der von B ausgehende Strahl, so trägt in den anderen Fällen der von C ausgehende nur den einen Punkt C von (A), dessen *Träger* er heiße.

Die Kugel (B, r) bezw. (C, r) bei beliebig kleinem r wird dann von dem Strahle nur in einem Punkte D getroffen, und der gehört nicht zu (A).

Zwischen B bezw. C und D können noch unendlich viele der Gebilde A den Strahl schneiden, dagegen kann *der* Teil des Strahles, der sich von D ins Unendliche erstreckt, nur von einer endlichen Zahl der A geschnitten werden, und von diesem Teile des Strahles bleiben die A stets um Endliches entfernt, weil er sonst einen Staupunkt tragen müßte, gegen die Annahme. Ebenso können die Schnittfiguren der Kugel (B, r) bezw. (C, r) mit den Gebilden A dem Punkte D nicht unendlich nahe kommen, weil eben D kein Staupunkt ist.

Obige Betrachtungen kann man auch an eine von B aus ins Unendliche verlaufende *Kurve* anknüpfen, auf der ebenfalls ein *letzter* Staupunkt C liegen muß, so daß die Kurve zwischen C und dem Unendlichen keinen weiteren trägt.

§ 5.

Um den beliebigen Staupunkt B lege ich die Kugel (B, r) und suche eines der Gebilde A, welches in diese Kugel eintritt. Dann suche ich ein zweites, das vom ersten verschieden ist und in die Kugel $\left(B, \frac{r}{2}\right)$ eintritt, dann ein drittes, verschieden von den beiden gefundenen, das in $\left(B, \frac{r}{4}\right)$ eintritt usw. Diese Bestimmungen sind möglich, da in jede Kugel um B, sei sie auch noch so klein, immer noch unendlich viele der A eintreten. Aus der so bestimmten Reihe von Gebilden treten für jedes p *alle* Ge-

*) Vgl. Peano, Math. Ann., Bd. 37, S. 199, Prop. 8.

bilde vom p^{ten} an in $\left(B, \frac{r}{2^p}\right)$ ein. Die Gebilde dieser Teilreihe haben wieder Staupunkte (die zu (A) gehören), von denen B einer ist.

Ein anderer sei E. Ist s beliebig klein, so treten in (E, s) unendlich viele der Gebilde aus der konstruierten Teilreihe ein, die in der Ordnung, in der sie sich in der Teilreihe folgen, $\mathsf{A}_0, \mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \cdots$ seien.

Ist nun p so bestimmt, daß $\frac{r}{2^p} \leqq s$, so treten die Gebilde $\mathsf{A}_p, \mathsf{A}_{p+1}, \cdots$ alle, sowohl in (B, s), wie in (E, s) ein. Man kann also aus den Gebilden A eine Reihe herstellen, deren Glieder an einem gegebenen und einem nicht ganz willkürlich zu wählenden Punkte aus (A) unendlich nahe vorbeigehen.

§ 6.

In den Punkten des endlichen Gebietes, in dem sich die in den §§ 3 ff. angestellten Erwägungen abspielen, sei $f(P)$ eine stetige Funktion des Ortes P. Liegt P auf einem der Gebilde A, so sei $f(P) \leq 0$. Wenn aber d eine beliebig kleine positive Größe ist, so möge es stets möglich sein, mindestens ein Gebilde A' zu finden, das an einen beliebigen Staupunkt, so nahe als man will, herankommt, und dessen Punkte von solchen, in denen $f(P) \geqq 0$ ist, um weniger als d entfernt sind.

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, muß in allen Punkten aus (A) die Funktion $f = 0$ sein. Denn sei A_0 ein beliebiger Staupunkt und $f(A_0) \neq 0$. Es sei r der Radius einer Kugel, in deren Innerem, wo auch ihr Mittelpunkt liegen möge, die Schwankung der Funktion f kleiner als $\frac{1}{4}\,|f(A_0)|$ sei. Ich nehme $d < r$, bestimme das A' so — was nach der Annahme möglich ist —, daß A' in die Kugel (A_0, r) eintritt, und bezeichne mit B einen Punkt auf diesem A' im Inneren von (A_0, r). Weil dann B von einem Punkte C, in dem $f(C) \geqq 0$ ist, weniger weit als d und somit als r entfernt ist, so ist:

$$f(B) \geqq f(C) - \tfrac{1}{4}\,|f(A_0)|,$$

also weil $f(B) < 0$

$$|f(B)| = -f(B) \leqq -f(C) + \tfrac{1}{4}\,|f(A_0)| \leqq \tfrac{1}{4}\,|f(A_0)|.$$

Andererseits ist

$$|f(A_0) - f(B)| \leqq \tfrac{1}{4}\,|f(A_0)|,$$

daher wäre

$$|f(A_0)| = |f(A_0) - f(B) + f(B)| \leqq \tfrac{1}{2}\,|f(A_0)|,$$

was aber nur möglich ist, wenn $f(A_0) = 0$ ist.

§ 7.

In einem endlichen Raume Ω sei eine unendliche Zahl von geschlossenen Kurven $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \cdots$ gegeben. Es sei z eine eindeutige stetige Funktion des Ortes P in Ω. In den Punkten des Gebietes Ω habe z den Minimalwert z_0. Es sei z der Wert dieser Funktion in P, a eine positive Zahl und $r = z - z_0 + a$ gesetzt.

Es sei ferner φ eine zweite stetige Funktion des Ortes P in Ω, die um 2π wächst oder abnimmt, wenn P eine der Kurven $\mathfrak{a}_i$ durchläuft. Ich bilde nun P in einen Punkte P' einer Ebene ab, indem ich dem Bildpunkte P' von P als Polarkoordinaten in bezug auf einen Pol O' die Werte r und φ gebe. Dann macht die Unbestimmtheit von φ in bezug auf die Lage von P' nichts aus. Jedem Punkte P entspricht so ein einziger Punkt P'.

Die Kurven $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots$ mögen Staupunkte in unendlicher Zahl haben, deren Menge $\mathfrak{Y}$ sei.

Es soll gezeigt werden, daß es stets mindestens einen Wert von z gibt, der zu zwei *verschiedenen* Punkten aus $\mathfrak{Y}$ gehört. Gäbe es irgend zwei Punkte in $\mathfrak{Y}$, die den nämlichen Bildpunkt hätten, so lieferten sie das nämliche z und der Beweis wäre nicht nötig. Ich kann also annehmen, daß zwei verschiedene Punkte aus $\mathfrak{Y}$ verschiedene Bildpunkte haben. Der Punktmenge $\mathfrak{Y}$ entspricht auf diese Art gegenseitig eindeutig eine Punktmenge $\mathfrak{Z}$ als Bild.

Ich kann die nämliche Abbildung auch auf die Kurven $\mathfrak{a}$ anwenden. Wenn ein Punkt eine dieser Kurven $\mathfrak{a}_i$ durchläuft, so bewegt sich sein Bild in einer Kurve $\mathfrak{b}_i$, die ganz außerhalb des Kreises (O', a) liegt. Ist Z der größte Wert von z im Gebiete Ω und $b > Z - z_0 + a$, so liegen die Kurven $\mathfrak{b}_i$ ganz im Kreise (O', b). Da φ von 0 bis 2π wächst, während P die $\mathfrak{a}_i$ durchläuft, so legt sich $\mathfrak{b}_i$ in den Ring zwischen (O', a) und (O', b) um den Punkt O' herum.

Hier braucht aber gegenseitige Eindeutigkeit der Abbildung nicht mehr vorhanden zu sein, vielmehr kann ein Punkt P' Bild von mehreren Punkten P sein.

Da jede von O' aus ins Unendliche laufende Linie alle die $\mathfrak{b}_i$ schneiden muß, so trägt jede solche Linie Staupunkte der $\mathfrak{b}_i$. Deren Menge, die $\mathfrak{Z}'$ sei, ist somit unendlich.

Ich zeige jetzt, daß die Mengen $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}'$ identisch sind. Dazu brauche ich die Hilfssätze der folgenden Paragraphen.

§ 8.

In einem Raume von beliebig vielen Dimensionen sei P ein Punkt und $f(P)$ ein von ihm eindeutig abhängiger, der sich mit der Lage von

P stetig verändert. $\mathfrak{S}$ sei irgend eine unendliche Menge von Punkten. Durchläuft P die Menge $\mathfrak{S}$, so nimmt $f(P)$ entweder unendlich viele verschiedene Lagen an oder nur endlich viele. Im ersten Falle seien $P_1, P_2, \cdots$ unendlich viele Punkte, so daß die entsprechenden $f(P_1), f(P_2), \cdots$ alle verschieden sind. Ist dann P_0 eine Häufungsstelle der Menge $P_1, P_2, \cdots$, so ist, wie jetzt gezeigt werden soll, $f(P_0)$ eine Häufungsstelle der $f(P_1), f(P_2), \cdots$. Ich bezeichne mit Abst. (R, S) den Abstand der beiden Punkte R und S. Ich bestimme e zu einem angegebenen d, so daß, wenn Abst. $(P, P_0) < e$, dann Abst. $(f(P), f(P_0)) < d$ ist, was wegen der Stetigkeit der durch f angedeuteten Abhängigkeit möglich ist. Da P_0 Häufungsstelle ist, gibt es in der Reihe $P_1, P_2, \cdots$ unendlich viele Punkte $P_p, P_q, P_r, \cdots$, für welche die Ungleichungen:

$$\text{Abst. } (P_p, P_0) < e, \quad \text{Abst. } (P_q, P_0) < e, \cdots$$

gelten, und folglich auch die Ungleichungen

$$\text{Abst. } (f(P_p), f(P_0)) < d, \quad \text{Abst. } (f(P_q), f(P_0)) < d, \cdots$$

richtig sind. Also gibt es in der Kugel $(f(P_0), d)$ stets unendlich viele Punkte der Menge $f(P_1), f(P_2), \cdots$, und folglich ist $f(P_0)$ eine Häufungsstelle dieser Menge.

Gibt es aber nur eine endliche Zahl verschiedener Punkte $f(P)$, während P die Menge $\mathfrak{S}$ durchläuft, so sei A einer von ihnen. Dann muß es eine unendliche Menge Punkte in $\mathfrak{S}$ geben, etwa $P_1, P_2, \cdots$, so daß

$$f(P_1) = f(P_2) = \cdots = A$$

ist. Haben die Punkte $P_1, P_2, \cdots$ die Häufungsstelle P_0, so ist

$$\text{Abst. } (f(P_0), A) = \text{Abst. } (f(P_0), f(P_p)), \quad (p = 1, 2, 3, \cdots).$$

Da wegen der Stetigkeit der Abstand rechts durch passende Wahl von p unter jede Grenze gebracht werden kann, muß also

$$f(P_0) = A$$

sein.

Unter den gemachten Annahmen gibt es also entweder einen Punkt P_0, so daß $f(P_0)$ eine Häufungsstelle der Punkte $f(P)$ ist, oder es gibt unendlich viele Punkte von $\mathfrak{S}$, für die $f(P) = f(P_0)$ ist.

§ 9.

Ist Q_0 ein Häufungspunkt einer Punktmenge $\mathfrak{R}$, so nehme ich einen Punkt Q_1 der Menge beliebig an. In der Kugel um Q_0, die durch Q_1 geht, liegen dann noch unendlich viele Punkte aus $\mathfrak{R}$. Von diesen sei Q_2 einer, für den Abst. $(Q_0, Q_2) < \frac{1}{2}$ Abst. (Q_0, Q_1) ist. Dann betrachte ich die Kugel um Q_0, die durch Q_2 geht, und nehme in ihr einen Punkt Q_3

aus $\mathfrak{R}$, für den Abst. $(Q_0, Q_3) < \frac{1}{2}$ Abst. (Q_0, Q_2) ist usw. Auf diese Art wird aus $\mathfrak{R}$ eine unendliche Reihe von Punkten $Q_1, Q_2, Q_3, \cdots$ herausgenommen, die ich eine *Normalreihe* zu Q_0 nennen will. Eine solche kann nur *einen* Häufungspunkt haben.

Denn hätte sie zwei, Q_0, Q_0', so lege ich um beide Punkte Kugeln mit dem Radius $n = \frac{1}{4}$ Abst. (Q_0, Q_0'). Der erste Punkt der Normalreihe, der in (Q_0, n) liegt, sei Q_p. Dann ist für $q > p$ Abst. $(Q_0, Q_q) < n$ und

$$\text{Abst. } (Q_0', Q_q) \geqq \text{Abst. } (Q_0, Q_0') - \text{Abst. } (Q_0, Q_q) \geqq 3n,$$

so daß von Q_q an alle Punkte der Normalreihe außerhalb der Kugel $(Q_0', 3n)$ lägen, also Q_0' nicht Häufungspunkt sein könnte.

§ 10.

Es sei Q_0 ein Staupunkt der Kurven $\mathfrak{b}_i$. Ich nehme dann die Punkte $Q_1, Q_2, \cdots$ auf den Kurven $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \cdots$ an, auf jeder Kurve einen Punkt, so daß sie eine Normalreihe zu Q_0 bilden. Das ist möglich, selbst wenn in der Nähe von Q_0 alle Kurven $\mathfrak{b}_i$ zusammenfallen sollten, weil im Inneren eines kleinen um Q_0 gelegten Kreises jedenfalls von jeder dieser Kurven eine endliche Strecke liegen muß.

Die Werte von $r = z - z_0 + a$, von $z = r - a + z_0$ und von φ seien für den Punkt Q_p bezw. r_p, z_p, φ_p, dagegen für Q_0: r_0, z_0, φ_0. Da nach der Annahme die Punkte Q_i eine Normalreihe bilden mit dem einzigen Häufungspunkte Q_0, müssen nach dem Satze von § 8 r_0, z_0 und φ_0 die Häufungswerte der r_p, z_p und φ_p sein.

Die Punkte Q_i seien die Bilder von Punkten P_i. Dabei kann es sein, daß durch einen Punkt Q_i sein Original P_i nicht eindeutig bestimmt ist. In diesem Falle kann ich P_i aus den möglichen Punkten nach Belieben auswählen. Diese Punkte P_i liegen auf den Kurven $\mathfrak{a}_i$, auf jeder Kurve nur einer, und sind verschieden, weil ihre Bilder, die Q_i, es sind. Wenn ich die Werte von z und φ für den Punkt P_i mit $z(P_i)$ und $\varphi(P_i)$ bezeichne, so ist gemäß der Art, wie die Abbildung eingerichtet wurde,

$$z(P_i) = z_i; \quad \varphi(P_i) = \varphi_i.$$

Da die P_i alle verschieden sind, so ist für *einen* Häufungspunkt P_0 von ihnen

$$z(P_0) = z_0, \quad \varphi(P_0) = \varphi_0,$$

d. h. Q_0 ist das Bild von P_0. Folglich gehört Q_0, das zu $\mathfrak{Z}'$ gehört, auch zu der Menge $\mathfrak{Z}$, da ja P_0 zu $\mathfrak{Y}$ gehört.

Sei umgekehrt Q_0' ein Punkt von $\mathfrak{Z}$, also Bild eines Punktes P_0' aus

𝔜. Die Polarkoordinaten von Q_0' seien r_0', φ_0'. Sind dann r, φ die Koordinaten irgend eines anderen Punktes Q', so ist

$$\text{Abst.}\,(Q'Q_0') < \sqrt{(r-r_0')^2 + b^2(\varphi-\varphi_0')^2}.$$

Mache ich also

$$|r - r_0'| < \frac{d}{\sqrt{2}}, \quad |\varphi - \varphi_0'| < \frac{d}{b\sqrt{2}},$$

so wird

$$\text{Abst.}\,(Q'Q_0') < d.$$

Es sei (P_0', s) eine Kugel, in der die Schwankung von $z < \frac{d}{\sqrt{2}}$ und die von $\varphi < \frac{d}{b\sqrt{2}}$ ist. Tritt in diese Kugel eine Kurve $\mathfrak{a}_p$ ein, und ist P_p' ein Punkt auf $\mathfrak{a}_p$ im Inneren von (P_0', s), so ist für den Punkt P_p'

$$|z - z_0'| < \frac{d}{\sqrt{2}}; \quad |\varphi - \varphi_0'| < \frac{d}{b\sqrt{2}},$$

da im Punkte P_0' $z = z_0'$, $\varphi = \varphi_0'$ ist.

Ist Q_p' das Bild von P_p', so liegt Q_p' auf $\mathfrak{b}_p$, und für diesen Punkt ist:

$$|r - r_0'| < \frac{d}{\sqrt{2}}; \quad |\varphi - \varphi_0'| < \frac{d}{b\sqrt{2}},$$

so daß Abst. $(Q_p', Q_0') < d$ ist. Daher ist Q_0' so beschaffen, daß in den Kreis (Q_0', d) mit dem beliebig kleinen Radius d unendlich viele Kurven $\mathfrak{b}_p$ eintreten, also ist Q_0' Staupunkt dieser Kurven und gehört zur Menge $\mathfrak{Z}'$. Die Mengen $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}'$ sind somit identisch.

Da die Resultate der letzten Paragraphen im Grunde nnr von der Stetigkeit der Funktionen z und φ des Ortes im Raume und des Ortes in der Ebene abhängen, so gelten sie auch für andere ähnlich beschaffene Abbildungen.

§ 11.

