Zur Theorie allgemeiner Zetafunktionen. II.

Von

Paul Epstein in Straßburg i./E.

In einer kürzlich erschienenen Abhandlung hat Herr Herglotz*) das Problem der Inhaltsbestimmung einer von einer analytischen Kurve umschlossenen Fläche auf die Untersuchung einer Klasse von Funktionen

$$Z(s, n) = \sum_{a,b} \frac{(a+ib)^n}{(a^2+b^2)^{s+\frac{n}{2}}} \qquad (n = 0,\ 4,\ 8,\ 12,\ \cdots)$$

zurückgeführt, die eine nahe Verwandtschaft mit der Riemannschen Funktion $\zeta(s)$ zeigen. Dies veranlaßt mich, in der vorliegenden Arbeit den Nachweis zu führen, daß diese Funktionen in sehr engem Zusammenhang mit denjenigen Funktionen stehen, die ich in meiner ersten Arbeit**) als *Zetafunktionen zweiter Ordnung* bezeichnet habe, so daß sämtliche von Herrn Herglotz gefundenen Eigenschaften der Funktionen $Z(s, n)$ direkt aus den Eigenschaften jener abgeleitet werden können. Es wird dabei eine Begriffsbestimmung der Funktionen $Z(s, n)$ mit Hilfe gewisser Differentialoperationen zugrunde gelegt, die sich — wie weiterhin gezeigt wird — in sehr allgemeiner Weise auf Zetafunktionen *beliebiger* Ordnung übertragen läßt.

§ 1.

Mit einer geringen Modifikation der in meiner ersten Arbeit gegebenen Definition soll unter einer *Zetafunktion* p^{ter} *Ordnung* mit der Charakteristik $\begin{vmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_p \\ h_1 & h_2 & \cdots & h_p \end{vmatrix}$ zunächst die p-fache Reihe

$$(1) \qquad Z\begin{vmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_p \\ h_1 & h_2 & \cdots & h_p \end{vmatrix}(s)_\varphi = \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p} \frac{e^{2\pi i \sum_\mu m_\mu h_\mu}}{\varphi((m+g))^{\frac{ps}{2}}}$$

---

*) „Über die analytische Fortsetzung gewisser Dirichletscher Reihen". Math. Ann. Bd. 61, S. 551.

**) Math. Ann. Bd. 56, S. 615.

verstanden werden. Darin bedeutet

$$\varphi((x)) = \sum_{\mu=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{p} a_{\mu\nu} x_\mu x_\nu$$

eine quadratische Form mit nicht verschwindender Determinante Δ, deren reeller Teil positiv ist; $g_1, g_2, \cdots, g_p$; $h_1, h_2, \cdots, h_p$ sind irgend welche reellen Zahlen, und die Summationsindizes durchlaufen alle ganzzahligen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$; nur wenn alle Zahlen $g_1, \cdots, g_p$ *ganze* Zahlen sind, ist diejenige Kombination der Summationsbuchstaben wegzulassen, bei der der Nenner identisch verschwinden würde.

Die obige Reihe konvergiert, sobald der reelle Teil von s größer als 1 ist. Um die Zetafunktion für alle komplexen Werte von s zu definieren, benutzen wir die Integraldarstellung

$$\pi^{-\frac{ps}{2}} \Gamma\left(\frac{ps}{2}\right) Z \left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right| (s)_\varphi = \int_0^\infty dz \cdot z^{\frac{ps}{2}-1} \vartheta \left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right| (z)_\varphi,$$

worin $\vartheta \left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right| (z)_\varphi$ die Thetareihe p^{ter} Ordnung

$$(2) \qquad \vartheta \left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right| (z)_\varphi = \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p} e^{-\pi z \varphi((g+m)) + 2\pi i \sum\limits_\mu m_\mu h_\mu}$$

bedeutet. Für sie besteht die Transformationsformel*)

$$(3) \qquad \vartheta \left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right| (z)_\varphi = \frac{e^{-2\pi i \sum\limits_\mu g_\mu h_\mu}}{z^{\frac{p}{2}} \sqrt{\Delta}} \vartheta \left|\begin{matrix} h \\ -g \end{matrix}\right| \left(\frac{1}{z}\right)_{\overline{\varphi}},$$

wobei $\overline{\varphi}$ die zu φ *reziproke* Form ist. Mit Hilfe dieser Formel erhalten wir

