Über die Verteilung der Primideale in den Idealklassen eines algebraischen Zahlkörpers.

Von

Edmund Landau in Berlin.

Vorwort.

In einer Reihe von Arbeiten*) habe ich die wichtigsten bekannten Gesetze über die Verteilung der Primzahlen und speziell der Primzahlen einer arithmetischen Progression mit vereinfachten Hilfsmitteln bewiesen und zum Teil verschärft. Die von mir angewandten Methoden benutzen nur die Elemente der Funktionentheorie, in erster Linie den Cauchyschen Integralsatz; ich habe keinen Gebrauch von den neueren Untersuchungen der Herren Hadamard, v. Mangoldt und de la Vallée Poussin über die Dichtigkeit der Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion und einiger verwandter Funktionen gemacht. Dies war darum von Bedeutung, weil es für die von Herrn Dedekind eingeführte Zetafunktion, welche einem beliebigen algebraischen Zahlkörper entspricht, unbekannt ist, ob sie in der ganzen Ebene existiert und ob sie Nullstellen besitzt. Meine neuen analytischen Kunstgriffe waren imstande, zum ersten Mal**) den *„Primidealsatz“* zu beweisen:

*) „Neuer Beweis des Primzahlsatzes und Beweis des Primidealsatzes“, Mathematische Annalen, Bd. 56, 1903, S. 645—670; „Über die Primzahlen einer arithmetischen Progression“, Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Bd. 112, Abt. 2a, 1903, S. 493—535; „Über die zahlentheoretische Funktion $\mu(k)$“, ebenda, S. 537—570; „Bemerkungen zu der Abhandlung von Herrn Kluyver: Reeksen afgeleid uit de reeks $\sum \frac{\mu(m)}{m}$“, Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Verslagen, Bd. 13, 1904, S. 71—83. Ich habe hier nur diejenigen Arbeiten erwähnt, an welche die vorliegende Abhandlung anknüpft. Übrigens setze ich aus ihnen nichts als bekannt voraus.

**) S. die in Anm. 1 zuerst genannte Arbeit; der dort gegebene Beweis des Primidealsatzes benutzt einige Ergebnisse meiner Abhandlung: „Über die zu einem algebraischen Zahlkörper gehörige Zetafunktion und die Ausdehnung der Tschebyschefschen Primzahlentheorie auf das Problem der Verteilung der Primideale“, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 125, 1903, S. 64—188.

Die Anzahl der Primideale eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers, deren Norm $\leqq x$ *ist, ist asymptotisch gleich* $\frac{x}{\log x}$, *d. h. ihr Quotient durch* $\frac{x}{\log x}$ *nähert sich für* $x = \infty$ *der Grenze* 1.

Im ersten und zweiten Teil der vorliegenden Abhandlung untersuche ich die Verteilung der Primideale eines algebraischen Zahlkörpers auf die einzelnen Klassen äquivalenter Ideale. Mein wichtigstes Resultat ist als Hauptsatz 1*) bezeichnet. Die Methode der Beweisführung ist analog zu meinen früheren Untersuchungen über die arithmetische Progression, welche in dem a. a. O. zum erstenmal bewiesenen Satze**) gipfelten:

k und l seien zwei teilerfremde Zahlen, $\varrho(x)$ *die Anzahl der Primzahlen* $ky + l \leqq x$, $\mathrm{Li}(x)$ *der Integrallogarithmus von* x, $\varphi(k)$ *die Eulersche zahlentheoretische Funktion,* m *eine beliebige reelle Größe. Dann ist*

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log^m x}{x}\left(\varrho(x) - \frac{1}{\varphi(k)}\,\mathrm{Li}(x)\right) = 0.$$

Im dritten Teil der vorliegenden Abhandlung werde ich u. a. einen Satz (Hauptsatz 3)***) beweisen, der sowohl den Hauptsatz 1 (und dadurch den Primidealsatz) als auch den soeben angeführten Satz über die Primzahlen einer arithmetischen Progression als Spezialfälle enthält.

Im vierten Teil ziehe ich aus den allgemeinen Sätzen einige besonders wichtige Folgerungen.

Meine neuen Sätze besagen durchweg, daß gewisse Grenzwerte existieren oder gewisse unendliche Reihen konvergieren. Es ist leicht, heuristische Gründe anzugeben, welche die Sätze wahrscheinlich machen, und der Wortlaut der neuen Sätze wird den Kenner nicht überraschen. Jedoch hat es mich selbst aufs Höchste überrascht, daß meine Methoden kräftig genug sind, um Beweise für diese Sätze zu liefern.

Um dem Leser das Verständnis zu erleichtern, setze ich in der Theorie der Zetafunktion und der verwandten Funktionen nichts aus meinen früheren Arbeiten oder denen anderer Autoren (Riemann, Hadamard, v. Mangoldt, de la Vallée Poussin usw.) als bekannt voraus. Wohl aber muß der Leser mit der Theorie der algebraischen Zahlkörper vertraut sein.

Der erste Paragraph jedes der drei ersten Teile dient ihm als Einleitung.

---

*) s. S. 147.

**) S. die zweite der auf S. 145, Anm. 1 zitierten Arbeiten, S. 507 und 532.

***) s. S. 197.

Erster Teil.

§ 1

(Einleitung).

Das Ziel der §§ 2—10 ist der

Hauptsatz 1. *Ein algebraischer Zahlkörper $\varkappa$ habe die Eigenschaft, daß die über alle Primideale der Hauptklasse (im engeren Sinne*)) erstreckte Summe**)*

$$\sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}}$$

divergiert. h sei die Anzahl der Idealklassen. Es sei $\varrho(x)$ die Anzahl der Primideale einer bestimmten Klasse, deren Norm $\leqq x$ ist, m eine beliebige reelle Zahl. Dann ist

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log^m x}{x}\left(\varrho(x) - \frac{1}{h}\,\mathrm{Li}(x)\right) = 0. \tag{1}$$

Dies besagt insbesondere für $m = 1$ mit Rücksicht auf

$$\lim_{x=\infty} \frac{\mathrm{Li}(x)\log x}{x} = 1,$$

daß für jede Klasse

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varrho(x)}{\dfrac{x}{\log x}} = \frac{1}{h}$$

ist, also für zwei beliebig gegebene Klassen, wenn $\varrho_1(x)$ und $\varrho_2(x)$ die zugehörigen Anzahlen bezeichnen, daß

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varrho_1(x)}{\varrho_2(x)}$$

existiert und $= 1$ ist.

Mit anderen Worten:

In jeder Klasse eines algebraischen Zahlkörpers, für welchen die über alle Primideale der Hauptklasse erstreckte Summe

$$\sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}}$$

divergiert, gibt es asymptotisch gleich viele Primideale.

Daß unter der gemachten Voraussetzung für jede Klasse

$$\sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^s} = \frac{1}{h}\log\frac{1}{s-1} + G(s) \qquad (s>1) \tag{2}$$

---

*) D. h. zwei Ideale heißen äquivalent, wenn ihr Quotient eine (ganze oder gebrochene) Zahl des Körpers mit positiver Norm ist.

**) $N\mathfrak{n}$ bezeichnet die Norm des Ideals $\mathfrak{n}$; ich schreibe keine Klammer, auch nicht in der Folge bei $N\mathfrak{n}^s$ (s^{te} Potenz von $N\mathfrak{n}$).

ist, wo $\lim\limits_{s=1} G(s)$ existiert, folgt ohne weiteres aus den Untersuchungen von Herrn Weber „über Zahlengruppen in algebraischen Körpern"*), also durch Anwendung der klassischen Dirichletschen Methode. Aber die Gleichung (2) berechtigt noch bei weitem nicht zu dem Schluß, daß jede Klasse des Körpers asymptotisch gleich viele Primideale enthält. Um diesen Schluß zu rechtfertigen, besteht die Hauptschwierigkeit in dem Nachweise der Existenz der Grenzwerte

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varrho_1(x)}{\frac{x}{\log x}}, \qquad \lim_{x=\infty} \frac{\varrho_2(x)}{\frac{x}{\log x}}. \tag{3}$$

Aus

$$\begin{aligned} \sum_{\mathfrak{p}_1} \frac{1}{N\mathfrak{p}_1^{\,s}} &= \frac{1}{h} \log \frac{1}{s-1} + G_1(s), \\ \sum_{\mathfrak{p}_2} \frac{1}{N\mathfrak{p}_2^{\,s}} &= \frac{1}{h} \log \frac{1}{s-1} + G_2(s)^{**)} \end{aligned} \tag{4}$$

läßt sich unmittelbar nur folgern: wenn die Grenzwerte (3) existieren, so sind sie $= 1$.

Wie groß die zwischen (4) und der Gleichung

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varrho_1(x)}{\varrho_2(x)} = 1 \tag{5}$$

noch vorhandene Lücke ist, ergibt sich aus folgenden historischen Daten.

In einem wichtigen analogen Fall — für zwei arithmetische Progressionen $ky + l_1$ und $ky + l_2$ mit derselben Differenz k, wo l_1 und l_2 zu k relativ prim sind — hatte Dirichlet***) im Jahre 1837 bewiesen, daß, $\varphi(k) = h$ gesetzt,

$$\begin{aligned} \sum_{p_1} \frac{1}{p_1^{\,s}} &= \frac{1}{h} \log \frac{1}{s-1} + G_1(s), \\ \sum_{p_2} \frac{1}{p_2^{\,s}} &= \frac{1}{h} \log \frac{1}{s-1} + G_2(s) \end{aligned}$$

ist, wo p_1 die Primzahlen durchläuft, welche $\equiv l_1 \pmod{k}$ sind, und p_2 die Primzahlen $\equiv l_2 \pmod{k}$. $G_1(s)$ und $G_2(s)$ sind Funktionen, welche gegen einen endlichen Grenzwert konvergieren, falls die reelle Variable s zu 1

---

*) Zweite Abhandlung, Mathematische Annalen, Bd. 49, 1897, S. 83—89.

**) Wo $\mathfrak{p}_1$ bezw. $\mathfrak{p}_2$ die Primideale der betreffenden Klasse durchläuft.

***) „Beweis des Satzes, daß jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Faktor sind, unendlich viele Primzahlen enthält", Abhandlungen der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, S. 45—71; Werke, Bd. 1, 1889, S. 313—342.

abnimmt. Aber erst 59 Jahre später hat Herr de la Vallée Poussin*) den Nachweis geführt, daß für die Anzahlen $\varrho_1(x)$ und $\varrho_2(x)$ der Primzahlen $p_1 \leqq x$ bezw. $p_2 \leqq x$

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varrho_1(x)}{\varrho_2(x)} = 1 \tag{5}$$

ist. Dirichlet hatte diese Gleichung (5) in der Einleitung seiner berühmten Arbeit nur vermutungsweise mit den klaren und unzweideutigen Worten ausgesprochen: „Die aufmerksame Betrachtung der natürlichen Reihe der Primzahlen läßt an derselben eine Menge von Eigenschaften wahrnehmen, deren Allgemeinheit durch fortgesetzte Induktion zu jedem beliebigen Grade von Wahrscheinlichkeit erhoben werden kann, während die Auffindung eines Beweises, der allen Anforderungen der Strenge genügen soll, mit den größten Schwierigkeiten verbunden ist. Eines der merkwürdigsten Resultate dieser Art bietet sich dar, wenn man sämtliche Glieder der Reihe durch dieselbe, übrigens ganz beliebige Zahl dividiert. Nimmt man die Primzahlen aus, die im Divisor aufgehen und mithin unter den ersten Gliedern der Reihe vorkommen, so werden alle übrigen einen Rest lassen, welcher relative Primzahl zum Divisor ist, und das Resultat, welches sich bei fortgesetzter Division herausstellt, besteht darin, daß jeder Rest der genannten Art unaufhörlich wiederkehrt, *und zwar so, daß das Verhältnis der Zahlen, welche für irgend zwei solche Reste bezeichnen, wie oft sie bis zu einem gewissen Gliede erschienen sind, bei immer weiter fortgesetzter Division die Einheit zur Grenze hat.* Abstrahiert man von der zunehmenden Gleichmäßigkeit des Vorkommens der einzelnen Reste und beschränkt das Beobachtungsresultat auf die nie aufhörende Wiederkehr eines jeden derselben, so läßt sich dasselbe in dem Satze aussprechen: daß jede unbegrenzte arithmetische Reihe, deren erstes Glied und Differenz keinen gemeinschaftlichen Faktor haben, unendlich viele Primzahlen enthält.“

Dirichlet beweist die letztere Behauptung auf Grund seiner Gleichung

$$\sum_{p \equiv l} \frac{1}{p^s} = \frac{1}{h} \log \frac{1}{s-1} + G(s);$$

der hier kursiv gedruckte Satz spricht offenbar genau die zuerst von Herrn de le Vallée Poussin bewiesene Gleichung (5) aus. Übrigens habe ich dieselbe erheblich einfacher bewiesen und dahin verschärft, daß für jedes m

---

*) „Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers. Deuxième Partie. Les fonctions de Dirichlet et les nombres premiers de la forme linéaire $Mx+N$“, Annales de la société scientifique de Bruxelles, Bd. 20, Teil 2, 1896, S. 281—362.

(6) $$\lim_{x=\infty} \log^m x \left(\frac{\varrho_1(x)}{\varrho_2(x)} - 1\right) = 0$$

ist. Dies folgt nämlich unmittelbar aus dem a. a. O.*) von mir bewiesenen Satze

$$\varrho(x) = \frac{1}{h}\,\mathrm{Li}(x) + O(xe^{-\sqrt[d]{\log x}}),$$

wo d eine passend wählbare positive Konstante ist.

Analog werde ich in §§ 2—10 für die Primideale der gegebenen Klasse beweisen, daß

$$\varrho(x) = \frac{1}{h}\,\mathrm{Li}(x) + O(xe^{-\sqrt[d]{\log x}})$$

ist; daraus folgt unmittelbar die Gleichung (1), also der Hauptsatz 1 und auch die in der Schreibweise mit (6) übereinstimmende Gleichung, in welcher $\varrho_1(x)$ und $\varrho_2(x)$ die auf S. 147 angegebene Bedeutung haben.

§ 2.

Satz I. *Es sei $f(n)$ eine zahlentheoretische Funktion**), welche den beiden Bedingungen***)*

(7) $$\sum_{n=1}^{x} \frac{|f(n)|}{n} = O(\log x)$$

und

(8) $$\sum_{n=1}^{x} f(n) = O(x^{1-\gamma})$$

genügt, wo γ eine zwischen 0 (exkl.) und 1 (inkl.) gelegene Konstante ist. Dann konvergiert die Reihe

(9) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

für $\Re(s) > 1-\gamma$ und stellt dort eine reguläre Funktion $\varphi(s)$ dar; ferner besteht, wenn $s = \sigma + ti$ gesetzt wird, für

(10) $$t \geqq e^{\frac{2}{\gamma}}, \quad 1 - \frac{1}{\log t} \leqq \sigma \leqq 2$$

die Ungleichung

---

*) l. c., S. 532.

**) D. h. $f(n)$ ist für jedes ganzzahlige $n \geqq 1$ definiert, braucht aber nicht ganzzahlig und auch nicht reell zu sein.

***) Unter $O(g(x))$ wird eine Funktion von x verstanden, deren Quotient durch $g(x)$ dem absoluten Betrage nach für alle x von einer gewissen Stelle an unterhalb einer endlichen Schranke gelegen ist.

(11) $$|\varphi(s)| < c_1 \log t,$$
wo c_1 eine Konstante bezeichnet.)*

Das Gebiet (10) erstreckt sich ins Unendliche.

Beweis. Zunächst ist klar, daß $\varphi(s)$ für die durch (10) bestimmten Werte von s konvergiert; denn es ist für jedes solche s

$$\Re(s) \geqq 1 - \frac{1}{\log t} \geqq 1 - \frac{1}{\frac{2}{\gamma}} = 1 - \frac{\gamma}{2} > 1 - \gamma,$$

und wegen (8) ist bekanntlich die Reihe (9) für $\Re(s) > 1 - \gamma$ konvergent, und zwar gleichmäßig in einer gewissen Umgebung jeder Stelle dieser Halbebene. Der Vollständigkeit wegen will ich dies beweisen. Wenn

$$S(0) = 0$$

und für $x \geqq 1$

$$\sum_{n=1}^{x} f(n) = S(x)$$

gesetzt wird, so ist nach (8) für alle $x \geqq 1$

$$|S(x)| < A x^{1-\gamma},$$

wo A eine Konstante bezeichnet. Es ist

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{f(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{x} \frac{S(n) - S(n-1)}{n^s} = \sum_{n=1}^{x} S(n)\left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right) + \frac{S(x)}{(x+1)^s}$$

(12) $$= \sum_{n=1}^{x} S(n)\, s \int_{n}^{n+1} \frac{du}{u^{s+1}} + \frac{S(x)}{(x+1)^s},$$

und für alle s des Rechtecks

(13) $$\sigma_0 \leqq \sigma \leqq \sigma_1, \quad -t_1 \leqq t \leqq t_1,$$

wo $\sigma_0 > 1 - \gamma$ ist,

$$\left| S(n)\, s \int_{n}^{n+1} \frac{du}{u^{s+1}} \right| < A n^{1-\gamma} (\sigma_1 + t_1) \frac{1}{n^{1+\sigma_0}} = \frac{A(\sigma_1 + t_1)}{n^{\sigma_0+\gamma}},$$

$$\left| \frac{S(x)}{(x+1)^s} \right| < \frac{A x^{1-\gamma}}{(x+1)^{\sigma_0}} < \frac{A}{x^{\sigma_0+\gamma-1}}.$$

Hieraus folgt nach (12) die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (9) im Rechteck (13), also in einer gewissen Umgebung jeder Stelle der Halbebene $\Re(s) > 1 - \gamma$. Die Reihe (9) stellt also für $\Re(s) > 1 - \gamma$ eine reguläre analytische Funktion $\varphi(s)$ dar.

---

*) c_1 hängt also nur von der Funktion $f(n)$ ab. Analog werden in der Folge mit $c_2, c_3, \cdots$ Konstanten bezeichnet, welche gewisse Relationen für alle s eines Gebietes erfüllen. Die Bezeichnung wird stets so gewählt sein, daß jede solche Konstante $c_2, c_3, \cdots$ durch jede größere Zahl ersetzt werden kann.