Es sei in einer Ebene eine unendliche abgeschlossene Punktmenge $\mathfrak{M}$ gegeben. Diese Menge möge folgende Eigenschaften haben:

1. Sei es möglich um einen Punkt O der Ebene einen Kreis von solchem Radius a zu legen, daß in (O, a) kein Punkt aus $\mathfrak{M}$ liege.

2. Treffe jede von O aus ins Unendliche laufende Kurve auf Punkte aus $\mathfrak{M}$.

3. Ein Kreis (O, b) umfasse alle Punkte von $\mathfrak{M}$. (Ich könnte dafür eine allgemeinere Bedingung nehmen.)

Ich lege in den Kreis (O, a) ein Quadrat von der Seitenlänge $\frac{a}{q}$ und suche von ihm ausgehend diejenigen mit den Seiten zusammenhängenden Quadrate, welche einen zusammenhängenden Flächenteil bilden und weder in ihrem Inneren, noch auf der Grenze einen Punkt aus $\mathfrak{M}$ tragen. Damit die Grenzen dieser Fläche sich nicht schneiden, entferne ich von zwei Quadraten, die nur einen Eckpunkt gemein haben, während die vier anstoßenden Seiten zur Grenze gehören, eines, so lange, bis solche nicht mehr vorkommen. Die konstruierte Fläche kann sich nicht ins Unendliche erstrecken, weil nach der zweiten unserer Annahmen die Menge $\mathfrak{M}$ die Ebene in zwei getrennte Teile teilt. Sie kann mehrere Grenzkurven besitzen, von denen aber dann eine alle anderen einschließt.

Sei r der kleinste Wert, den q haben kann, so mache ich die Konstruktion mit $q = r, 2r, 4r, 8r, \cdots$ und erhalte so die Flächenstücke $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_3, \cdots$. Die äußersten Grenzkurven dieser Stücke seien $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_3, \cdots$. Ich könnte an eine Seite von $\mathfrak{h}_p$ noch ein Quadrat ansetzen, wenn in diesem kein Punkt aus $\mathfrak{M}$ läge. Damit also kein Quadrat angesetzt werden kann, müssen mindestens in der Entfernung der Diagonale eines Quadrates Punkte aus $\mathfrak{M}$ vorkommen. Wegen der Notwendigkeit, Quadrate zu entfernen wird die Grenze jedoch größer.

Sei $\mathfrak{Q}$ ein Quadrat, das zur konstruierten Fläche gehört, so lege ich um $\mathfrak{Q}$ die acht anstoßenden Quadrate herum, die eine Fläche $\mathfrak{Q}'$ bilden mögen, und um diese eine weitere Schicht von 16 Quadraten $\mathfrak{Q}''$. Wenn nun dieser Haufen von 25 Quadraten keinen Punkt aus $\mathfrak{M}$ enthält, so gehört er ganz der zuerst konstruierten Fläche an. Von ihm könnten aber nach den vorhin getroffenen Bestimmungen einzelne Quadrate fortgenommen werden müssen. Da die Seiten aller Quadrate parallel sind, so könnten das nur die vier in den Ecken von $\mathfrak{Q}''$ liegenden sein. Dagegen blieben sämtliche in $\mathfrak{Q}'$ unberührt, und somit läge das Quadrat $\mathfrak{Q}$ ganz im Inneren des Quadrathaufens, und keine seiner Seiten gehörte zu dessen Begrenzung. Somit muß höchstens in der Entfernung $\frac{6a}{2^p r}$ von einem Punkte der Grenze $\mathfrak{h}_p$ ein Punkt aus $\mathfrak{M}$ liegen.

Jeder Punkt von $\mathfrak{H}_1$ gehört zu $\mathfrak{H}_2$, jeder von $\mathfrak{H}_2$ zu $\mathfrak{H}_3, \cdots$, so daß von den Grenzkurven $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_3, \cdots$ jede von allen folgenden umschlossen wird, soweit sie nicht mit ihr zusammenfällt.

Die Kurven $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \cdots$ haben eine unendliche, abgeschlossene Menge $\mathfrak{M}'$ von Staupunkten. Ist M ein solcher Staupunkt, so treten in den Kreis $\left(M, \frac{d}{2}\right)$ unendlich viele der Kurven $\mathfrak{h}$ ein, und zwar, wenn $\mathfrak{h}_p$ die erste ist, auch alle folgenden. Ist $s > p$ und $\frac{6a}{2^s r} < \frac{d}{2}$, so ist auf der Kurve $\mathfrak{h}_s$ im Inneren von $\left(M, \frac{d}{2}\right)$ ein Punkt N zu finden, von welchem ein Punkt L aus $\mathfrak{M}$ einen Abstand $< \frac{6a}{2^s r} < \frac{d}{2}$ hat. Daher ist der Abstand ML sicher $< d$. In jeder Nähe von M liegen also Punkte von $\mathfrak{M}$, daher ist M ein Häufungspunkt von $\mathfrak{M}$ und, weil $\mathfrak{M}$ abgeschlossen ist, ein Punkt von $\mathfrak{M}$ selbst.

Also ist die Menge $\mathfrak{M}'$ ein Teil von $\mathfrak{M}$.

§ 12.

Nun sei in der Ebene eine stetige Funktion u des Ortes gegeben. Es soll gezeigt werden, daß es sicher zwei verschiedene Punkte aus $\mathfrak{M}$ gibt, in denen u den nämlichen Wert hat.

Seien A und B zwei der Staupunkte aus $\mathfrak{M}'$ und AC, BD ihre Träger (vergl. § 4), wobei C und D außerhalb des Kreises (O, b) gelegen seien.

Hätte u in A den nämlichen Wert, wie in B, so wäre es nicht nötig den Satz zu beweisen. Hat aber u in A den Wert u_1, in B den u_2 und ist $u_1 < u_2$, so sei

$$u_0 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2), \quad g = \frac{1}{4}(u_2 - u_1).$$

Ich lege dann um A und B zwei Kreise mit so kleinem Radius t, daß in ihnen die Schwankung von u kleiner als g ist. Dann ist in (A, t) $u < u_0 - g$, in (B, t) $u > u_0 + g$. Die Strahlen AC und BD mögen nun (A, t) in E und (B, t) in F schneiden. Dann ist kein Punkt der Strecke EC und FD ein Punkt aus $\mathfrak{M}'$, und folglich kann nur eine endliche Zahl der Kurven $\mathfrak{h}$ diese Strecken schneiden. Diese lasse ich aus deren Reihe fort.

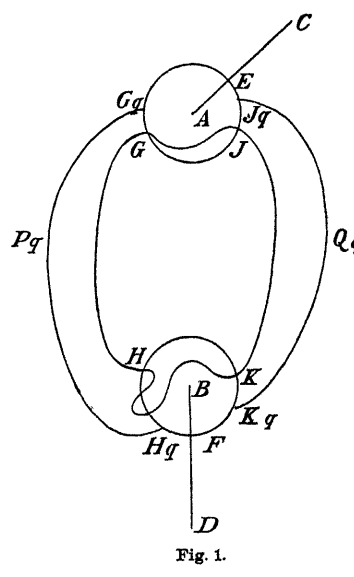

Fig. 1.

Die erste der übrigen Kurven $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \cdots$, welche in (A, t) und (B, t) eintritt, sei $\mathfrak{h}_p$. Von ihren Schnittpunkten mit diesen Kreisen seien GH und JK (Fig. 1) so gewählt, daß zwischen G und H einerseits, zwischen J und K andererseits kein Schnittpunkt von $\mathfrak{h}_p$ mit jenen beiden Kreisen liegt. Dabei werden nach der Annahme die Bogen GH und JK weder von AC noch von BD getroffen. Auch schneiden diese Bogen sich nicht.

Auf irgend einer anderen der Kurven $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}_q$, wo $q > p$, kann ich ebenso die Bogen $G_q H_q$ und $J_q K_q$ bestimmen, in derselben Weise wie GH, JK auf $\mathfrak{h}_p$. Dann gibt es auf $G_q H_q$ einen Punkt P_q, in dem $u = u_0$ ist, und auf $J_q K_q$ einen zweiten Q_q. Da die Kurven $\mathfrak{h}_q$ die $\mathfrak{h}_p$ einschließen, wird der Bogen $G_q H_q$ in dem

Stück der Ebene liegen, das durch (O, b) und die Linie $CEGHFD$ begrenzt ist, und der Bogen $J_q K_q$ in dem durch $CEJKFD$ abgeschnittenen Stücke, und in diesen beiden Stücken liegen dann auch P_q und Q_q. Deren Häufungspunkte P_0 und Q_0 liefern, nach § 8, $u = u_0$. Sie können aber nicht identisch sein, weil sie sonst auf EC oder FD liegen müßten. Da aber P_0, Q_0 zu den Häufungspunkten $\mathfrak{M}'$ gehören, ist dies nicht möglich. Also wird der Wert u_0 in *zwei verschiedenen* Punkten der Menge $\mathfrak{M}$ angenommen.

Ebenso gut wie u_0 hätte ich eine andere zwischen u_1 und u_2 liegende Zahl nehmen und denselben Beweis mit kleinen Änderungen führen können. Ich kann also sagen: *Unter den im Anfange von § 11 aufgestellten Bedingungen werden unendlich viele Werte in mindestens je zwei verschiedenen Punkten der Menge $\mathfrak{M}$ angenommen.*

Wende ich dieses Resultat auf die Verhältnisse der §§ 7—10 an, so sind die Bedingungen des § 11 erfüllt, und folglich gibt es unendlich viele Werte, die z in mindestens je zwei verschiedenen Punkten aus $\mathfrak{Y}$ annimmt.

§ 13.

Ich mache jetzt eine Anwendung auf einen Raum von drei Dimensionen. In ihm sei eine unendliche abgeschlossene Punktmenge $\mathfrak{N}$ gegeben von folgenden Eigenschaften:

1. Es gibt eine Kugel (O, a), in der kein Punkt aus $\mathfrak{N}$ liegt.

2. Jede von O aus ins Unendliche laufende Kurve treffe stets auf Punkte aus $\mathfrak{N}$.

3. Alle Punkte aus $\mathfrak{N}$ seien in einer Kugel (O, b) enthalten (diese Bedingung ist in der Allgemeinheit eigentlich nicht nötig).

Ich lege in die Kugel (O, a) einen Würfel von der Kantenlänge $\frac{a}{q}$ und baue von ihm ausgehend mit kongruenten Würfeln einen zusammenhängenden Raum auf, indem ich so lange als möglich Würfel an Würfel ansetze und zwar stets so, daß sie mit einer Seitenfläche zusammenhängen. Wegen der Eigenschaft 2. muß dieser Aufbau einmal ein Ende haben. Diese zusammengebauten Würfel bilden einen Raum, der vielleicht Hohlräume einschließen kann, aber eine zusammenhängende äußere Oberfläche besitzt. Es könnte vorkommen, daß die Oberfläche sich selbst schneidet, indem zwei Würfel einer Ecke oder eine Kante gemein haben, während die sich in der Ecke oder Kante schneidenden Seitenflächen zur Begrenzung gehören. Um dies zu verhindern, entferne ich aus dem Würfelhaufen von solchen Würfeln so lange einen, bis derartige Vorkommnisse nicht mehr auftreten.

Wenn ich die Konstruktion für eine gewisse kleinste Zahl $q = r$ mache und dann für $q = 2r, 4r, 8r, \cdots$, so erhalte ich äußere Oberflächen $\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \cdots$, die sich ganz einschließen, soweit sie nicht zusammenfallen. Da O ganz im Inneren aller Flächen $\mathfrak{S}$ liegt, trifft jede von O aus ins Unendliche gehende Linie alle diese Flächen und trägt also einen ihrer Staupunkte. Somit ist deren Zahl unendlich und nach § 4 abgeschlossen. Ihre Menge sei $\mathfrak{N}'$.

Jeder Punkt der Fläche $\mathfrak{S}$ hat in seiner Nähe Punkte aus $\mathfrak{N}$. Wenn es nicht nötig wäre, Würfel aus dem Haufen nachträglich zu entfernen, würden in der Entfernung $\frac{a}{2^s r}$ von einem Punkte der Fläche $\mathfrak{S}_s$ Punkte aus $\mathfrak{N}$ liegen müssen. Wegen jenes Umstandes aber muß ich eine Überlegung anstellen, die der von § 11 analog ist, nur daß Würfel an die Stelle von Quadraten treten, und daß aus dem Haufen von 5^3 Würfeln vielleicht alle die $5 \cdot 12 - 8 = 52$ zu entfernen wären, die an der Bildung der Kanten dieses Würfelhaufens beteiligt sind. Ich sehe daraus, daß höchstens in der Entfernung $\frac{9a}{2^s r}$ von einem Punkte von $\mathfrak{S}_s$ sich Punkte aus $\mathfrak{N}$ befinden müssen.

Damit kann ich nun, ähnlich wie in § 11, zeigen, daß die Menge $\mathfrak{N}'$ ein Teil von $\mathfrak{N}$ ist.

§ 14.

Im Raume seien jetzt zwei stetige Funktionen u und v des Ortes gegeben. Ich kann dann zeigen, daß es stets unendliche viele Wertsysteme (u_0, v_0) gibt, welche in zwei verschiedenen Punkten von $\mathfrak{N}$ angenommen werden.

Es sei A ein Punkt aus $\mathfrak{N}'$, dessen Träger AC sei, und BD der Träger des Punktes B aus $\mathfrak{N}'$, wobei C und D außerhalb (O, b) liegen mögen (ich nehme dieselben Bezeichnungen, wie in § 12, obgleich es sich dort um die Ebene, hier um den Raum handelt). Haben u und v die nämlichen Werte in A wie in B, so ist der Satz richtig. Ich kann also annehmen, daß etwa u in A den Wert u_1 und in B den davon verschiedenen Wert u_2 habe. Es sei dabei $u_2 > u_1$. Ich setze:

$$\frac{1}{2}(u_2 + u_1) = u_0, \quad \frac{1}{4}(u_2 - u_1) = g,$$

lege um A und B die Kugeln (A, t), (B, t) (Fig. 2) so klein, daß sie sich nicht schneiden und in ihnen u bezw. $< u_0 - g$ und $> u_0 + g$ ist. E und F seien die Schnittpunkte dieser Kugeln mit den Strahlen AC und BD.

Ich denke mir aus der Reihe der Flächen $\mathfrak{S}$ die fortgelassen — und deren Zahl ist endlich —, welche EC und FD schneiden.

Die erste von den übrigbleibenden, die in (A, t) und (B, t) eindringt, sei die $\mathfrak{G}_p$. Dann dringt jede andere $\mathfrak{G}_q$ auch ein, wenn $q > p$ ist. Sei nun der Punkt M in der Kugel (A, t) und N in (B, t) so gewählt, daß sie im Inneren von $\mathfrak{G}_p$ liegen, so sind sie auch im Inneren von $\mathfrak{G}_q$. Verbinde ich sie im Inneren von $\mathfrak{G}_p$ durch ein Kurvenstück, und die Punkte C und D durch ein Kurvenstück im Äußeren von (O, b) und füge die Strecken AM und BN bei, so erhalte ich eine Kurve $\mathfrak{k}$, bestehend aus dem letzt erwähnten Stück, der Linie CA, AM, dem Kurvenstück MN, den Strecken NB, BD. Diese Kurve trifft jede $\mathfrak{G}_r$ nur dort, wo die MA und NB sie schneiden, also jedesmal ungerade*) und im Inneren von (A, t) bezw. (B, t).

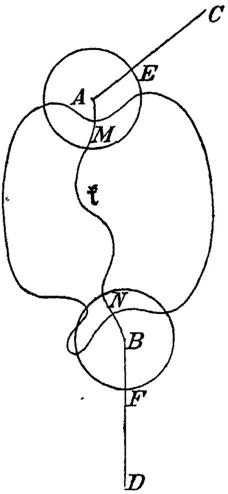

Fig. 2.

§ 15.

Die geschlossene Fläche $\mathfrak{G}_r$, $r \geqq p$, trifft (A, t) in einer oder mehreren geschlossenen Kurven. Da aber das von diesen begrenzte Stück von $\mathfrak{G}_r$ durch $\mathfrak{k}$ ungerade geschnitten wird, muß eine von ihnen mit $\mathfrak{k}$ verschlungen sein. In ihren Punkten ist $u < u_0 - g$. An sie setze ich nun Quadrat an Quadrat der Fläche $\mathfrak{G}_r$ an, soweit sie durch Seiten zusammenhängen, so lange als in den anzusetzenden Quadraten noch $u < u_0$ ist. Dies Ansetzen muß ein Ende haben, weil in (B, t) auf $\mathfrak{G}_r$ $u > u_0$ ist. Ich erhalte so einen zusammenhängenden Teil von $\mathfrak{G}_r$, der eine oder mehrere Grenzkurven haben kann. Aber mindestens eine von diesen muß mit $\mathfrak{k}$ verschlungen sein, weil ich von einer solchen Kurve ausging und die angesetzten Quadrate $\mathfrak{k}$ nicht trafen. Die Kurven, die ich so auf $\mathfrak{G}_p$, $\mathfrak{G}_{p+1}, \cdots$ erhalte, seien $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3, \cdots$.

Diese Kurven lasse ich jetzt an die Stelle der $\mathfrak{a}$ des § 7 treten, und v an die Stelle von z.