$$(4) \qquad \pi^{-\frac{ps}{2}} \Gamma\left(\frac{ps}{2}\right) Z \left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right| (s)_\varphi = \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{ps}{2}-1} \vartheta \left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right| (z)_\varphi$$
$$+ \frac{e^{-2\pi i \sum\limits_\mu g_\mu h_\mu}}{\sqrt{\Delta}} \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{p(1-s)}{2}-1} \vartheta \left|\begin{matrix} h \\ -g \end{matrix}\right| (z)_{\overline{\varphi}}$$

und dies definiert die Zetafunktion p^{ter} Ordnung für jeden Wert von s, sobald nicht gleichzeitig alle Zahlen g und h ganzzahlig sind.

Sind aber alle Zahlen g oder h ganzzahlig, so genügt es, sie alle gleich Null anzunehmen, und es bestehen dann die Formeln:

*) Wegen des Vorzeichens von $\sqrt{\Delta}$ vgl. Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen.

1) alle g gleich Null:

$$\pi^{-\frac{ps}{2}} \Gamma\left(\frac{ps}{2}\right) Z \begin{vmatrix} 0 \\ h \end{vmatrix} (s)_\varphi = -\frac{2}{ps} + \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{ps}{2}-1} \left(\vartheta \begin{vmatrix} 0 \\ h \end{vmatrix} (z)_\varphi - 1\right)$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{p(1-s)}{2}-1} \vartheta \begin{vmatrix} h \\ 0 \end{vmatrix} (z)_{\bar{\varphi}};$$

2) alle h gleich Null:

$$\pi^{-\frac{ps}{2}} \Gamma\left(\frac{ps}{2}\right) Z \begin{vmatrix} g \\ 0 \end{vmatrix} (s)_\varphi = \frac{2}{p\sqrt{\Delta}(s-1)} + \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{ps}{2}-1} \vartheta \begin{vmatrix} g \\ 0 \end{vmatrix} (z)_\varphi$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{p(1-s)}{2}-1} \left(\vartheta \begin{vmatrix} 0 \\ g \end{vmatrix} (z)_{\bar{\varphi}} - 1\right);$$

3) alle Zahlen g und h gleich Null:

$$\pi^{-\frac{ps}{2}} \Gamma\left(\frac{ps}{2}\right) Z \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} (s)_\varphi = \frac{2}{p\sqrt{\Delta}(s-1)} - \frac{2}{ps} + \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{ps}{2}-1} \left(\vartheta \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} (z)_\varphi - 1\right)$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{p(1-s)}{2}-1} \left(\vartheta \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} (z)_{\bar{\varphi}} - 1\right).$$

Aus diesen Formeln erkennt man den für alle Zetafunktionen geltenden *Fundamentalsatz:*

$$(5)\quad \pi^{-\frac{ps}{2}} \Gamma\left(\frac{ps}{2}\right) Z \begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix} (s)_\varphi = \frac{e^{-2\pi i \sum\limits_\mu g_\mu h_\mu}}{\sqrt{\Delta}} \pi^{-\frac{p(1-s)}{2}} \Gamma\left(\frac{p(1-s)}{2}\right) Z \begin{vmatrix} h \\ -g \end{vmatrix} (1-s)_{\bar{\varphi}}$$

Die Zetafunktionen haben folgende *allgemeinen Eigenschaften:*

1) Solange nicht alle Zahlen h ganze Zahlen sind, sind die Zetafunktionen ganze transzendente Funktionen von s.

2) Sind alle Zahlen h ganzzahlig, so wird die Zetafunktion nur für $s = 1$ zur ersten Ordnung unstetig, und es ist

$$(6)\qquad Z \begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix} (s)_\varphi = \frac{2\pi^{\frac{p}{2}}}{p\sqrt{\Delta}\,\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \frac{1}{s-1} + c_0 + c_1(s-1) + \cdots .$$

3) Alle Zetafunktionen verschwinden in den Punkten

$$s = -\frac{2k}{p}; \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots).$$

4) Für $s=0$ verschwinden die Zetafunktionen jeder Charakteristik, außer wenn alle Zahlen g ganze Zahlen sind. In diesem Fall ist

$$\mathrm{Z}\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|(0) = -e^{-2\pi i \sum\limits_{\mu} g_\mu h_\mu}.$$