Es sei nun s eine beliebige Zahl, welche die Ungleichungen (10) erfüllt; dann zerlege ich in

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

die Summe in zwei durch $\left[t^{\frac{1}{\gamma}}\right]$ getrennte Teile*) und erhalte dadurch

$$(14) \qquad \varphi(s) = \sum_{n=1}^{t^{\frac{1}{\gamma}}} \frac{f(n)}{n^s} + \sum_{n=t^{\frac{1}{\gamma}}+1}^{\infty} \frac{S(n) - S(n-1)}{n^s}.$$

Hierbei und im folgenden verstehe ich der bequemeren Schreibweise wegen unter einer Summe mit einer nicht ganzzahligen oberen oder unteren Summationsgrenze y, daß der Summationsbuchstabe bis $[y]$ bezw. von $[y]$ an läuft. Aus (14) folgt weiter

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{t^{\frac{1}{\gamma}}} \frac{f(n)}{n^s} + \sum_{n=t^{\frac{1}{\gamma}}+1}^{\infty} S(n) \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right) - \frac{S\left(\left[t^{\frac{1}{\gamma}}\right]\right)}{\left(\left[t^{\frac{1}{\gamma}}\right]+1\right)^s}$$

$$= \sum_{n=1}^{t^{\frac{1}{\gamma}}} \frac{f(n)}{n^s} + s \sum_{n=t^{\frac{1}{\gamma}}+1}^{\infty} S(n) \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{s+1}} - \frac{S\left(\left[t^{\frac{1}{\gamma}}\right]\right)}{\left(\left[t^{\frac{1}{\gamma}}\right]+1\right)^s},$$

$$|\varphi(s)| < \sum_{n=1}^{t^{\frac{1}{\gamma}}} \frac{|f(n)|}{n^{1-\frac{1}{\log t}}} + (2+t) \sum_{n=t^{\frac{1}{\gamma}}+1}^{\infty} A n^{1-\gamma} \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{2-\frac{1}{\log t}}} + \frac{A\left(\left[t^{\frac{1}{\gamma}}\right]\right)^{1-\gamma}}{\left(\left[t^{\frac{1}{\gamma}}\right]+1\right)^{1-\frac{1}{\log t}}}$$

$$< \sum_{n=1}^{t^{\frac{1}{\gamma}}} \frac{|f(n)|}{n} n^{\frac{1}{\log t}} + (2+t) A \sum_{n=t^{\frac{1}{\gamma}}+1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{u^{1-\gamma}\, du}{u^{2-\frac{1}{\log t}}} + \frac{A t^{\frac{1}{\gamma}(1-\gamma)}}{t^{\frac{1}{\gamma}\left(1-\frac{1}{\log t}\right)}}$$

$$\leqq t^{\frac{1}{\gamma} \frac{1}{\log t}} \sum_{n=1}^{t^{\frac{1}{\gamma}}} \frac{|f(n)|}{n} + (2+t) A \int_{\left[t^{\frac{1}{\gamma}}\right]+1}^{\infty} \frac{du}{u^{1+\gamma-\frac{1}{\log t}}} + \frac{A t^{\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1}{\log t}}}{t},$$

*) $[y]$ bezeichnet für reelle y die größte ganze Zahl $\leqq y$.

also wegen

$$t^{\frac{1}{\gamma}\frac{1}{\log t}} = e^{\frac{1}{\gamma}}, \quad 2+t<2t$$

(15) $$|\varphi(s)| < e^{\frac{1}{\gamma}} \sum_{n=1}^{t^{\frac{1}{\gamma}}} \frac{|f(n)|}{n} + 2tA \int_{t^{\frac{1}{\gamma}}}^{\infty} \frac{du}{u^{1+\gamma-\frac{1}{\log t}}} + \frac{Ae^{\frac{1}{\gamma}}}{t}.$$

Nach der Voraussetzung (7) ist für alle ganzzahligen $x \geqq 2$

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{|f(n)|}{n} < B \log x,$$

wo B eine Konstante bezeichnet, also

(16) $$\sum_{n=1}^{t^{\frac{1}{\gamma}}} \frac{|f(n)|}{n} < B \log\left[t^{\frac{1}{\gamma}}\right] \leqq \frac{B}{\gamma} \log t;$$

ferner ist

(17) $$\int_{t^{\frac{1}{\gamma}}}^{\infty} \frac{du}{u^{1+\gamma-\frac{1}{\log t}}} = \frac{1}{\gamma - \frac{1}{\log t}} \cdot \frac{1}{t^{\frac{1}{\gamma}\left(\gamma - \frac{1}{\log t}\right)}} \leqq \frac{1}{\gamma - \frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{e^{\frac{1}{\gamma}}}{t} = \frac{2}{\gamma}\, e^{\frac{1}{\gamma}}\, \frac{1}{t}$$

aus (15), (16) und (17) ergibt sich

$$|\varphi(s)| < e^{\frac{1}{\gamma}} \frac{B}{\gamma} \log t + 2tA\, \frac{2}{\gamma}\, e^{\frac{1}{\gamma}}\, \frac{1}{t} + \frac{Ae^{\frac{1}{\gamma}}}{t},$$

also wegen

$$1 < \log t, \quad \frac{1}{t} < \log t$$

$$|\varphi(s)| < e^{\frac{1}{\gamma}} \frac{B}{\gamma} \log t + e^{\frac{1}{\gamma}} \frac{4A}{\gamma} \log t + e^{\frac{1}{\gamma}} A \log t = c_1 \log t,$$

womit der Satz I bewiesen ist.

Satz II. *Die für $\Re(s) > 1$ durch die Reihe*

(18) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

definierte Funktion $\zeta(s)$ hat im Punkte $s=1$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum 1, *ist im übrigen für $\Re(s) > 0$ regulär und genügt für*

$$(19) \qquad t \geqq 3, \quad 1 - \frac{1}{\log t} \leqq \sigma \leqq 2$$

der Ungleichung

$$(20) \qquad |\zeta(s)| < c_2 \log t,$$

wo c_2 eine Konstante bezeichnet.

Beweis. Wenn $\varepsilon > 0$ ist, ist die Reihe (18) für $\Re(s) \geqq 1 + \varepsilon$ wegen

$$\left|\frac{1}{n^s}\right| \leqq \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$$

gleichmäßig konvergent; (18) definiert also für $\Re(s) > 1$ eine reguläre Funktion $\zeta(s)$. Ferner ist für $\Re(s) > 1$

$$\zeta(s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^s}$$

$$= 1 + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}} - \frac{1}{n^{s-1}}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^s}$$

$$(21) \qquad = 1 + \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}} - \frac{1}{n^{s-1}}\right) + \frac{1}{(n+1)^s}\right\},$$

also wegen

$$(22) \qquad \frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}} - \frac{1}{n^{s-1}}\right) + \frac{1}{(n+1)^s} = -s\int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}}$$

$$(23) \qquad \zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}}.$$

Die in (23) auftretende unendliche Reihe ist wegen

$$\left|\int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}}\right| \leqq \int_0^1 \frac{du}{n^{1+\sigma}} = \frac{1}{n^{1+\sigma}}$$

für $\Re(s) \geqq \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ gleichmäßig konvergent und stellt daher für $\Re(s) > 0$ eine reguläre Funktion dar; folglich ist

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$$

für $\Re(s) > 0$ regulär.*)

*) Der vorangehende Beweis der bekannten Eigenschaft von $\zeta(s)$ rührt von Herrn de la Vallée Poussin her und steht zuerst in seiner „Démonstration simplifiée du théorème de Dirichlet sur la progression arithmétique", Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie Royale de Belgique, Bd. 53, 1896, S. 6—8.

Es sei nun s ein Wert, der die Ungleichungen (19) erfüllt. Nach (21) und (22) ist

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{t} \left\{ \frac{1}{s-1} \left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}} - \frac{1}{n^{s-1}} \right) + \frac{1}{(n+1)^s} \right\} - s \sum_{n=t+1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}}$$

$$= \frac{1}{s-1} \frac{1}{([t]+1)^{s-1}} + \sum_{n=1}^{t+1} \frac{1}{n^s} - s \sum_{n=t+1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}},$$

$$|\zeta(s)| < \frac{1}{t-1} \frac{1}{([t]+1)^{-\frac{1}{\log t}}} + \sum_{n=1}^{t+1} \frac{1}{n^{1-\frac{1}{\log t}}} + (2+t) \sum_{n=t+1}^{\infty} \int_0^1 \frac{du}{(n+u)^{2-\frac{1}{\log t}}}$$

$$< \frac{1}{t-1} (t+1)^{\frac{1}{\log t}} + (t+1)^{\frac{1}{\log t}} \sum_{n=1}^{t+1} \frac{1}{n} + 2t \sum_{n=t+1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{2-\frac{1}{\log t}}}$$

$$< \frac{1}{\frac{t}{2}} (2t)^{\frac{1}{\log t}} + (2t)^{\frac{1}{\log t}} \left(1 + \int_1^t \frac{du}{u} + \frac{1}{t+1} \right) + 2t \int_{[t]+1}^{\infty} \frac{du}{u^{2-\frac{1}{\log t}}}$$

$$< \frac{2}{t} \cdot 2^{\frac{1}{\log t}} \cdot e + 2^{\frac{1}{\log t}} \cdot e (\log t + 2) + 2t \int_t^{\infty} \frac{du}{u^{2-\frac{1}{\log t}}}$$

$$< 1 \cdot 2 \cdot e + 2 \cdot e (\log t + 2) + 2t \frac{1}{1 - \frac{1}{\log t}} \cdot \frac{1}{t^{1-\frac{1}{\log t}}}$$

$$\leqq 2e + 2e \log t + 4e + 2 \frac{1}{1 - \frac{1}{\log 3}} \cdot e$$

$$< c_2 \log t,$$

womit der Satz II bewiesen ist.

Es sei nun $\varkappa$ ein beliebiger algebraischer Zahlkörper, k sein Grad; $\zeta_\varkappa(s)$ sei die von Herrn Dedekind*) (für reelle s) eingeführte Funktion, welche durch die unendliche Reihe definiert ist:

$$\zeta_\varkappa(s) = \sum_{\mathfrak{n}} \frac{1}{N\mathfrak{n}^s}, \tag{24}$$

---

*) Vergl. z. B. die von ihm herausgegebenen Vorlesungen Dirichlets über Zahlentheorie, 3. Aufl., 1879, S. 578; 4. Aufl., 1894, S. 610.

wo $\mathfrak{n}$ alle Ideale des Körpers durchläuft.*) Herr Dedekind hat bewiesen, daß die Reihe in (24) für $s > 1$ konvergiert, und daß bei Annäherung von rechts der Grenzwert

$$\lim_{s=1} (s-1)\,\zeta_\varkappa(s)$$

existiert und gleich einer positiven Konstanten

$$g\,h$$

ist, wo h die Anzahl der Idealklassen des Körpers und g eine andere durch den Körper wohlbestimmte positive Konstante ist.

Aus der von Herrn Dedekind bewiesenen Konvergenz für $s > 1$ folgt für $\mathfrak{R}(s) > 1$ wegen

$$\left|\frac{1}{N\mathfrak{n}^s}\right| = \frac{1}{N\mathfrak{n}^\sigma}$$

die Konvergenz, für $\mathfrak{R}(s) \geqq 1 + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ die gleichmäßige Konvergenz der Reihe in (24); dieselbe definiert also eine für $\mathfrak{R}(s) > 1$ reguläre analytische Funktion $\zeta_\varkappa(s)$, welche wegen

$$\lim_{s=1} (s-1)\,\zeta_\varkappa(s) = g\,h \neq 0$$

in $s = 1$ nicht regulär ist; falls sie dort einen Pol besitzt, ist derselbe von der ersten Ordnung.

Mehr folgt aus Herrn Dedekinds Entwickelungen nicht über den analytischen Charakter dieser Funktion. Für $\mathfrak{R}(s) > 1$ läßt sich die Gleichung (24) auch so schreiben:

$$\zeta_\varkappa(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^s}, \tag{25}$$

wo $F(n)$ die Anzahl der Ideale des Körpers bezeichnet, deren Norm gleich der ganzen rationalen Zahl n ist.

Herr Weber**) hat folgende Sätze 1., 2., 3. bewiesen, von denen 2. leicht aus 1. folgt, 3. unmittelbar aus 2.:

1. Die Anzahl $T(x)$ aller Ideale der Hauptklasse, welche durch ein

---

*) u^s bezeichnet für positive u die ganze transzendente Funktion $e^{s \log u}$ von s, wo $\log u$ der reelle Wert des Logarithmus ist.

**) „Über einen in der Zahlentheorie angewandten Satz der Integralrechnung", Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, 1896, S. 275—281; vergl. ferner seine auf S. 148, Anm. 1 zitierte Arbeit, S. 89—94 und außerdem sein Lehrbuch der Algebra, Bd. 2, 2. Aufl., 1899, S. 672—678 und 712.

gegebenes Ideal $\mathfrak{a}$ teilbar sind und deren Norm $\leqq x$ ist, ist in der Gestalt darstellbar:

(26)
$$T(x) = \frac{g}{N\mathfrak{a}}\, x + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right).$$

2. Die Anzahl $A(x)$ aller Ideale einer Klasse, deren Norm $\leqq x$ ist, hat die Form

(27)
$$A(x) = gx + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right).$$

3. Die Anzahl $H(x)$ aller Ideale, deren Norm $\leqq x$ ist, ist

(28)
$$H(x) = ghx + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right).\text{*)}$$

Mit Hilfe dieser Weberschen Gleichung (28) und der Sätze I und II beweise ich nun den

Satz III. *Die Funktion* $\zeta_\varkappa(s)$ *ist über die Gerade* $\Re(s) = 1$ *fortsetzbar, hat im Punkte* $s = 1$ *einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum* gh, *ist sonst regulär für* $\Re(s) > 1 - \frac{1}{k}$ *und genügt für*

(29)
$$t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log t} \leqq \sigma \leqq 2$$

der Ungleichung

(30)
$$|\zeta_\varkappa(s)| < c_3 \log t,$$

wo c_3 *eine (nur vom Körper abhängige) Konstante bezeichnet.*

Beweis. Ich betrachte die Funktion

$$\varphi(s) = \zeta_\varkappa(s) - gh\zeta(s);$$

sie ist nach (25) für $\Re(s) > 1$ durch die Dirichletsche Reihe

(31)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

definiert wo

$$f(n) = F(n) - gh$$

ist. Wegen

---

*) Schon Herr Dedekind hatte bewiesen, daß

$$\lim_{x=\infty} \frac{T(x)}{x} = \frac{g}{N\mathfrak{a}}, \quad \lim_{x=\infty} \frac{A(x)}{x} = g, \quad \lim_{x=\infty} \frac{H(x)}{x} = gh$$

ist.

$$S(x)=\sum_{n=1}^{x} f(n)=\sum_{n=1}^{x}(F(n)-gh)=H(x)-ghx$$

ist nach (28)

$$S(x)=O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right),$$

so daß die zweite Voraussetzung (8) des Satzes I erfüllt ist, falls

$$\gamma=\frac{1}{k}$$

gesetzt wird. Wegen

$$\sum_{n=1}^{x}\frac{|f(n)|}{n}\leqq\sum_{n=1}^{x}\frac{F(n)+gh}{n}=\sum_{n=1}^{x}\frac{F(n)}{n}+gh\sum_{n=1}^{x}\frac{1}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{x}\frac{H(n)-H(n-1)}{n}+O(\log x)$$

$$=\sum_{n=1}^{x}H(n)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{H(x)}{x+1}+O(\log x)$$

$$=O\sum_{n=1}^{x}n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+O(1)+O(\log x)=O\sum_{n=1}^{x}\frac{1}{n+1}+O(\log x)$$

$$=O(\log x)$$

ist auch die erste Voraussetzung (7) jenes Satzes erfüllt. Aus Satz I folgt also, daß die Reihe (31) für $\Re(s)>1-\frac{1}{k}$ konvergiert, daß $\varphi(s)$ für $\Re(s)>1-\frac{1}{k}$ regulär ist und für jedes den Bedingungen (29) genügende s die Ungleichung

(11) $$|\varphi(s)|<c_1\log t$$

erfüllt.

Nach Satz II ist

$$\zeta(s)-\frac{1}{s-1}$$

für $\Re(s)>0$, also a fortiori für $\Re(s)>1-\frac{1}{k}$ regulär, und $\zeta(s)$ genügt für die s des Gebietes (19), also a fortiori für diejenigen des Gebietes (29) der Ungleichung

(20) $$|\zeta(s)|<c_2\log t.$$

Folglich ist

$$\zeta_{\varkappa}(s)=\varphi(s)+gh\zeta(s)$$

für $\Re(s) > 1 - \frac{1}{k}$ regulär bis auf den Pol erster Ordung $s = 1$ mit dem Residuum gh und genügt für die s des Gebietes (29) der Ungleichung

$$|\zeta_\varkappa(s)| < c_1 \log t + ghc_2 \log t = c_3 \log t,$$

womit (30), also der Satz III bewiesen ist.

§ 3.

Satz IV. *Es erfülle die zahlentheoretische Funktion $f(n)$ die Voraussetzungen des Satzes I, d. h. es sei für $x \geqq 2$*

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{|f(n)|}{n} < B \log x$$

und

$$|S(x)| = \left| \sum_{n=1}^{x} f(n) \right| < Ax^{1-\gamma},$$

wo $0 < \gamma \leqq 1$ ist. Es sei $\varphi(s)$ die für $\Re(s) > 1 - \gamma$ durch die Dirichletsche Reihe

(9) $$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

definierte Funktion. Dann ist für

(10) $$t \geqq e^{\frac{2}{\gamma}}, \quad 1 - \frac{1}{\log t} \leqq \sigma \leqq 2$$

(32) $$|\varphi'(s)| < c_4 \log^2 t.$$

Beweis. Es werde die für alle m gültige Gleichung*)

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{m} \frac{f(n)}{n^s} + s \sum_{n=m+1}^{\infty} S(n) \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{s+1}} - \frac{S(m)}{(m+1)^s}$$

nach s differentiiert:

$$\varphi'(s) = -\sum_{n=1}^{m} \frac{f(n) \log n}{n^s} + \sum_{n=m+1}^{\infty} S(n) \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{s+1}} - s \sum_{n=m+1}^{\infty} S(n) \int_n^{n+1} \frac{\log u \, du}{u^{s+1}}$$
$$+ \frac{S(m) \log (m+1)}{(m+1)^s}.$$

Wenn s dem Gebiete (10) angehört, setze ich $m = \left[t^{\frac{1}{\gamma}}\right]$ und erhalte:

*) s. S. 152.

$$|\varphi'(s)| < \sum_{n=1}^{t^{\frac{1}{\gamma}}} \frac{|f(n)|\log n}{n^{1-\frac{1}{\log t}}} + \sum_{n=t^{\frac{1}{\gamma}}+1}^{\infty} A n^{1-\gamma} \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{2-\frac{1}{\log t}}}$$

$$+ (2+t) \sum_{n=t^{\frac{1}{\gamma}}+1}^{\infty} A n^{1-\gamma} \int_n^{n+1} \frac{\log u\, du}{u^{2-\frac{1}{\log t}}} + \frac{A t^{\frac{1}{\gamma}(1-\gamma)} \log\left(t^{\frac{1}{\gamma}}+1\right)}{t^{\frac{1}{\gamma}}\left(1-\frac{1}{\log t}\right)}$$

$$< \log\left(t^{\frac{1}{\gamma}}\right) t^{\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\log t}} \sum_{n=1}^{t^{\frac{1}{\gamma}}} \frac{|f(n)|}{n} + A \sum_{n=t^{\frac{1}{\gamma}}+1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{u^{1-\gamma}\, du}{u^{2-\frac{1}{\log t}}}$$

$$+ 2tA \sum_{n=t^{\frac{1}{\gamma}}+1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{u^{1-\gamma}\log u\, du}{u^{2-\frac{1}{\log t}}} + \frac{A}{t}\, t^{\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\log t}} \log\left(t^{\frac{1}{\gamma}}+t^{\frac{1}{\gamma}}\right)$$

$$< \frac{1}{\gamma}\log t\cdot e^{\frac{1}{\gamma}}\cdot B\log\left(t^{\frac{1}{\gamma}}\right) + A\int_{t^{\frac{1}{\gamma}}}^{\infty} \frac{du}{u^{1+\gamma-\frac{1}{\log t}}} + 2tA\int_{t^{\frac{1}{\gamma}}}^{\infty} \frac{\log u\, du}{u^{1+\gamma-\frac{1}{\log t}}}$$

$$+ \frac{Ae^{\frac{1}{\gamma}}}{t}\left(\log 2 + \frac{1}{\gamma}\log t\right)$$

$$= \frac{1}{\gamma^2} e^{\frac{1}{\gamma}} B\log^2 t + \frac{A}{\gamma-\frac{1}{\log t}} \frac{1}{t^{\frac{1}{\gamma}\left(\gamma-\frac{1}{\log t}\right)}}$$

$$+ 2tA\left(\frac{1}{\gamma-\frac{1}{\log t}} \frac{\log\left(t^{\frac{1}{\gamma}}\right)}{t^{\frac{1}{\gamma}\left(\gamma-\frac{1}{\log t}\right)}} + \frac{1}{\left(\gamma-\frac{1}{\log t}\right)^2} \frac{1}{t^{\frac{1}{\gamma}\left(\gamma-\frac{1}{\log t}\right)}}\right)$$

$$+ \frac{Ae^{\frac{1}{\gamma}}}{t}\left(\log 2 + \frac{1}{\gamma}\log t\right)$$

$$\leqq \frac{1}{\gamma^2} e^{\frac{1}{\gamma}} B\log^2 t + \frac{A}{\gamma-\frac{\gamma}{2}} \frac{e^{\frac{1}{\gamma}}}{t} + 2tA\left(\frac{1}{\gamma-\frac{\gamma}{2}} \frac{\frac{1}{\gamma}e^{\frac{1}{\gamma}}\log t}{t} + \frac{1}{\left(\gamma-\frac{\gamma}{2}\right)^2}\frac{e^{\frac{1}{\gamma}}}{t}\right)$$

$$+ \frac{Ae^{\frac{1}{\gamma}}\log 2}{t} + \frac{Ae^{\frac{1}{\gamma}}}{t}\frac{1}{\gamma}\log t$$

$$= c_5 \log^2 t + \frac{c_6}{t} + c_7 \log t + c_8 + \frac{c_9}{t} + c_{10}\frac{\log t}{t},$$

$$(32) \qquad |\varphi'(s)| < c_4 \log^2 t,$$

womit der Satz IV bewiesen ist.