Die dort verlangte Variable φ aber erhalte ich auf folgende Weise: Ich lege von O nach einem beliebigen Punkt P eine ganz willkürliche Kurve $\mathfrak{p}$ und bezeichne mit J den Wert des Gaußschen Integrals

$$\iint \frac{\begin{vmatrix} s_1 - s_1' & ds_1 & ds_1' \\ s_2 - s_2' & ds_2 & ds_2' \\ s_3 - s_3' & ds_3 & ds_3' \end{vmatrix}}{\sqrt{(s_1 - s_1')^2 + (s_2 - s_2')^2 + (s_3 - s_3')^2}^3},$$

*) Ich sage kurz „eine Kurve trifft oder schneidet eine Fläche *ungerade*“, statt in einer ungeraden Zahl von Punkten.

wo (s_1, s_2, s_3) die Koordinaten eines Punktes auf $\mathfrak{k}$, (s_1', s_2', s_3') die eines Punktes auf $\mathfrak{p}$ sind, und die Integration über $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{p}$ sich erstreckt. Da man ohne und mit Umschlingung von $\mathfrak{k}$ von O nach P gehen kann, ist J nicht ganz bestimmt, vielmehr um ganze Vielfache von 4π unbestimmt. Nehme ich nun $\varphi = \frac{1}{2} J$, so ist φ eine Variable von den gewünschten Eigenschaften, weil ja die g_r die $\mathfrak{k}$ umschlingen.

Es folgt also nach den Resultaten der §§ 7—12, daß es unter den Staupunkten der Kurven $\mathfrak{g}$, die ja einen Teil von $\mathfrak{N}'$, und damit von $\mathfrak{N}$ bilden, zwei verschiedene gibt, die den beiden Funktionen u und v die nämlichen Werte u_0 und v_0 erteilen.

§ 16.

Jetzt ist es nicht schwer, die im Eingang dieser Arbeit erwähnten drei Fälle des Satzes: „Daß zwei Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimension nicht gegenseitig eindeutig und stetig aufeinander abgebildet werden können“ zu beweisen, indem ich den zweiten Satz beweise: *Daß n stetige und eindeutige Funktionen des Ortes auf einer n-dimensionalen Kugel stets unendlich viele Wertsysteme mindestens zweimal annehmen müssen* — wenigstens für $n = 1, 2$ oder 3.

Im Falle $n = 1$ hat man einen Kreis, auf dem eine stetige Funktion w des Ortes gegeben sei. Nimmt w in zwei Punkten A und B des Kreises verschiedene Werte w_1 und w_2 an, so nimmt w jeden Zwischenwert in zwei Punkten auf den beiden Teilen an, in die der Kreis durch die Punkte A und B zerfällt.

Für $n = 2$ hat man die Kugel

$$(t_0 - a_0)^2 + (t_1 - a_1)^2 + (t_2 - a_2)^2 = a^2.$$

Die beiden Funktionen, die in der Einleitung y_1 und y_2 hießen, mögen jetzt w und u genannt werden.

Auf der Kugel muß es zwei Punkte A und B geben, in denen die beiden Funktionen w, u nicht die nämlichen Werte haben. Ich kann annehmen, in A habe w den Wert w_1, in B den w_2, und es sei $w_1 \neq w_2$, $w_1 < w_2$. Ich setze $w_0 = \frac{w_1 + w_2}{2}$, $\frac{w_2 - w_1}{4} = d$ und nehme dann diese Punkte A und B für die in § 1 gebrauchten, indem ich die Kugel von B aus auf ihre Tangentenebene in A projiziere. Wenn ich den Projektionen die nämlichen Werte von w und u zuteile, die sie in den Originalen haben, so hat in der Ebene im Punkt A w den Wert $w_1 = w_0 - 2d$. Wenn ich im § 2 die Größe r so bestimme, daß in den Kugelpunkten, die zugleich im Inneren von (B, r) liegen, $w > w_2 - d$ ist, so ist in der

Ebene außerhalb des Kreises vom Radius $2a\sqrt{\frac{4a^2}{r^2}-1}$ $w > w_2 - d$, also auch $> w_0 + d$. Um den Punkt A kann ich einen Kreis (A, r_0) so schlagen, daß in ihm $w < w_1 + d = w_0 - d$ ist. Jede von A ausgehende, ins Unendliche laufende Kurve trägt nun Punkte, in denen $w = w_0$ ist. Sie liegen, wie es § 11 verlangt, alle außerhalb des Kreises (A, r_0), aber innerhalb des Kreises (A, b), wenn $b = 2a\sqrt{\frac{4a^2}{r^2}-1}$ ist. Die Menge der Punkte ist unendlich und abgeschlossen. Denn wäre in einem Häufungspunkte P w nicht $= w_0$, so könnte ich eine Umgebung herstellen, in der er ebenfalls nicht $= w_0$ wäre, und P wäre dann kein Häufungspunkt. Nach § 12 folgt also, daß es in der Menge von Punkten, für die $w = w_0$ ist, sicher zwei verschiedene gibt, in denen auch u den nämlichen Wert hat.

Für $n = 3$ habe ich die Kugel zu betrachten

$$(t_0 - a_0)^2 + (t_1 - a_1)^2 + (t_2 - a_2)^2 + (t_3 - a_3)^2 = a^2,$$

und die drei Funktionen seien nun w, u, v, statt wie früher y_1, y_2, y_3 genannt. Auch jetzt muß es zwei Punkte A und B der Kugel geben, in denen das Tripel (w, u, v) nicht das gleiche ist. Ich mache dieselben Annahmen und Bezeichnungen wie oben und finde dann, daß im Raume von drei Dimensionen, in den die obige Kugel stereographisch von B aus projiziert wird, in einer Kugel (A, r_0) kein Punkt liegt, für den $w = w_0$ ist, während außerhalb (A, b) auch keiner sich befindet. In dem Hohlraume zwischen beiden liegt die unendliche abgeschlossene Menge von Punkten mit $w = w_0$.

Ich finde also nach § 14, daß in *zwei verschiedenen* Punkten dieser Menge neben $w = w_0$ auch noch u und v die nämlichen Werte u_0 und v_0 haben.

Berichtigung zu meinem Aufsatz: „Historische Bemerkung zur Funktionentheorie", Band 60, Seite 398 ff.

Seite 398 letzter Absatz ist vor Schröder anzuführen: Seidel (Journ. f. r. u. ang. Math. Band 73).

„ 400 Zeile 12 v. o. muß es heißen „Glieder der Reihe werden unendlich" statt „die Funktion wird unendlich".

„ 401 ist der letzte Satz zu streichen.

Herr Professor Landau in Berlin hatte die Güte, mich auf diese Fehler aufmerksam zu machen.

Einige elementare Bemerkungen über den Prozeß der analytischen Fortsetzung.

Von

E. Study in Bonn.

Ist $w = u + iv$ eine analytische Funktion der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$, $w = f(z)$, so sind die reellen Komponenten u und v von w einzeln analytische Funktionen der reellen Komponenten x und y von z:

$$u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y).$$

Es steht also nichts im Wege, diese reellen Funktionen zu Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen zu erweitern. Hiermit betritt man ein vierdimensionales Gebiet, und zwar gelangt man in dieses durch ein natürliches, willkürfreies Verfahren. Es wird also die Frage sich aufdrängen, ob man nicht auf einem Wege, der durch dieses Gebiet hindurchführt, einen analytischen Zusammenhang zwischen zwei im reellen (zweidimensionalen) Gebiete getrennten Lösungen u_1 und u_2 der Laplaceschen Gleichung, und damit zugleich auch einen *natürlichen* Zusammenhang zwischen zwei verschiedenen analytischen Funktionen der komplexen Veränderlichen z herstellen kann. Ein solcher Zusammenhang würde besonders da von Interesse sein, wo die Funktionen $f(z)$, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ eine natürliche Grenze haben, die von einem reellen Zuge einer analytischen Kurve gebildet wird, z. B. von einer Kreislinie. Denn dann liefert ja bekanntlich die Schwarzsche Spiegelung an diesem Kurvenzuge eine neue Funktion $f_1(z)$, die jenseits der natürlichen Grenze existiert. Es wird dann zu wissen erwünscht sein, ob diese Funktion $f_1(z)$ außerdem auch als eine natürliche Fortsetzung der Funktion $f(z)$ um deren Grenze herum aufgefaßt werden kann.

Herr L. Schlesinger ist, nach persönlicher Mitteilung, schon vor längerer Zeit zu der Einsicht gelangt, daß es sich im Falle der elliptischen Modulfunktionen nicht so verhält. Indessen läßt sich eine Entscheidung ganz allgemein und auch sehr leicht herbeiführen. Man kann es nämlich den Ausdrücken der Funktionen u, v unmittelbar ansehen, daß sie eine analytische Fortsetzung in andere reelle Funktionen *niemals* zulassen.

Wir bezeichnen, wie üblich, mit $\bar{f}$ die zu der Funktion f konjugiert-komplexe Funktion, und haben dann

$$u = \frac{1}{2}\{f(x+iy) + \bar{f}(x-iy)\},$$
$$v = \frac{1}{2i}\{f(x+iy) - \bar{f}(x-iy)\}.$$

Lassen wir auch für x und y komplexe Werte zu, so ist deren Veränderlichkeit nur an die Einschränkung gebunden, daß die Funktionen $f(x+iy)$ und $\bar{f}(x-iy)$ zweier nunmehr unabhängiger komplexer Argumente $x+iy$ und $x-iy$ gleichzeitig existieren müssen. Diese Bedingung aber läßt sich noch etwas zweckmäßiger ausdrücken. Erklären wir vier reelle Größen x', y', x'', y'' und dann zwei komplexe Größen z', z'' durch die Gleichungen

$$x - iy = x' - iy', \quad x' + iy' = z',$$
$$x + iy = x'' + iy'', \quad x'' + iy'' = z'',$$

und setzen wir analog

$$u - iv = u' - iv', \quad u' + iv' = w',$$
$$u + iv = u'' + iv'', \quad u'' + iv'' = w'',$$

so sagen die bezeichneten Forderungen aus, daß die Funktionen

$$w' = f(z'), \quad w'' = f(z'')$$

existieren müssen. Es ergibt sich dann

$$u = \frac{1}{2}\{w'' + \bar{w}'\}, \quad v = \frac{1}{2i}\{w'' - \bar{w}'\}.$$

Der vierdimensionale Existenzbereich der Funktionen u, v läßt sich also eindeutig-umkehrbar und stetig abbilden auf den Bereich, der aus allen *Paaren* z', z'' gewöhnlicher komplexer Größen besteht, die in den Existenzbereich der Funktion $f(z)$ fallen. Zugleich sieht man, daß die Größen x und y nur dann reell werden, wenn $z' = z''$ wird. Gleichzeitig reduzieren sich dann auch u und v auf reelle Werte, und die Verbindung $u + iv$ wird identisch mit der völlig *bestimmten* Funktion $f(z)$.

Hiermit ist unsere Behauptung erwiesen. Zugleich erkennen wir, daß sie einer bedeutenden Verallgemeinerung fähig ist.

Man betrachte irgend eine analytische Mannigfaltigkeit M im Gebiete der komplexen Veränderlichen $z_1 \cdots z_n$. Setzt man dann $z_k = x_k + iy_k$, so hat man vor sich eine Mannigfaltigkeit von gerader Dimensionenzahl $2r$ im Gebiete der $2n$ reellen Veränderlichen x_k, y_k. Durch analytische Fortsetzung leite man aus dieser eine neue analytische Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ von der doppelten Dimensionenzahl $4r$ ab, die im Gebiete der *komplexen* Veränderlichen x_k, y_k existiert. Dann ergibt sich, genau wie zuvor, daß die Punkte von $\mathfrak{M}$ eindeutig-umkehrbar und stetig zugeordnet werden können den Punktepaaren von M*), und daß die Punkte von M die einzigen reellen Punkte von $\mathfrak{M}$ sind. Man kann daher von einem Punkte von M aus durch analytische Fortsetzung im Gebiete der *komplexen* Veränderlichen x_k, y_k nur zu solchen reellen Punkten kommen, die auf M selbst gelegen sind, zu denen man also auch schon durch analytische Fortsetzung auf *reellem* Wege gelangen kann. — Der angewendete Abbildungsprozeß ist, wie man leicht erkennt, invariant gegenüber analytischen Transformationen der Veränderlichen z_k.

Mit der behandelten Frage ist eine zweite nahe verwandt, zu der man in der Theorie der konformen Abbildung geführt wird.

Nach einem bekannten, oben gelegentlich schon erwähnten Satze des Herrn H. A. Schwarz bestimmt in der Ebene der komplexen Veränderlichen z (oder z. B. auch auf der Riemannschen Zahlenkugel) jeder reelle reguläre analytische Kurvenbogen eine sogenannte konforme Spiegelung, eine uneigentlich-konforme Abbildung, durch die in einer gewissen Umgebung dieses Bogens die Punkte zu beiden Seiten involutorisch gepaart werden, während jeder Punkt des Bogens sich selbst entspricht.**) Ein regulärer reeller Kurvenbogen aber kann nicht nur, wenn er durch singuläre Stellen algebraischen Charakters begrenzt wird, über diese hinaus analytisch fortgesetzt werden, sondern er kann auch mit anderen Bogen der Art auf komplexem Wege zusammenhängen. Welcher Zusammenhang besteht dann zwischen allen den Schwarzschen Spiegelungen, die auf solche Weise erhalten werden können?

Diese Frage, die merkwürdigerweise noch nicht gestellt worden zu sein scheint, läßt sich nun sofort beantworten, wenn man bemerkt, daß die Schwarzsche Spiegelung nichts anderes ist als ein Ausschnitt aus einer allgemeineren, übrigens längst bekannten Art der Zuordnung.

Sind ξ, η irgend welche komplexe Größen, die wir etwa als rechtwinklige Cartesische Koordinaten eines „komplexen Punktes" in der Ebene deuten wollen, so stellen Gleichungen der Form

$$\xi - i\eta = \text{const.}, \quad \xi + i\eta = \text{const.}$$

---

*) Ein noch etwas umfassenderer Satz findet sich bereits in einer Abhandlung des Herrn C. Segre (Math. Ann., Bd. 40, 1892, S. 465, Z. 10—14), scheint aber bisher nicht beachtet worden zu sein.

**) H. A. Schwarz, Ges. Werke, Bd. II, S. 149—151.

gewisse imaginäre gerade Linien dar, die sogenannten Minimalgeraden, die wir als link- und rechtseitige Minimalgerade unterscheiden können. Sind dann x, y, u, v reelle Größen, so wird durch die Gleichungen

$$\xi - i\eta = x - iy, \quad \xi + i\eta = u + iv$$

jedem komplexen Punkt (ξ, η) ein wohlbestimmtes Paar reeller Punkte (x, y) und (u, v) zugewiesen, und umgekehrt: das Paar der beiden reellen Punkte, die den durch (ξ, η) gehenden Minimalgeraden angehören.

Nehmen wir jetzt an, daß der Punkt (ξ, η) eine analytische Kurve durchläuft, *die nicht eine Minimalgerade ist,* so bedeutet — wie man ohne weiteres erkennt — die Zuordnung zwischen (x, y) und (u, v) eine reelle, (von singulären Stellen abgesehen) uneigentlich-konforme Abbildung. Umgekehrt kann eine solche in der Form $w = f(\bar{z})$ willkürlich gegeben werden; sie bestimmt dann vermöge der Gleichungen

$$\xi = \frac{1}{2}(w + \bar{z}), \quad \eta = \frac{1}{2i}(w - \bar{z})$$

eindeutig die zugehörige analytische Kurve, die verschieden ist von einer Minimalgeraden. Jede solche Kurve hat also ein *reelles Bild* in einer uneigentlich-konformen Transformation $z \longrightarrow w$, durch die die Punkte zweier Riemannscher Flächen (z) und (w) einander eindeutig-umkehrbar zugeordnet werden.*)

Ist nun die Kurve selbst *reell,* d. h. sind ihre Punkte paarweise konjugiert-komplex, so zeigt sich das an der Abbildung darin, daß die beiden Riemannschen Flächen (z) und (w) zusammenfallen, und daß jedes umgekehrte Punktepaar $w \longrightarrow z$ ebenfalls ein Paar zugeordneter Punkte ist. Tritt überdies der Fall ein, daß die reelle Kurve einen oder mehrere reelle Züge hat, so fällt jeder Punkt eines solchen Kurvenzuges mit dem zugeordneten Punkt zusammen. Die Abbildung selbst aber stimmt in der Umgebung dieses Zuges (der einem bestimmten Blatte der Riemannschen Fläche angehört) überein mit der Schwarzschen Spiegelung.

Wenn also zu einer reellen analytischen Kurve mehrere Schwarzsche Spiegelungen gehören, so hängen diese immer durch analytische Fortsetzung, und zwar durch Fortsetzung auf *reellem* Wege, mit einander zusammen. Jede einzelne unter ihnen bestimmt vollkommen zugleich mit der ganzen Kurve alle übrigen konformen Spiegelungen.

---

*) Ist z. B. die ebene Kurve eine Gerade, so ist die zugehörige Abbildung eine uneigentliche Ähnlichkeitstransformation, und umgekehrt. Ist die Kurve ein (irreduzibeler) Kreis, so ist die Abbildung irgend eine andere uneigentliche Möbiussche Kreisverwandtschaft, und umgekehrt.