Auf Grund der Bemerkung von Herrn Minkowski, die Herrn Herglotz zu seiner Arbeit veranlaßt hat, kann man schließen, daß

$$\lim_{s=1}(s-1)\,\mathrm{Z}\left|\begin{matrix} 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots 0 \end{matrix}\right|(s)_\varphi$$

das *Volumen des Ellipsoids* $\varphi((x)) \gtreqless 1$ darstellt, welches, wie bekannt, mit wichtigen Sätzen aus der Theorie der quadratischen Formen von p Variablen in engem Zusammenhang steht.*)

Es liegt nahe, nun auch Funktionen aufzusuchen, die der Riemannschen Funktion $\xi(t)$ entsprechen, jedoch ist der Fundamentalsatz (5) in der Form, wie er hier vorliegt, dazu nicht geeignet, denn zu beiden Seiten stehen zwei verschiedene Zetafunktionen. Definiert man aber neue Funktionen $\zeta\left|\begin{matrix} g_1 \cdots g_p \\ h_1 \cdots h_p \end{matrix}\right|(s)_\varphi$ durch die Gleichung

$$(7)\quad \sqrt[4]{\Delta}\, e^{\pi i \sum g_\mu h_\mu}\,\mathrm{Z}\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|(s)_\varphi + \frac{1}{\sqrt[4]{\Delta}}\, e^{-\pi i \sum g_\mu h_\mu}\,\mathrm{Z}\left|\begin{matrix} h \\ -g \end{matrix}\right|(s)_{\bar\varphi} = \frac{4}{p}\,\zeta\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|(s)_\varphi,$$

so ist zunächst

$$(8)\qquad \zeta\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|(s)_\varphi = \zeta\left|\begin{matrix} h \\ -g \end{matrix}\right|(s)_{\bar\varphi}$$

und der Fundamentalsatz erhält eine Fassung, die ganz genau dem Satz über die Riemannsche ζ-Funktion entspricht, daß nämlich *das Produkt*

$$\pi^{-\frac{ps}{2}}\,\Gamma\left(\frac{ps}{2}\right)\zeta\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|(s)_\varphi$$

bei der Vertauschung von s mit $1-s$ ungeändert bleibt.

Zur Integraldarstellung dieser neuen Funktionen, die wir hier nicht im einzelnen ausführen wollen, wird man an Stelle der bisher benutzten Thetareihe ebenfalls eine modifizierte Funktion

$$(9)\quad \sqrt[4]{\Delta}\, e^{\pi i \sum\limits_{\mu} g_\mu h_\mu}\,\vartheta\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|(z)_\varphi + \frac{1}{\sqrt[4]{\Delta}}\, e^{-\pi i \sum\limits_{\pi} g_\mu h_\mu}\,\vartheta\left|\begin{matrix} h \\ -g \end{matrix}\right|(z)_{\bar\varphi} = \frac{4}{p}\,\Theta\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|(z)_\varphi$$

einführen; es ist dann

$$\Theta\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|(z)_\varphi = \Theta\left|\begin{matrix} h \\ -g \end{matrix}\right|(z)_{\bar\varphi}$$

und die Transformationsformel lautet

$$\Theta\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|(z)_\varphi = z^{-\frac{p}{2}}\,\Theta\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|\left(\frac{1}{z}\right)_\varphi.$$

*) Vgl. Minkowski, Geometrie der Zahlen, S. 122 u. S. 198; Journal für Math. Bd. 129, S. 254 ff.

Setzen wir jetzt

$$s = \frac{1}{2} + ti,$$

so ist die Funktion

$$(10) \qquad \frac{s(s-1)}{2}\pi^{-\frac{ps}{2}}\Gamma\left(\frac{ps}{2}\right)\zeta\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}(s)_\varphi = \xi\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}(t)_\varphi$$

eine *gerade* und *ganze transzendente Funktion* von t, für die man bei allgemeiner Charakteristik die Darstellung hat:

$$\xi\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}(t)_\varphi = -\left(\frac{1}{4}+t^2\right)\int_1^\infty \Theta\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}(z)_\varphi \cdot z^{\frac{p}{4}-1}\cos\left(\frac{pt}{2}\log z\right)dz.$$