Satz V. *Es ist für*

$$(19) \qquad t \geqq 3, \quad 1 - \frac{1}{\log t} \leqq \sigma \leqq 2$$

$$(33) \qquad |\zeta'(s)| < c_{11} \log^2 t.$$

Beweis. Es ist für $\Re(s) > 0$ (exkl. $s = 1$) und jedes ganzzahlige $m \geqq 1$ nach S. 154—155

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} \frac{1}{(m+1)^{s-1}} + \sum_{n=1}^{m+1} \frac{1}{n^s} - s \sum_{n=m+1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}},$$

also

$$\zeta'(s) = -\frac{1}{(s-1)^2} \frac{1}{(m+1)^{s-1}} - \frac{1}{s-1} \frac{\log(m+1)}{(m+1)^{s-1}} - \sum_{n=1}^{m+1} \frac{\log n}{n^s}$$

$$-\sum_{n=m+1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}} + s \sum_{n=m+1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u \log(n+u)}{(n+u)^{s+1}}\,du.$$

Wenn nun s im Gebiet (19) liegt und $m = [t]$ gesetzt wird, so ergibt sich

$$|\zeta'(s)| < \frac{1}{(t-1)^2} \frac{1}{([t]+1)^{-\frac{1}{\log t}}} + \frac{1}{t-1} \frac{\log([t]+1)}{([t]+1)^{-\frac{1}{\log t}}} + \sum_{n=1}^{t+1} \frac{\log n}{n^{1-\frac{1}{\log t}}}$$

$$+ \sum_{n=t+1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{2-\frac{1}{\log t}}} + (2+t) \sum_{n=t+1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{\log u\,du}{u^{2-\frac{1}{\log t}}}$$

$$< c_{12} \frac{1}{t^2} + c_{13} \frac{\log t}{t} + (t+1)^{\frac{1}{\log t}} \sum_{n=1}^{t+1} \frac{\log n}{n} + \int_t^{\infty} \frac{du}{u^{2-\frac{1}{\log t}}}$$

$$+ 2t \int_t^{\infty} \frac{\log u\,du}{u^{2-\frac{1}{\log t}}}$$

$$< c_{12} + c_{13} + (2t)^{\frac{1}{\log t}} \sum_{n=1}^{t+1} \frac{\log n}{n} + \frac{1}{1-\frac{1}{\log t}} \frac{1}{t^{1-\frac{1}{\log t}}}$$

$$+ 2t \left(\frac{1}{1-\frac{1}{\log t}} \frac{\log t}{t^{1-\frac{1}{\log t}}} + \frac{1}{\left(1-\frac{1}{\log t}\right)^2} \frac{1}{t^{1-\frac{1}{\log t}}} \right)$$

$$<c_{12}+c_{13}+c_{14}\log^2 t+\frac{1}{1-\frac{1}{\log 3}}\frac{e}{t}+2t\left(\frac{1}{1-\frac{1}{\log 3}}\frac{e\log t}{t}+\frac{1}{\left(1-\frac{1}{\log 3}\right)^2}\frac{e}{t}\right)$$

$$=c_{12}+c_{13}+c_{14}\log^2 t+\frac{c_{15}}{t}+c_{16}\log t+c_{17}$$

$$<c_{11}\log^2 t,$$

was im Satz V behauptet wurde.

Satz VI. *Es ist für*

$$t\geqq e^{2k},\quad 1-\frac{1}{\log t}\leqq\sigma\leqq 2 \tag{29}$$

$$|\zeta_\varkappa'(s)|<c_{18}\log^2 t. \tag{34}$$

Beweis. Wird

$$\varphi(s)=\zeta_\varkappa(s)-gh\,\zeta(s)$$

gesetzt, so erfüllt $\varphi(s)$ nach S. 157—158 die Voraussetzungen des Satzes I. Nach Satz IV ist also für das Gebiet (29)

$$|\varphi'(s)|<c_4\log^2 t;$$

nach Satz V ist dort

$$|\zeta'(s)|<c_{11}\log^2 t, \tag{33}$$

also

$$|\zeta_\varkappa'(s)|\leqq|\varphi'(s)|+gh\,|\zeta'(s)|<c_4\log^2 t+ghc_{11}\log^2 t=c_{18}\log^2 t,$$

womit (34) bewiesen ist.

§ 4.

Es seien

$$\chi_1(\mathfrak{n}),\ \chi_2(\mathfrak{n}),\ \cdots,\ \chi_h(\mathfrak{n})$$

die h Charaktere der (Abelschen) Gruppe der Idealklassen des gegebenen Körpers. Jede dieser h „idealtheoretischen" Funktionen ist für jedes Ideal des Körpers definiert und genügt den drei Bedingungen:

$$\chi(\mathfrak{a})=\chi(\mathfrak{b}), \tag{35}$$

falls $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ derselben Idealklasse angehören;

$$\chi(\mathfrak{a})\neq 0 \tag{36}$$

für alle Ideale;

$$\chi(\mathfrak{a}\mathfrak{b})=\chi(\mathfrak{a})\,\chi(\mathfrak{b}) \tag{37}$$

für zwei beliebige Ideale.

Bekanntlich gibt es h verschiedene (d. h. nicht für alle Ideale übereinstimmende) Funktionen, die den Bedingungen (35), (36), (37) genügen, und zwar ist $\chi(\mathfrak{n})$ stets eine Einheitswurzel, also speziell

$$|\chi(\mathfrak{n})| = 1. \tag{38}$$

Die Bezeichnung der h Charaktere sei so gewählt, daß $\chi_1(\mathfrak{n})$ der Hauptcharakter ist, d. h. diejenige Funktion, welche für alle $\mathfrak{n}$ gleich 1 ist. Für die Ideale der Hauptklasse ist jeder Charakter $= 1$. Es gelten bekanntlich folgende Sätze:

„Wenn $\mathfrak{n}$ alle h Ideale eines vollständigen Repräsentantensystems der Klassen durchläuft, so ist

$$\sum \chi_1(\mathfrak{n}) = h,$$

dagegen für $\nu = 2, 3, \cdots, h$

$$\sum \chi_\nu(\mathfrak{n}) = 0.\text{“} \tag{39}$$

„Wenn $\mathfrak{n}$ ein beliebiges Ideal ist, so ist

$$\sum_{\nu=1}^{h} \chi_\nu(\mathfrak{n}) = h, \tag{40}$$

falls $\mathfrak{n}$ der Hauptklasse angehört, dagegen

$$\sum_{\nu=1}^{h} \chi_\nu(\mathfrak{n}) = 0, \tag{41}$$

falls $\mathfrak{n}$ irgend einer anderen Klasse angehört.“

Aus (37) folgt für jeden Charakter und $s > 1$ die fundamentale Dedekindsche*) Identität

$$\sum_{\mathfrak{n}} \frac{\chi(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s} = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}}, \tag{42}$$

wo $\mathfrak{n}$ alle Ideale, $\mathfrak{p}$ alle Primideale des Körpers durchläuft (wegen der absoluten Konvergenz in beliebiger Reihenfolge). Offenbar gilt (42) für $\Re(s) > 1$. (42) lehrt, daß keine der h für $\Re(s) > 1$ durch die Dirichletschen Reihen

$$L_\nu(s) = \sum_{\mathfrak{n}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, h)$$

definierten analytischen Funktionen in dieser Halbebene eine Nullstelle besitzt.

Offenbar ist

$$L_1(s) = \sum_{\mathfrak{n}} \frac{1}{N\mathfrak{n}^s} = \zeta_\varkappa(s). \tag{43}$$

*) l. c., S. 581 bezw. 612.

Satz VII. *Wenn $\chi(\mathfrak{n})$ ein vom Hauptcharakter verschiedener Charakter ist, so konvergiert die Reihe*

$$\sum_{\mathfrak{n}} \frac{\chi(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s}$$

für $\Re(s) > 1 - \frac{1}{k}$ und stellt dort eine reguläre Funktion von s dar, falls die Ideale nach wachsenden Normen geordnet sind. Hierbei ist die Reihenfolge der Ideale gleicher Norm unerheblich.

Beweis. Es ist, wenn die Ideale auf die (durch $\mathfrak{n}_1, \cdots, \mathfrak{n}_h$ repräsentierten) h Klassen verteilt werden, nach (35)

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leq x} \chi(\mathfrak{n}) = \chi(\mathfrak{n}_1) A_1(x) + \cdots + \chi(\mathfrak{n}_h) A_h(x), \tag{44}$$

wo $A_1(x), \cdots, A_h(x)$ für die einzelnen Klassen die Anzahlen der Ideale bezeichnen, deren Norm $\leqq x$ ist. Nun ist nach (27) für jedes $\nu = 1, 2, \cdots, h$

$$A_\nu(x) = gx + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right),$$

wo die Konstante g von ν unabhängig ist, also nach (44) und (39)

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leq x} \chi(\mathfrak{n}) = \sum_{\nu=1}^{h} \chi(\mathfrak{n}_\nu)\left(gx + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right)\right) = gx \sum_{\nu=1}^{h} \chi(\mathfrak{n}_\nu) + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right)$$

$$= O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right); \tag{45}$$

ferner ist nach S. 158 und Gleichung (38)

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leq x} \frac{|\chi(\mathfrak{n})|}{N\mathfrak{n}} = \sum_{N\mathfrak{n} \leq x} \frac{1}{N\mathfrak{n}} = \sum_{n=1}^{x} \frac{F(n)}{n} = O(\log x). \tag{46}$$

Wird also für jedes ganzzahlige positive n

$$f(n) = \sum_{\mathfrak{n}} \chi(\mathfrak{n})$$

gesetzt, wo $\mathfrak{n}$ alle Ideale mit der Norm n durchläuft, so ist nach (46)

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{|f(n)|}{n} \leqq \sum_{N\mathfrak{n} \leq x} \frac{|\chi(\mathfrak{n})|}{N\mathfrak{n}} = O(\log x)$$

und nach (45)

$$\sum_{n=1}^{x} f(n) = O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right),$$

so daß,

$$\gamma = \frac{1}{k}$$

gesetzt, die Voraussetzungen der Sätze I und IV erfüllt sind.

Es ergibt sich also zunächst, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

für $\Re(s) > 1 - \frac{1}{k}$ konvergiert, d. h. daß für diese s

$$\lim_{x=\infty} \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \frac{\chi(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s}$$

existiert.

Hieraus folgt leicht, daß bei Anordnung der Ideale nach wachsender Norm die Reihe

$$\sum_{\mathfrak{n}} \frac{\chi(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s}$$

für $\Re(s) > 1 - \frac{1}{k}$ gegen einen von der Reihenfolge der Ideale mit gleicher Norm unabhängigen Grenzwert konvergiert. Denn die Summe der absoluten Beträge aller Glieder mit der Norm x (deren Anzahl nach (28)

$$= H(x) - H(x-1) = ghx + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right) - gh(x-1) + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right) = gh + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right)$$

$$= O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right)$$

ist) ist

$$\leqq \sum_{N\mathfrak{n}=x} \frac{1}{N\mathfrak{n}^\sigma} = \sum_{N\mathfrak{n}=x} \frac{1}{x^\sigma} = O\left(\frac{x^{1-\frac{1}{k}}}{x^\sigma}\right) = O\left(\frac{1}{x^{\sigma-1+\frac{1}{k}}}\right),$$

hat also für $x = \infty$ den Grenzwert 0.

$L_2(s), \cdots, L_h(s)$ sind also, da die Voraussetzungen des Satzes I erfüllt sind, für $\Re(s) > 1 - \frac{1}{k}$ regulär und durch die Reihen

$$\sum_{\mathfrak{n}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s} \qquad (\nu = 2, \cdots, h)$$

darstellbar, womit Satz VII bewiesen ist.

Zugleich ergeben sich aus Satz I für

(29) $$t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log t} \leqq \sigma \leqq 2$$

die Ungleichungen

(47) $$\begin{gathered} |L_2(s)| < c_{19} \log t, \\ \cdots\cdots\cdots \\ |L_h(s)| < c_{19} \log t. \end{gathered}$$

Die Konstante c_{19} kann ja für diese $h-1$ Ungleichungen gleichmäßig gewählt werden.

Wegen (43) ist nach Satz III für das Gebiet (29)

(48) $$|L_1(s)| = |\zeta_\varkappa(s)| < c_3 \log t.$$

Ebenso folgt, da Satz IV auf $L_2(s), \cdots, L_h(s)$ anwendbar ist, für (29)

(49) $$|L_2'(s)| < c_{20} \log^2 t,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$|L_h'(s)| < c_{20} \log^2 t$$

und nach Satz VI

(50) $$|L_1'(s)| = |\zeta_\varkappa'(s)| < c_{18} \log^2 t.$$

Wird die größte der vier Zahlen c_3, c_{18}, c_{19}, c_{20} gleich c_{21} gesetzt, so ergibt die Zusammenfassung von (47), (48), (49) und (50) den

Satz VIII. *Es gibt eine Konstante c_{21}*), so daß für*

(29) $$t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log t} \leqq \sigma \leqq 2$$

und alle $\nu = 1, 2, \cdots, h$ die Ungleichungen

(51) $$|L_\nu(s)| < c_{21} \log t,$$

(52) $$|L_\nu'(s)| < c_{21} \log^2 t$$

bestehen.

§ 5.

Es bezeichne nun $L(s)$ die analytische Funktion, welche durch die Gleichung

$$L(s) = \prod_{\nu=1}^{h} L_\nu(s) = L_1(s)\, L_2(s) \cdots L_h(s)$$

definiert ist.

Da nach den Sätzen III und VII

$$(s-1) L_1(s),\ L_2(s),\ \cdots,\ L_h(s)$$

für $\Re(s) > 1 - \frac{1}{k}$ regulär sind, ist $(s-1)\,L(s)$ für $\Re(s) > 1 - \frac{1}{k}$ regulär. Ferner ist für $\Re(s) > 1$ wegen (42)

$$L_\nu(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}} = e^{-\sum\limits_{\mathfrak{p}} \log\left(1 - \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right)}$$

$$= e^{\sum\limits_{\mathfrak{p}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s} + \frac{1}{2}\sum\limits_{\mathfrak{p}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p}^2)}{N\mathfrak{p}^{2s}} + \cdots + \frac{1}{m}\sum\limits_{\mathfrak{p}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p}^m)}{N\mathfrak{p}^{ms}} + \cdots}$$

$$= e^{\sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum\limits_{\mathfrak{p}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p}^m)}{N\mathfrak{p}^{ms}}},$$

also

*) die also nur von dem gegebenen Körper abhängt.

(53)
$$L(s)=e^{\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum\limits_{\mathfrak{p}}\frac{1}{N\mathfrak{p}^{ms}}\sum\limits_{\nu=1}^{h}\chi_\nu(\mathfrak{p}^m)}.$$

Nach (40) und (41) ist

$$\sum_{\nu=1}^{h}\chi_\nu(\mathfrak{p}^m)$$

dann und nur dann von Null verschieden, und zwar $= h$, wenn $\mathfrak{p}^m$ der Hauptklasse angehört. Ich will durch die Bezeichnung $\mathfrak{a}\sim\mathfrak{b}$ in der Folge andeuten, daß die Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ äquivalent sind, also die Ideale der Hauptklasse einfach durch $\mathfrak{a}\sim\mathfrak{o}$ bezeichnen, wo $\mathfrak{o}$ das Einheitsideal ist. Aus (53) folgt alsdann für $\Re(s)>1$

(54)
$$L(s)=e^{h\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum\limits_{\mathfrak{p}^m\sim\mathfrak{o}}\frac{1}{N\mathfrak{p}^{ms}}}.$$

Nach der am Anfang des § 1 über den Körper gemachten Voraussetzung divergiert

$$\sum_{\mathfrak{p}\sim\mathfrak{o}}\frac{1}{N\mathfrak{p}};$$

folglich wächst bei Abnahme der reellen Größe s zu 1 die Summe

$$\sum_{\mathfrak{p}\sim\mathfrak{o}}\frac{1}{N\mathfrak{p}^s}$$

über alle Grenzen. Dies gilt a fortiori von dem Exponenten der rechten Seite von (54). Also existiert

$$\lim_{s=1}L(s)$$

nicht; folglich ist $s=1$ keine reguläre Stelle von $L(s)$. Da $(s-1)L(s)$ für $s=1$ regulär ist, hat $L(s)$ in $s=1$ einen Pol erster Ordnung. Da

$$L(s)=L_1(s)\,L_2(s)\cdots L_h(s)$$

ist und $L_1(s)$ auch einen Pol erster Ordnung in $s=1$ hat, sind die Funktionen $L_2(s),\cdots,L_h(s)$ für $s=1$ von Null verschieden, d. h. es bestehen die Ungleichungen

(55)
$$\sum_{\mathfrak{n}}\frac{\chi_\nu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}}\neq 0\qquad(\nu=2,3,\cdots,h).$$

§ 6.

Aus (54) folgt weiter für $\varepsilon>0$, $t\gtreqless 0$

$$|L(1+\varepsilon+ti)|=e^{\Re\left(h\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum\limits_{\mathfrak{p}^m\sim\mathfrak{o}}\frac{1}{N\mathfrak{p}^{m(1+\varepsilon+ti)}}\right)}$$

(56)
$$=e^{h\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum\limits_{\mathfrak{p}^m\sim\mathfrak{o}}\frac{\cos(mt\log N\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^{m(1+\varepsilon)}}}.$$

und

(57)
$$L(1+\varepsilon) = e^{h \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{\mathfrak{p}^m \sim \mathfrak{o}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^{m(1+\varepsilon)}}},$$

also

$$|L(1+\varepsilon+ti)|\, L(1+\varepsilon) = e^{h \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{\mathfrak{p}^m \sim \mathfrak{o}} \frac{1+\cos(mt \log N\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^{m(1+\varepsilon)}}}.$$

Nun ist für jedes reelle α

$$4(1+\cos\alpha) \geqq 2(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha) = 2 - 2\cos^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha,$$

also

$$|L(1+\varepsilon+ti)|\, L(1+\varepsilon) \geqq e^{\frac{h}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{\mathfrak{p}^m \sim \mathfrak{o}} \frac{1-\cos(2mt\log N\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^{m(1+\varepsilon)}}}$$
$$= e^{\frac{h}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{\mathfrak{p}^m \sim \mathfrak{o}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^{m(1+\varepsilon)}}} \cdot e^{-\frac{h}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{\mathfrak{p}^m \sim \mathfrak{o}} \frac{\cos(2mt\log N\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^{m(1+\varepsilon)}}};$$

aus (56) (wenn statt t darin $2t$ geschrieben wird) und (57) ergibt sich also

$$|L(1+\varepsilon+ti)|\, L(1+\varepsilon) \geqq (L(1+\varepsilon))^{\frac{1}{4}} |L(1+\varepsilon+2ti)|^{-\frac{1}{4}},$$
$$|L(1+\varepsilon+ti)| \geqq \frac{1}{(L(1+\varepsilon))^{\frac{3}{4}} |L(1+\varepsilon+2ti)|^{\frac{1}{4}}}.$$

Da $s=1$ ein Pol erster Ordnung von $L(s)$ ist, ist für $0<\varepsilon\leqq 1$

$$L(1+\varepsilon) < \frac{c_{22}}{\varepsilon},$$

also für $0<\varepsilon\leqq 1,\ t \gtreqless 0$

(58)
$$|L(1+\varepsilon+ti)| > \frac{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{c_{23} |L(1+\varepsilon+2ti)|^{\frac{1}{4}}}.$$

Satz IX. *Jede der Funktionen $L_1(s), L_2(s), \cdots, L_h(s)$ ist in allen Punkten der Geraden $\Re(s)=1$ von Null verschieden.*

Beweis. Der Punkt $s=1$ ist für $L_1(s)$ ein Pol, für $L_2(s), \cdots, L_h(s)$ keine Nullstelle, wie auf S. 167 konstatiert wurde. Es sei $s = 1 + ti\,(t \lessgtr 0)$ Nullstelle einer jener Funktionen. Dann wäre bei positivem zu Null abnehmendem ε der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{L(1+\varepsilon+ti)}{\varepsilon} = L'(1+ti)$$

vorhanden. Dies steht im Widerspruch damit, daß nach (58)

(59)
$$\left|\frac{L(1+\varepsilon+ti)}{\varepsilon}\right| > \frac{1}{c_{23}\,\varepsilon^{\frac{1}{4}} |L(1+\varepsilon+2ti)|^{\frac{1}{4}}}$$

ist; denn der Nenner der rechten Seite in (59) konvergiert gegen Null, mag $L(1+2ti)$ verschwinden oder nicht; die linke Seite wächst also über alle Grenzen. Damit ist Satz IX bewiesen.