Von den beiden besprochenen Sätzen gehört der erste unmittelbar der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen an; der zweite, in geometrischer Einkleidung vorgetragene, aber kann wenigstens dieser Theorie untergeordnet werden. Gleichungen der Form $w = f(\bar{z})$ sind zwar nicht analytisch im üblichen Sinne des Wortes, und sie sind vielleicht nicht in gleichem Grade nützliche Verallgemeinerungen „reeller" Gleichungen $u = f(x)$, wie Gleichungen der Form $w = f(z)$. Indessen hat doch die Theorie der analytischen Funktionen auch zur Betrachtung derartiger Abhängigkeiten genötigt. Der ebenfalls von Herrn Schwarz formulierte Satz z. B., daß eine analytische Funktion, die in den Punkten eines reellen analytischen Kurvenbogens reelle Werte hat, in den spiegelbildlich einander entsprechenden Punkten zu beiden Seiten des Kurvenbogens konjugiert-komplexe Werte annimmt, gehört gewiß der allgemeinen Funktionentheorie an: die geometrische Fassung ist nebensächlich und könnte auch durch eine andere ersetzt werden. Das gleiche gilt dann auch von unserer Bemerkung über den Zusammenhang verschiedener konformer Spiegelungen. Diese aber beruht, soviel wir sehen, ganz und gar darauf, daß man die zweidimensionale Mannigfaltigkeit (z) oder (x, y), die durch Erweiterung der sogenannten reellen Mannigfaltigkeit (x) entstanden ist, von neuem dem gleichen Erweiterungsprozeß unterwirft, sie als enthalten in einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit (ξ, η) auffaßt.

Dieser letzte Prozeß läuft nun auf den Gebrauch *bikomplexer* Größen hinaus. In der Tat, hat man die reellen Größen x und y in der Form $z = x + iy$ zu einer sogenannten komplexen Größe zusammengefaßt, so braucht man zur Zusammenfassung zweier Größen ξ, η, die selbst schon komplex sind, eine neue Einheit, die man übrigens denselben Verknüpfungsregeln unterwerfen wird. Man wird etwa in obiger Formel das Zahlenpaar (0, 1) statt mit i, mit j bezeichnen. Dann kann man ohne Mehrdeutigkeit $\zeta = \xi + j\eta$ (und $z = x + jy$) setzen, sofern man bei der Darstellung von ξ und η selbst das Zeichen i beibehält:

$$\xi = \xi_1 + i\xi_2, \quad \eta = \eta_1 + i\eta_2, \quad \zeta = \xi + j\eta.$$

Mag man sich nun der Zusammenfassung von je vier Gleichungen in eine einzige mit Hilfe eines Systems bikomplexer Größen der Form

$$a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 ij,$$
$$(i^2 = -1, \ j^2 = -1, \ ij = ji)$$

bedienen wollen, oder nicht, an der Sache wird dadurch nur Unwesentliches geändert: Ist die vorgetragene wenn auch noch so unbedeutende Ergänzung zu dem Satze von der konformen Spiegelung vernünftig, enthält sie eine irgendwie nützliche Erkenntnis, dann kann zwar (wie es ohne Zweifel geschehen wird) auch fernerhin behauptet, aber nicht mit Recht behauptet werden, daß die Erweiterung des Bereiches der reellen Größen zum Bereiche der gemeinen komplexen Größen in der allgemeinen Analysis ausreichend, und noch weniger, daß sie allein *zulässig* sei. Denn diese Behauptung schließt, wie uns scheint, die andere ein, daß die zu jener Erkenntnis unentbehrliche doppelte Erweiterung des Bereiches der reellen Größen überflüssig, ja sogar ein methodischer Mißgriff sei.

Die zentrale Stellung der gemeinen komplexen Größen und ihrer Funktionen ist gewiß durch die ganze Entwickelung der modernen Mathematik gewährleistet. In den Erörterungen über den „tieferen Grund" dieser Erscheinung — oder vielmehr, bei den Versuchen, ihr einen möglichst prägnanten Ausdruck zu geben — ist man aber unseres Erachtens etwas dogmatisch zu Werke gegangen. Zunächst bleiben diese Erörterungen alle auf dem Boden der Algebra.*) Daher bietet vielleicht unsere Bemerkung eine Ergänzung, wonach bei transzendenten Funktionen natürliche Grenzen auch im hyperkomplexen Gebiete (bei Anwendung des beschriebenen *natürlichen* Erweiterungsprozesses) nicht umgangen werden können. Aber allzugroßes Gewicht hat man unseres Erachtens auf die Forderung gelegt, daß auch in dem erweiterten Gebiete ein Produkt nicht soll verschwinden können, wenn nicht einer der Faktoren verschwindet.

Mit dem Nachweise, daß dann der Fundamentalsatz der Algebra seine Gültigkeit verliert, wird zwar die ausgezeichnete Stellung der gemeinen komplexen Größen auf eine kurze Formel gebracht, die Anwendung anderer komplexer Größen aber, auch in der allgemeinen Analysis, nicht endgültig ausgeschlossen. Es dürfte auch zu bedenken sein, daß man schon bei dem Übergang zu den gemeinen komplexen Größen kaum minder wichtige Eigenschaften der reellen Größen aufgibt, nämlich die durch Ungleichungen ausgedrückten Anordnungssätze.

Sind diese Überlegungen sachgemäß, so wird jener bekannte Ausspruch von Gauß**), an den alle diese Erörterungen angeknüpft haben (falls man ihn im Sinne von Weierstraß deuten will), selbst dann nicht in vollem Umfange aufrecht zu erhalten sein, wenn man das von Gauß in einem sonst gewiß nicht üblichen Sinne gebrauchte Wort „nicht zulässig" durch die milderen Ausdrücke „unzweckmäßig" oder „überflüssig" erklärt.

Es ist gewiß, daß *jedes* Wort des Princeps Mathematicorum die aller-

---

*) Daß schon von diesem Gesichtspunkte aus die von Weierstraß und anderen bekundeten Ansichten sich nicht in vollem Umfange aufrecht erhalten lassen, hat der Verfasser bei anderen Gelegenheiten darzulegen versucht (Gött. Nachr. 1898, S. 5—8. Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, S. 596).

**) Gauß Werke, Bd. II, S. 178.

sorgfältigste Erwägung verdient (einige Kommentatoren scheinen uns die Worte „in der allgemeinen Arithmetik" nicht hinreichend beachtet zu haben). Indessen aus einem seiner Aussprüche ein Verbot gewisser Forschungsrichtungen oder ein aprioristisches Werturteil über diese ableiten zu wollen, das scheint uns wirklich *unzulässig* zu sein, im eigentlichen, nicht abgeschwächten Sinne des Wortes.*) Es kommt hinzu, daß wir nicht einmal sicher sein können, recht verstanden zu haben: So hat sich Dedekind der Weierstraßchen Interpretation jener fragmentarischen und dunkeln Äußerung nicht angeschlossen.

Im Grunde ist eigentlich schon nicht einzusehen, warum die Lösungen der Laplaceschen Gleichung nicht in das komplexe Gebiet hinein sollen fortgesetzt werden dürfen, da man doch alle anderen analytischen Funktionen von zwei reellen Veränderlichen dieser Fortsetzung unterwirft. Ist es überhaupt möglich, die wissenschaftliche Systematik auf diese Art zu durchlöchern?

Im übrigen verweisen wir wegen des zuerst von Herrn Segre angewendeten Prozesses der wiederholten Erweiterung des betrachteten Größengebietes auf dessen schon erwähnte Abhandlung, und außerdem auf eine Arbeit des Verfassers „Sugli enti analitici", die kürzlich in den Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (t. XXI, p. 345) erschienen ist. Man findet dort allgemeinere Entwicklungen, u. a. auch eine Ausdehnung des Begriffs der Schwarzschen Spiegelung auf die Theorie einer unbestimmten Zahl von komplexen Veränderlichen.

Anwendungen der vorgetragenen und verwandter Ideen sollen den Gegenstand weiterer Arbeiten bilden, in denen der Verfasser besonders gewisse flächentreue Abbildungen als ein Seitenstück zu den konformen Abbildungen und in ihrer Beziehung zu diesen eingehend zu erörtern gedenkt.

---

*) Wir sehen davon ab, durch Zitate (aus den Schriften namhafter Autoren) zu zeigen, daß wir hier nicht etwa offene Türen einrennen.

Ein Satz über eindeutige Abbildung und seine Anwendung in der Variationsrechnung.

Von

OSKAR BOLZA in Chicago.

Um den fraglichen Satz bequemer formulieren zu können, wollen wir sagen, ein Punkt $(x) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ liege in der Umgebung (ϱ) einer im Raum der Variabeln x definierten Punktmenge $\mathfrak{M}$, wenn er in der Umgebung (ϱ) irgend eines Punktes von $\mathfrak{M}$ liegt, d. h. also, wenn es mindestens einen Punkt $(\bar{x})$ von $\mathfrak{M}$ gibt, so daß

$$|x_i - \bar{x}_i| < \varrho, \qquad i = 1, 2, \cdots, n.$$

Die hierdurch definierte Umgebung (ϱ) der Menge $\mathfrak{M}$ wollen wir mit $(\varrho)_{\mathfrak{M}}$ bezeichnen.

Es soll nun zunächst der folgende Satz*) bewiesen werden:

Satz I: *Die n reellen eindeutigen Funktionen*

$$(1) \qquad y_i = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n), \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

*nebst ihren ersten partiellen Ableitungen seien stetig im Innern eines Bereiches**) $\mathfrak{A}$; ferner möge die durch die Gleichungen* (1) *definierte Beziehung zwischen dem (x)-Raum und dem (y)-Raum ein-eindeutig sein für eine im Innern von $\mathfrak{A}$ gelegene, beschränkte***), abgeschlossene Punktmenge $\mathfrak{C}$, und endlich sei die Funktionaldeterminante*

$$\Delta(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{\partial(f_1, f_2, \cdots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}$$

in $\mathfrak{C}$ von Null verschieden.

Alsdann läßt sich eine ganz im Innern von $\mathfrak{A}$ gelegene Umgebung $(\varrho)_{\mathfrak{C}}$ von $\mathfrak{C}$ angeben, derart daß die Gleichungen (1) *eine ein-eindeutige Be-*

*) Der Satz ist eine Verallgemeinerung eines Satzes, den ich in § 34 meiner Lectures on the Calculus of Variations (Chicago 1904) bewiesen habe.

**) Wir gebrauchen das Wort „Bereich" für eine Punktmenge, welche innere Punkte enthält.

***) „borné".

ziehung zwischen dem Bereich $(\varrho)_{\mathfrak{C}}$ *und dessen Bild* $\mathfrak{S}_\varrho$ *im* (y)*-Raum definieren.*

Man zeigt zunächst leicht, daß sich eine positive Größe d so klein angeben läßt, daß die Umgebung $(d)_{\mathfrak{C}}$ ganz im Innern von $\mathfrak{A}$ liegt.

Dann wähle man eine abnehmende Folge positiver Größen mit der Grenze Null:

$$d > \varrho_1 > \varrho_2 > \cdots > \varrho_\nu > \cdots > 0, \quad \underset{\nu=\infty}{L}\, \varrho_\nu = 0. \tag{2}$$

Angenommen nun, es gäbe für jeden Wert des Index ν in $(\varrho_\nu)_{\mathfrak{C}}$ mindestens *ein* Paar verschiedener Punkte

$$(x'_\nu) = (x'_{1\nu}, x'_{2\nu}, \cdots, x'_{n\nu}), \qquad (x''_\nu) = (x''_{1\nu}, x''_{2\nu}, \cdots, x''_{n\nu}),$$

deren Bilder im (y)-Raum zusammenfallen. Dann können wir den beiden Punkten (x'_ν), (x''_ν) zwei Punkte (ξ'_ν) resp. (ξ''_ν) von $\mathfrak{C}$ zuordnen, derart, daß

$$|x'_{i\nu} - \xi'_{i\nu}| < \varrho_\nu, \qquad |x''_{i\nu} - \xi''_{i\nu}| < \varrho_\nu. \tag{3}$$

Wir betrachten jetzt die Punktmenge

$$\{z_\nu\} = \{(\xi'_{1\nu}, \xi'_{2\nu}, \cdots, \xi'_{n\nu};\ \xi''_{1\nu}, \xi''_{2\nu}, \cdots, \xi''_{n\nu})\}$$

im $2n$-dimensionalen Raum $x'_1, \cdots, x'_n;\ x''_1, \cdots, x''_n$. Sie ist in der beschränkten, abgeschlossenen Menge

$$\mathfrak{D}: \qquad x'_1, x'_2, \cdots, x'_n \text{ in } \mathfrak{C}, \qquad x''_1, x''_2, \cdots, x''_n \text{ in } \mathfrak{C}$$

enthalten. Enthält daher die Menge $\{z_\nu\}$ unendlich viele verschiedene Punkte, so besitzt sie mindestens *einen* Häufungspunkt

$$h = (a'_1, \cdots, a'_n;\ a''_1, \cdots, a''_n),$$

der zugleich Häufungspunkt von $\mathfrak{D}$ ist und daher zu $\mathfrak{D}$ gehört, d. h. (a') ist ein Punkt von $\mathfrak{C}$ und ebenso (a''). Es läßt sich dann eine unendliche Teilfolge $\{z_{\nu_\mu}\}$ aus $\{z_\nu\}$ herausheben, so daß

$$\underset{\mu=\infty}{L}\, z_{\nu_\mu} = h, \qquad \nu_{\mu+1} > \nu_\mu,$$

d. h.

$$\underset{\mu=\infty}{L}\, (\xi'_{\nu_\mu}) = (a'), \qquad \underset{\mu=\infty}{L}\, (\xi''_{\nu_\mu}) = (a''). \tag{4}$$

Enthält die Menge $\{z_\nu\}$ nur eine endliche Anzahl verschiedener Punkte, so läßt sich aus $\{z_\nu\}$ eine unendliche Teilfolge $\{z_{\nu_\mu}\}$ von gleichen Punkten herausgreifen, und man gelangt zu demselben Resultat (4).

Verbindet man (4) mit (2) und (3), so folgt, daß auch

$$\underset{\mu=\infty}{L}\, (x'_{\nu_\mu}) = (a'), \qquad \underset{\mu=\infty}{L}\, (x''_{\nu_\mu}) = (a''). \tag{5}$$

Es läßt sich nun aber zeigen, daß

$$(a') = (a''). \tag{6}$$

Denn setzt man

$$D(x_1', \cdots, x_n'; \; x_1'', \cdots, x_n'') = \sum_{i=1}^{n} [f_i(x_1', \cdots, x_n') - f_i(x_1'', \cdots, x_n'')]^2,$$

so ist nach der Definition der Punkte (x_ν'), (x_ν''):

$$D(x'_{1\nu_\mu}, \cdots, x'_{n\nu_\mu}; \; x''_{1\nu_\mu}, \cdots, x''_{n\nu_\mu}) = 0,$$

und daher, wenn wir zur Grenze $\mu = +\infty$ übergehen und beachten, daß $D(x_1', \cdots, x_n'; \; x_1'', \cdots, x_n'')$ in $a_1', \cdots, a_n'; \; a_1'', \cdots, a_n''$ stetig ist:

$$D(a_1', \cdots, a_n', \; a_1'', \cdots, a_n'') = 0,$$

also

$$f_i(a_1', \cdots, a_n') = f_i(a_1'', \cdots, a_n''), \qquad i = 1, 2, \cdots, n.$$

Da wir aber voraussetzen, daß die Abbildung (1) für die Menge $\mathfrak{C}$ eineindeutig ist, so folgt hieraus

$$(a') = (a'').$$

Aus unserer Annahme folgt also, daß es einen Punkt (a) von $\mathfrak{C}$ gibt, derart, daß in jeder Nähe von (a) Paare von verschiedenen Punkten existieren, deren Bilder im (y)-Raum zusammenfallen.

Dies ist aber nach dem Satz über implizite Funktionen nicht möglich, da die Funktionen $f_i(x_1, \cdots, x_n)$ nebst ihren ersten Ableitungen in der Umgebung von (a) stetig sind und überdies

$$\Delta(a_1, \cdots, a_n) \neq 0.$$

Wir sind also zu einem Widerspruch gelangt; daher muß es mindestens einen Wert $\nu = r$ geben, derart, daß zwei verschiedenen Punkten von $(\varrho_r)_{\mathfrak{C}}$ allemal zwei verschiedene Punkte im (y)-Raum entsprechen. Dasselbe gilt dann a fortiori für die Umgebung $(\varrho)_{\mathfrak{C}}$, sobald $\varrho \leqq \varrho_r$ gewählt wird, womit unser Satz bewiesen ist.

Zusatz I: *Die Größe ϱ läßt sich so klein wählen, daß jeder Punkt des Bildes $\mathfrak{S}_\varrho$ von $(\varrho)_{\mathfrak{C}}$ ein innerer Punkt von $\mathfrak{S}_\varrho$ ist, und daß die durch Auflösung der Gleichungen* (1) *erhaltenen und in $\mathfrak{S}_\varrho$ eindeutig definierten inversen Funktionen*

$$x_\varkappa = \psi_\varkappa(y_1, y_2, \cdots, y_n), \qquad \varkappa = 1, 2, \cdots, n \tag{7}$$

im Bereich $\mathfrak{S}_\varrho$ stetig sind und stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzen.