Sind aber alle Zahlen g und h Null, so ist

$$\xi\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}(t)_\varphi = \frac{1}{4}\left(\sqrt[4]{\Delta} + \frac{1}{\sqrt[4]{\Delta}}\right)$$

$$-\left(\frac{1}{4}+t^2\right)\int_1^\infty\left[\Theta\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}(z)_\varphi - \frac{p}{4}\left(\sqrt[4]{\Delta}+\frac{1}{\sqrt[4]{\Delta}}\right)\right]z^{\frac{p}{4}-1}\cos\left(\frac{pt}{2}\log z\right)dz.$$

Daneben besteht die für *jede* Charakteristik gültige Darstellung

$$(11) \qquad \xi\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}(t)_\varphi = \frac{4}{p^2}\int_1^\infty \frac{d}{dz}\left(z^{\frac{p}{2}+1}\,\Theta'\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}(z)_\varphi\right)z^{-\frac{p}{4}}\cos\left(\frac{pt}{2}\log z\right)dz,$$

und so ist auch hier der genaueste Anschluß an die Riemannschen Entwicklungen gewonnen.

Alle ξ-Funktionen besitzen als Funktionen von t^2 die Höhe Null.

§ 2.

Der allgemeinen Zetafunktion *zweiter Ordnung* wird die quadratische Form

$$(1) \qquad \varphi = ax^2 + 2bxy + cy^2 = a(x-\omega y)(x-\omega' y)$$

mit der Determinante

$$\Delta = ac - b^2$$

zugrunde gelegt. Dabei sind

$$(2) \qquad \omega = -\frac{b}{a} + \frac{i\sqrt{\Delta}}{a}, \qquad \omega' = -\frac{b}{a} - \frac{i\sqrt{\Delta}}{a}$$

die Lösungen der quadratischen Gleichung $az^2 + 2bz + c = 0$.

Die Elemente der Charakteristik sehen wir als *veränderlich* an und bezeichnen sie mit $\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix}$, ferner schreiben wir zur Abkürzung

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = [mu]$$

und weiter

$$(m_1 + v_1) - \omega (m_2 + v_2) = [m + v] \tag{3}$$

und haben dann als allgemeine Zetafunktion zweiter Ordnung

$$Z \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} (s)_\varphi = \sum_{m_1} \sum_{m_2} \frac{e^{2\pi i [mu]}}{\varphi((m+v))^s}. \tag{4}$$

Eine besondere Eigenschaft dieser Funktionen, die für Zetafunktionen höherer Ordnung nicht allgemein zutrifft, besteht darin, daß sich die mit der *reziproken* Form $\bar{\varphi}$ gebildeten Funktionen auf Funktionen desselben Arguments s zur Form φ zurückführen lassen. Es ist nämlich

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{\Delta} (cx^2 - 2bxy + ay^2), \tag{5}$$

und man sieht leicht, daß

$$Z \begin{vmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix} (s)_{\bar{\varphi}} = \Delta^s Z \begin{vmatrix} -g_2 & g_1 \\ -h_2 & h_1 \end{vmatrix} (s)_\varphi \tag{6}$$

ist. Aus diesem Grunde lautet der *Fundamentalsatz* für diese Funktionen:

$$\pi^{-s} \Gamma(s) Z \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} (s)_\varphi = \frac{e^{-2\pi i [uv]}}{\Delta^{s-\frac{1}{2}}} \pi^{-(1-s)} \Gamma(1-s) Z \begin{vmatrix} -u_2 & u_1 \\ v_2 & -v_1 \end{vmatrix} (1-s)_\varphi. \tag{7}$$

Sei nun Φ irgend eine Funktion, die von der Form φ und den Variablenpaaren u_1, u_2 und v_1, v_2 abhängt; wir definieren dann zwei *Differentialoperationen:*

$$\begin{aligned} D\Phi &= \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} - \omega \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} + 2\pi i (v_1 - \omega v_2) \Phi, \\ D_1 \Phi &= \omega \frac{\partial \Phi}{\partial v_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial v_2} \end{aligned} \tag{8}$$

und stellen zunächst fest, daß diese Operationen *vertauschbar* sind:

$$D D_1 \Phi = D_1 D \Phi. \tag{9}$$

Wenden wir sie auf die Zetafunktion an, so ergibt sich:

$$D Z \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} (s)_\varphi = 2\pi i \sum \sum \frac{[m+v] e^{2\pi i [mu]}}{\varphi((m+v))^s} \tag{10}$$

und

$$D_1 Z \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} (s)_\varphi = -2si\sqrt{\Delta} \sum \sum \frac{[m+v] e^{2\pi i [mu]}}{\varphi((m+v))^{s+1}},$$

also

$$D_1 Z \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} (s)_\varphi = - s \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} D Z \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} (s+1)_\varphi. \tag{11}$$