Aus Satz VIII folgt durch Multiplikation der h Ungleichungen (51) für

(29) $$t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log t} \leqq \sigma \leqq 2$$

$$|L(s)| = |L(\sigma+ti)| < c_{21}^h \log^h t < \log^{c_{24}} t,$$

also für

$$t \geqq \frac{1}{2} e^{2k}, \quad -\frac{1}{\log(2t)} \leqq \varepsilon \leqq 1,$$

$$|L(1+\varepsilon+2ti)| < \log^{c_{24}}(2t) < \log^{c_{25}} t$$

und speziell für

(60) $$t \geqq e^{2k}, \quad 0 < \varepsilon \leqq 1$$

(61) $$|L(1+\varepsilon+2ti)| < \log^{c_{25}} t.$$

Für (60) ist also nach (58) und (61)

(62) $$|L(1+\varepsilon+ti)| > \frac{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{c_{23} \log^{\frac{c_{25}}{4}} t} > \frac{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{\log^{c_{26}} t}.$$

Ferner ergibt sich aus (51) und (52) für das Gebiet (29)

$$|L'(s)| = |L_1'(s) L_2(s) \cdots L_h(s) + \cdots + L_1(s) L_2(s) \cdots L_h'(s)|$$
$$< h c_{21}^h \log^{h+1} t < \log^{c_{27}} t,$$

also für

(63) $$t \geqq e^{2k}, \quad -\frac{1}{\log t} \leqq \varepsilon \leqq 1$$

(64) $$|L(1+\varepsilon+ti) - L(1+ti)| = \left| \int_1^{1+\varepsilon} L'(\sigma+ti)\, d\sigma \right| \leqq |\varepsilon| \log^{c_{27}} t.$$

Satz X. *Für*

$$t \geqq e^{2k}$$

ist

(65) $$|L(1+ti)| > \frac{1}{\log^{c_{28}} t}.$$

Beweis. Aus (62) und (64) folgt für das in (63) enthaltene Gebiet

(60) $$t \geqq e^{2k}, \quad 0 < \varepsilon \leqq 1,$$

$$|L(1+ti)| = |L(1+\varepsilon+ti) - (L(1+\varepsilon+ti) - L(1+ti))|$$
$$\geqq |L(1+\varepsilon+ti)| - |L(1+\varepsilon+ti) - L(1+ti)| > \frac{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{\log^{c_{26}} t} - \varepsilon \log^{c_{27}} t$$
$$= \frac{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{\log^{c_{26}} t} \left(1 - \varepsilon^{\frac{1}{4}} \log^{c_{26}+c_{27}} t\right).$$

Wird hierin

$$\varepsilon = 2^{-4} \log^{-4c_{26}-4c_{27}} t$$

gesetzt (was für $t \geqq e^{2k}$ zwischen 0 und 1 liegt), so ergibt sich

$$|L(1+ti)| > \frac{2^{-3} \log^{-3c_{26}-3c_{27}} t}{\log^{c_{26}} t} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16 \log^{4c_{26}+3c_{27}} t} > \frac{1}{\log^{c_{28}} t},$$

womit der Satz X bewiesen ist.

Satz XI. *Es gibt eine Konstante* c_{29}, *so daß für*

(66) $$t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log^{c_{29}} t} \leqq \sigma \leqq 2$$

$L(s)$ *von Null verschieden ist und der Ungleichung*

$$|L(s)| > \frac{1}{\log^{c_{29}} t}$$

genügt.

Beweis. Einerseits ist für

$$t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log^{1+c_{27}+c_{28}} t} \leqq \sigma \leqq 1 + \frac{1}{\log^{1+c_{27}+c_{28}} t}$$

nach (64) und (65)

$$|L(\sigma+ti)| \geqq |L(1+ti)| - |L(\sigma+ti) - L(1+ti)|$$

$$> \frac{1}{\log^{c_{28}} t} - |\sigma - 1| \log^{c_{27}} t \geqq \frac{1}{\log^{c_{28}} t} - \frac{1}{\log^{1+c_{28}} t} = \frac{\log t \;-1}{\log^{1+c_{28}} t}$$

(67) $$\geqq \frac{2k-1}{\log^{1+c_{28}} t} > \frac{1}{\log^{c_{30}} t}.$$

Andererseits ist für

$$t \geqq e^{2k}, \quad 1 + \frac{1}{\log^{1+c_{27}+c_{28}} t} \leqq \sigma \leqq 2$$

nach (62)

(68) $$|L(\sigma+ti)| > \frac{(\sigma-1)^{\frac{3}{4}}}{\log^{c_{26}} t} \geqq \frac{1}{\log^{c_{26}+\frac{3}{4}(1+c_{27}+c_{28})} t} = \frac{1}{\log^{c_{31}} t}.$$

Wird die größere der beiden Zahlen c_{30} und c_{31} gleich c_{32} gesetzt, so ist also nach (67) und (68) für

$$t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log^{1+c_{27}+c_{28}} t} \leqq \sigma \leqq 2$$

$$|L(s)| > \frac{1}{\log^{c_{32}} t}.$$

Wird endlich die größere der beiden Zahlen $1 + c_{27} + c_{28}$ und c_{32} mit c_{29} bezeichnet, so ist damit der Satz XI bewiesen.

In dem Gebiete (66) ist $L(s)$, also jede einzelne der Funktionen

$$L_1(s),\ L_2(s),\ \cdots,\ L_h(s)$$

von Null verschieden.

Satz XII. *Es ist für*

(66) $$t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log^{c_{29}} t} \leqq \sigma \leqq 2$$

und alle $\nu = 1, 2, \cdots, h$

(69) $$|L_\nu(s)| > \frac{1}{\log^{c_{33}} t}.$$

Beweis. Für das Gebiet (66) ist nach Satz XI

$$|L(s)| = |L_1(s)|\,|L_2(s)| \cdots |L_h(s)| > \frac{1}{\log^{c_{29}} t},$$

ferner nach Satz VIII

$$|L_1(s)| < c_{21} \log t, \cdots, |L_h(s)| < c_{21} \log t;$$

also genügt jede der Funktionen $L_\nu(s)$ für (66) der Ungleichung

$$|L_\nu(s)| > \frac{1}{\log^{c_{29}} t} \, \frac{1}{c_{21}^{h-1} \log^{h-1} t} > \frac{1}{\log^{c_{33}} t}.$$

Satz XIII. *Es gibt eine Konstante* c_{34}, *so daß für*

(70) $$t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log^{c_{34}} t} \leqq \sigma \leqq 2$$

und alle $\nu = 1, 2, \cdots, h$

$$\left| \frac{L'_\nu(s)}{L_\nu(s)} \right| < \log^{c_{34}} t$$

ist.

Beweis. Für das Gebiet (66) ist nach Satz VIII

$$|L'_\nu(s)| < c_{21} \log^2 t, \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, h)$$

nach Satz XII

$$|L_\nu(s)| > \frac{1}{\log^{c_{33}} t}, \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, h)$$

also

$$\left| \frac{L'_\nu(s)}{L_\nu(s)} \right| < c_{21} \log^{2 + c_{33}} t < \log^{c_{35}} t;$$

wird die größere der beiden Zahlen c_{29} und c_{35} gleich c_{34} gesetzt, so ist damit der Satz XIII bewiesen.

§ 7.

Es sei nun eine durch das Ideal $\mathfrak{l}$ repräsentierte Idealklasse gegeben und für sie der Hauptsatz 1 zu beweisen. $\mathfrak{k}$ sei ein beliebiges Ideal der zu ihr inversen Klasse, so daß also

$$\mathfrak{k}\mathfrak{l} \sim \mathfrak{o}$$

ist, und es werde die Funktion

(71) $$\Phi(s) = \sum_{\nu=1}^{h} \chi_\nu(\mathfrak{k}) \frac{L'_\nu(s)}{L_\nu(s)}$$

betrachtet. Nach einer auf S. 170 gemachten Bemerkung verschwindet für

(66) $$t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log^{c_{29}} t} \leqq \sigma \leqq 2$$

keine der Funktionen $L_\nu(s)$; $\Phi(s)$ ist also in diesem Gebiete regulär und genügt nach dem Satz XIII für

(70) $$t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log^{c_{34}} t} \leqq \sigma \leqq 2$$

der Ungleichung

(72) $$|\Phi(s)| \leqq \sum_{\nu=1}^{h} \left| \frac{L'_\nu(s)}{L_\nu(s)} \right| < h \log^{c_{34}} t < \log^{c_{36}} t.$$

Ferner ist nach Satz IX $\Phi(s)$ für $\Re(s) = 1$ (exkl. $s = 1$) regulär. In $s = 1$ hat $\Phi(s)$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum -1, da

$$\chi_1(\mathfrak{k}) \frac{L'_1(s)}{L_1(s)} = \frac{L'_1(s)}{L_1(s)}$$

einen solchen hat, während sich die Funktionen

$$\chi_2(\mathfrak{k}) \frac{L'_2(s)}{L_2(s)}, \cdots, \chi_h(\mathfrak{k}) \frac{L'_h(s)}{L_h(s)}$$

im Punkte $s = 1$ regulär verhalten.

Nun ist für $\Re(s) > 1$ und jedes ν nach (42)

$$\frac{L'_\nu(s)}{L_\nu(s)} = \frac{d}{ds} \log L_\nu(s) = -\frac{d}{ds} \sum_{\mathfrak{p}} \log\left(1 - \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right)$$

$$= -\sum_{\mathfrak{p}} \frac{\frac{\chi_\nu(\mathfrak{p}) \log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s}}{1 - \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}} = -\sum_{\mathfrak{p}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p}) \log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s - \chi_\nu(\mathfrak{p})}$$

$$= -\sum_{\mathfrak{p}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p}) \log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s} \left(1 + \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s - \chi_\nu(\mathfrak{p})}\right)$$

(73) $$= -\sum_{\mathfrak{p}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p}) \log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s} - \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p}^2) \log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s (N\mathfrak{p}^s - \chi_\nu(\mathfrak{p}))}.$$

Hierin ist die letzte Summe wegen

$$\left| \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p}^2) \log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s (N\mathfrak{p}^s - \chi_\nu(\mathfrak{p}))} \right| \leqq \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^\sigma (N\mathfrak{p}^\sigma - 1)}$$

für $\Re(s) > \frac{1}{2}$ konvergent und zwar in einer Umgebung jeder Stelle dieser Halbebene gleichmäßig; jene Summe stellt also eine für $\Re(s) > \frac{1}{2}$ reguläre analytische Funktion dar, welche offenbar für $\Re(s) > \frac{3}{4}$ dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Schranke gelegen ist. Daher ist nach (71) und (73) für $\Re(s) > 1$

$$(74)\qquad \Phi(s)=\sum_{\nu=1}^{h}\chi_\nu(\mathfrak{k})\frac{L_\nu'(s)}{L_\nu(s)}=-\sum_{\nu=1}^{h}\chi_\nu(\mathfrak{k})\sum_{\mathfrak{p}}\frac{\chi_\nu(\mathfrak{p})\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s}+G(s),$$

wo $G(s)$ für $\Re(s)>\frac{3}{4}$ regulär ist und dort der Ungleichung

$$(75)\qquad |G(s)|<c_{37}$$

genügt.

Nun ist für $\Re(s)>1$

$$\sum_{\nu=1}^{h}\chi_\nu(\mathfrak{k})\sum_{\mathfrak{p}}\frac{\chi_\nu(\mathfrak{p})\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s}=\sum_{\mathfrak{p}}\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s}\sum_{\nu=1}^{h}\chi_\nu(\mathfrak{k}\mathfrak{p});$$

nach (40) und (41) ist

$$\sum_{\nu=1}^{h}\chi_\nu(\mathfrak{k}\mathfrak{p})$$

dann und nur dann von Null verschieden und zwar $=h$, wenn $\mathfrak{k}\mathfrak{p}$ der Hauptklasse angehört, also $\mathfrak{p}$ der zu $\mathfrak{k}$ inversen Klasse, d. h. der gegebenen Klasse. Daher ist nach (74)

$$\Phi(s)=-h\sum_{\mathfrak{p}\sim\mathfrak{l}}\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s}+G(s).$$

Die durch die für $\Re(s)>1$ konvergente Dirichletsche Reihe

$$\sum_{\mathfrak{p}\sim\mathfrak{l}}\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s}$$

definierte analytische Funktion $K(s)$ ist also im Gebiete (70) regulär und genügt ebenda nach (72) und (75) der Ungleichung

$$|K(s)|<\frac{1}{h}\left(\log^{c_{36}}t+c_{37}\right)<\log^{c_{38}}t.$$

Da $K(s)$ für konjugiert komplexe s konjugiert komplexe Werte annimmt, ist also für

$$t\leqq-e^{2k},\quad 1-\frac{1}{\log^{c_{34}}(-t)}\leqq\sigma\leqq 2$$

$K(s)$ regulär und genügt dort der Ungleichung

$$|K(s)|<\log^{c_{38}}(-t).$$

Ferner hat $K(s)$ im Punkte $s=1$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum $\frac{1}{h}$ und ist sonst für $\Re(s)=1$ regulär. Es gibt also eine Konstante c_{39}, so daß $K(s)$ für

$$-e^{2k}\leqq t\leqq e^{2k},\quad 1-\frac{1}{(2k)^{c_{39}}}\leqq\sigma\leqq 1$$

mit Ausschluß des Punktes $s=1$ regulär ist.

Wenn a eine oberhalb der drei Zahlen c_{34}, c_{38}, c_{39} gelegene ganze Zahl bezeichnet, so ergibt sich also der (im folgenden für den Beweis des Hauptsatzes 1 allein anzuwendende)

Satz XIV. *$K(s)$ bezeichne die für $\Re(s) > 1$ durch die Dirichletsche Reihe*

$$\sum_{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{l}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s}$$

definierte analytische Funktion; dann gibt es eine positive ganze Zahl a mit folgenden Eigenschaften: $K(s)$ ist bis auf den Pol $s=1$ $\left(\text{mit dem Residuum } \frac{1}{h}\right)$ in demjenigen Teile der Ebene regulär, welcher rechts von der stetigen Kurve

$$\begin{cases} \sigma = 1 - \dfrac{1}{\log^a t} & \text{für} \quad t \geqq e^{2k}, \\ \sigma = 1 - \dfrac{1}{(2k)^a} & \text{für} \quad -e^{2k} \leqq t \leqq e^{2k}, \\ \sigma = 1 - \dfrac{1}{\log^a(-t)} & \text{für} \quad t \leqq -e^{2k} \end{cases}$$

gelegen ist, inklusive der Kurve selbst, und $K(s)$ genügt für

$$t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log^a t} \leqq \sigma \leqq 2$$

der Ungleichung

$$|K(\sigma+ti)| = |K(\sigma-ti)| < \log^a t. \tag{76}$$

§ 8.

Satz XV. *Es ist*

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{l} \\ N\mathfrak{p} \leqq x}} \log N\mathfrak{p} \log \frac{x}{N\mathfrak{p}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{x^s}{s^2} K(s)\, ds + O(1), \tag{77}$$

wo das Integral auf gerader Bahn zu erstrecken ist; d. h.*) die Differenz $\sum - \frac{1}{2\pi i}\int$ liegt für alle $x \geqq 1$ dem absoluten Betrage nach unterhalb einer von x unabhängigen Schranke.

Beweis. Bekanntlich ist das geradlinig erstreckte Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{y^s}{s^2}\, ds \begin{cases} = \log y & \text{für} \quad y \geqq 1, \\ = 0 & \text{für} \quad 0 < y \leqq 1. \end{cases}$$

*) Vergl. die Definition des Zeichens $O(g(x))$ auf S. 150, Anm. 3.

Wenn x eine positive Größe ist, so ist

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2-\infty i}^{2-x^2 i}\frac{y^s}{s^2}\,ds\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2+x^2 i}^{2+\infty i}\frac{y^s}{s^2}\,ds\right| < \frac{1}{2\pi}\int\limits_{x^2}^{\infty}\frac{y^2}{t^2}\,dt = \frac{y^2}{2\pi x^2} < \frac{y^2}{2x^2},$$

also

$$(78)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2-x^2 i}^{2+x^2 i}\frac{y^s}{s^2}\,ds \begin{cases} = \log y + \Theta\,\dfrac{y^2}{x^2} & \text{für}\quad y \geqq 1,\\[2ex] = \phantom{\log y +{}} \Theta\,\dfrac{y^2}{x^2} & \text{für}\quad 0 < y \leqq 1,\end{cases}$$

wo die von x und y abhängige Größe

$$\Theta = \Theta(x, y)$$

dem absoluten Betrage nach < 1 ist.

Für $\Re(s) = 2$ ist die unendliche Reihe

$$\sum_{\mathfrak{p}\sim\mathfrak{l}}\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s},$$

welche für $\Re(s) > 1$ die Funktion $K(s)$ definiert, gleichmäßig konvergent, da dort

$$\left|\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s}\right| \leqq \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^2}$$

ist. Das Produkt der Reihe mit $\frac{x^s}{s^2}$ darf also von $2 - x^2 i$ bis $2 + x^2 i$ auf gerader Bahn gliedweise integriert werden, und es ergibt sich unter Anwendung von (78)

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2-x^2 i}^{2+x^2 i}\frac{x^s}{s^2}K(s)\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2-x^2 i}^{2+x^2 i}\sum_{\mathfrak{p}\sim\mathfrak{l}}\frac{x^s}{s^2}\,\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s}\,ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{\mathfrak{p}\sim\mathfrak{l}}\log N\mathfrak{p}\int\limits_{2-x^2 i}^{2+x^2 i}\frac{\left(\frac{x}{N\mathfrak{p}}\right)^s}{s^2}\,ds$$

$$= \sum_{\substack{\mathfrak{p}\sim\mathfrak{l}\\ N\mathfrak{p}\leqq x}}\left(\log N\mathfrak{p}\log\frac{x}{N\mathfrak{p}} + \log N\mathfrak{p}\cdot\Theta\cdot\frac{x^2}{N\mathfrak{p}^2\cdot x^2}\right) + \sum_{\substack{\mathfrak{p}\sim\mathfrak{l}\\ N\mathfrak{p}> x}}\log N\mathfrak{p}\cdot\Theta\cdot\frac{x^2}{N\mathfrak{p}^2\cdot x^2}$$

$$= \sum_{\substack{\mathfrak{p}\sim\mathfrak{l}\\ N\mathfrak{p}\leqq x}}\log N\mathfrak{p}\log\frac{x}{N\mathfrak{p}} + \sum_{\mathfrak{p}\sim\mathfrak{l}}\frac{\log N\mathfrak{p}\cdot\Theta}{N\mathfrak{p}^2}.$$

Hierin ist der absolute Wert der letzten Summe wegen

$$|\Theta| = \left|\Theta\left(x, \frac{x}{N\mathfrak{p}}\right)\right| < 1$$

unterhalb der von x unabhängigen Zahl

$$\sum_{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{l}}' \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^2}$$

gelegen; jene Summe kann also mit $O(1)$ bezeichnet werden, und aus

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{x^s}{s^2} K(s)\, ds = \sum_{\substack{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{l} \\ N\mathfrak{p} \leq x}}' \log N\mathfrak{p} \log \frac{x}{N\mathfrak{p}} + O(1)$$

folgt die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes XV.