Denn bezeichnet man mit $\overset{+}{\mathfrak{C}}$ denjenigen Bestandteil von $\mathfrak{C}$, in welchem $\Delta(x_1, \cdots, x_n) > 0$, mit $\overset{-}{\mathfrak{C}}$ denjenigen, in welchem $\Delta(x_1, \cdots, x_n) < 0$, so folgt leicht aus den über die Menge $\mathfrak{C}$ gemachten Voraussetzungen, daß auch die Mengen $\overset{+}{\mathfrak{C}}$ und $\overset{-}{\mathfrak{C}}$ beschränkt und abgeschlossen sind. Nach bekannten Sätzen*) über stetige Funktionen folgt dann, indem man zunächst $\overset{+}{\mathfrak{C}}$ und $\overset{-}{\mathfrak{C}}$ getrennt betrachtet, daß sich eine positive Größe d_1 so wählen läßt, daß

$$\Delta(x_1, \cdots, x_n) \neq 0 \quad \text{in} \quad (\varrho)_{\mathfrak{C}},$$

sobald $\varrho < d_1$.

Wird ϱ dieser Bedingung entsprechend und zugleich $\overline{\gtrless}\ \varrho_r$ gewählt, so führt der Satz über implizite Funktionen unmittelbar zum Beweis der oben ausgesprochenen Behauptungen.

Es sei $\mathfrak{E}$ das Bild der Menge $\mathfrak{C}$ im (y)-Raum; dann ist die Menge $\mathfrak{E}$, ebenso wie $\mathfrak{C}$, beschränkt und abgeschlossen.**) Da sie in $\mathfrak{S}_\varrho$ enthalten ist, so liegt sie nach dem Vorigen ganz im Innern von $\mathfrak{S}_\varrho$. Daraus folgt

Zusatz II: *Es läßt sich eine Umgebung* $(\sigma)_{\mathfrak{E}}$ *des Bildes* $\mathfrak{E}$ *von* $\mathfrak{C}$ *angeben, welche ganz in* $\mathfrak{S}_\varrho$ *liegt.*

Hiernach läßt sich der Satz I auch so aussprechen: Unter den angegebenen Voraussetzungen lassen sich zwei positive Größen ϱ und σ angeben, derart, daß für jedes (y) in $(\sigma)_{\mathfrak{E}}$ die Gleichungen (1) eine und nur eine Lösung (x) in $(\varrho)_{\mathfrak{C}}$ besitzen.

In dieser Form läßt sich der Satz auf implizite Funktionen verallgemeinern, und man erhält den folgenden

Satz II: *Es sei das System von n Gleichungen gegeben:*

$$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_m,\ y_1, y_2, \cdots, y_n) = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{8}$$

wobei die Funktionen f_i *nebst ihren ersten partiellen Ableitungen als Funktionen ihrer* $m + n$ *Argumente im Innern eines Bereiches* $\mathfrak{A}$ *stetig sind.*

Die Gleichungen (8) *mögen befriedigt sein für die sämtlichen Punkte einer ganz im Innern von* $\mathfrak{A}$ *gelegenen, beschränkten, abgeschlossenen Punktmenge* $\mathfrak{A}$, *welche die Eigenschaft hat, daß, wenn* $(x'_1, \cdots, x'_m,\ y'_1, \cdots, y'_n)$ *und* $(x''_1, \cdots, x''_m,\ y''_1, \cdots, y''_n)$ *zwei verschiedene Punkte von* $\mathfrak{C}$ *sind, dann allemal* $(x'_1, \cdots, x'_m) \neq (x''_1, \cdots, x''_m)$.

Endlich sei die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(f_1, \cdots f_n)}{\partial(y_1, \cdots, y_n)} \neq 0 \quad \text{in} \quad \mathfrak{C}. \tag{9}$$

*Wenn alsdann X (resp. Y) die Projektion***) der Menge* $\mathfrak{C}$ *in den* $(x_1, \cdots, x_n)$*-Raum (resp. den* $(y_1, \cdots, y_n)$*-Raum) bezeichnet, so lassen sich*

---

*) Vgl. Jordan, Cours d'Analyse, I, Nr. 62, 64.

**) Vgl. Jordan, l. c. Nr. 64.

***) Unter der Projektion eines Punktes $(x'_1, \cdots, x'_m;\ y'_1, \cdots, y'_n)$ von $\mathfrak{C}$ in den (x)-Raum wird der Punkt: $(x) = (x'_1, \cdots, x'_m)$ verstanden.

zwei positive Größen ϱ *und* σ *angeben, derart daß für jedes* (x) *in der Umgebung* $(\sigma)_X$ *die Gleichungen* (8) *eine und nur eine Lösung* (y) *besitzen, für welche der Punkt* (x, y) *in der Umgebung* $(\varrho)_{\mathfrak{G}}$ *liegt; die hierdurch für den Bereich* $(\sigma)_X$ *eindeutig definierten impliziten Funktionen*

$$y_i = \psi_i(x_1, \cdots, x_m) \tag{10}$$

sind in diesem Bereich stetig und besitzen stetige partielle Ableitungen erster Ordnung.

Zum Beweis betrachte man das Gleichungssystem

$$u_h = x_h, \quad h = 1, 2, \cdots, m,$$
$$u_{m+i} = f_i(x_1, \cdots, x_m, \ y_1, \cdots, y_n), \qquad i = 1, 2, \cdots, n.$$

Dasselbe erfüllt alle Bedingungen des Satzes I und läßt sich daher in dem angegebenen Sinn eindeutig nach $x_1, \cdots, x_m, \ y_1, \cdots, y_n$ auflösen. Setzt man insbesondere $u_{m+1} = 0, \cdots, u_{m+n} = 0$, so erhält man den obigen Satz.

Um die Brauchbarkeit der angegebenen Säze zu zeigen, führe ich zwei der Variationsrechnung entlehnte Beispiele an:

1) *Der Satz von der Existenz eines Feldes.*

Es sei im $n+1$-dimensionalen Raum eine n-fach unendliche Kurvenschar in Parameterdarstellung gegeben:

$$x_j = \varphi_j(t, a_1, a_2, \cdots, a_n), \qquad i = 1, 2, \cdots, n+1, \tag{12}$$

wobei die Funktionen φ_j nebst ihren ersten partiellen Ableitungen stetig sein sollen in dem Bereich

$$T_0 < t < T_1, \quad |a_i - a_i^0| < d. \tag{13}$$

Die spezielle Kurve

$$\mathfrak{C}: \qquad x_j = \varphi_j(t, a_1^0, a_2^0, \cdots, a_n^0), \qquad t_0 \leqq t \leqq t_1,$$

wo $T_0 < t_0$, $t_1 < T_1$, soll keine mehrfachen Punkte besitzen, und die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)}{\partial(t, a_1, \cdots, a_n)}$$

sei von Null verschieden für

$$t_0 \gtreqless t \gtreqless t_1, \quad a_1 = a_1^0, \cdots, a_n = a_n^0. \tag{14}$$

Dann läßt sich eine positive Größe $\varkappa$ angeben, derart daß die Gleichungen (12) eine ein-eindeutige Beziehung zwischen dem Bereich

$$t_0 - \varkappa < t < t_1 + \varkappa, \quad |a_i - a_i^0| < \varkappa, \qquad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{15}$$

und dessen Bild $\mathfrak{S}_\varkappa$ im (x)-Raum definieren; mit andern Worten: durch jeden Punkt des Bereiches $\mathfrak{S}_\varkappa$ geht eine und nur eine Kurve der Schar (12), für welche die Bedingungen (14) erfüllt sind.

Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz I; die Menge $\mathfrak{C}$ ist hier durch (14) definiert, die Umgebung $(\varkappa)_{\mathfrak{C}}$ durch (15).

Das Bild $\mathfrak{S}_\varkappa$ ist hier ein Kontinuum, da*) die Menge (15) zusammenhängend ist.

In dem speziellen Fall der nicht-parametrischen Darstellung hat eine der Gleichungen, z. B. die letzte, die Form

$$x_{n+1} = t$$

und die Bedingung, daß die Kurve $\mathfrak{C}$ keine mehrfachen Punkte enthält, ist stets erfüllt, kann also bei der Formulierung des Satzes weggelassen werden.

2) *Reduktion der Differentialgleichungen für das allgemeinste Problem des Extremums eines einfachen Integrals auf ein kanonisches System***):

Auch bei dieser bekannten Aufgabe tritt eine Schwierigkeit bezüglich der eindeutigen Auflösung eines Gleichungssystems auf, welche durch den obigen Satz II in befriedigender Weise gelöst werden kann. Die Funktionen

$$f(x, y_1, \cdots, y_n, y_1', \cdots, y_n), \quad f_\varrho(x, y_1, \cdots, y_n, y_1', \cdots, y_n'), \qquad \varrho = 1, 2, \cdots, r$$

seien als Funktionen ihrer $2n+1$ Argumente nebst ihren partiellen Ableitungen bis zur dritten Ordnung (inkl.) im Innern eines Bereiches $\mathfrak{A}$ stetig, und es werde

$$\Omega = f + \sum_{\varrho=1}^{r} \lambda_\varrho f_\varrho,$$

$$\Omega_i = \frac{\partial \Omega}{\partial y_i}, \qquad \Omega_{n+i} = \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}$$

gesetzt. Es handelt sich dann um die Auflösungen des Gleichungssystems

$$(16) \qquad \begin{cases} \Omega_{n+i} = v_i, & i = 1, 2, \cdots, n, \\ f_\varrho = 0, & \varrho = 1, 2, \cdots, r \end{cases}$$

nach den Unbekannten $y_1', \cdots, y_n', \lambda_1, \cdots, \lambda_\varrho$.

Dabei soll angenommen werden, daß man eine Lösung

$$y_i = y_i(x), \qquad \lambda_\varrho = \lambda_\varrho(x)$$

der Differentialgleichungen

$$\Omega_i - \frac{d}{dx}\Omega_{n+i} = 0, \qquad f_\varrho = 0$$

von folgenden Eigenschaften gefunden habe:

---

*) Vgl. Jordan, l. c. Nr. 64.

**) Ich folge der Bezeichnung von A. Mayer in den Abhandlungen: Über den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz etc., Sächsische Berichte, Mai 1903, Mai 1905, Juli 1905. Abgedruckt in Math. Ann. Bd. 58 und 62.

Die Funktionen $y_i(x)$ nebst ihren ersten und zweiten Ableitungen, die Funktionen $\lambda_\varrho(x)$ nebst ihren ersten Ableitungen sind stetig in einem Intervall $(x_0 x_1)$ und die Kurve

$$x_0 \gtreqless x \gtreqless x_1, \quad y_i = y_i(x), \quad y_i' = y_i(x)$$

liegt ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{A}$. Endlich soll die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(\Omega_{n+1}, \cdots, \Omega_{2n}, f_1, \cdots, f_r)}{\partial(y_1', \cdots, y_n', \lambda_1, \cdots, \lambda_r)}$$

von Null verschieden sein für

$$x_0 \gtreqless x \gtreqless x_1, \quad y_i = y_i(x), \quad y_i' = y_i'(x), \quad \lambda_\varrho = \lambda_\varrho(x).$$

Definiert man dann die Funktionen $v_i(x)$ durch

$$v_i(x) = \Omega_{n+i}(x, y_1(x), \cdots, y_1'(x), \cdots, \lambda_1(x), \cdots),$$

so lassen sich die Gleichungen (16) im Sinne des Satzes II eindeutig nach $y_1', \cdots, y_n', \lambda_1, \cdots, \lambda_r$ auflösen für jedes Wertsystem $x, y_1, \cdots, y_n, v_1, \cdots, v_n$ in einer gewissen Umgebung (σ) der Kurve

$$x_0 \gtreqless x \gtreqless x_1, \quad y_i = y_i(x), \quad v_i = v_i(x).$$

Freiburg i./B., den 26 März 1906.

Über die Herleitung der Differentialgleichungen der Variationsrechnung.

Von

Hans Hahn in Wien.

Für die Variationsrechnung ist die Frage von großer Bedeutung, ob es außer den durch die Lagrangeschen Gleichungen gelieferten (stetigen und unstetigen) Lösungen noch andere Lösungen geben kann. Man ist aber auch im einfachsten Falle über das von Du Bois-Reymond erzielte Resultat, daß sich unter den stetig differenzierbaren Funktionen keine neuen Lösungen finden können, nicht wesentlich hinausgelangt, denn die Abhandlung von Whittemore*) läßt nur sehr spezielle Verteilung der Unstetigkeitsstellen zu und führt auch dann nur unter bedeutenden Einschränkungen zum Ziele, und auch die in der Dissertation von Gernet**) angedeutete Methode bedarf zu ihrer exakten Durchführung sehr weitgehender Voraussetzungen über das zu untersuchende Variationsproblem. Im ersten Abschnitte dieses Aufsatzes wird nun gezeigt, daß alle rektifizierbaren durchwegs mit einer Tangente versehenen Lösungskurven eines Variationsproblems mit den stetigen Lösungen der Lagrangeschen Gleichungen übereinstimmen, während die bloß mit einer einseitigen Tangente versehenen Lösungskurven mit den bekannten unstetigen Lösungen zusammenfallen. Der zweite Teil dieses Aufsatzes beschäftigt sich mit dem allgemeinen Probleme der Variationsrechnung. Ich habe vor einiger Zeit eine Methode angegeben***), um auch in diesem Falle die Lagrangeschen Gleichungen aufstellen zu können unter der Voraussetzung, daß die Lösungen bloß einmal stetig differenzierbar sind. Hier nun zeige ich, wie das mittlerweile von Hilbert†) mitgeteilte Verfahren zur Aufstellung dieser Gleichungen, das zweimalige Differenzierbarkeit voraussetzt, modifiziert

*) Annals of math. (2) 2 (1900).
**) Gött. Diss. 1902, p. 53.
***) Monatshefte f. Math. u. Phys. 14 (1903).
†) Gött. Nachr. 1905.

werden kann, so daß auch dieses Verfahren nur mehr die Existenz stetiger erster Ableitungen der gesuchten Lösung voraussetzt.

§ 1.

Das einfachste Problem der Variationsrechnung verlangt, in einer gegebenen Klasse von Kurven, die zwei feste Punkte der Ebene miteinander verbinden, diejenigen aufzufinden, welche einem Kurvenintegrale von der Form:

$$\int F(x, y;\, x', y')\, dt \tag{1}$$

einen kleineren (oder größeren) Wert erteilen, als jede andere genügend benachbarte, dieselben Punkte verbindende Kurve.

Soll der Wert des Integrals (1) unabhängig sein von der Art der Darstellung der Kurvenkoordinaten durch den Parameter t, so muß bekanntlich für alle positiven Zahlen k die Beziehung bestehen:

$$F(x, y;\, kx', ky') = kF(x, y;\, x', y').$$

Wir setzen dieselbe als erfüllt voraus. Ferner sei die Funktion $F(x, y;\, x', y')$ in allen in Betracht kommenden Punkten der Ebene eine regulär-analytische Funktion ihrer vier Argumente, und zwar für alle endlichen Wertepaare x', y', ausgenommen etwa das Wertepaar 0, 0.

Die in der Variationsrechnung übliche Methode lehrt, unser Problem zu lösen, wenn die oben genannte Kurvenklasse aus allen denjenigen Kurven besteht, deren Koordinaten sich als zweimal stetig differenzierbare Funktionen eines Parameters t darstellen lassen. Diese Kurven haben in jedem Punkte eine Tangente und eine bestimmte endliche Krümmung; die Neigung der Tangente gegen die Koordinatenachsen, sowie die Krümmung ändern sich stetig von Punkt zu Punkt. Die gesuchte Kurve muß dann bekanntlich den beiden (voneinander nicht unabhängigen) Differentialgleichungen genügen:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \tag{2}$$

den sogenannten Lagrangeschen Gleichungen*) des Problems.

P. Du Bois-Reymond**) gelang es zu beweisen, daß, wenn man die eben angeführte Kurvenklasse durch die Klasse aller derjenigen Kurven ersetzt, deren Koordinaten sich durch einmal stetig differenzierbare Funk-

---

*) O. Bolza bezeichnet diese Gleichungen in seinen „Lectures on the Calculus of Variations“ als Eulersche Gleichungen.

**) Math. Ann. 15 (1879), p. 564. Eine einfachere Fassung des Beweises rührt von Hilbert her. Beide Fassungen sind wiedergegeben in Bolza, Lectures, p. 22. Ferner ein sehr einfacher Beweis von E. Zermelo, Math. Ann. 58.

tionen eines Parameters t darstellen lassen, zu den durch die Lagrangeschen Gleichungen gelieferten Lösungen keine weiteren hinzukommen. Die nunmehr zugelassenen Kurven besitzen also in jedem Punkte eine bestimmte Tangente, deren Neigung gegen die Koordinatenachsen sich stetig ändert. Eine solche Kurve ist bekanntlich stets rektifizierbar.

Im folgenden wird nun diese Kurvenklasse abermals durch eine umfassendere ersetzt: Es soll von den Kurven, unter denen die Lösung des Variationsproblems gesucht wird, nur vorausgesetzt werden, daß sie rektifizierbar sind und in jedem Punkte eine bestimmte Tangente besitzen, und es soll dargetan werden, daß auch hierdurch keine neuen Lösungen zustande kommen.*) Es ist klar, daß die hier betrachtete Kurvenklasse jede der beiden früher erwähnten in sich einschließt, aber wesentlich allgemeiner ist.