Es lassen sich also die Operationen D und D_1 bei der Zetafunktion aufeinander zurückführen, und man braucht nur eine, z. B. die Operation D, beizubehalten. Die n-malige Wiederholung der Operationen liefert noch nach (11) die allgemeine Formel

$$\begin{aligned} & D_1^n Z \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} (s)_\varphi \\ & = (-1)^n s(s+1)(s+2)\cdots(s+n-1)\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\right)^n D^n Z \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} (s+n)_\varphi. \end{aligned} \tag{12}$$

Man erhält nun unschwer

$$D^n Z \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} (s)_\varphi = (2\pi i)^n \sum \sum \frac{[m+v]^n e^{2\pi i [mu]}}{\varphi((m+v))^s} \tag{13}$$

und wird so — wenn man noch $s + \frac{n}{2}$ an Stelle von s setzt — zu einer Reihe von Funktionen

$$Z \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} (s, n)_\varphi = \sum \sum \frac{[m+v]^n e^{2\pi i [mu]}}{\varphi((m+v))^{s+\frac{n}{2}}}, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{14}$$

geführt, die wir als *abgeleitete Zetafunktionen* bezeichnen.

Unter diesen Funktionen sind die von Herrn Herglotz betrachteten als ganz spezielle Fälle enthalten; es liegt ihnen die Form $x^2 + y^2$ zugrunde und es sind nach Ausführung der Operation D^n alle Elemente der Charakteristik Null zu setzen.

Den Fundamentalsatz für die abgeleiteten Zetafunktionen findet man durch Anwendung der Operation D auf Gleichung (7). Dabei ist zu beachten, daß in den beiden dort auftretenden Zetafunktionen die Elemente der ersten und zweiten Reihe der Charakteristik vertauscht sind; dies hat zur Folge, daß eine Operation D auf der linken Seite eine Operation D_1 auf der rechten nach sich zieht. Man erhält so:

$$\pi^{-s}\Gamma(s) D^n Z \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} (s)_\varphi = \frac{e^{-2\pi i [uv]}}{\Delta^{s-\frac{1}{2}}} \pi^{-(1-s)} \Gamma(1-s) D_1^n Z \begin{vmatrix} -u_2 & u_1 \\ v_2 & -v_1 \end{vmatrix} (1-s)_\varphi,$$

oder mit Benutzung von (12):

$$\begin{aligned} & \pi^{-s}\Gamma(s) D^n Z \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} (s)_\varphi \\ & = \frac{e^{-2\pi i [uv]}}{\Delta^{s-\frac{1}{2}}} \pi^{-(1-s)} \Gamma(1+n-s) \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\right)^n D^n Z \begin{vmatrix} -u_2 & u_1 \\ v_2 & -v_1 \end{vmatrix} (1+n-s)_\varphi. \end{aligned}$$

Setzt man jetzt $s+\frac{n}{2}$ an Stelle von s, so ergibt sich der *Fundamentalsatz der abgeleiteten Zetafunktionen:*

$$\begin{aligned}
&\pi^{-s}\Gamma\left(\frac{n}{2}+s\right) Z\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2\end{vmatrix}(s,n)_\varphi \\
(15)\qquad &= \frac{e^{-2\pi i[uv]}}{\Delta^{s-\frac{1}{2}}}\pi^{-(1-s)}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1-s\right) Z\begin{vmatrix} -u_2 & u_1 \\ v_2 & -v_1\end{vmatrix}(1-s,n)_\varphi .
\end{aligned}$$

Werden durch die Gleichung (14) die abgeleiteten Zetafunktionen nur innerhalb der Konvergenzgebiete der jeweiligen Doppelreihen dargestellt, so kann man aus der Definition mit Hilfe der D-Operation schließen, daß diese Funktionen über alle Werte von s fortsetzbar sind. Will man allgemein gültige Integraldarstellungen haben, so geht man von den entsprechenden Darstellungen der ursprünglichen Zetafunktionen zweiter Ordnung aus und wendet auf die dort auftretenden Thetareihen die Operationen D und D_1 an. Setzt man

$$(16)\qquad \sum_{m_1}\sum_{m_2}[m+v]^n e^{-\pi z\varphi((m+v))+2\pi i[mu]} = \vartheta\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_1\end{vmatrix}(z,n)_\varphi ,$$