Satz XVI. *Es ist*

$$(79) \qquad \sum_{\substack{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{l} \\ N\mathfrak{p} \leq x}}' \log N\mathfrak{p} \log \frac{x}{N\mathfrak{p}} = \frac{x}{h} + O\left(x e^{-\sqrt[b]{\log x}}\right),$$

wo b eine Konstante bezeichnet.

Beweis. Ich wende, indem ich $x > e^k$ annehme, den Cauchyschen Satz auf den Integranden $\frac{x^s}{s^2} K(s)$ und folgenden Integrationsweg $ABCDEFA$ an. Es ist

$$A = 2 - x^2 i, \quad B = 2 + x^2 i, \quad C = 1 - \frac{1}{\log^a (x^2)} + x^2 i,$$

$$D = 1 - \frac{1}{(2k)^a} + e^{2k} i, \quad E = 1 - \frac{1}{(2k)^a} - e^{2k} i, \quad F = 1 - \frac{1}{\log^a (x^2)} - x^2 i$$

die Strecken AB, BC, DE, FA sind geradlinig, CD bezeichnet das Kurvenstück

$$s = 1 - \frac{1}{\log^a t} + ti \qquad (x^2 \geqq t \geqq e^{2k})$$

und EF das Kurvenstück

$$s = 1 - \frac{1}{\log^a (-t)} + ti \qquad (-e^{2k} \geqq t \geqq -x^2).$$

Nach Satz XIV besitzt die Funktion $K(s)$ in diesem ganzen geschlossenen Gebiete (mit Einschluß des Randes) als einzige Singularität den Pol erster Ordnung $s = 1$ mit dem Residuum $\frac{1}{h}$; also besitzt der Integrand $\frac{x^s}{s^2} K(s)$ in jenem Gebiet (mit Einschluß des Randes) als einzige Singularität den Pol erster Ordnung $s = 1$ mit dem Residuum $\frac{x}{h}$, und die Anwendung des Cauchyschen Satzes ergibt für das in (77) auftretende geradlinige Integral

$$(80)\qquad \int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{x^s}{s^2} K(s)\,ds = \int_{AB} = \frac{2\pi i x}{h} + \int_{AF} + \int_{FE} + \int_{ED} + \int_{DC} + \int_{CB}.$$

Hierin ist zunächst, da auf dem Wege ED

$$\left|\frac{1}{s^2} K(s)\right|$$

unterhalb einer von x unabhängigen Schranke liegt,

$$(81)\quad \left|\int_{ED}\right| = O\int_{-e^{2k}}^{e^{2k}} \left| x^{1-\frac{1}{(2k)^a}+ti} \right| dt = O\left(x^{1-\frac{1}{(2k)^a}}\right)\cdot 2e^{2k} = O\left(x^{1-\frac{1}{(2k)^a}}\right).$$

Zweitens ist nach (76)

$$\left|\int_{CB}\right| = \left|\int_{AF}\right| = \left|\int_{1-\frac{1}{\log^a(x^2)}}^{2} \frac{x^{\sigma+x^2 i}}{(\sigma+x^2 i)^2} K(\sigma+x^2 i)\,d\sigma\right|$$

$$(82)\qquad < \int_{1-\frac{1}{\log^a(x^2)}}^{2} \frac{x^2}{x^4} \log^a(x^2)\,d\sigma < \frac{2\log^a(x^2)}{x^2} = O\left(\frac{\log^a x}{x^2}\right).$$

Drittens ist nach (76)

$$\left|\int_{DC}\right| = \left|\int_{FE}\right| = \left|\int_{e^{2k}}^{x^2} \frac{x^{1-\frac{1}{\log^a t}+ti}}{\left(1-\frac{1}{\log^a t}+ti\right)^2} K\left(1-\frac{1}{\log^a t}+ti\right) d\left(1-\frac{1}{\log^a t}+ti\right)\right|$$

$$< \int_{e^{2k}}^{x^2} \frac{x^{1-\frac{1}{\log^a t}}}{t^2} \log^a t \left|\frac{a}{t\log^{a+1} t}+i\right| dt$$

$$< \left(\frac{a}{e^{2k}(2k)^{a+1}}+1\right) \int_{e^{2k}}^{x^2} x^{1-\frac{1}{\log^a t}} \frac{\log^a t}{t^2}\,dt$$

$$= c_{40}\, x \int_{e^{2k}}^{x^2} x^{-\frac{1}{\log^a t}} \frac{\log^a t}{t^2}\,dt.$$

Dies Integral werde in zwei durch $e^{\sqrt[2\alpha]{\log x}}$ geschiedene Teile zerlegt; (für alle hinreichend großen x ist

$$e^{2k} < e^{\sqrt[2\alpha]{\log x}} < x^2);$$

dadurch ergibt sich

$$\left|\int_{DC}\right| = \left|\int_{FE}\right| < c_{40}x \int_{e^{2k}}^{e^{\sqrt[2\alpha]{\log x}}} x^{-\frac{1}{\log^\alpha t}} \frac{\log^\alpha t}{t^2}\,dt + c_{40}x \int_{e^{\sqrt[2\alpha]{\log x}}}^{x^2} x^{-\frac{1}{\log^\alpha t}} \frac{\log^\alpha t}{t^2}\,dt$$

$$< c_{40}\,x \cdot x^{-\frac{1}{\log^\alpha\left(e^{\sqrt[2\alpha]{\log x}}\right)}} \int_{e^{2k}}^{e^{\sqrt[2\alpha]{\log x}}} \frac{\log^\alpha t}{t^2}\,dt + c_{40}x \int_{e^{\sqrt[2\alpha]{\log x}}}^{x^2} \frac{\log^\alpha t}{t^2}\,dt$$

$$< c_{40}\,x \cdot x^{-\frac{1}{\sqrt{\log x}}} \int_{e^{2k}}^{\infty} \frac{\log^\alpha t}{t^2}\,dt + c_{40}x\log^\alpha(x^2) \int_{e^{\sqrt[2\alpha]{\log x}}}^{x^2} \frac{dt}{t^2}$$

$$< c_{41}\,x\,e^{-\frac{\log x}{\sqrt{\log x}}} + c_{40}2^\alpha x\log^\alpha x \int_{e^{\sqrt[2\alpha]{\log x}}}^{\infty} \frac{dt}{t^2}$$

$$= c_{41}xe^{-\sqrt{\log x}} + c_{40}2^\alpha x\,\frac{\log^\alpha x}{e^{\sqrt[2\alpha]{\log x}}} = O\left(xe^{-\sqrt{\log x}}\right) + O\left(xe^{-\sqrt[3\alpha]{\log x}}\right)$$

$$(83) \qquad = O\left(xe^{-\sqrt[b]{\log x}}\right),$$

wo b eine ganzzahlige positive Konstante bezeichnet.

Setzt man (81), (82) und (83) in (80) ein, so ergibt sich

$$\int_{2-x^2i}^{2+x^2i} \frac{x^s}{s^2}K(s)\,ds = \frac{2\pi i x}{h} + O\left(x^{1-\frac{1}{(2k)^\alpha}}\right) + O\left(\frac{\log^\alpha x}{x^2}\right) + O\left(xe^{-\sqrt[b]{\log x}}\right)$$

$$= \frac{2\pi i x}{h} + O\left(xe^{-\sqrt[b]{\log x}}\right),$$

also nach (77) (Satz XV)

$$(79) \qquad \sum_{\substack{\mathfrak{p}\sim\mathfrak{I}\\ N\mathfrak{p}\leq x}} \log N\mathfrak{p}\log\frac{x}{N\mathfrak{p}} = \frac{x}{h} + O\left(xe^{-\sqrt[b]{\log x}}\right),$$

womit der Satz XVI bewiesen ist.

§ 9.

Satz XVII. *Es ist*

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{k} \\ N\mathfrak{p} \leqq x}} \log N\mathfrak{p} = \frac{x}{h} + O\left(x e^{-\sqrt[c]{\log x}}\right), \tag{84}$$

wo c eine Konstante bezeichnet.

Hierin liegt speziell das wichtige Ergebnis enthalten, daß

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \sum_{\substack{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{k} \\ N\mathfrak{p} \leqq x}} \log N\mathfrak{p} = \frac{1}{h}$$

ist.

Beweis. Es werde zur Abkürzung die für $x = \infty$ zu Null abnehmende Funktion

$$e^{-\sqrt[2b]{\log x}} = \delta$$

gesetzt; wenn in (79) $(1+\delta)x$ statt x geschrieben wird, so folgt, weil offenbar

$$(1+\delta)\, x\, e^{-\sqrt[b]{\log((1+\delta)x)}} = O\left(x e^{-\sqrt[b]{\log x}}\right)$$

ist,

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{k} \\ N\mathfrak{p} \leqq (1+\delta)x}} \log N\mathfrak{p} \log \frac{(1+\delta)x}{N\mathfrak{p}} = \frac{(1+\delta)x}{h} + O\left(x e^{-\sqrt[b]{\log x}}\right), \tag{85}$$

folglich, wenn (79) von (85) subtrahiert wird,

$$\log(1+\delta) \sum_{\substack{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{k} \\ N\mathfrak{p} \leqq x}} \log N\mathfrak{p} + \sum_{\substack{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{k} \\ x < N\mathfrak{p} \leqq (1+\delta)x}} \log N\mathfrak{p} \log \frac{(1+\delta)x}{N\mathfrak{p}} = \frac{\delta x}{h} + O\left(x e^{-\sqrt[b]{\log x}}\right). \tag{86}$$

Hierin ist die zweite Summe

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{k} \\ x < N\mathfrak{p} \leqq (1+\delta)x}} \log N\mathfrak{p} \log \frac{(1+\delta)x}{N\mathfrak{p}} \leqq \log(1+\delta) \sum_{\substack{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{k} \\ x < N\mathfrak{p} \leqq (1+\delta)x}} \log N\mathfrak{p}$$

$$\leqq \delta \sum_{x < N\mathfrak{n} \leqq (1+\delta)x} \log N\mathfrak{n} \leqq \delta \log((1+\delta)x) \sum_{x < N\mathfrak{n} \leqq (1+\delta)x} 1$$

$$= \delta \log((1+\delta)x)\,(H((1+\delta)x) - H(x))$$

$$\leqq \delta \log(2x)\,(H((1+\delta)x) - H(x))$$

$$= \delta \log(2x)\left(gh(1+\delta)\,x + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right) - ghx - O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right)\right)$$

$$= gh\delta^2 x \log(2x) + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\,\delta \log x\right)$$

$$= O\left(x \log x\, e^{-2\sqrt[2b]{\log x}}\right) + O\left(x^{1-\frac{1}{k}} \log x\, e^{-\sqrt[2b]{\log x}}\right)$$

$$= O\left(x \log x\, e^{-2\sqrt[2b]{\log x}}\right). \tag{87}$$

Aus (86) und (87) folgt, wenn

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{l} \\ N\mathfrak{p} \leq x}} \log N\mathfrak{p} = \tau(x)$$

gesetzt wird,

$$\log(1+\delta)\,\tau(x) = \frac{\delta x}{h} + O\left(x \log x e^{-2\sqrt[2b]{\log x}}\right);$$

wegen

$$\lim_{\delta=0} \frac{\delta}{\log(1+\delta)} = 1$$

ist

$$\frac{1}{\log(1+\delta)} = O\left(e^{\sqrt[2b]{\log x}}\right),$$

also

$$\tau(x) = \frac{\delta}{\log(1+\delta)} \frac{x}{h} + O\left(x \log x e^{-\sqrt[2b]{\log x}}\right). \tag{88}$$

Nun ist

$$\lim_{\delta=0} \left(\frac{\delta}{\log(1+\delta)} - 1\right) \frac{1}{\delta} = \frac{1}{2},$$

also

$$\frac{\delta}{\log(1+\delta)} = 1 + O\left(e^{-\sqrt[b]{\log x}}\right);$$

dies gibt, in (88) eingesetzt,

$$\tau(x) = \frac{x}{h} + O\left(x e^{-\sqrt[b]{\log x}}\right) + O\left(x \log x e^{-\sqrt[2b]{\log x}}\right)$$
$$= \frac{x}{h} + O\left(x e^{-\sqrt[c]{\log x}}\right),$$

falls c irgend eine ganze Zahl $> 2b$ bezeichnet. Damit ist (84), also der Satz XVII bewiesen.

§ 10.

Satz XVIII. *Wenn $\varrho(x)$ die Anzahl der Primideale bezeichnet, welche der gegebenen Idealklasse angehören und deren Norm $\leq x$ ist, so ist*

$$\varrho(x) = \frac{1}{h} \operatorname{Li}(x) + O\left(x e^{-\sqrt[d]{\log x}}\right), \tag{89}$$

wo d eine Konstante bezeichnet.

Beweis. Es sei $G(n)$ die Anzahl der Primideale $\mathfrak{p} \sim \mathfrak{l}$, deren Norm $= n$ ist. Dann ist

$$\varrho(x) = \sum_{\substack{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{l} \\ N\mathfrak{p} \leq x}} 1 = \sum_{n=1}^{x} G(n)$$

und

$$\tau(x) = \sum_{n=1}^{x} G(n) \log n,$$

also

$$\varrho(x) = \sum_{n=2}^{x} \frac{\tau(n) - \tau(n-1)}{\log n} = \sum_{n=2}^{x} \tau(n) \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right) + \frac{\tau(x)}{\log([x]+1)}$$

und nach (84)

$$\varrho(x) = \sum_{n=2}^{x} \frac{n}{h} \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right) + \frac{[x]}{h \log([x]+1)}$$

$$+ O \sum_{n=2}^{x} n e^{-\sqrt[c]{\log n}} \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right) + O\left(\frac{x e^{-\sqrt[c]{\log x}}}{\log([x]+1)}\right)$$

$$= \frac{1}{h} \sum_{n=2}^{x} \frac{1}{\log n} (n - (n-1)) + O \sum_{n=2}^{x} n e^{-\sqrt[c]{\log n}} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\log^2 n} + O\left(x e^{-\sqrt[c]{\log x}}\right)$$

$$= \frac{1}{h} \sum_{n=2}^{x} \frac{1}{\log n} + O \sum_{n=2}^{x} n e^{-\sqrt[c]{\log n}} \frac{\frac{1}{n}}{1} + O\left(x e^{-\sqrt[c]{\log x}}\right)$$

$$= \frac{1}{h} \int_2^x \frac{du}{\log u} + O \int_1^x e^{-\sqrt[c]{\log u}}\, du + O\left(x e^{-\sqrt[c]{\log x}}\right)$$

$$= \frac{1}{h} \operatorname{Li}(x) + O \int_1^{\sqrt{x}} e^{-\sqrt[c]{\log u}}\, du + O \int_{\sqrt{x}}^{x} e^{-\sqrt[c]{\log u}}\, du + O\left(x e^{-\sqrt[c]{\log x}}\right)$$

$$= \frac{1}{h} \operatorname{Li}(x) + O \int_1^{\sqrt{x}} du + O\left(e^{-\sqrt[c]{\log(\sqrt{x})}} \int_{\sqrt{x}}^{x} du\right) + O\left(x e^{-\sqrt[c]{\log x}}\right)$$

$$= \frac{1}{h} \operatorname{Li}(x) + O(\sqrt{x}) + O\left(e^{-\frac{1}{\sqrt[c]{2}} \sqrt[c]{\log x}} \cdot x\right) + O\left(x e^{-\sqrt[c]{\log x}}\right)$$

$$(89) \qquad = \frac{1}{h} \operatorname{Li}(x) + O\left(x e^{-\sqrt[d]{\log x}}\right),$$

womit der Satz XVIII bewiesen ist.

Für jedes reelle m ist

$$\lim_{x=\infty} \log^m x\, e^{-\sqrt[d]{\log x}} = 0;$$

daher folgt aus (89) (Satz XVIII)

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log^m x}{x} \left(\varrho(x) - \frac{1}{h} \operatorname{Li}(x) \right) = 0 . \tag{1}$$

Damit habe ich den in § 1 ausgesprochenen Hauptsatz 1 bewiesen, also auch die ebenda angegebenen Folgerungen.

Zweiter Teil.

§ 11

(Einleitung).

Das Ziel der §§ 12—16 ist der

Hauptsatz 2. *Ein algebraischer Zahlkörper habe die Eigenschaft, daß*

$$\sum_{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{o}} \frac{1}{N\mathfrak{p}}$$

divergiert. Man teile alle quadratfreien Ideale einer Klasse in zwei Abteilungen, je nachdem sie aus einer geraden oder ungeraden Anzahl von Primidealen zusammengesetzt sind. Es sei $R(x)$ bezw. $S(x)$ die Anzahl der Ideale der ersten bezw. zweiten Abteilung, deren Norm $\leqq x$ ist. Dann existiert

$$\lim_{x=\infty} \frac{R(x)}{S(x)}$$

und ist $= 1$.

Dasselbe gilt, wenn man alle Ideale einer Klasse in zwei Abteilungen teilt, je nachdem die Anzahl der Primidealfaktoren, aus denen sie bestehen (mehrfache mehrfach gerechnet), gerade oder ungerade ist.

Kurz ausgedrückt: In jeder Idealklasse ist asymptotisch ebenso oft $\mu(\mathfrak{k}) = +1$ als $\mu(\mathfrak{k}) = -1$; in jeder Idealklasse ist asymptotisch ebenso oft $\lambda(\mathfrak{k}) = +1$ als $\lambda(\mathfrak{k}) = -1$. Hierbei bedeuten $\mu(\mathfrak{k})$ und $\lambda(\mathfrak{k})$ die idealtheoretischen Funktionen, welche folgendermaßen definiert sind:

1. Für das Einheitsideal $\mathfrak{o}$ ist

$$\mu(\mathfrak{o}) = 1.$$

2. Wenn $\mathfrak{n}$ durch das Quadrat eines von $\mathfrak{o}$ verschiedenen Ideals teilbar ist, ist

$$\mu(\mathfrak{n}) = 0.$$

3. Wenn $\mathfrak{n}$ quadratfrei und das Produkt von ϱ verschiedenen Primidealen ist, ist

$$\mu(\mathfrak{n}) = (-1)^{\varrho}.$$

1. Für das Einheitsideal $\mathfrak{o}$ ist

$$\lambda(\mathfrak{o}) = 1.$$

2. Für das Ideal

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{p}_1^{\alpha_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{\alpha_r}$$

ist

$$\lambda(\mathfrak{n}) = (-1)^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_r}.$$

Nachdem in §§ 12—16 der Hauptsatz 2 bewiesen ist, folgt in § 17 die (ganz unmittelbare) Ausdehnung der Hauptsätze 1 und 2 auf den weiteren Klassenbegriff und in § 18 die Diskussion der jenen beiden Sätzen zugrunde liegenden Voraussetzung, daß die Reihe

$$\sum_{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{o}} \frac{1}{N\mathfrak{p}}$$

divergiert.

§ 12.

Es ist nach (42) für $\Re(s) > 1$

$$\frac{1}{L_\nu(s)} = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right) = \sum_{\mathfrak{n}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{n})\,\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s}.$$

Wenn $\mathfrak{l}$ die gegebene Idealklasse, $\mathfrak{k}$ die inverse Klasse repräsentiert, ist für $\Re(s) > 1$

$$\sum_{\nu=1}^{h} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{k})}{L_\nu(s)} = \sum_{\nu=1}^{h} \chi_\nu(\mathfrak{k}) \sum_{\mathfrak{n}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{n})\,\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s} = \sum_{\mathfrak{n}} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s} \sum_{\nu=1}^{h} \chi_\nu(\mathfrak{k}\mathfrak{n})$$
$$= h \sum_{\mathfrak{n} \sim \mathfrak{l}} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s}.$$

Wenn nun $\Psi(s)$ die für $\Re(s) > 1$ durch die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{\mathfrak{n} \sim \mathfrak{l}} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s}$$

definierte analytische Funktion bezeichnet, gilt der

Satz XIX. *$\Psi(s)$ ist auf der Geraden $\Re(s) = 1$ regulär, und es gibt eine Zahl c_{42}, so daß für*

$$t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log^{c_{42}} t} \leqq \sigma \leqq 2$$

$\Psi(s)$ regulär ist und der Ungleichung

$$|\Psi(s)| < \log^{c_{42}} t$$

genügt.