Zunächst sei darauf hingewiesen, daß für jede Kurve aus unserer Klasse der Begriff des Kurvenintegrals einen Sinn besitzt. In der Tat können wir, da die Kurve als rektifizierbar vorausgesetzt ist, die vom Anfangspunkte der Integration an gemessene Bogenlänge s als Parameter einführen. Bezeichnen wir mit γ den Winkel, den die Tangente an die Kurve im Punkte s (positiv gerechnet in der Richtung wachsenden s) mit der positiven x-Achse einschließt, so ist:

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
\cos\gamma &= \lim_{h=0} \frac{x(s+h)-x(s)}{+\sqrt{[x(s+h)-x(s)]^2+[y(s+h)-y(s)]^2}}\,;\\
\sin\gamma &= \lim_{h=0} \frac{y(s+h)-y(s)}{+\sqrt{[x(s+h)-x(s)]^2+[y(s+h)-y(s)]^2}}\,.
\end{aligned}
$$

Es sind also $\cos\gamma$ und $\sin\gamma$ dargestellt als Grenzen stetiger Funktionen, und sind daher — nach der Terminologie von R. Baire**) — Funktionen der ersten Klasse. Dasselbe gilt, da $F(x, y;\, x', y')$ stetig von seinen vier Argumenten abhängt, von der Funktion $F(x, y;\, \cos\gamma, \sin\gamma)$***); dieser Ausdruck ist also integrierbar im Sinne von H. Lebesgue†) und das Integral:

$$\int_0^s F(x, y;\, \cos\gamma, \sin\gamma)\, ds$$

*) Die sogenannten diskontinuierlichen Lösungen genügen unseren Forderungen nicht, da sie nicht in jedem Punkte eine Tangente besitzen. Dieselben kommen am Schlusse dieses Paragraphen zur Behandlung.

**) Siehe etwa R. Baire, Leçons sur les fonctions discontinues. Paris, Gauthier-Villars, 1905.

***) Vgl. etwa H. Lebesgue, Journ. de math., 1905, p. 153.

†) H. Lebesgue, Leçons sur l'intégration. Paris, Gauthier-Villars, 1904, p. 111.

bezeichnen wir als das über unsere Kurve erstreckte Integral der Funktion $F(x, y; x', y')$. Man erkennt ferner leicht, daß, wenn mit $x'(s)$ und $y'(s)$ irgend welche der vier Derivierten von $x(s)$ und $y(s)$ bezeichnet werden, stets die Beziehung besteht:

$$\int_0^s F(x, y; x'(s), y'(s))\,ds = \int_0^s F(x, y; \cos\gamma, \sin\gamma)\,ds.$$

In der Tat: Zunächst hat der links stehende Ausdruck immer einen Sinn, da $x'(s)$ sowohl als $y'(s)$ und somit auch $F(x, y; x'(s), y'(s))$ höchstens von der zweiten Klasse sind.*) Andererseits können sich $x'(s)$ und $y'(s)$ von $\cos\gamma$ und $\sin\gamma$ höchstens in den Punkten einer Menge vom Maße Null unterscheiden**); auf die Werte des Integranden in einer solchen Punktmenge kommt es aber bei der Integration von Funktionen, deren Werte zwischen endlichen Grenzen liegen — und nur um solche handelt es sich hier —, bekanntlich gar nicht an.

Soll nun das Stück $(s_0 s_1)$ unserer Kurve dem Integral (1) einen kleinsten oder größten Wert erteilen, so ergibt eine bekannte Schlußweise, daß das über diesen Kurvenbogen erstreckte Integral:

$$\int_{s_0}^{s_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x} u + \frac{\partial F}{\partial y} v + \frac{\partial F}{\partial x'} u' + \frac{\partial F}{\partial y'} v'\right) ds$$

den Wert Null haben muß für alle stetigen, abteilungsweise stetig differenzierbaren Funktionen $u(s)$, $v(s)$, die für $s = s_0$ und $s = s_1$ verschwinden. Dasselbe gilt somit für jedes einzelne der Integrale:

$$\int_{s_0}^{s_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x} u + \frac{\partial F}{\partial x'} u'\right) ds; \quad \int_{s_0}^{s_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} v + \frac{\partial F}{\partial y'} v'\right) ds.$$

Wir zeigen zunächst, daß die Gleichung besteht:

$$(4) \qquad \int_{s_0}^{s_1} \frac{\partial F}{\partial x} u\,ds = -\int_{s_0}^{s_1} \left(\int_{s_0}^{s} \frac{\partial F}{\partial x} ds\right) u'(s)\,ds.$$

Auf Grund unserer Voraussetzungen liegen die Werte der Funktion $\frac{\partial F}{\partial x}$ zwischen endlichen Grenzen. Es liegen daher auch die Werte der vier Ableitungen von $\int_{s_0}^{s} \frac{\partial F}{\partial x} ds$ zwischen endlichen Grenzen, und da das

*) H. Lebesgue, l. c., p. 121.

**) H. Lebesgue, l. c., p. 125.

gleiche nach Voraussetzung von $u(s)$ gilt, so gilt es auch von $u(s)\int\limits_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds$. Nach einem Satze von Lebesgue*) existiert daher die Ableitung

$$\frac{d}{ds}\left[u(s)\int\limits_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds\right]$$

im ganzen Intervall $(s_0 s_1)$, abgesehen höchstens von einer Punktmenge vom Maße Null. Wo aber diese Ableitung existiert, muß sie den Wert haben:

$$u'(s)\int\limits_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds + u(s)\,\frac{d}{ds}\int\limits_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds.$$

Da nun, ebenfalls nach Lebesgue**), abgesehen von einer Punktmenge vom Maße Null, die Gleichung gilt:

$$\frac{d}{ds}\int\limits_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds = \frac{\partial F}{\partial x},$$

so gilt in $(s_0 s_1)$, wieder abgesehen von einer Punktmenge vom Maße Null, die Gleichung:

$$\frac{d}{ds}\left[u(s)\int\limits_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds\right] = u'(s)\int\limits_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds + u(s)\cdot\frac{\partial F}{\partial x}. \tag{5}$$

Integriert man eine der vier Ableitungen von $u(s)\int\limits_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds$ von s_0 bis s_1, so erhält man aber***) die Differenz:

$$\left[u(s)\int\limits_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds\right]_{s_0}^{s_1},$$

die wegen der Voraussetzung $u(s_1) = 0$ den Wert Null hat. Da es aber bei Bildung des Lebesgueschen Integrals einer endlichen Funktion auf die Werte des Integranden in einer Punktmenge vom Maße Null nicht ankommt, so muß wegen (5) auch:

$$\int\limits_{s_0}^{s_1}\left(u'(s)\int\limits_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds\right)ds + \int\limits_{s_0}^{s_1}u(s)\,\frac{\partial F}{\partial x}\,ds = 0$$

sein, wodurch Gleichung (4) bewiesen ist.

*) l. c., p. 123.
**) l. c., p. 124.
***) l. c., p. 123.

Wir können also weiter aussagen: Die beiden Integrale:

$$(6)\qquad \int_{s_0}^{s_1}\left(\int_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds-\frac{\partial F}{\partial x'}\right)u'(s)\,ds;\quad \int_{s_0}^{s_1}\left(\int_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial y}\,ds-\frac{\partial F}{\partial y'}\right)v'(s)\,ds$$

müssen für alle stetigen, abteilungsweise stetig differenzierbaren, in s_0 und s_1 verschwindenden Funktionen $u(s)$ und $v(s)$ den Wert Null haben.

Wir treffen nun für $u(s)$ die folgende Wahl. Es sei:

$$u(s)=0 \text{ in } (s_0\sigma_0);\ u(s)=s-\sigma_0 \text{ in } (\sigma_0,\sigma_0+\sigma),$$
$$u(s)=\sigma \text{ in } (\sigma_0+\sigma,\sigma_1);\ u(s)=\sigma-(s-\sigma_1) \text{ in } (\sigma_1,\sigma_1+\sigma),$$
$$u(s)=0 \text{ in } (\sigma_1+\sigma,s_1).$$

Durch Einführung dieser Werte in (6) erhält man:

$$(7)\qquad \int_{\sigma_0}^{\sigma_0+\sigma}\left(\int_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds-\frac{\partial F}{\partial x'}\right)ds=\int_{\sigma_1}^{\sigma_1+\sigma}\left(\int_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds-\frac{\partial F}{\partial x'}\right)ds,$$

wie man auch σ_0, σ_1 und σ wählen mag, wenn nur:

$$s_0\leqq\sigma_0<\sigma_0+\sigma\leqq\sigma_1<\sigma_1+\sigma\leqq s_1.$$

Nun beachte man, daß die vier Ableitungen nach s der Funktion

$$\Psi(s,S)=\int_{S}^{s}\left(\int_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds-\frac{\partial F}{\partial x'}\right)ds,\quad (s_0\leqq S<s_1)$$

durchaus zwischen endlichen Grenzen liegen. Nach einem schon einmal verwendeten Satz von Lebesgue hat sie daher, abgesehen von einer Punktmenge vom Maße Null, überall eine bestimmte Ableitung. Wir wählen für σ_0 und σ_1 solche Werte von s, für welche die genannte Funktion eine bestimmte Ableitung nach s, $\Psi'(s,S)$, hat. Aus Gleichung (7) — $\Psi(\sigma_0+\sigma,\sigma_0)=\Psi(\sigma_1+\sigma,\sigma_1)$ — folgt jetzt unmittelbar:

$$\Psi'(\sigma_0,\sigma_0)=\Psi'(\sigma_1,\sigma_1).$$

Nun hat aber das unbestimmte Integral einer durchaus endlichen Funktion diese Funktion überall zur Ableitung, ausgenommen höchstens eine Punktmenge vom Maße Null. Abgesehen von einer solchen Punktmenge ist daher überall:

$$\Psi'(s,\sigma_0)=\Psi'(s,\sigma_1)=\int_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds-\frac{\partial F}{\partial x'}.$$

Wir haben daher das Resultat: *Auf einer Kurve, die dem Integral* (1) *einen kleinsten (oder größten) Wert erteilt, müssen, abgesehen von einer Punktmenge vom Maße Null, durchweg die Gleichungen gelten:*

$$(8) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_{s_0}^{s} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y;\, \cos\gamma, \sin\gamma)\,ds - \frac{\partial F}{\partial x'}(x, y;\, \cos\gamma, \sin\gamma) = c, \\ \displaystyle\int_{s_0}^{s} \frac{\partial F}{\partial y}(x, y;\, \cos\gamma, \sin\gamma)\,ds - \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y;\, \cos\gamma, \sin\gamma) \doteq c', \end{cases}$$

wo c und c′ Konstante bedeuten.

Wir bezeichnen nun mit $\Phi(s)$ und $\Phi_1(s)$ die stetigen Funktionen:

$$(9) \quad \begin{cases} \Phi(s) = \displaystyle\int_{s_0}^{s} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y;\, \cos\gamma, \sin\gamma)\,ds - c, \\ \Phi_1(s) = \displaystyle\int_{s_0}^{s} \frac{\partial F}{\partial y}(x, y;\, \cos\gamma, \sin\gamma)\,ds - c', \end{cases}$$

und betrachten die Gleichungen:

$$(10) \quad \begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x'}(x(s), y(s);\, \cos\varphi, \sin\varphi) = \Phi(s), \\ &\frac{\partial F}{\partial y'}(x(s), y(s);\, \cos\varphi; \sin\varphi) = \Phi_1(s). \end{aligned}$$

Abgesehen von einer Punktmenge vom Maße Null muß also der Winkel γ diesen beiden Gleichungen genügen. Es kann Werte von s geben, für die diese Gleichungen identisch in φ erfüllt sind; wegen der Stetigkeit aller in diesen Gleichungen auftretenden Funktionen müssen diese Werte von s eine abgeschlossene Menge bilden. Der Bogen $(s_0 s_1)$ unserer Kurve zerfällt also in eine höchstens abzählbar unendliche Menge von Bögen der folgenden zwei Arten:

1. Bögen, in deren sämtlichen Punkten die beiden Gleichungen (10) identisch in φ erfüllt sind.

2. Bögen, die in ihrem Inneren keinen einzigen Punkt enthalten, in dem die beiden Gleichungen (10) identisch erfüllt sind.

Betrachten wir zuerst die Bögen der ersteren Art. Es müssen auf denselben die Gleichungen bestehen:

$$-\sin\varphi\,\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}(x, y;\, \cos\varphi, \sin\varphi) + \cos\varphi\,\frac{\partial^2 F}{\partial x'\,\partial y'}(x, y;\, \cos\varphi, \sin\varphi) = 0,$$

$$-\sin\varphi\,\frac{\partial^2 F}{\partial x'\,\partial y'}(x, y;\, \cos\varphi, \sin\varphi) + \cos\varphi\,\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x, y;\, \cos\varphi, \sin\varphi) = 0,$$

und zwar identisch in φ. Wegen der Relationen:

$$\frac{1}{y'^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}(x, y; x', y') = -\frac{1}{x' y'}\frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'}(x, y; x', y')$$
$$= \frac{1}{x'^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x, y; x', y') = F_1(x, y; x', y')$$

reduzieren sie sich auf die eine Gleichung:

$$F_1(x, y; \cos\varphi, \sin\varphi) = 0,$$

die also identisch in φ bestehen muß. Die linke Seite dieser Gleichung ist eine analytische Funktion von x, y und φ; die Gleichung kann also in der Form geschrieben werden:

$$G(x, y)\varphi^m + [\varphi]_{m+1} = 0, \quad (m \geqq 0),$$

wo $G(x, y)$ eine analytische Funktion bedeutet. Hieraus aber folgt:

$$G(x(s), y(s)) = 0.$$

Wir sehen also: *Die Bögen der ersteren Art sind Bögen analytischer Kurven.*

Analytische Kurven aber, die dem Integral (1) einen kleinsten (oder größten) Wert erteilen, müssen den Lagrangeschen Gleichungen (2) genügen, die sich bekanntlich auf die eine Gleichung reduzieren:

$$(11) \qquad (x'y'' - x''y')F_1 + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y} = 0.$$

Da auf den jetzt betrachteten Bögen F_1 identisch verschwindet, so sind sie *singuläre* Lösungen dieser Gleichungen.

Wir gehen nun über zur Untersuchung der Bögen von der zweiten Art. Die Gleichungen (10) sind periodisch in φ von der Periode 2π; es genügt also, die Wurzeln zu betrachten, die im Intervalle $0 \leqq \varphi < 2\pi$ liegen. Für einen im Inneren der jetzt betrachteten Bögen liegenden Punkt können diese Gleichungen nur eine endliche Anzahl von Wurzeln besitzen, die in dieses Intervall fallen; sie mögen mit $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ bezeichnet werden. Unter diesen Wurzeln kann sich eine mehrfache Wurzel φ_ν nur dann finden, wenn für eine der Zahlen $\nu = 1, 2, \cdots, n$ die Gleichung besteht:

$$(12) \qquad F_1(x, y; \cos\varphi_\nu, \sin\varphi_\nu) = 0.$$

Man sieht wieder leicht, daß auf jedem Bogen die Punkte, in denen eine der Wurzeln φ_ν der Gleichungen (10) auch noch die Gleichung (12) befriedigt, eine abgeschlossene Menge bilden. In der Tat, haben die Gleichungen (10) an irgend einer Stelle n Wurzeln, die ins Intervall $(0, 2\pi)$ fallen, unter denen keine der Gleichung (12) genügt, so gilt dasselbe für eine Umgebung dieser Stelle. Der von uns betrachtete Bogen zerfällt also wieder in eine höchstens abzählbar unendliche Teilmenge von Bögen der folgenden zwei Arten:

1. Bögen, in deren jedem Punkte mindestens eine der Wurzeln der Gleichungen (10) auch noch die Gleichung (12) befriedigt, und

2. Bögen, die in ihrem Inneren keinen einzigen Punkt enthalten, in dem die Gleichungen (10) und (12) eine Wurzel gemeinsam haben.

Der erste dieser beiden Fälle ist wieder leicht zu erledigen. Da die Gleichung (12) nicht identisch in φ_ν erfüllt ist — sonst würde ja der Bogen zu den bereits oben betrachteten gehören —, ergibt sich daraus φ_ν als algebroide Funktion von x und y. Die Einführung dieser Werte in die Gleichungen (10) zeigt dann, daß unser Bogen einer analytischen Gleichung genügt. Wie bei den bereits erledigten Bögen erkennen wir daher auch bei den jetzt betrachteten, *daß sie den Lagrangeschen Gleichungen* (2) *genügen müssen, und zwar als singuläre Lösungen.*

Es bleibt der letzte und schwierigste Fall zu untersuchen, nämlich solche Bögen, auf denen keine mehrfache Wurzel der Gleichungen (10) liegt. Sei (σ_0, σ_1) ein beliebiger ganz im Inneren eines solchen Bogens liegender Bogen. Auf (σ_0, σ_1) haben die Gleichungen (10) dann überall gleichviel Wurzeln: $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \cdots, \varphi_n(s)$. Dieselben sind stetige Funktionen von s, und es gibt eine positive Konstante ε, so daß die Ungleichungen gelten:

$$(13) \qquad |\varphi_\mu(s) - \varphi_\nu(s)| > \varepsilon, \quad (\mu, \nu = 1, 2, \cdots, n;\ \mu \neq \nu).$$

Ein oben erhaltenes Resultat besagt: In jedem Punkte des Bogens (σ_0, σ_1), abgesehen höchstens von einer Punktmenge vom Maße Null, ist der Winkel $\gamma(s)$, den die positive Richtung der Kurventangente mit der positiven x-Richtung bildet, gleich einer der Wurzeln $\varphi_\nu(s)$ der Gleichungen (10). Ferner ist der Winkel $\gamma(s)$ zufolge eines Satzes von R. Baire*) als Funktion der ersten Klasse auf dem Bogen (σ_0, σ_1) höchstens punktweise unstetig, seine Stetigkeitsstellen liegen also auf diesem Bogen überall dicht.