so ist

$$D^n\vartheta\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2\end{vmatrix}(z)_\varphi = (2\pi i)^n\vartheta\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2\end{vmatrix}(z,n)_\varphi$$

und es besteht die Transformationsgleichung

$$\vartheta\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2\end{vmatrix}(z,n)_\varphi = (-1)^n\frac{e^{-2\pi i[uv]}}{z^{n+1}(\sqrt{\Delta})^{n+1}}\vartheta\begin{vmatrix} -u_2 & u_1 \\ v_2 & -v_1\end{vmatrix}\left(\frac{1}{z\Delta},n\right)_\varphi .$$

Hiermit findet man leicht die überall gültige Integraldarstellung*)

$$\begin{aligned}
\pi^{-s-\frac{n}{2}}\Gamma\left(s+\frac{n}{2}\right) Z\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2\end{vmatrix}(s,n)_\varphi &= \int_1^\infty dz\cdot z^{s+\frac{n}{2}-1}\vartheta\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2\end{vmatrix}(z,n)_\varphi \\
&+\frac{(-1)^n e^{-2\pi i[uv]}}{(\sqrt{\Delta})^{n+1}}\int_1^\infty dz\cdot z^{\frac{n}{2}-s}\vartheta\begin{vmatrix} -u_2 & u_1 \\ v_2 & -v_1\end{vmatrix}\left(\frac{z}{\Delta},n\right)_\varphi ,
\end{aligned}$$

aus der man nochmals den Fundamentalsatz (15) ablesen kann. Man erkennt hieraus auch, daß *alle abgeleiteten Zetafunktionen ganze transzendente Funktionen von* s sind, und es folgt dann weiter, daß die Funktion $Z\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2\end{vmatrix}(s,n)$ für $s=-\frac{n}{2},\ -\left(\frac{n}{2}+1\right),\ -\left(\frac{n}{2}+2\right),\cdots$ verschwindet.

*) Man sieht ohne weiteres, daß man bei den speziellen von Herrn Herglotz betrachteten Funktionen mit *einfachen* Thetareihen ausreicht.

§ 3.

Will man die Entwicklungen des vorigen Paragraphen auf Zetafunktionen von beliebiger Ordnung ausdehnen, so wird man in folgender Weise vorgehen.

Es sei Φ irgend eine Funktion, die von zwei Reihen von je p Variablen $u_1, u_2, \cdots, u_p, v_1, v_2, \cdots, v_p$, sowie von den Koeffizienten einer quadratischen Form $\varphi(\!(x)\!) = \Sigma\Sigma a_{\mu\nu} x_\mu x_\nu$ abhängt. Es mögen dann zwei Differentialoperationen definiert werden:

$$(1)\quad \begin{aligned} D\Phi &= \xi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} + \xi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} + \cdots + \xi_p \frac{\partial \Phi}{\partial u_p} + 2\pi i(\xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 + \cdots + \xi_p v_p)\Phi, \\ D_1\Phi &= x_1 \frac{\partial \Phi}{\partial v_1} + x_2 \frac{\partial \Phi}{\partial v_2} + \cdots + x_p \frac{\partial \Phi}{\partial v_p}, \end{aligned}$$

worin die Koeffizienten $\xi_1, \cdots, \xi_p, x_1, \cdots, x_p$ in noch näher zu bestimmender Weise von den $a_{\mu\nu}$ abhängen. Wir verlangen nun zunächst, daß die Operationen D und D_1 *vertauschbar* sein sollen, und finden leicht, daß dann die Koeffizienten die Bedingung

$$(2)\qquad \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_p x_p = 0$$

erfüllen müssen.

Wir wenden jetzt diese Operationen auf die allgemeine Zetafunktion

$$Z \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_p \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_p \end{vmatrix} (s)_\varphi = \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p} \frac{e^{2\pi i [mu]}}{\varphi(\!(m+v)\!)^{\frac{ps}{2}}}$$

an, wobei

$$[mu] = m_1 u_1 + m_2 u_2 + \cdots + m_p u_p$$

ist, und finden, wenn zur Abkürzung

$$(3)\qquad \xi_1(m_1 + v_1) + \xi_2(m_2 + v_2) + \cdots + \xi_p(m_p + v_p) = [m + v]$$

gesetzt wird:

$$(4)\qquad DZ \begin{vmatrix} v \\ u \end{vmatrix} (s)_\varphi = 2\pi i \sum \cdots \sum \frac{[m+v]\, e^{2\pi i [mu]}}{\varphi(\!(m+v)\!)^{\frac{ps}{2}}}.$$