Beweis. Nach Satz IX sind $L_1(s), \cdots, L_h(s)$ auf der Geraden $\Re(s) = 1$ von Null verschieden, also $\Psi(s)$ dort regulär. Nach Satz XII sind diese Funktionen für

(66) $$t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log^{c_{29}} t} \leqq \sigma \leqq 2$$

regulär, von Null verschieden und genügen dort der Ungleichung

(69) $$|L_\nu(s)| > \frac{1}{\log^{c_{33}} t}.$$

Für das Gebiet (66) ist also $\Psi(s)$ regulär und

$$|\Psi(s)| \leqq \frac{1}{h} \sum_{\nu=1}^{h} \frac{1}{|L_\nu(s)|} < \frac{1}{h}\, h \log^{c_{33}} t = \log^{c_{33}} t;$$

setzt man die größere der Zahlen c_{29} und c_{33} gleich c_{42}, so ersieht man die Richtigkeit des Satzes XIX.

Es werde nun eine ganze Zahl $a > c_{42}$ so gewählt, daß $\frac{1}{(2k)^a}$ kleiner ist als der Abstand der Geraden $\sigma = 1$ von allen etwa vorhandenen singulären Stellen von $\Psi(s)$, deren imaginärer Teil zwischen $-e^{2k}i$ und $e^{2k}i$ liegt. Wenn dann noch die Gleichung

$$|\Psi(\sigma + ti)| = |\Psi(\sigma - ti)|$$

berücksichtigt wird, so ergibt sich der

Satz XX. *Die Funktion $\Psi(s)$ ist regulär in dem Teile der Ebene, welcher rechts von der stetigen Kurve*

$$\begin{cases} \sigma = 1 - \dfrac{1}{\log^a t} & \textit{für} \quad t \geqq e^{2k}, \\ \sigma = 1 - \dfrac{1}{(2k)^a} & \textit{für} \quad -e^{2k} \leqq t \leqq e^{2k}, \\ \sigma = 1 - \dfrac{1}{\log^a(-t)} & \textit{für} \quad t \leqq -e^{-2k} \end{cases}$$

liegt, inklusive der Kurve selbst, und $\Psi(s)$ genügt für

$$t \geqq e^{2k}, \quad 1 - \frac{1}{\log^a t} \leqq \sigma \leqq 2$$

der Ungleichung

$$|\Psi(\sigma + ti)| = |\Psi(\sigma - ti)| < \log^a t.$$

§ 13.

Wie in § 8 ergibt sich zunächst durch Vertauschung von Summation und Integration und Anwendung der Integralformel (78) bei geradlinigem Integrationsweg

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{x^s}{s^2} \Psi(s)\, ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{x^s}{s^2} \sum_{\mathfrak{n} \sim \mathfrak{I}} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s}\, ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{\mathfrak{n} \sim \mathfrak{I}} \mu(\mathfrak{n}) \int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{\left(\frac{x}{N\mathfrak{n}}\right)^s}{s^2}\, ds = \sum_{\substack{\mathfrak{n} \sim \mathfrak{I} \\ N\mathfrak{n} \leqq x}} \mu(\mathfrak{n}) \log \frac{x}{N\mathfrak{n}} + \sum_{\mathfrak{n} \sim \mathfrak{I}} \frac{\mu(\mathfrak{n})\, \Theta}{N\mathfrak{n}^4}$$

$$(90) \qquad = \sum_{\substack{\mathfrak{n} \sim \mathfrak{I} \\ N\mathfrak{n} \leqq x}} \mu(\mathfrak{n}) \log \frac{x}{N\mathfrak{n}} + O(1).$$

Die Anwendung des Cauchyschen Satzes auf den Integranden $\frac{x^s}{s^2}\Psi(s)$ und den auf S. 176 angegebenen Integrationsweg ergibt nach Satz XX

$$\int\limits_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{x^s}{s^2}\Psi(s)\,ds = \int\limits_{AB} = \int\limits_{AF} + \int\limits_{FE} + \int\limits_{ED} + \int\limits_{DC} + \int\limits_{CB} \tag{91}$$

Da $\Psi(s)$ nach Satz XX genau dieselbe Ungleichung erfüllt wie $K(s)$ nach Satz XIV, so folgt wörtlich wie in § 8

$$\int\limits_{AF} + \int\limits_{FE} + \int\limits_{ED} + \int\limits_{DC} + \int\limits_{CB} = O\left(x e^{-\sqrt[b]{\log x}}\right). \tag{92}$$

Aus (90), (91) und (92) ergibt sich

$$\sum_{\substack{\mathfrak{n} \sim \mathfrak{l} \\ N\mathfrak{n} \leq x}} \mu(\mathfrak{n}) \log \frac{x}{N\mathfrak{n}} = O\left(x e^{-\sqrt[b]{\log x}}\right). \tag{93}$$

Wird statt x hierin $(1+\delta)x$ geschrieben, wo

$$\delta = e^{-\sqrt[2b]{\log x}}$$

ist, und (93) von der so entstehenden Gleichung subtrahiert, so findet man

$$\log(1+\delta) \sum_{\substack{\mathfrak{n} \sim \mathfrak{l} \\ N\mathfrak{n} \leq x}} \mu(\mathfrak{n}) + \sum_{\substack{\mathfrak{n} \sim \mathfrak{l} \\ x < N\mathfrak{n} \leq (1+\delta)x}} \mu(\mathfrak{n}) \log \frac{(1+\delta)x}{N\mathfrak{n}} = O\left(x e^{-\sqrt[b]{\log x}}\right).$$

Hierin ist die zweite Summe dem absoluten Betrage nach

$$\leqq \log(1+\delta) \sum_{\substack{\mathfrak{n} \sim \mathfrak{l} \\ x < N\mathfrak{n} \leq (1+\delta)x}} 1 \leqq \delta(H(1+\delta)x - H(x)) = O\left(x e^{-2\sqrt[2b]{\log x}}\right) *);$$

also ist, wenn

$$\sum_{\substack{\mathfrak{n} \sim \mathfrak{l} \\ N\mathfrak{n} \leq x}} \mu(\mathfrak{n}) = M(x)$$

gesetzt wird,

$$\log(1+\delta)\, M(x) = O\left(x e^{-2\sqrt[2b]{\log x}}\right),$$

$$M(x) = \frac{1}{\log(1+\delta)}\, O\left(x e^{-2\sqrt[2b]{\log x}}\right) = O\left(x e^{-\sqrt[2b]{\log x}}\right),$$

$$M(x) = O\left(x e^{-\sqrt[c]{\log x}}\right). \tag{94}$$

Damit erhalte ich den

Satz XXI. *Für jedes reelle m ist*

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log^m x}{x} \sum_{\substack{\mathfrak{n} \sim \mathfrak{l} \\ N\mathfrak{n} < x}} \mu(\mathfrak{n}) = 0.$$

---

*) Vergl. S. 179.

§ 14.

Satz XXII. *Es sei $Q(x)$ die Anzahl der quadratfreien Ideale einer Klasse, deren Norm $\leqq x$ ist.**) *Dann ist der Grenzwert*

$$\lim_{x=\infty} \frac{Q(x)}{x}$$

vorhanden und von Null verschieden, nämlich $= \frac{g}{\zeta_\varkappa(2)}$.

Dieser Wert ist von der Klasse unabhängig.

Beweis. Es ist bekanntlich, wenn $\mathfrak{m}$ alle Teiler des Ideals $\mathfrak{k}$ durchläuft,

$$\sum_{\mathfrak{m}|\mathfrak{k}} \mu(\mathfrak{m}) \begin{cases} = 1 & \text{für } \mathfrak{k} = \mathfrak{o}, \\ = 0 & \text{für } \mathfrak{k} \neq \mathfrak{o}. \end{cases}$$

Also ist

$$Q(x) = \sum_{\substack{\mathfrak{n} \sim \mathfrak{l} \\ N\mathfrak{n} \leqq x}} \sum_{\mathfrak{m}} \mu(\mathfrak{m}),$$

wo $\mathfrak{m}$ alle Ideale durchläuft, deren Quadrat in $\mathfrak{n}$ aufgeht. Daraus folgt

$$Q(x) = \sum_{N\mathfrak{m} \leqq \sqrt{x}} \mu(\mathfrak{m}) A(x, \mathfrak{m}), \tag{95}$$

wo $A(x, \mathfrak{m})$ die Anzahl aller Ideale der gegebenen Klasse ist, welche durch $\mathfrak{m}^2$ teilbar sind, und deren Norm $\leqq x$ ist. $A(x, \mathfrak{m})$ ist die Anzahl der Ideale einer — bei gegebenem $\mathfrak{m}$ festen**) — Klasse, deren Norm $\leqq \frac{x}{N\mathfrak{m}^2}$ ist. Nach Herrn Webers Relation (27) gibt es eine Konstante B, so daß für alle $x \geqq 1$ die Anzahl $A(x)$ der Ideale jeder Klasse, deren Norm $\leqq x$ ist, der Ungleichung

$$|A(x) - gx| < Bx^{1-\frac{1}{k}}$$

genügt. Daher ist für alle $x \geqq 1$ und alle $\mathfrak{m}$, deren Norm $\leqq \sqrt{x}$ ist,

$$\left| A(x, \mathfrak{m}) - g\frac{x}{N\mathfrak{m}^2} \right| < B\left(\frac{x}{N\mathfrak{m}^2}\right)^{1-\frac{1}{k}}. \tag{96}$$

Aus (95) und (96) folgt

$$Q(x) = \sum_{N\mathfrak{m} \leqq \sqrt{x}} \mu(\mathfrak{m}) g \frac{x}{N\mathfrak{m}^2} + O \sum_{N\mathfrak{m} \leqq \sqrt{x}} \left(\frac{x}{N\mathfrak{m}^2}\right)^{1-\frac{1}{k}}$$

$$= gx \sum_{N\mathfrak{m} \leqq \sqrt{x}} \frac{\mu(\mathfrak{m})}{N\mathfrak{m}^2} + O\left(x^{1-\frac{1}{k}} \sum_{N\mathfrak{m} \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{N\mathfrak{m}^{2-\frac{2}{k}}} \right). \tag{97}$$

*) Übrigens ist $Q(x) = \sum_{\substack{\mathfrak{n} \sim \mathfrak{l} \\ N\mathfrak{n} \leqq x}} \mu^2(\mathfrak{n})$.

**) Es ist die Klasse der Ideale $\mathfrak{h}$, für die $\mathfrak{m}^2\mathfrak{h} \sim \mathfrak{l}$ ist.

Hierin ist

$$\sum_{N\mathfrak{m}\leq\sqrt{x}}\frac{\mu(\mathfrak{m})}{N\mathfrak{m}^2}=\sum_{\mathfrak{m}}\frac{\mu(\mathfrak{m})}{N\mathfrak{m}^2}-\sum_{N\mathfrak{m}>\sqrt{x}}\frac{\mu(\mathfrak{m})}{N\mathfrak{m}^2}=\frac{1}{\zeta_\varkappa(2)}+O\sum_{N\mathfrak{m}>\sqrt{x}}\frac{1}{N\mathfrak{m}^2}$$

$$=\frac{1}{\zeta_\varkappa(2)}+O\sum_{n=\sqrt{x}+1}^{\infty}\frac{H(n)-H(n-1)}{n^2}$$

$$=\frac{1}{\zeta_\varkappa(2)}+O\sum_{n=\sqrt{x}}^{\infty}H(n)\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)+O\left(\frac{H(\sqrt{x})}{([\sqrt{x}]+1)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{\zeta_\varkappa(2)}+O\sum_{n=\sqrt{x}}^{\infty}n\cdot\frac{1}{n^3}+O\left(\frac{\sqrt{x}}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{\zeta_\varkappa(2)}+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \tag{98}$$

und

$$\sum_{N\mathfrak{m}\leq\sqrt{x}}\frac{1}{N\mathfrak{m}^{2-\frac{2}{k}}}\begin{cases}=O(\sqrt{x}) & \text{für } k=1,\\ =O(\log x) & \text{für } k=2,\\ =O(1) & \text{für } k>2.\end{cases} \tag{99}$$

Aus (97), (98) und (99) folgt für jedes k

$$Q(x)=\frac{g}{\zeta_\varkappa(2)}\,x+O(\sqrt{x})+O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\log x\right),$$

also

$$\lim_{x=\infty}\frac{Q(x)}{x}=\frac{g}{\zeta_\varkappa(2)},$$

wie im Satz XXII behauptet wurde.

Satz XXIII (erste Hälfte des Hauptsatzes 2). *Es ist*

$$\lim_{x=\infty}\frac{R(x)}{S(x)}=1,$$

wo $R(x)$ und $S(x)$ die auf S. 182 angegebene Bedeutung haben.

Beweis. Es ist

$$R(x)-S(x)=\sum_{\substack{\mathfrak{n}\sim\mathfrak{l}\\ N\mathfrak{n}\leq x}}\mu(\mathfrak{n})=M(x),$$

$$R(x)+S(x)=\sum_{\substack{\mathfrak{n}\sim\mathfrak{l}\\ N\mathfrak{n}\leq x}}\mu^2(\mathfrak{n})=Q(x),$$

$$R(x)=\frac{1}{2}\,(Q(x)+M(x)),$$

$$S(x)=\frac{1}{2}\,(Q(x)-M(x)),$$

$$(100) \qquad \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{Q(x)+M(x)}{Q(x)-M(x)} = \frac{\frac{Q(x)}{x}+\frac{M(x)}{x}}{\frac{Q(x)}{x}-\frac{M(x)}{x}}.$$

Nach Satz XXI ist (wenn dort $m=0$ angenommen wird)

$$\lim_{x=\infty} \frac{M(x)}{x} = 0,$$

nach Satz XXII

$$\lim_{x=\infty} \frac{Q(x)}{x} \neq 0;$$

aus (100) folgt daher

$$\lim_{x=\infty} \frac{R(x)}{S(x)} = 1,$$

wie im Satz XXIII behauptet wurde.

Man sieht zugleich, daß die Anzahl der Ideale jeder Klasse, deren Norm $\leqq x$ ist und für welche $\mu(\mathfrak{n})=1$ (bezw. $\mu(\mathfrak{n})=-1$) ist, asymptotisch gleich $\frac{g}{2\zeta_\varkappa(2)}x$ ist.

§ 15.

Es sei noch eine wichtige Folgerung aus dem Satz XXI angegeben.

Satz XXIV. *Wenn m und t zwei beliebige reelle Zahlen sind, ist die nach wachsendem $N\mathfrak{n}$ geordnete Reihe*

$$\sum_{\mathfrak{n}\sim\mathfrak{l}} \frac{\mu(\mathfrak{n})\log^m N\mathfrak{n}}{N\mathfrak{n}^{1+ti}}$$

konvergent.

Hierin liegt insbesondere (für $m=0$, $t=0$) enthalten, daß die Reihe

$$\sum_{\mathfrak{n}\sim\mathfrak{l}} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}}$$

konvergiert.

Beweis. Da die Summe der absoluten Beträge aller Glieder mit gleicher Norm x

$$\leqq \frac{\log^m x}{x}(H(x)-H(x-1)) = \frac{\log^m x}{x}\left(ghx+O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right)-gh(x-1)-O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right)\right)$$

$$= O\left(\frac{\log^m x}{x^{\frac{1}{k}}}\right)$$

ist, also für $x=\infty$ den Grenzwert 0 hat, braucht zum Nachweise des Satzes XXIV nur gezeigt zu werden, daß

$$(101) \qquad \lim_{x=\infty} \sum_{\substack{\mathfrak{n}\sim\mathfrak{l}\\ N\mathfrak{n}\leqq x}} \frac{\mu(\mathfrak{n})\log^m N\mathfrak{n}}{N\mathfrak{n}^{1+ti}}$$

existiert. Nun ist

$$\sum_{\substack{\mathfrak{n}\sim\mathfrak{l}\\ N\mathfrak{n}\leqq x}} \frac{\mu(\mathfrak{n})\log^m N\mathfrak{n}}{N\mathfrak{n}^{1+ti}} = \sum_{n=1}^{x} \frac{\log^m n}{n^{1+ti}} \sum_{\substack{\mathfrak{n}\sim\mathfrak{l}\\ N\mathfrak{n}=n}} \mu(\mathfrak{n}) = \sum_{n=1}^{x} \frac{\log^m n}{n^{1+ti}} (M(n)-M(n-1))$$

$$(102) \qquad = \sum_{n=1}^{x} M(n)\left(\frac{\log^m n}{n^{1+ti}} - \frac{\log^m (n+1)}{(n+1)^{1+ti}}\right) + \frac{M(x)\log^m([x]+1)}{([x]+1)^{1+ti}}.$$

Nach Satz XXI ist für alle hinreichend großen n

$$(103) \qquad |M(n)| < \frac{n}{\log^{m+2} n};$$

daraus folgt zunächst

$$(104) \qquad \lim_{x=\infty} \frac{M(x)\log^m([x]+1)}{([x]+1)^{1+ti}} = 0.$$

Ferner ist wegen

$$\left|\frac{\log^m n}{n^{1+ti}} - \frac{\log^m (n+1)}{(n+1)^{1+ti}}\right| = \left|\int_n^{n+1} \frac{m\log^{m-1} u - (1+ti)\log^m u}{u^{2+ti}}\, du\right|$$

$$\leqq \int_n^{n+1} \frac{|m|\log^{m-1} u + (1+|t|)\log^m u}{u^2}\, du$$

für alle hinreichend großen n

$$\left|\frac{\log^m n}{n^{1+ti}} - \frac{\log^m (n+1)}{(n+1)^{1+ti}}\right| < (2+|t|)\frac{\log^m n}{n^2};$$

hieraus folgt in Verbindung mit (103) wegen der Konvergenz von

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\log^{m+2} n} \frac{\log^m n}{n^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log^2 n},$$

daß die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} M(n)\left(\frac{\log^m n}{n^{1+ti}} - \frac{\log^m (n+1)}{(n+1)^{1+ti}}\right)$$

konvergiert, und dies ergibt mit Rücksicht auf (102) und (104) die Existenz des Grenzwertes (101), womit der Satz XXIV bewiesen ist.

§ 16.

Die entsprechenden Sätze über die Funktion $\lambda(\mathfrak{n})$ könnte man direkt auf analogem Wege beweisen, von den erzeugenden Funktionen

$$\frac{1}{L_\nu(s)}\prod_{\mathfrak{p}}\frac{1}{1-\dfrac{\chi_\nu(\mathfrak{p}^2)}{N\mathfrak{p}^{2s}}}=\prod_{\mathfrak{p}}\frac{1-\dfrac{\chi_\nu(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}}{1-\dfrac{\chi_\nu(\mathfrak{p}^2)}{N\mathfrak{p}^{2s}}}=\prod_{\mathfrak{p}}\frac{1}{1+\dfrac{\chi_\nu(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}}$$

$$=\prod_{\mathfrak{p}}\left(1-\frac{\chi_\nu(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}+\frac{\chi_\nu(\mathfrak{p}^2)}{N\mathfrak{p}^{2s}}-\cdots\right)=\sum_{\mathfrak{n}}\frac{\chi_\nu(\mathfrak{n})\,\lambda(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s}$$

ausgehend. Jedoch lassen sie sich auch aus den analogen Sätzen über $\mu(\mathfrak{n})$ herleiten, was im Folgenden der Kürze wegen geschehen soll.