Sei σ irgend eine Stetigkeitsstelle von $\gamma(s)$. Dann muß offenbar an der Stelle σ der Winkel $\gamma(\sigma)$ zusammenfallen mit einer der Wurzeln $\varphi_\nu(s)$ der Gleichungen (10). In der Tat, wäre dies nicht der Fall, so gäbe es, da für $s = \sigma$ alle $\varphi_\nu(s)$ und nach Voraussetzung auch $\gamma(s)$ stetig sind, eine Umgebung von σ, in der nirgends $\gamma(s)$ mit einer der Funktionen $\varphi_\nu(s)$ zusammenfiele, was unmöglich ist, da die Menge der Punkte, in denen $\gamma(s)$ mit keinem $\varphi_\nu(s)$ zusammenfällt, nur das Maß Null hat, und somit kein Intervall enthalten kann.

An jeder Stetigkeitsstelle σ von $\gamma(s)$ ist daher für ein geeignetes ν: $\gamma(\sigma) = \varphi_\nu(\sigma)$. Aus dem Bestehen der Ungleichungen (13) folgt aber, daß

*) R. Baire, Leçons sur les fonctions discontinues, p. 83.

es dann eine Umgebung von σ geben muß, in der nirgends $\gamma(s) = \varphi_\mu(s)$, $(\mu \neq \nu)$ wird; da nun aber überall, abgesehen von einer Punktmenge vom Maße Null, $\gamma(s)$ gleich einer der Wurzeln $\varphi_\mu(s)$ der Gleichungen (10) sein muß, so sehen wir:

Jede Stetigkeitsstelle von $\gamma(s)$ läßt sich mit einem Intervall umgeben, in dem — abgesehen von einer Punktmenge vom Maße Null — $\gamma(s)$ mit ein und derselben stetigen Funktion $\varphi_\nu(s)$ übereinstimmt.

Das ist aber nur so möglich, daß in diesem Intervall $\gamma(s)$ und $\varphi_\nu(s)$ *ausnahmslos* übereinstimmen. In der Tat hat man für alle diesem Intervall angehörenden s und S:

$$x(s) - x(S) = \int_S^s \cos\gamma(s)\,ds = \int_S^s \cos\varphi_\nu(s)\,ds;$$

$$y(s) - y(S) = \int_S^s \sin\gamma(s)\,ds = \int_S^s \sin\varphi_\nu(s)\,ds.$$

Aus der Stetigkeit von $\varphi_\nu(s)$ folgt aber:

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi_\nu(s); \quad \frac{dy}{ds} = \sin\varphi_\nu(s)$$

und somit:

$$\operatorname{tg}\gamma(s) = \frac{dy}{ds} : \frac{dx}{ds} = \operatorname{tg}\varphi_\nu(s),$$

wie behauptet wurde.

Wir können also unser Resultat präziser so aussprechen: Jede Stetigkeitsstelle s_0 von $\gamma(s)$ liegt im Inneren eines Intervalls, in dem $\gamma(s)$ durchweg mit einer und derselben stetigen Funktion $\varphi_\nu(s)$ übereinstimmt.

Unter allen den Punkt s_0 enthaltenden Intervallen, in denen die Gleichung $\gamma(s) = \varphi_\nu(s)$ besteht, gibt es ein größtes. Wir behaupten, daß auch noch in den Endpunkten dieses größtmöglichen Intervalls die Gleichung $\gamma(s) = \varphi_\nu(s)$ besteht. In der Tat, wir haben vorausgesetzt, daß unsere Kurve in jedem Punkte eine Tangente besitzt. Die eben verwendete Schlußweise lehrt, daß im Anfangspunkte dieses größtmöglichen Intervalls der Richtungswinkel $\gamma(s)$ der vorderen Tangente, im Endpunkte des Intervalls der der hinteren Tangente nicht von den Werten der Funktion $\varphi_\nu(s)$ in diesen Punkten verschieden sein kann. Wegen der vorausgesetzten Existenz einer einzigen Tangente gilt aber das von vorderer und hinterer Tangente Bewiesene von der Tangente selbst. Schließlich sehen wir also, daß jeder Stetigkeitspunkt von $\gamma(s)$ sich mit einem Intervall umgeben läßt derart, daß für jeden Punkt dieses Intervalls (die Endpunkte inbegriffen) die Beziehung $\gamma(s) = \varphi_\nu(s)$ gilt, während für ein größeres Intervall dies nicht mehr gelten würde.

Die Punkte, die nicht innere Punkte eines solchen Intervalls*) sind, bilden bekanntlich eine abgeschlossene Menge M; dieselbe ist nirgends dicht, da diese Intervalle — ebenso wie die Stetigkeitsstellen von $\gamma(s)$ — überall dicht liegen. Diese Menge muß weiter eine perfekte Menge sein, d. h. es müssen ihre sämtlichen Punkte Häufungspunkte sein. In der Tat, gemäß der Definition der Menge M ist jeder ihrer Punkte Unstetigkeitspunkt von $\gamma(s)$. Enthielte sie nun einen isolierten Punkt, so müßte derselbe Endpunkt eines Intervalls δ_1 und Anfangspunkt eines anderen δ_2 sein. In δ_1 wäre $\gamma(s) = \varphi_\nu(s)$, in δ_2 wäre $\gamma(s) = \varphi_\mu(s)$; in dem betrachteten Punkte aber würde, wie oben gezeigt, $\gamma(s) = \varphi_\nu(s) = \varphi_\mu(s)$ sein. Wegen der Ungleichungen (13) folgt daraus $\mu = \nu$; d. h. der betrachtete Punkt wäre kein Unstetigkeitspunkt von $\gamma(s)$, entgegen der Voraussetzung, daß er zur Menge M gehört.

Wir sehen also: Die Unstetigkeitsstellen von $\gamma(s)$ bilden eine perfekte Menge; in allen Punkten dieser Menge, die Endpunkte eines der die Menge definierenden Intervalle sind, fällt $\gamma(s)$ zusammen mit einer der Wurzeln $\varphi_\nu(s)$ der Gleichungen (10).

Als Funktion der ersten Klasse kann $\gamma(s)$ nach dem Satze von R. Baire**) auch bezüglich dieser perfekten Menge nur punktweise unstetig sein, d. h. ihre Stetigkeitsstellen bezüglich dieser Menge liegen in dieser Menge überall dicht. Sei also σ ein Punkt von M, der Stetigkeitspunkt von $\gamma(s)$ in bezug auf M ist. Dann muß wieder $\gamma(\sigma)$ mit einer der Wurzeln $\varphi_\nu(\sigma)$ der Gleichungen (10) zusammenfallen. Denn in der Tat, es ist bekanntlich jeder Punkt M Häufungspunkt von Endpunkten der die Menge M definierenden Intervalle. In jedem solchen Intervallendpunkte aber hat, wie erwähnt, $\gamma(s)$ einen der Werte $\varphi_\nu(s)$; wäre nun $\gamma(\sigma)$ verschieden von allen $\varphi_\nu(\sigma)$, so ließe sich σ so mit einem Intervall umgeben, daß auch in allen Punkten von M, die in dieses Intervall fallen, $\gamma(s)$ von allen $\varphi_\nu(s)$ verschieden wäre; das ist aber unmöglich. Es muß also eine Gleichung bestehen: $\gamma(\sigma) = \varphi_\nu(\sigma)$.

Hieraus aber folgt, daß σ Stetigkeitsstelle von $\gamma(\sigma)$ im gewöhnlichen Sinne ist (also nicht bloß in bezug auf die perfekte Menge M). In der Tat, in allen den Intervallen, deren Endpunkte sich in σ häufen, muß ebenfalls $\gamma(s) = \varphi_\nu(s)$ sein. Denn lägen in jeder Nähe von σ Intervalle, in denen $\gamma(s) = \varphi_\mu(s)$ wäre $(\mu \neq \nu)$, so bestände dieselbe Beziehung in den Endpunkten dieser Intervalle, und σ könnte wegen der Ungleichungen

*) Zu ihnen gehören u. a. die Endpunkte der genannten Intervalle.

**) R. Baire, l. c., p. 88 ff. Dabei heißt eine Funktion $f(s)$ stetig bezüglich einer perfekten Menge M im Punkte s_0 dieser Menge, wenn zu jedem positiven ε ein positives η gehört, so daß in allen Punkten s von M, für welche $|s - s_0| < \eta$ ist, auch $|f(s) - f(s_0)| < \varepsilon$ wird.

(13) auch nicht Stetigkeitsstelle von $\gamma(s)$ in bezug auf die Menge M sein. Es läßt sich also σ mit einem Intervall umgeben, in dem wieder — abgesehen höchstens von einer Punktmenge vom Maße Null — die Beziehung gilt: $\gamma(s) = \varphi_\nu(s)$, und wir haben schon oben gesehen, daß dann diese Beziehung in dem genannten Intervall ausnahmslos gilt.

Wir sehen also: In jedem Punkte von M, in dem $\gamma(s)$ stetig in bezug auf M ist, ist $\gamma(s)$ auch stetig im gewöhnlichen Sinne. Andererseits kann aber die Menge M gemäß ihrer Definition nur Unstetigkeitsstellen von $\gamma(s)$ enthalten. Dieser Widerspruch läßt nur eine Lösung zu: *Die Menge M enthält keinen einzigen Punkt.*

Wir haben also das wichtige Resultat: Der Winkel $\gamma(s)$ ist auf dem ganzen Bogen (σ_0, σ_1) eine stetige Funktion von s. Die Gleichungen (8), von denen wir bisher nur beweisen konnten, daß sie auf unserem Bogen abgesehen von einer Punktmenge vom Maße Null bestehen, *müssen daher auf diesem Bogen ausnahmslos erfüllt sein.*

Aus dem Bestehen der Gleichungen (8) kann man nun aber, da, wie bewiesen, der Winkel γ als Funktion von s stetig ist, und ferner auf unserem Bogen der Ausdruck $F_1(x, y, \cos\gamma, \sin\gamma)$ durchaus von Null verschieden ist, wie Du Bois-Reymond und Hilbert gezeigt haben*), schließen, *daß dieser Bogen ebenfalls den Lagrangeschen Gleichungen* (2) *genügen muß.*

Das Schlußresultat dieser Untersuchungen läßt sich nunmehr so aussprechen: *Jeder rektifizierbare, durchweg mit einer Tangente versehene Kurvenbogen, der dem Integrale* (1) *einen kleinsten (oder größten) Wert erteilt, ist zusammengesetzt aus Teilbögen, deren jeder analytisch ist und den Lagrangeschen Gleichungen genügt.* Wo zwei verschiedene solche Bögen aneinander grenzen, ist:

$$F_1(x, y, \cos\gamma, \sin\gamma) = 0.$$

Ein solches Linienelement ist ein singuläres Element der Lagrangeschen Gleichungen.

Um auch die sogenannten *diskontinuierlichen* Lösungen unseres Variationsproblems zu erhalten, müssen wir eine weitere Verallgemeinerung unserer Voraussetzungen eintreten lassen. Während wir bisher von der Klasse von Kurven, unter denen wir die Lösung unseres Problems suchten, vorausgesetzt haben, sie seien rektifizierbar und durchweg mit einer Tangente versehen, wollen wir von denselben außer der Rektifizierbarkeit nur mehr verlangen, daß sie in jedem Punkte eine vordere Tangente besitzen. D. h. also, es müssen die durch die Gleichungen (3) definierten Grenzwerte nur für positives h bestehen. Dann bedeute γ wieder den Winkel,

*) Siehe die in Fußnote auf S. 254 angeführte Literatur.

den die vordere Tangente mit der x-Achse einschließt. Wie oben sieht man, daß $\cos\gamma$ und $\sin\gamma$ und somit auch γ selbst, als Funktionen von s betrachtet, von der ersten Baireschen Klasse und somit auf jeder perfekten Menge höchstens punktweise unstetig sind. Alle auftretenden Integrale haben daher auch hier einen Sinn.

Wie oben werden die beiden Gleichungen (8) abgeleitet, die wieder, abgesehen von einer Punktmenge vom Maße Null, überall erfüllt sein müssen, ein Resultat, das sich auch so aussprechen läßt:

Auf unserer Kurve müssen

$$\frac{\partial F}{\partial x'}(x, y; \cos\gamma, \sin\gamma) \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y; \cos\gamma, \sin\gamma)$$

bezw. übereinstimmen mit den durch die Gleichungen (9) definierten stetigen Funktionen $\Phi(s)$ und $\Phi_1(s)$, wieder abgesehen von einer Punktmenge vom Maße Null.

Wieder läßt sich unser Kurvenbogen zerlegen in eine höchstens abzählbar unendliche Menge von Teilbögen der folgenden drei Arten:

1. Bögen, auf denen die Gleichung:

$$F_1(x, y; \cos\varphi, \sin\varphi) = 0$$

identisch in φ erfüllt ist.

2. Bögen, in deren jedem Punkte mindestens eine Wurzel φ_ν der Gleichungen (10) auch noch der eben angeschriebenen Gleichung genügt.

3. Bögen, die in ihrem Inneren keinen einzigen Punkt enthalten, in dem eine Wurzel φ_ν der Gleichungen (10) auch noch der Gleichung $F_1 = 0$ genügt.

Von den Bögen der ersten und zweiten Art erkennt man wie oben, daß sie *stückweise analytisch sind und sich aus Bögen von singulären Lösungen der Lagrangeschen Gleichungen zusammensetzen müssen*, die aber nunmehr auch Ecken bilden können. Bei Betrachtung der Bögen dritter Art schlagen wir, analog wie oben, den folgenden Weg ein:

Die Stetigkeitsstellen von $\gamma(s)$ müssen wegen des Satzes von Baire auf einem solchen Bogen überall dicht liegen. In jedem Stetigkeitspunkte muß $\gamma(s)$ mit einer der Wurzeln $\varphi_\nu(s)$ der Gleichungen (10) übereinstimmen, und dieser Punkt läßt sich dann mit einem Intervall umgeben, in dessen Innerem durchweg $\gamma(s) = \varphi_\nu(s)$ ist. Hieraus schließen wir wieder, daß die Unstetigkeitsstellen von $\gamma(s)$ eine abgeschlossene Menge M bilden, nur können wir hier nicht mehr wie oben schließen, daß diese Menge keine isolierten Punkte enthalten kann; hingegen ergibt sich wie oben, daß die Menge M keine perfekte Teilmenge enthalten kann. Nun ist aber jede abgeschlossene Menge, die keine perfekte Teilmenge enthält, abzählbar*), so daß wir schließlich sehen:

*) Vgl. etwa Schoenflies, Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten, p. 65 ff.

Auf den Bögen der dritten Art bilden die Unstetigkeitsstellen von $\gamma(s)$ — falls es solche überhaupt gibt — eine abgeschlossene abzählbare Menge. Jeder von zwei solchen Unstetigkeitspunkten begrenzte Teilbogen genügt den Lagrangeschen Gleichungen, und in den isolierten Unstetigkeitsstellen schließen sich diese Teilbögen so aneinander, daß die Ausdrücke:

$$\frac{\partial F}{\partial x'}(x, y; \cos\gamma, \sin\gamma); \quad \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y; \cos\gamma, \sin\gamma)$$

stetig bleiben. Mehr aber läßt sich, wie man aus Beispielen sehen kann, aus dem Verschwinden der ersten Variation nicht ableiten.

§ 2.

In diesem Abschnitte wollen wir die folgende Aufgabe behandeln*): Es seien zwischen den drei unbekannten Funktionen $y(x)$, $z(x)$, $s(x)$ die zwei Differentialgleichungen erster Ordnung vorgeschrieben:

$$(14) \qquad \begin{aligned} f(y', z', s', y, z, s; x) &= 0, \\ g(y', z', s', y, z, s; x) &= 0. \end{aligned}$$

Ferner seien für $x = a_1$ die Anfangswerte vorgeschrieben:

$$(15) \qquad y(a_1) = y^{(1)}, \quad z(a_1) = z^{(1)}, \quad s(a_1) = s^{(1)},$$

für $x = a_2$ hingegen die beiden Endwerte:

$$(16) \qquad z(a_2) = z^{(2)}, \quad s(a_2) = s^{(2)}.$$

Es soll ein System von drei diesen Bedingungen genügenden Funktionen $y(x)$, $z(x)$, $s(x)$ gefunden werden, so daß an der Stelle $x = a_2$ die Funktion $y(x)$ einen kleinsten Wert hat (d. h. mit anderen Worten: wenn $Y(x)$, $Z(x)$, $S(x)$ ein zweites System von Funktionen bedeutet, das ebenfalls den Bedingungen (14) — (16) genügt und dem ersten hinlänglich benachbart ist, so soll stets $Y(a_2) - y(a_2) > 0$ sein).