Dagegen wird:

$$D_1 Z \begin{vmatrix} v \\ u \end{vmatrix} (s)_\varphi = -ps \sum \cdots \sum \frac{y_1(m_1 + v_1) + \cdots + y_p(m_p + v_p)}{\varphi(\!(m+v)\!)^{\frac{ps}{2}+1}}\, e^{2\pi i [mu]},$$

und darin ist

$$y_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{ip} x_p.$$

Wir stellen nun die weitere Forderung auf, daß diese y_i den Zahlen ξ_i proportional sein sollen, d. h. es sollen die Bedingungsgleichungen

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p &= \mu\xi_1,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p &= \mu\xi_2,\\
&\vdots\\
a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pp}x_p &= \mu\xi_p
\end{aligned}
$$

erfüllt sein. *Dann gilt für die allgemeine Zetafunktion der Satz:*

$$
(6)\qquad D_1 Z\left|\begin{matrix} v \\ u \end{matrix}\right|(s)_\varphi = -\frac{ps\mu}{2\pi i} DZ\left|\begin{matrix} v \\ u \end{matrix}\right|\left(s+\frac{2}{p}\right)_\varphi,
$$

so daß sich also die Operation D_1 auf die Operation D zurückführen läßt.

Sind

$$
\bar{a}_{ik} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial a_{ik}}
$$

die Koeffizienten der zu φ *reziproken* Form $\bar{\varphi}$, so ergibt die Auflösung des Gleichungssystems (5):

$$
(7)\qquad \frac{1}{\mu}x_i = \bar{a}_{i1}\xi_1 + \bar{a}_{i2}\xi_2 + \cdots + \bar{a}_{ip}\xi_p, \qquad (i = 1, 2, \cdots, p),
$$

und wenn man zu (5) und (7) die Bedingung (2) hinzunimmt, so sieht man, daß *durch Einsetzung der $x_1, \cdots, x_p$ die Form φ, dagegen durch Einsetzung der $\xi_1, \cdots, \xi_p$ ihre Reziproke zum Verschwinden gebracht wird,* also

$$
(8)\qquad \varphi((x)) = 0, \quad \bar{\varphi}((\xi)) = 0.
$$

Solche Systeme der x und ξ lassen sich allgemein in folgender Weise ermitteln. Es sei

$$
(9)\qquad x_i = c_{i1}z_1 + c_{i2}z_2 + \cdots + c_{ip}z_p, \quad (i = 1, 2, \cdots, p)
$$

eine lineare Substitution, durch die die Form φ in eine *Summe von Quadraten* übergeführt wird, so daß also:

$$
(10)\qquad \varphi((x)) = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_p^2 = f((z)).
$$

Nun ist nach (5)

$$
\mu\xi_i = \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \frac{1}{2}\sum_k \frac{\partial f}{\partial z_k}\frac{\partial z_k}{\partial x_i};
$$

sind also $\bar{c}_{ik}$ die Elemente des zum System der (c_{ik}) *reziproken* Systems, so ist

$$
(11)\qquad \mu\xi_i = \bar{c}_{1i}z_1 + \bar{c}_{2i}z_2 + \cdots + \bar{c}_{pi}z_p, \quad (i = 1, 2, \cdots, p).
$$

Die Gleichungssysteme (9) und (11) stellen lineare Substitutionen vor, durch die, *mit Erfüllung der Bedingung* (2), die Formen φ und $\bar{\varphi}$ simultan in eine Summe von Quadraten übergeführt werden. Nun verschwindet die Form $f((z))$ für solche Werte der $z_1, \cdots, z_p$, die durch eine *orthogonale* Substitution aus den p^{ten} *Einheitswurzeln* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_p$ hervorgehen.