Satz XXV. *Es ist für jedes reelle m*

$$\lim_{x=\infty}\frac{\log^m x}{x}\sum_{\substack{\mathfrak{n}\sim\mathfrak{l}\\ N\mathfrak{n}\leqq x}}\lambda(\mathfrak{n})=0.$$

Beweis. Für alle Ideale $\mathfrak{n}$, die sich von demselben quadratfreien Ideal $\mathfrak{k}$ um einen quadratischen Faktor unterscheiden ($\mathfrak{n}=\mathfrak{k}\mathfrak{m}^2$), ist

$$\lambda(\mathfrak{n})=\mu(\mathfrak{k}).$$

Daraus ergibt sich, wenn

$$\sum_{\substack{\mathfrak{n}\sim\mathfrak{l}\\ N\mathfrak{n}\leqq x}}\lambda(\mathfrak{n})=L(x)$$

gesetzt wird, und $\mathfrak{h}$ die (von $\mathfrak{m}$ abhängige) Klasse repräsentiert, für welche $\mathfrak{h}\mathfrak{m}^2\sim\mathfrak{l}$ ist,

$$L(x)=\sum_{N\mathfrak{m}\leqq\sqrt{x}}\ \sum_{\substack{\mathfrak{k}\sim\mathfrak{h}\\ N\mathfrak{k}\leqq\frac{x}{N\mathfrak{m}^2}}}\mu(\mathfrak{k}).$$

Hierin ist die innere Summe die auf die Klasse von $\mathfrak{h}$ bezügliche Funktion M mit dem Argument $\frac{x}{N\mathfrak{m}^2}$. Nach (94) gibt es zwei Konstanten A, c, so daß für jede dieser h Funktionen (die den h Klassen entsprechen) und alle $x\geqq 1$

$$|M(x)|<A x e^{-\sqrt[c]{\log x}}$$

ist, also für $x\geqq 1$ und $N\mathfrak{m}\leqq\sqrt{x}$

$$\left|M\left(\frac{x}{N\mathfrak{m}^2}\right)\right|<A\frac{x}{N\mathfrak{m}^2}e^{-\sqrt[c]{\log\frac{x}{N\mathfrak{m}^2}}}.$$

Daher ist

$$|L(x)| < Ax \sum_{N\mathfrak{m} \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{N\mathfrak{m}^2} e^{-\sqrt[c]{\log \frac{x}{N\mathfrak{m}^2}}}$$

$$= O\left(x \sum_{N\mathfrak{m} \leqq e^{\sqrt[c]{\log x}}} \frac{1}{N\mathfrak{m}^2} e^{-\sqrt[c]{\log x - 2\log N\mathfrak{m}}}\right) + O\left(x \sum_{e^{\sqrt[c]{\log x}} < N\mathfrak{m} \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{N\mathfrak{m}^2} e^{-\sqrt[c]{\log \frac{x}{N\mathfrak{m}^2}}}\right)$$

$$= O\left(x e^{-\sqrt[c]{\log x - 2\sqrt[c]{\log x}}} \sum_{N\mathfrak{m} \leqq e^{\sqrt[c]{\log x}}} \frac{1}{N\mathfrak{m}^2}\right) + O\left(x \sum_{e^{\sqrt[c]{\log x}} < N\mathfrak{m} \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{N\mathfrak{m}^2} \cdot 1\right)$$

$$= O\left(x e^{-\sqrt[c]{\log x}} \sum_{\mathfrak{m}} \frac{1}{N\mathfrak{m}^2}\right) + O\left(x \sum_{N\mathfrak{m} > e^{\sqrt[c]{\log x}}} \frac{1}{N\mathfrak{m}^2}\right)$$

$$= O\left(x e^{-\sqrt[c]{\log x}}\right) + O\left(\frac{x}{e^{\sqrt[c]{\log x}}}\right)$$

$$= O\left(x e^{-\sqrt[c]{\log x}}\right),$$

woraus der Satz XXV unmittelbar folgt.

Da nun für die Anzahl $A(x)$ aller Ideale einer Klasse, deren Norm $\leqq x$ ist,

$$\lim_{x=\infty} \frac{A(x)}{x} = g$$

existiert und > 0 ist, so folgt analog zur obigen Begründung des Satzes XXIII aus Satz XXV der

Satz XXVI (zweite Hälfte des Hauptsatzes 2). *Wenn $R_1(x)$ bezw. $S_1(x)$ die Anzahl der Ideale einer Klasse bezeichnet, welche das Produkt einer geraden bezw. ungeraden Anzahl von Primidealen sind, so ist*

$$\lim_{x=\infty} \frac{R_1(x)}{S_1(x)} = 1.$$

Endlich ergibt die Beweismethode des Satzes XXIV durch wörtliche Übertragung den

Satz XXVII. *Die unendliche, nach wachsenden Normen geordnete Reihe*

$$\sum_{\mathfrak{n}=\mathfrak{l}} \frac{\lambda(\mathfrak{n}) \log^m N\mathfrak{n}}{N\mathfrak{n}^{1+ti}}$$

konvergiert für jedes reelle Wertepaar m, t.

§ 17.

Im Vorangehenden war durchweg für die Klasseneinteilung der Ideale der engere Äquivalenzbegriff zugrunde gelegt: Zwei Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ heißen äquivalent, wenn es im Körper zwei ganze Zahlen α und β gibt, *deren Normen dasselbe Vorzeichen besitzen* und welche die Gleichung

$$\alpha\mathfrak{a} = \beta\mathfrak{b}$$

erfüllen. Kurz gesagt: Es ist $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$, wenn der Quotient $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ eine (ganze oder gebrochene) Zahl des Körpers *mit positiver Norm* ist.

Es ist leicht, aus dem Vorigen die entsprechenden Sätze für den weiteren Äquivalenzbegriff herzuleiten, nach welchem $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$ ist, falls der Quotient $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ überhaupt eine Zahl des Körpers (mit positiver oder negativer Norm) ist.

Bekanntlich besteht zwischen den Klassen beider Einteilungen folgender Zusammenhang.

1) Wenn der Körper Zahlen mit negativer Norm, aber keine Einheit mit negativer Norm enthält, zerfällt jede Klasse im weiteren Sinn in zwei Klassen im engeren Sinn.

2) Andernfalls stimmen die Klassen beider Einteilungen völlig überein.

Wenn also h' die Klassenzahl im weiteren Sinn bezeichnet, ist $h = 2h'$ bezw. $h = h'$. Der Hauptsatz 1 ergibt also, daß die Anzahl der Primideale, deren Norm $\leqq x$ ist, in jeder Klasse (im weiteren Sinn) die Gleichung

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log^m x}{x}\left(\varrho(x) - \frac{1}{h'}\operatorname{Li}(x)\right) = 0$$

erfüllt. Auch der Hauptsatz 2 bleibt wörtlich bestehen.

§ 18.

Beim Beweise beider Hauptsätze war nun über den Körper $\varkappa$ die (einzige) Voraussetzung gemacht worden, daß die über alle Primideale der Hauptklasse (im engeren Sinne) erstreckte Summe

$$(105) \qquad \sum_{\mathfrak{p}\sim\mathfrak{o}} \frac{1}{N\mathfrak{p}}$$

divergiert. *Was bedeutet diese Voraussetzung und für welche Körper ist sie erfüllt?*

Ich beginne damit, einige Fälle anzugeben, in welchen mit einfachsten Mitteln nachgewiesen werden kann, daß die Reihe (105) divergiert, also meine beiden Hauptsätze gelten.

1) $\varkappa$ habe die Klassenzahl 1; dann divergiert die Reihe (105), da $\mathfrak{p}$ in ihr alle Primideale zu durchlaufen hätte und bekanntlich die Summe der reziproken Normen aller Primideale eines algebraischen Zahlkörpers divergiert (weil sonst die Funktion

$$\zeta_\varkappa(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}^s}}$$

bei Abnahme von s zu 1 nicht über alle Grenzen wachsen könnte). Doch ist hier der Hauptsatz 1 nicht neu, sondern ist in dem von mir im Jahre 1903 bewiesenen Primidealsatz*) enthalten. Ebenso ist der Hauptsatz 2 für $h = 1$ ein schon früher**) von mir bewiesenes Gesetz.

2) $\varkappa$ habe eine ungerade Klassenzahl > 1. Dann zeigt folgende Betrachtung die Divergenz der Reihe (105). Würde die Reihe konvergieren, so würde bei Annäherung von rechts

$$\lim_{s=1} \sum_{\mathfrak{p} \sim \mathfrak{o}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^s}$$

existieren (und ihrem Summenwerte gleich sein); also würde auch

$$\lim_{s=1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{\mathfrak{p}^m \sim \mathfrak{o}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^{ms}}$$

existieren, da die hinzugefügte Reihe

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{\mathfrak{p}^m \sim \mathfrak{o}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^{ms}}$$

sich für $s = 1$ dem endlichen Grenzwert

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{\mathfrak{p}^m \sim \mathfrak{o}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^{m}}$$

nähert. Aus der für $\Re(s) > 1$ gültigen Gleichung

$$(54) \qquad L(s) = e^{h \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum\limits_{\mathfrak{p}^m \sim \mathfrak{o}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^{ms}}}$$

würde also folgen, daß die Funktion

$$L(s) = L_1(s) \cdot L_2(s) \cdots L_h(s)$$

für $s = 1$ regulär ist. Da $L_1(s)$ in $s = 1$ einen Pol erster Ordnung hat, würde also genau eine der Funktionen

$$L_2(s),\ L_3(s),\ \cdots,\ L_h(s)$$

---

*) S. die erste der auf S. 145, Anm. 1 zitierten Arbeiten, S. 670.

**) S. die dritte jener Arbeiten, S. 563 und 568.

für $s = 1$ verschwinden, also genau eine der Zahlen

$$\sum_{\mathfrak{n}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}} \quad (\nu = 2, 3, \cdots, h)$$

gleich Null sein.*) Wenn nun h ungerade ist, so gibt es außer dem Hauptcharakter ($\nu = 1$) keinen reellen Charakter; der zu $\chi_\nu(n)$ konjugierte Charakter $\chi_{\nu'}(n)$ ist also von $\chi_\nu(n)$ verschieden. Aus dem Verschwinden eines $L_\nu(1)$ würde also das Verschwinden eines anderen $L_{\nu'}(1)$ folgen, im Widerspruch mit dem Obigen.

3) $\varkappa$ sei ein beliebiger quadratischer Körper $\mathsf{P}(\sqrt{D})$, wo die ganze Zahl D positiv-nichtquadratisch oder negativ ist. Bekanntlich divergiert alsdann die Reihe (105); denn jede durch die Form $u^2 - Dv^2$ darstellbare Primzahl ist Norm eines oder zweier Hauptprimideale des Körpers, da sie in $(u + v\sqrt{D})(u - v\sqrt{D})$ zerlegbar ist, und Herr Weber**) hat — eine Lücke bei Dirichlet ausfüllend — bewiesen, daß die Form $u^2 - Dv^2$ unendlich viele Primzahlen darstellt und, was noch mehr besagt, daß die Summe der reziproken Werte der darstellbaren Primzahlen divergiert. Für jeden quadratischen Körper habe ich also die Hauptsätze 1 und 2 bewiesen.

4) Aus dem von Herrn Furtwängler***) gelieferten Nachweis der Existenz des Klassenkörpers eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers $\varkappa$ ergibt sich allgemein die Divergenz der Reihe (105), wie mir Herr Furtwängler freundlichst mitgeteilt hat. Derselbe wird jenen Beweis demnächst veröffentlichen†); alsdann werden also meine beiden Hauptsätze 1 und 2 für jeden algebraischen Zahlkörper gelten.

Ich habe mit Absicht diese Mitteilung bis hierher verschoben, um meine analytischen Untersuchungen von der modernen Hilbert-Furtwänglerschen Theorie des Klassenkörpers deutlich zu trennen. Meine vorliegende Arbeit liefert bereits für quadratische Körper — wo die Heranziehung des Klassenkörpers unnötig ist — eine Verschärfung der weitestgehenden bisher bekannten Sätze über die Primzahlen in binären quadratischen Formen (positiver und negativer Diskriminante), wie später††) näher ausgeführt werden wird.

*) Bisher galt alles auch für gerades h; aus den Ungleichungen (55) folgt allgemein die Divergenz der Reihe (105) und umgekehrt.

**) „Beweis des Satzes, daß jede eigentlich primitive quadratische Form unendlich viele Primzahlen darzustellen fähig ist“, Mathematische Annalen, Bd. 20, 1882, S. 301—329.

***) „Die Konstruktion des Klassenkörpers für beliebige algebraische Zahlkörper“, Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, 1904, S. 173—195.

†) Dies ist auf S. 37 seiner inzwischen in diesem Bande erschienenen Arbeit „Allgemeiner Existenzbeweis für den Klassenkörper eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers“ geschehen.

††) s. S. 202—203.

Dritter Teil.

§ 19

(Einleitung).

Die Tragweite der in den beiden ersten Teilen angewandten Methode ist noch größer, als bisher festgestellt wurde. Um nicht durch allzu große Allgemeinheit der Begriffe den Leser abzuschrecken, habe ich bisher nur von der Verteilung der Primideale auf die verschiedenen Idealklassen gesprochen. Nunmehr werde ich meiner Untersuchung diejenige allgemeinere Verteilung der Primideale in „Klassen" zugrunde legen, welche das Fundament der Weberschen, auf S. 148, Anm. 1 zitierten Abhandlung bildet. Ich werde zeigen, daß unter den von Herrn Weber gemachten Voraussetzungen nicht nur in jeder Klasse unendlich viele Primideale liegen — dies hat Herr Weber bereits festgestellt — sondern auch, daß die Anzahl $\varrho(x)$ der Primideale einer solchen Klasse asymptotisch gleich $\frac{1}{h}\operatorname{Li}(x)$ ist, wo h die Klassenzahl bezeichnet, und sogar, daß für jedes reelle m

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log^m x}{x}\left(\varrho(x) - \frac{1}{h}\operatorname{Li}(x)\right) = 0$$

ist.

Es sei also ein beliebiger algebraischer Zahlkörper $\varkappa$ zugrunde gelegt; der Grad von $\varkappa$ heiße k.

In dem Körper $\varkappa$ werde eine Idealgruppe*) $\bar{O}$ und eine Zahlengruppe O' angenommen, welche folgende vier Voraussetzungen erfüllen:

1) *Die Gruppe $\bar{O}$ soll alle Primideale des Körpers $\varkappa$ enthalten mit etwaiger Ausnahme einer endlichen Anzahl, und sie soll jedes Primideal enthalten, welches Teiler eines in ihr vorkommenden ganzen Ideals ist.***)

Mit anderen Worten, die ganzen Ideale von $\bar{O}$ sind entweder alle ganzen Ideale des Körpers oder alle zu einer gegebenen endlichen Anzahl von Primidealen relativ primen ganzen Ideale des Körpers.

Es sei nun $\bar{E}$ die Gruppe der (funktionalen) Einheiten des Körpers $\varkappa$.

Es sei O' eine Zahlengruppe von der Art, daß $\bar{E}\,O'$ eine in $\bar{O}$ enthaltene Gruppe von Hauptidealen ist. Es werde angenommen:

---

*) Ich schließe mich jetzt möglichst an Herrn Webers Bezeichnungen an, verstehe also unter einer Idealgruppe ein System von (ganzen und gebrochenen) Idealen, welche sich durch Multiplikation und Division reproduzieren. In den beiden ersten Teilen dieser Arbeit habe ich durchweg — im Anschluß an Herrn Dedekinds Bezeichnungsweise — „Ideal" statt „ganzes Ideal" gesagt.

**) Den zweiten Teil dieser Voraussetzung spricht Herr Weber nicht aus, macht ihn jedoch stillschweigend, wie aus seinem Schluß auf S. 86, Z. 14—16 hervorgeht.

2) *Die Anzahl der Nebengruppen*) oder die Klassenzahl*

$$(\bar{O},\ \bar{E}\,O') = h$$

ist endlich (von Null verschieden).

Die nächste Voraussetzung lautet:

3) *Es sei* $\mathfrak{m}$ *ein ganzes Ideal in* $\bar{O}$ *und* T *oder* $T(x)$ *die Anzahl der in* $\bar{E}\,O'$ *enthaltenen, durch* $\mathfrak{m}$ *teilbaren ganzen Hauptideale, deren Norm nicht größer als die positive Zahl* x *ist. Dann soll*

$$T = \frac{gx}{N\mathfrak{m}} + Mx^{1-\frac{1}{k}} \tag{106}$$

sein, worin g *eine endliche, von Null verschiedene, positive Größe ist, die nur von der Natur der Gruppen* $\bar{O}$, O' *abhängt, aber von* x *und von dem besonderen Ideal* $\mathfrak{m}$ *unabhängig ist, während* M *eine Funktion von* x *ist, von der nur vorausgesetzt wird, daß sie mit unendlich wachsendem* x *nicht unendlich wird.*

Mit anderen Worten, es soll

$$T(x) = \frac{g}{N\mathfrak{m}}\,x + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right)$$

sein, also speziell

$$\lim_{x=\infty} \frac{T(x)}{x} = \frac{g}{N\mathfrak{m}}.$$

4) *Die über alle Primideale von* $\bar{E}\,O'$ *erstreckte Summe*

$$\sum \frac{1}{N\mathfrak{p}} \tag{107}$$

divergiert.

Die Voraussetzungen 1), 2), 3) stimmen genau mit den Weberschen überein. Meine Voraussetzung 4) verlangt weniger als die Webersche**); die folgenden Entwicklungen gelten also a fortiori, wenn Herrn Webers Voraussetzungen vollständig erfüllt sind. Es ist ein glücklicher Umstand, daß meine Voraussetzung 4) ausreicht; denn bereits für den Fall, daß $\bar{O}$ gleich der Gruppe aller Ideale, O' gleich der Gruppe aller total positiven Zahlen des Körpers ist, ist durch Herrn Furtwängler zwar bewiesen, daß der Klassenkörper existiert und daß die Reihe (107) divergiert, aber noch nicht, daß der Klassenkörper die von Herrn Weber unter 4) geforderte Eigenschaft besitzt: Jedes Primideal ersten Grades der Hauptklasse von $\varkappa$ (mit etwaiger Ausnahme einer endlichen Anzahl) zerfällt

*) Diese „Nebengruppen" sind bekanntlich — bis auf eine — keine Gruppen, sondern Komplexe, welche ihrerseits als Elemente einer Abelschen Gruppe aufzufassen sind.

**) Herr Weber folgert die Divergenz von (107) aus seiner Voraussetzung 4).

in lauter Primideale ersten Grades; alle anderen Primideale von $\varkappa$ enthalten im Klassenkörper höchstens eine endliche Anzahl von Primidealen ersten Grades.

Unter den obigen Voraussetzungen 1), 2), 3), 4) besteht nun, wie ich im § 20 zeigen will, der

Hauptsatz 3. *Die Anzahl $\varrho(x)$ der Primideale in jeder Klasse von $\bar{O}$ nach $\bar{E}\,O'$ ist*

$$= \frac{1}{h}\,\mathrm{Li}\,(x) + O\left(x e^{-\sqrt[d]{\log x}}\right).$$

Speziell ist also

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varrho(x)\log x}{x} = \frac{1}{h}$$

und für zwei beliebige Klassen

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varrho_1(x)}{\varrho_2(x)} = 1.$$

Ebenso beweise ich in § 21 unter den Voraussetzungen 1) bis 4) den

Hauptsatz 4. *In jeder Klasse von $\bar{O}$ nach $\bar{E}\,O'$ gibt es asymptotisch ebensoviele quadratfreie ganze Ideale, die aus einer geraden Anzahl von Primidealen bestehen, als solche, die aus einer ungeraden Anzahl von Primidealen zusammengesetzt sind. Dasselbe gilt, wenn das Wort „quadratfreie" weggelassen wird.*

Die Hauptsätze 1 und 2 sind hierin als Spezialfälle enthalten, wenn man $\bar{O}$ gleich dem System aller Ideale, O' gleich dem System aller Zahlen des Körpers mit positiver Norm setzt. Denn dann ist 1) von selbst erfüllt, 2) nach dem Dedekindschen Satze von der Endlichkeit der Klassenzahl, 3) nach dem Weberschen Satze (26), und die Voraussetzung 4) hatte ich ausdrücklich im Wortlaut der Hauptsätze 1 und 2 gemacht.