Wir machen die folgenden Voraussetzungen:

1. Die beiden in (14) auftretenden Funktionen f und g mögen für alle in Betracht kommenden Systeme ihrer Argumente regulär-analytisch sein.

2. Die drei Funktionen $y(x)$, $z(x)$, $s(x)$ sollen stetig und stetig differenzierbar sein.

3. Nach Einsetzen dieser drei Funktionen in den Ausdruck:

$$(17) \qquad \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial g}{\partial z'} - \frac{\partial f}{\partial z'}\frac{\partial g}{\partial y'},$$

möge derselbe durchaus von Null verschieden ausfallen.

---

*) Dabei schließe ich mich in Gedankengang und Bezeichnungsweise so eng als möglich an die in der Einleitung zitierte Abhandlung von Hilbert an.

Wir wollen beweisen, daß, wenn außerdem die später zu entwickelnde Bedingung (27) erfüllt ist, *die Funktionen* $y(x)$, $z(x)$, $s(x)$ *analytisch sein müssen und zusammen mit zwei ebenfalls analytischen Funktionen* $\lambda(x)$ *und* $\mu(x)$ *die Lagrangeschen Differentialgleichungen:*

$$(18)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial y'} &= 0, \\ \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial z'} &= 0, \\ \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial s} - \frac{d}{dx}\frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial s'} &= 0 \end{aligned}$$

befriedigen müssen.

Nach dem Vorgange von D. Hilbert setzen wir nun:

$$S(x) = s(x) + \varepsilon_1 \sigma_1(x) + \varepsilon_2 \sigma_2(x),$$

wo $\sigma_1(x)$ und $\sigma_2(x)$ für $x = a_1$ und $x = a_2$ verschwinden mögen, sonst aber willkürlich sind, und bestimmen die beiden Funktionen $Y(x, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $Z(x, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ als diejenigen Lösungen der Differentialgleichungen:

$$(19)\qquad \begin{aligned} f(Y', Z', S', Y, Z, S;\, x) &= 0, \\ g(Y', Z', S', Y, Z, S;\, x) &= 0, \end{aligned}$$

die für $x = a_1$ die Anfangswerte $y^{(1)}$ und $z^{(1)}$ haben (siehe Gleichung (15)). Die Funktionen Y und Z werden dann analytische Funktionen*) von ε_1 und ε_2 in der Umgebung der Stelle $(0, 0)$ dieser beiden Veränderlichen und reduzieren sich für $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ auf $y(x)$ und $z(x)$. Diejenigen unter ihnen, für welche auch noch

$$Z(a_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = z(a_2)$$

ist, gehören daher — für genügend kleine ε_1, ε_2 — zu den Funktionen, denen gegenüber $y(x)$ Minimum sein soll. Die Theorie der gewöhnlichen Maxima und Minima mit Nebenbedingungen zeigt, daß es dann zwei Konstanten l, m gibt, die nicht beide Null sind und für welche

$$(20)\qquad \begin{aligned} \left[\frac{\partial(l\,Y(a_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2) + m\,Z(a_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2))}{\partial \varepsilon_1}\right]_{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0} &= 0, \\ \left[\frac{\partial(l\,Y(a_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2) + m\,Z(a_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2))}{\partial \varepsilon_2}\right]_{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0} &= 0 \end{aligned}$$

wird. Differenziert man die Gleichungen (19) nach ε_1 und ε_2 und setzt dann $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, so bekommt man:

---

*) Der Umstand, daß die unabhängige Veränderliche x in (19) in nicht analytischer Weise vorkommt, stört hierbei nicht. Siehe Picard, Traité III, p. 157.

$$\frac{\partial f}{\partial y'}\left[\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 + \frac{\partial f}{\partial y}\left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 + \frac{\partial f}{\partial z'}\left[\frac{\partial Z'}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 + \frac{\partial f}{\partial z}\left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 + \frac{\partial f}{\partial s'}\sigma_1' + \frac{\partial f}{\partial s}\sigma_1 = 0,$$

$$\frac{\partial g}{\partial y'}\left[\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 + \frac{\partial g}{\partial y}\left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 + \frac{\partial g}{\partial z'}\left[\frac{\partial Z'}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 + \frac{\partial g}{\partial z}\left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 + \frac{\partial g}{\partial s'}\sigma_1' + \frac{\partial g}{\partial s}\sigma_1 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'}\left[\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 + \frac{\partial f}{\partial y}\left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 + \frac{\partial f}{\partial z'}\left[\frac{\partial Z'}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 + \frac{\partial f}{\partial z}\left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 + \frac{\partial f}{\partial s'}\sigma_2' + \frac{\partial f}{\partial s}\sigma_2 = 0,$$

$$\frac{\partial g}{\partial y'}\left[\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 + \frac{\partial g}{\partial y}\left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 + \frac{\partial g}{\partial z'}\left[\frac{\partial Z'}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 + \frac{\partial g}{\partial z}\left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 + \frac{\partial g}{\partial s'}\sigma_2' + \frac{\partial g}{\partial s}\sigma_2 = 0.$$

Durch Multiplikation dieser Gleichungen mit zwei später zu bestimmenden Funktionen $\lambda(x)$ und $\mu(x)$, Addition und Integration folgt weiter:

$$(21)\quad \begin{aligned} &\int_{a_1}^{a_2}\Big\{\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y'}\left[\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y}\left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z'}\left[\frac{\partial Z'}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 \\ &\quad + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z}\left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s'}\sigma_1' + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s}\sigma_1\Big\}\,dx = 0, \\ &\int_{a_1}^{a_2}\Big\{\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y'}\left[\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y}\left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z'}\left[\frac{\partial Z'}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 \\ &\quad + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z}\left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s'}\sigma_2' + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s}\sigma_2\Big\}\,dx = 0. \end{aligned}$$

Bisher konnten wir uns wörtlich dem Hilbertschen Gedankengang anschließen. Um nun die Voraussetzung einer zweimaligen Differenzierbarkeit von $y(x)$, $z(x)$, $s(x)$ zu vermeiden, müssen wir von hier ab einen abweichenden Weg einschlagen. Wir formen die Gleichungen (21) durch partielle Integration um:

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{a_1}^{a_2}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y}\,dx\cdot\left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_1}\right]_0^{x=a_2} + \int_{a_1}^{a_2}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z}\left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_1}\right]_0^{x=a_2} \\ &+\int_{a_1}^{a_2}\Big\{\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y'} - \int_{a_1}^{x}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y}\,dx\Big\}\left[\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 dx \\ &+\int_{a_1}^{a_2}\Big\{\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z'} - \int_{a_1}^{x}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z}\,dx\Big\}\left[\frac{\partial Z'}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 dx \\ &+\int_{a_1}^{a_2}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s'}\sigma_1'\,dx + \int_{a_1}^{a_2}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s}\sigma_1\,dx = 0, \end{aligned}\right.$$

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int_{a_1}^{a_2}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y}\,dx\cdot\left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_2}\right]_0^{x=a_2}+\int_{a_1}^{a_2}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z}\,dx\left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_2}\right]_0^{x=a_2}\\
&+\int_{a_1}^{a_2}\left\{\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y'}-\int_{a_1}^{x}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y}\,dx\right\}\left[\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon_2}\right]dx\\
&+\int_{a_1}^{a_2}\left\{\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z'}-\int_{a_1}^{x}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z}\,dx\right\}\left[\frac{\partial Z'}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 dx\\
&+\int_{a_1}^{a_2}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s'}\,\sigma_2'\,dx+\int_{a_1}^{a_2}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s}\,\sigma_2\,dx=0.
\end{aligned}\right.$$

Wir werden weiter unten beweisen, daß die beiden Gleichungen*):

$$(23)\quad \begin{aligned}
&\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y'}-\left[\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y'}\right]^{x=a_2}-\int_{a_2}^{x}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y}\,dx=0,\\
&\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z'}-\left[\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z'}\right]^{x=a_2}-\int_{a_2}^{x}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z}\,dx=0,
\end{aligned}$$

wenn noch die Anfangswerte von $\lambda(x)$ und $\mu(x)$ für $x=a_2$ willkürlich vorgeschrieben sind, stets ein und nur ein Paar von Funktionen $\lambda(x)$, $\mu(x)$ bestimmen. Wir wählen diese Anfangswerte so, daß:

$$(24)\qquad \left[\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y'}\right]^{x=a_2}=l,\qquad \left[\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z'}\right]^{x=a_2}=m$$

wird (wo l und m die in (20) eingeführten Größen bedeuten).

Man erkennt aus (23) unmittelbar, daß nun:

$$\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y'}-\int_{a_1}^{x}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y}\,dx=\left[\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y'}\right]^{x=a_1},$$

$$\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z'}-\int_{a_1}^{x}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z}\,dx=\left[\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z'}\right]^{x=a_1}$$

wird, so daß die Gleichungen (22) sich wegen (24) und (20) auf:

---

*) Wir können nicht durch Differentiation von (23) zu einem System von Differentialgleichungen für λ und μ übergehen, da wir nicht wissen, ob die auftretenden Größen differenzierbar sind.

$$
(25)\qquad
\begin{aligned}
&\int\limits_{a_1}^{a_2} \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial s'}\, \sigma_1'\, dx + \int\limits_{a_1}^{a_2} \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial s}\, \sigma_1\, dx = 0,\\
&\int\limits_{a_1}^{a_2} \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial s'}\, \sigma_2'\, dx + \int\limits_{a_1}^{a_2} \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial s}\, \sigma_2\, dx = 0
\end{aligned}
$$

reduzieren. Schreiben wir nun, wie Hilbert:

$$(\lambda, \mu; \sigma) = \int\limits_{a_1}^{a_2} \left\{ \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial s'}\, \sigma' + \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial s}\, \sigma \right\} dx,$$

so haben wir: Für irgend zwei in $x = a_1$ und $x = a_2$ verschwindende Funktionen σ_1, σ_2 gibt es stets ein offenbar nicht identisch verschwindendes Lösungssystem der Gleichungen (23), so daß:

$$(\lambda, \mu;\, \sigma_1) = 0 \quad \text{und} \quad (\lambda, \mu;\, \sigma_2) = 0$$

wird.

Von hier an können wir wieder die Schlußweise von Hilbert benützen. Entweder es gilt $(\lambda, \mu; \sigma) = 0$ für alle σ, oder es gibt ein σ_3, so daß $(\lambda, \mu; \sigma_3) \neq 0$. Dann aber gibt es offenbar ein Lösungssystem λ', μ' von (23), für welches $(\lambda', \mu'; \sigma_3) = 0$. Wäre nun nicht für alle $\sigma : (\lambda', \mu'; \sigma) = 0$, so gäbe es ein σ_4, so daß $(\lambda', \mu'; \sigma_4) \neq 0$ wird. Nach dem obigen Satze aber müßte es dann ein Lösungssystem λ'', μ'' von (23) geben, für welches

$$(\lambda'', \mu'';\, \sigma_3) = 0 \quad \text{und} \quad (\lambda'', \mu'';\, \sigma_4) = 0$$

ist. Wir werden nun aber weiter unten zeigen, daß zwischen λ, λ', λ''; μ, μ', μ'' eine Relation bestehen muß:

$$a\lambda + a'\lambda' + a''\lambda'' = 0; \qquad a\mu + a'\mu' + a''\mu'' = 0,$$

in der nicht a, a', a'' alle drei verschwinden. Aus den angeschriebenen Gleichungen aber würde folgen*)

$$a = a' = a'' = 0.$$

Es gibt also ein Lösungssystem von (23) — es werde wieder mit λ, μ bezeichnet —, so daß:

$$(\lambda, \mu; \sigma) = 0$$

für alle in $x = a_1$ und $x = a_2$ verschwindenden σ. Bringt man nun aber $(\lambda, \mu; \sigma)$ auf die Form:

$$(\lambda, \mu; \sigma) = \int\limits_{a_1}^{a_2} \left\{ \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial s'} - \int\limits_{a_1}^{x} \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial s}\, dx \right\} \sigma'\, dx,$$

*) Hilbert l. c.

so ergibt eine bekannte Schlußweise*) das Bestehen der Gleichung:

$$(26) \qquad \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s'} - \left[\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s'}\right]^{x=a_2} - \int_{a_2}^{x} \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s}\,dx = 0.$$

Aus den Gleichungen (14), (23) und (26) ergeben sich nun aber, vorausgesetzt daß:

$$(27) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2(\lambda f+\mu g)}{\partial y'^2} & \frac{\partial^2(\lambda f+\mu g)}{\partial y'\,\partial z'} & \frac{\partial^2(\lambda f+\mu g)}{\partial y'\,\partial s'} & \frac{\partial f}{\partial y'} & \frac{\partial g}{\partial y'} \\ \frac{\partial^2(\lambda f+\mu g)}{\partial z'\,\partial y'} & \frac{\partial^2(\lambda f+\mu g)}{\partial z'^2} & \frac{\partial^2(\lambda f+\mu g)}{\partial z'\,\partial s'} & \frac{\partial f}{\partial z'} & \frac{\partial g}{\partial z'} \\ \frac{\partial^2(\lambda f+\mu g)}{\partial s'\,\partial y'} & \frac{\partial^2(\lambda f+\mu g)}{\partial s'\,\partial z'} & \frac{\partial^2(\lambda f+\mu g)}{\partial s'^2} & \frac{\partial f}{\partial s'} & \frac{\partial g}{\partial s'} \\ \frac{\partial f}{\partial y'} & \frac{\partial f}{\partial z'} & \frac{\partial f}{\partial s'} & 0 & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y'} & \frac{\partial g}{\partial z'} & \frac{\partial g}{\partial s'} & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

ist, y', z', s', λ, μ als differenzierbare Funktionen von x.**) Es können nunmehr die Gleichungen (23) und (26) nach x differenziert werden, wodurch sie in die Gleichungen (18) übergehen; die Funktionen y, z, s, λ, μ genügen also dem Differentialgleichungssysteme (14), (18); woraus unter Berücksichtigung von (27) weiter folgt, daß alle diese Funktionen analytisch sind.

Es sind somit alle unsere Behauptungen erwiesen, und es sind nur die Beweise der die Gleichungen (23) betreffenden Sätze, die zur Verwendung gelangten, nachzutragen.***)

Angenommen, es sei eine Lösung λ, μ der Gleichungen (23) gegeben, so erkennt man aus diesen Gleichungen, daß die Ausdrücke:

$$(28) \qquad v = \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y'}, \qquad w = \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z'} \quad .$$

nach x differenzierbar sind. Wegen der Voraussetzung (17) lassen sich umgekehrt λ, μ als lineare Funktionen von v, w mit in x stetigen Koeffizienten ausdrücken. Differenzieren wir nun die Gleichungen (23) nach x und substituieren die Veränderlichen v, w, so erhalten wir ein System linearer Differentialgleichungen:

---

*) Siehe Bolza, Lectures on the Calculus of Variations, p. 22.

**) Nach einem bekannten Satze über die impliziten Funktionen. Siehe etwa C. Jordan, Cours d'analyse I, p. 82.

***) In meinem Aufsatze „Über die Lagrangesche Multiplikatorenmethode in der Variationsrechnung“ (Monatshefte f. Math. u. Phys. 14 (1903)) habe ich viel allgemeinere Systeme dieser Art betrachtet und die Existenz ihrer Lösungen nachgewiesen.

$$v' = a(x)\,v + a_1(x)\,w,$$
$$w' = b(x)\,v + b_1(x)\,w$$

für v und w, und die darin auftretenden Koeffizienten sind stetige Funktionen von x. Bedeutet umgekehrt v, w irgend ein System von Lösungen dieser Differentialgleichungen, und bestimmt man λ, μ aus den Gleichungen (28), so ist ersichtlich, daß λ, μ den Gleichungen (23) genügen. Man erkennt nunmehr leicht, daß tatsächlich die Sätze bestehen:

Die Gleichungen (23) besitzen immer eine und nur eine Lösung λ, μ, die für $x = a_2$ vorgeschriebene Werte annimmt. Zwischen je drei Lösungen von (23) besteht immer eine linear-homogene Relation mit konstanten Koeffizienten.

Es sind somit auch unsere ursprünglichen Behauptungen vollständig bewiesen.

INHALT.

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exakten Ausführung stets auf besonderen Blättern, wenn möglich in der gewünschten Größe und in tunlichst präziser Zeichnung dem Manuskripte beilegen zu wollen. Außerdem wird um möglichst genaue Angabe der Adresse gebeten.

Die Redaktion.

Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heften und umfaßt ca. 36 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.

Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 20 Mark; jährlich erscheinen etwa 4—6 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Verantwortl. Redaktion: **F. Klein,** Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 3, **W. v. Dyck,** München, Hildegardstr. 1½, **David Hilbert,** Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 29, **Otto Blumenthal,** Aachen, Rütscherstraße 37.

Zusendungen sind zu richten an die Mitglieder der auf der Titelseite genannten Gesamtredaktion.