Sind also q_{ik} die Elemente einer orthogonalen Substitution, so hat man in (9) und (11)

$$z_i = q_{i1}\varepsilon_1 + q_{i2}\varepsilon_2 + \cdots + q_{ip}\varepsilon_p \tag{12}$$

zu nehmen, um Werte der x und ξ mit den gewünschten Eigenschaften zu erhalten. Zu jeder Form φ gehören also in völlig angebbarer Weise Systeme von $2p$ Zahlen $\begin{pmatrix} x_1, x_2, \cdots, x_p \\ \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_p \end{pmatrix}$, die die Bedingungen (2) und (5) erfüllen, und wir können sagen: *Die Zahlen der ersten Reihe für eine Form* φ *sind Zahlen der zweiten Reihe für die reziproke Form* $\overline{\varphi}$. Die Größe μ bleibt unbestimmt, aber eine Vergleichung der Formeln (5) und (7) zeigt: Wählt man zu einer Form φ die Größe μ, so gehört zur reziproken Form die Größe $\frac{1}{\mu}$.

Wir definieren nun die *abgeleiteten Zetafunktionen*, indem wir

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} D^n Z \begin{vmatrix} v_1 & \cdots & v_p \\ u_1 & \cdots & u_p \end{vmatrix} \left(s + \frac{n}{p}\right)_\varphi = Z \begin{vmatrix} v_1 & \cdots & v_p \\ u_1 & \cdots & u_p \end{vmatrix} (s, n)_\varphi, \tag{13}$$
$$(n = 1, 2, 3, \cdots)$$

setzen, und erhalten für sie unschwer die Reihendarstellung:

$$Z \begin{vmatrix} v \\ u \end{vmatrix} (s, n)_\varphi = \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p} \frac{[m+v]^n e^{2\pi i [mu]}}{\varphi((m+v))^{\frac{1}{2}(ps+n)}}. \tag{14}$$

Zur Ableitung des Fundamentalsatzes für diese Funktionen haben wir zunächst durch wiederholte Anwendung der Formel (6):

$$\begin{aligned} & D_1^n Z \begin{vmatrix} v \\ u \end{vmatrix} (s)_\varphi \\ & = \left(\frac{\mu i}{\pi}\right)^n \frac{ps}{2}\left(\frac{ps}{2}+1\right)\left(\frac{ps}{2}+2\right)\cdots\left(\frac{ps}{2}+n-1\right) D^n Z \begin{vmatrix} v \\ u \end{vmatrix} \left(s + \frac{2n}{p}\right)_\varphi. \end{aligned} \tag{15}$$

Übt man nun auf Formel (5) in § 1 wiederholt unsere Operationen aus, so ist nach den obigen Festsetzungen über die Zahlen x und ξ klar, daß eine Operation D auf der linken Seite eine Operation D_1 auf der rechten nach sich zieht; man erhält so mit Rücksicht auf (15):

$$\begin{aligned} & \pi^{-\frac{ps}{2}} \Gamma\left(\frac{ps}{2}\right) D^n Z \begin{vmatrix} v \\ u \end{vmatrix} (s)_\varphi \\ & = \left(\frac{i}{\mu}\right)^n \frac{e^{-2\pi i [uv]}}{\sqrt{\Delta}} \pi^{-\frac{p(1-s)}{2} - n} \Gamma\left(\frac{p(1-s)}{2} + n\right) D^n Z \begin{vmatrix} u \\ -v \end{vmatrix} \left(1 - s + \frac{2n}{p}\right)_{\overline{\varphi}}, \end{aligned}$$

und wenn man jetzt $s + \frac{n}{p}$ an Stelle von s einführt, so folgt der *Fundamentalsatz der abgeleiteten Zetafunktionen*):*

*) Die unbestimmt gelassene Größe μ tritt hier, wie in (15), nur scheinbar auf.

$$\pi^{-\frac{ps}{2}} \Gamma\left(\frac{ps+n}{2}\right) Z \left| \begin{matrix} v \\ u \end{matrix} \right| (s, n)_{\varphi}$$

$$= \left(\frac{i}{\mu}\right)^n \frac{e^{-2\pi i [uv]}}{\sqrt{\Delta}} \pi^{-\frac{p(1-s)}{2}} \Gamma\left(\frac{p(1-s)+n}{2}\right) Z \left| \begin{matrix} u \\ -v \end{matrix} \right| (1-s, n)_{\bar{\varphi}}.$$

Diese Funktionen sind, wie man aus der leicht angebbaren Integraldarstellung ersieht, sämtlich ganze transzendente Funktionen von s, und die n^{te} abgeleitete Zetafunktion besitzt reelle Nullpunkte für

$$s = -\frac{2k+n}{p}, \quad (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

Straßburg i. E., Februar 1906.