Andererseits ist der Beweis der Hauptsätze 3 und 4 dem der Hauptsätze 1 und 2 ganz analog, so daß ich ihn sehr kurz darstellen kann, indem ich nur die zu modifizierenden Überlegungen genau angebe.

§ 20.

Es seien $\chi_1(\mathfrak{n}), \cdots, \chi_h(\mathfrak{n})$ die h Charaktere der Gruppe der h Klassen („Nebengruppen") von $\bar{O}$ nach $\bar{E}\,O'$, $\chi_1(\mathfrak{n})$ der Hauptcharakter. Für diejenigen ganzen Ideale, welche nicht in $\bar{O}$ vorkommen, setze ich

$$\chi_1(\mathfrak{n}) = 0,\ \chi_2(\mathfrak{n}) = 0, \cdots, \chi_h(\mathfrak{n}) = 0.$$

Dann gilt für zwei beliebige ganze Ideale des Körpers die Gleichung

$$\chi(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \chi(\mathfrak{a})\,\chi(\mathfrak{b});$$

denn nach Voraussetzung 1) kommt $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ dann und nur dann in $\bar{O}$ vor, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in $\bar{O}$ vorkommen.

Es gilt also für $\Re(s) > 1$ und $\nu = 1, 2, \cdots, h$ die — auch von Herrn Weber für $s > 1$ angewandte — Identität

$$(108) \qquad \sum_{\mathfrak{n}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s} = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - \frac{\chi_\nu(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}},$$

wo links $\mathfrak{n}$ alle ganzen Ideale, rechts $\mathfrak{p}$ alle Primideale des Körpers durchläuft.

Wenn $\mathfrak{n}_1, \cdots, \mathfrak{n}_h$ ein Repräsentantensystem der h Klassen von $\bar{O}$ ist, so ist für einen vom Hauptcharakter verschiedenen Charakter*)

$$(109) \qquad \sum_{N\mathfrak{n} \leq x} \chi(\mathfrak{n}) = \chi(\mathfrak{n}_1) A_1(x) + \cdots + \chi(\mathfrak{n}_h) A_h(x),$$

wo $A_1(x), \cdots, A_h(x)$ für die einzelnen Klassen von $\bar{O}$ die Anzahlen der ganzen Ideale bezeichnen, deren Norm $\leqq x$ ist. Wird eine Klasse betrachtet, so ist, wenn das ganze Ideal $\mathfrak{a}$ ihr angehört und $\mathfrak{m}$ ein festes ganzes Ideal der inversen Klasse bezeichnet, $\mathfrak{m}\mathfrak{a} = \mathfrak{k}$ ein ganzes Hauptideal der Gruppe $\bar{E}\,O'$, und umgekehrt liefert jedes ganze durch $\mathfrak{m}$ teilbare Hauptideal $\mathfrak{m}\mathfrak{a} = \mathfrak{k}$ in $\bar{E}\,O'$ ein ganzes Ideal $\mathfrak{a}$ der gegebenen Klasse. Daher ist für $\nu = 1, 2, \cdots, h$

$$A_\nu(x) = T(N\mathfrak{m} \cdot x),$$

d. h. nach (106)

$$A_\nu(x) = gx + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right);$$

also erhält man in Verbindung mit (109) und (39)

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leq x} \chi(\mathfrak{n}) = O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right),$$

ferner

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leq x} \frac{|\chi(\mathfrak{n})|}{N\mathfrak{n}} \leqq \sum_{N\mathfrak{n} \leq x} \frac{1}{N\mathfrak{n}} = O(\log x).$$

Daher gilt der Satz VII, und die für $\Re(s) > 1 - \frac{1}{k}$ durch die Reihen

$$(110) \qquad L_\nu(s) = \sum_{\mathfrak{n}} \frac{\chi_\nu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s} \qquad (\nu = 2, 3, \cdots, h)$$

definierten analytischen Funktionen erfüllen die Relationen (47) und (49).

Was die für $\Re(s) > 1$ durch (110) definierte Funktion $L_1(s)$ betrifft, so ist nach (108)

$$L_1(s) = \prod_{\mathfrak{p}}{}' \frac{1}{1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}^s}},$$

*) (109) ist in der Schreibweise mit (44) gleichlautend.

wo $\mathfrak{p}$ alle Primideale mit Ausnahme der etwa in $\bar{O}$ nicht vorkommenden durchläuft. Also ist, falls $\bar{O}$ gleich der Gruppe aller Ideale ist,

$$L_1(s) = \zeta_\varkappa(s),$$

falls dagegen $\bar{O}$ die Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_\varrho$ nicht enthält,

$$L_1(s) = \zeta_\varkappa(s)\prod_{\alpha=1}^{\varrho}\left(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}_\alpha^s}\right). \tag{111}$$

Die ganze transzendente Funktion

$$\prod_{\alpha=1}^{\varrho}\left(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}_\alpha^s}\right)$$

ist offenbar für $\Re(s) \geqq \frac{1}{2}$, also für $\Re(s) \geqq 1 - \frac{1}{2k}$ dem absoluten Betrage nach nicht oberhalb der endlichen Schranke

$$\prod_{\alpha=1}^{\varrho}\left(1+\frac{1}{N\mathfrak{p}_\alpha^{\frac{1}{2}}}\right)$$

gelegen; ferner ist ihre Ableitung

$$\prod_{\alpha=1}^{\varrho}\left(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}_\alpha^s}\right)\cdot\sum_{\alpha=1}^{\varrho}\frac{\frac{\log N\mathfrak{p}_\alpha}{N\mathfrak{p}_\alpha^s}}{1-\frac{1}{N\mathfrak{p}_\alpha^s}}$$

für $\Re(s) \geqq \frac{1}{2}$, also für $\Re(s) \geqq 1 - \frac{1}{2k}$ dem absoluten Betrage nach

$$\leqq \prod_{\alpha=1}^{\varrho}\left(1+\frac{1}{N\mathfrak{p}_\alpha^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot\sum_{\alpha=1}^{\varrho}\frac{\log N\mathfrak{p}_\alpha}{N\mathfrak{p}_\alpha^{\frac{1}{2}}-1}.$$

Die Funktion $L_1(s)$ erfüllt also auch die Ungleichungen (51) und (52), so daß der Satz VIII wörtlich gilt.

Wird nun, wie in § 5, die analytische Funktion $L(s)$ durch die Gleichung

$$L(s) = \prod_{\nu=1}^{h} L_\nu(s)$$

definiert, so ist für $\Re(s) > 1$

$$L(s) = e^{h\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum\frac{1}{N\mathfrak{p}^{ms}}},$$

wo in der inneren Summe $\mathfrak{p}$ die Primideale durchläuft, deren m^{te} Potenz der Hauptklasse von $\bar{O}$ von $\bar{E}\,O'$, d. h. der Gruppe $\bar{E}\,O'$ angehört. Wegen der Voraussetzung 4) wächst $L(s)$ bei Abnahme von s zu 1 über alle Grenzen, so daß die Ungleichungen (55) bestehen.

§ 6 bleibt ganz ungeändert, ebenso § 7; in § 7 hat hier $\mathfrak{k}$ ein Ideal zu bedeuten, welches die zur gegebenen Klasse von $\bar{O}$ nach $\bar{E}\,O'$ inverse repräsentiert. Auch die §§ 8—10 bleiben vollkommen ungeändert, womit der Hauptsatz 3 bewiesen ist.

Ich will von demselben eine allgemeine Anwendung machen. $\chi(\mathfrak{n})$ bezeichne einen vom Hauptcharakter verschiedenen Charakter; es werde die Relation

$$\varrho(x) = \frac{1}{h}\,\mathrm{Li}(x) + O\left(xe^{-\sqrt[d]{\log x}}\right)$$

für alle h Klassen angesetzt, mit $\chi(\mathfrak{n}_\nu)$ multipliziert, und es werde alsdann die Summe jener h Relationen gebildet. Dies gibt

$$(112)\qquad \sum_{N\mathfrak{p}\leq x} \chi(\mathfrak{p}) = \frac{1}{h}\,\mathrm{Li}(x)\sum_{\nu=1}^{h}\chi(\mathfrak{n}_\nu) + O\left(xe^{-\sqrt[d]{\log x}}\right) = O\left(xe^{-\sqrt[d]{\log x}}\right).$$

Genau so, wie in § 15 aus (94) der Satz XXIV erschlossen wurde, ergibt sich aus (112) die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\mathfrak{p}} \frac{\chi(\mathfrak{p})\log^m N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{1+ti}}$$

für jedes reelle Wertepaar m, t. Hieraus folgt speziell für $m = 0$ die Konvergenz der unendlichen Reihe

$$\sum_{\mathfrak{p}} \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^{1+ti}},$$

also des unendlichen Produktes

$$\prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1-\frac{\chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^{1+ti}}}$$

und das Bestehen der bisher nur für $\Re(s) > 1$ bekannten Relation (108) auch für die Gerade $\Re(s) = 1$, falls ν einen der Werte $2, 3, \cdots, h$ hat.

Für den Hauptcharakter ist übrigens analog auf der Geraden $\Re(s) = 1$ (exkl. $s = 1$)

$$(113)\qquad L_1(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1-\frac{\chi_1(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}};$$

denn ich habe a. a. O.*) die Gleichung

$$(114)\qquad \zeta_\varkappa(1+ti) = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1-\frac{1}{N\mathfrak{p}^{1+ti}}} \qquad (t \gtrless 0)$$

bewiesen, und aus (111), (114) folgt (113).

---

*) S. die auf S. 145, Anm. 2 zitierte Arbeit, S. 127.

§ 21.

Ebenso zeigt die wörtliche Wiederholung der Entwicklungen aus den §§ 12—13 die Richtigkeit des Satzes XXI in der vorliegenden allgemeineren Bedeutung. Der Satz XXII besagt hier auch, daß

$$\lim_{x=\infty} \frac{Q(x)}{x} > 0$$

ist; nur ist der Wert des Grenzwertes hier

$$\frac{g}{\zeta_\varkappa(2)} \frac{1}{\prod\limits_{\alpha=1}^{\varrho}\left(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}_\alpha^2}\right)}.$$

In der Tat gilt die beim Beweise auftretende Ungleichung (96) nur für solche $\mathfrak{m}$, die in $\bar{O}$ vorkommen; für die anderen $\mathfrak{m}$ ist

$$A(x, \mathfrak{m}) = 0.$$

An Stelle von (97) ergibt sich also hier

$$Q(x) = gx \sum_{N\mathfrak{m} \leq \sqrt{x}}{}' \frac{\mu(\mathfrak{m})}{N\mathfrak{m}^2} + O\left(x^{1-\frac{1}{k}} \sum_{N\mathfrak{m} \leq \sqrt{x}}{}' \frac{1}{N\mathfrak{m}^{2-\frac{2}{k}}}\right),$$

wo $\mathfrak{m}$ die ganzen Ideale von $\bar{O}$ durchläuft, also

$$Q(x) = gx \sum_{\mathfrak{m}}{}' \frac{\mu(\mathfrak{m})}{N\mathfrak{m}^2} + O(\sqrt{x}) + O\left(x^{1-\frac{1}{k}} \log x\right),$$

was wegen

$$\sum_{\mathfrak{m}}{}' \frac{\mu(\mathfrak{m})}{N\mathfrak{m}^2} = \prod_{\mathfrak{p}}{}' \left(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}^2}\right) = \frac{1}{\zeta_\varkappa(2)} \frac{1}{\prod\limits_{\alpha=1}^{\varrho}\left(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}_\alpha^2}\right)}$$

den obigen Satz liefert.

Aus ihm folgt analog wie in § 14 die erste Hälfte des Hauptsatzes 4; § 15 bleibt ganz unverändert, und die Schlüsse des § 16 ergeben, wenn man sie auf die Identität

$$L(x) = \sum_{N\mathfrak{m} \leq \sqrt{x}}{}' \sum_{\substack{\mathfrak{k} \sim \mathfrak{h} \\ N\mathfrak{k} \leq \frac{x}{N\mathfrak{m}^2}}} \mu(\mathfrak{k})$$

anwendet, die zweite Hälfte des Hauptsatzes 4.

Vierter Teil.

§ 22.

Von dem Hauptsatz 3 will ich zum Schluß durch Spezialisierung auf quadratische Körper einige Anwendungen machen; dieselben knüpfen an drei klassische Untersuchungen der analytischen Zahlentheorie an, in welchen Dirichlet den ersten Schritt getan hat.

a) Es sei eine eigentlich primitive binäre quadratische Form

$$au^2 + 2buv + cv^2$$

mit positiv-nichtquadratischer oder negativer Diskriminante $D = b^2 - ac$ gegeben; im Falle $D < 0$ sei die Form positiv. Herr Weber*) hat gezeigt, daß sich im Körper $\mathsf{P}(\sqrt{D})$ eine Idealgruppe $\overline{O}$ und eine Zahlengruppe O' angeben läßt, so daß einerseits die Voraussetzungen 1), 2), 3) erfüllt sind, und andererseits die durch die Form darstellbaren Primzahlen (von endlich vielen abgesehen) mit den Normen der Primideale ersten Grades in einer gewissen Klasse von $\overline{O}$ nach $\overline{E}\,O'$ übereinstimmen. Was meine Voraussetzung 4) betrifft, so folgt aus Herrn Webers auf S. 194, Anm. 2 zitierter Arbeit, daß sie erfüllt ist. Der Hauptsatz 3 gilt also und liefert: In jeder Klasse von $\overline{O}$ nach $\overline{E}\,O'$ ist die Anzahl der Primideale, deren Norm $\leqq x$ ist,

$$= \frac{1}{h}\,\mathrm{Li}(x) + O\left(x e^{-\sqrt[d]{\log x}}\right),$$

wo h gleichzeitig die Anzahl der Klassen eigentlich primitiver (positiver) Formen der Diskriminante D und die Anzahl der Klassen von $\overline{O}$ nach $\overline{E}\,O'$ darstellt. Also ist auch die Anzahl der Primideale ersten Grades unter ihnen

$$= \frac{1}{h}\,\mathrm{Li}(x) + O\left(x e^{-\sqrt[d]{\log x}}\right),$$

da die Anzahl der Primideale zweiten und höheren Grades, deren Norm $\leqq x$ ist, $= O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\right)$ ist. Je nachdem nun die betreffende Klasse von $\overline{O}$ (oder, was dasselbe bedeutet, die Klasse der zu $au^2 + 2buv + cv^2$ äquivalenten Formen) zweiseitig ist oder nicht, entsprechen jeder durch die Form darstellbaren Primzahl (mit Ausnahme endlich vieler) zwei Primideale der Klasse oder eines, deren Norm jene Primzahl ist. *Daher ist die Anzahl der durch die quadratische Form darstellbaren Primzahlen* $\leqq x$ *für eine zweiseitige Klasse*

$$= \frac{1}{2h}\,\mathrm{Li}(x) + O\left(x e^{-\sqrt[d]{\log x}}\right),$$

für jede andere Klasse

$$= \frac{1}{h}\,\mathrm{Li}(x) + O\left(x e^{-\sqrt[d]{\log x}}\right).$$

Bisher war nur bekannt, daß jene Anzahl, durch $\mathrm{Li}(x)$ dividiert, für

*) l. c., S. 94—95.

$x = \infty$ den Grenzwert $\frac{1}{2h}$ bezw. $\frac{1}{h}$ besitzt. Herr de la Vallée Poussin*) hatte dies unter Heranziehung schwieriger analytischer Hilfsmittel (welche an sich von hohem Interesse sind) bewiesen.

b) A. Meyer**) hat zuerst den von Dirichlet ohne vollständigen Beweis ausgesprochenen Satz nachgewiesen: „Jede eigentlich primitive (positive) binäre quadratische Form mit nichtquadratischer Diskriminante stellt unendlich viele Primzahlen dar, welche zugleich in einer gegebenen, mit den Charakteren des Geschlechtes jener quadratischen Form verträglichen primitiven Linearform enthalten sind." Er hat zugleich gezeigt, daß die Summe der reziproken Werte jener Primzahlen p divergiert, indem er die Gleichung bewies:

$$\sum_p{}' \frac{1}{p^s} = c \log \frac{1}{s-1} + G(s),$$

wo

$$\lim_{s=1} G(s)$$

existiert und c die positive Konstante bezeichnet:

$$c = \frac{2g}{eh\varphi(M)},$$

wo $e = 2$ für zweiseitige Klassen ist, sonst $e = 1$, ferner h die Klassenzahl eigentlich primitiver (positiver) Formen, g die Anzahl der Geschlechter, M die Differenz der arithmetischen Progression. Herr de la Vallée Poussin***) hat das Verdienst, die schärfere Relation

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varrho(x)}{\mathrm{Li}(x)} = c$$

bewiesen zu haben, wo $\varrho(x)$ die Anzahl jener Primzahlen $\leq x$ bezeichnet.

Andererseits hat Herr Weber†) gezeigt, daß jene Primzahlen (mit Ausnahme einer endlichen Anzahl) die Normen der Primideale ersten Grades einer Klasse eines $\overline{O}$ nach einem $\overline{E}\,O'$ sind, wo die Voraussetzungen 1), 2), 3) erfüllt sind. In Verbindung mit dem Meyerschen Satz ergibt sich die Divergenz der Reihe (107), also die Richtigkeit der Voraussetzung 4) und daher nach dem Hauptsatz 3 die Gleichung

$$\varrho(x) = c\,\mathrm{Li}(x) + O\left(x e^{-\sqrt[\alpha]{\log x}}\right).$$

*) l. c. „Troisième partie. Les nombres premiers représentables par une forme quadratique de déterminant négatif", S. 363—397; „Quatrième partie. Les nombres premiers représentables par une forme quadratique de déterminant positif", Bd. 21, Teil 2, 1897, S. 251—342.

**) „Über einen Satz von Dirichlet", Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 103, 1888, S. 98—117.

***) l. c. „Cinquième partie. Nombres premiers représentables simultanément par une forme linéaire et une forme quadratique", S. 343—368.

†) l. c., S. 95—96.

c) Dirichlet*) hat bewiesen, daß im Gaußschen Körper $P(i)$ eine Linearform $\alpha\xi + \beta$ mit teilerfremden α, β unendlich viele komplexe Primzahlen, d. h. unendlich viele Primideale ersten Grades darstellt, und, was noch mehr besagt, daß die über jene komplexen Primzahlen q erstreckte Summe

$$\sum_q \frac{1}{Nq}$$

divergiert. Dirichlet hat nämlich die Relation bewiesen:

$$\sum_q \frac{1}{Nq^s} = \frac{4}{\varphi(\alpha)} \log \frac{1}{s-1} + G(s), \tag{115}$$

wo

$$\lim_{s=1} G(s)$$

existiert. Andererseits hat Herr Weber**) darauf aufmerksam gemacht, daß jene Primideale die Primideale ersten Grades einer Klasse von $\bar{O}$ nach $\bar{E}\,O'$ sind, wo $\bar{O}$ und O' gewisse Gruppen bezeichnen, welche die Voraussetzungen 1), 2), 3) erfüllen. Da nach (115) die Voraussetzung 4) auch gilt, ist der Hauptsatz 3 anwendbar und liefert:

Die Anzahl der komplexen Primzahlen $\alpha\xi + \beta$, deren Norm $\leqq x$ ist, ist

$$= \frac{4}{\varphi(\alpha)} \operatorname{Li}(x) + O\left(x e^{-\sqrt[\gamma]{\log x}}\right).$$

Berlin, den 5. März 1906.

---

*) „Untersuchungen über die Theorie der komplexen Zahlen", Abhandlungen der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1841, S. 141—161; Werke, Bd. 1, S. 509—532.

**) l. c., S. 96—97 und in seiner neueren ausführlichen Behandlung des vorliegenden Spezialfalles: „Über komplexe Primzahlen in Linearformen", Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 129, 1905, S. 35—62.