Einige elementare Bemerkungen über den Prozeß der analytischen Fortsetzung.

Von

E. Study in Bonn.

Ist $w = u + iv$ eine analytische Funktion der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$, $w = f(z)$, so sind die reellen Komponenten u und v von w einzeln analytische Funktionen der reellen Komponenten x und y von z:

$$u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y).$$

Es steht also nichts im Wege, diese reellen Funktionen zu Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen zu erweitern. Hiermit betritt man ein vierdimensionales Gebiet, und zwar gelangt man in dieses durch ein natürliches, willkürfreies Verfahren. Es wird also die Frage sich aufdrängen, ob man nicht auf einem Wege, der durch dieses Gebiet hindurchführt, einen analytischen Zusammenhang zwischen zwei im reellen (zweidimensionalen) Gebiete getrennten Lösungen u_1 und u_2 der Laplaceschen Gleichung, und damit zugleich auch einen *natürlichen* Zusammenhang zwischen zwei verschiedenen analytischen Funktionen der komplexen Veränderlichen z herstellen kann. Ein solcher Zusammenhang würde besonders da von Interesse sein, wo die Funktionen $f(z)$, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ eine natürliche Grenze haben, die von einem reellen Zuge einer analytischen Kurve gebildet wird, z. B. von einer Kreislinie. Denn dann liefert ja bekanntlich die Schwarzsche Spiegelung an diesem Kurvenzuge eine neue Funktion $f_1(z)$, die jenseits der natürlichen Grenze existiert. Es wird dann zu wissen erwünscht sein, ob diese Funktion $f_1(z)$ außerdem auch als eine natürliche Fortsetzung der Funktion $f(z)$ um deren Grenze herum aufgefaßt werden kann.

Herr L. Schlesinger ist, nach persönlicher Mitteilung, schon vor längerer Zeit zu der Einsicht gelangt, daß es sich im Falle der elliptischen Modulfunktionen nicht so verhält. Indessen läßt sich eine Entscheidung ganz allgemein und auch sehr leicht herbeiführen. Man kann es nämlich den Ausdrücken der Funktionen u, v unmittelbar ansehen, daß sie eine analytische Fortsetzung in andere reelle Funktionen *niemals* zulassen.

Wir bezeichnen, wie üblich, mit $\bar{f}$ die zu der Funktion f konjugiert-komplexe Funktion, und haben dann

$$u = \frac{1}{2}\{f(x+iy) + \bar{f}(x-iy)\},$$

$$v = \frac{1}{2i}\{f(x+iy) - \bar{f}(x-iy)\}.$$

Lassen wir auch für x und y komplexe Werte zu, so ist deren Veränderlichkeit nur an die Einschränkung gebunden, daß die Funktionen $f(x+iy)$ und $\bar{f}(x-iy)$ zweier nunmehr unabhängiger komplexer Argumente $x+iy$ und $x-iy$ gleichzeitig existieren müssen. Diese Bedingung aber läßt sich noch etwas zweckmäßiger ausdrücken. Erklären wir vier reelle Größen x', y', x'', y'' und dann zwei komplexe Größen z', z'' durch die Gleichungen

$$x - iy = x' - iy', \quad x' + iy' = z',$$
$$x + iy = x'' + iy'', \quad x'' + iy'' = z'',$$

und setzen wir analog

$$u - iv = u' - iv', \quad u' + iv' = w',$$
$$u + iv = u'' + iv'', \quad u'' + iv'' = w'',$$

so sagen die bezeichneten Forderungen aus, daß die Funktionen

$$w' = f(z'), \quad w'' = f(z'')$$

existieren müssen. Es ergibt sich dann

$$u = \frac{1}{2}\{w'' + \bar{w}'\}, \quad v = \frac{1}{2i}\{w'' - \bar{w}'\}.$$

Der vierdimensionale Existenzbereich der Funktionen u, v läßt sich also eindeutig-umkehrbar und stetig abbilden auf den Bereich, der aus allen *Paaren* z', z'' gewöhnlicher komplexer Größen besteht, die in den Existenzbereich der Funktion $f(z)$ fallen. Zugleich sieht man, daß die Größen x und y nur dann reell werden, wenn $z' = z''$ wird. Gleichzeitig reduzieren sich dann auch u und v auf reelle Werte, und die Verbindung $u + iv$ wird identisch mit der völlig *bestimmten* Funktion $f(z)$.

Hiermit ist unsere Behauptung erwiesen. Zugleich erkennen wir, daß sie einer bedeutenden Verallgemeinerung fähig ist.

Man betrachte irgend eine analytische Mannigfaltigkeit M im Gebiete der komplexen Veränderlichen $z_1 \cdots z_n$. Setzt man dann $z_k = x_k + iy_k$, so hat man vor sich eine Mannigfaltigkeit von gerader Dimensionenzahl $2r$ im Gebiete der $2n$ reellen Veränderlichen x_k, y_k. Durch analytische Fortsetzung leite man aus dieser eine neue analytische Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ von der doppelten Dimensionenzahl $4r$ ab, die im Gebiete der *komplexen* Veränderlichen x_k, y_k existiert. Dann ergibt sich, genau wie zuvor, daß die Punkte von $\mathfrak{M}$ eindeutig-umkehrbar und stetig zugeordnet werden können den Punktepaaren von M*), und daß die Punkte von M die einzigen reellen Punkte von $\mathfrak{M}$ sind. Man kann daher von einem Punkte von M aus durch analytische Fortsetzung im Gebiete der *komplexen* Veränderlichen x_k, y_k nur zu solchen reellen Punkten kommen, die auf M selbst gelegen sind, zu denen man also auch schon durch analytische Fortsetzung auf *reellem* Wege gelangen kann. — Der angewendete Abbildungsprozeß ist, wie man leicht erkennt, invariant gegenüber analytischen Transformationen der Veränderlichen z_k.

Mit der behandelten Frage ist eine zweite nahe verwandt, zu der man in der Theorie der konformen Abbildung geführt wird.

Nach einem bekannten, oben gelegentlich schon erwähnten Satze des Herrn H. A. Schwarz bestimmt in der Ebene der komplexen Veränderlichen z (oder z. B. auch auf der Riemannschen Zahlenkugel) jeder reelle reguläre analytische Kurvenbogen eine sogenannte konforme Spiegelung, eine uneigentlich-konforme Abbildung, durch die in einer gewissen Umgebung dieses Bogens die Punkte zu beiden Seiten involutorisch gepaart werden, während jeder Punkt des Bogens sich selbst entspricht.**) Ein regulärer reeller Kurvenbogen aber kann nicht nur, wenn er durch singuläre Stellen algebraischen Charakters begrenzt wird, über diese hinaus analytisch fortgesetzt werden, sondern er kann auch mit anderen Bogen der Art auf komplexem Wege zusammenhängen. Welcher Zusammenhang besteht dann zwischen allen den Schwarzschen Spiegelungen, die auf solche Weise erhalten werden können?

Diese Frage, die merkwürdigerweise noch nicht gestellt worden zu sein scheint, läßt sich nun sofort beantworten, wenn man bemerkt, daß die Schwarzsche Spiegelung nichts anderes ist als ein Ausschnitt aus einer allgemeineren, übrigens längst bekannten Art der Zuordnung.

Sind ξ, η irgend welche komplexe Größen, die wir etwa als rechtwinklige Cartesische Koordinaten eines „komplexen Punktes" in der Ebene deuten wollen, so stellen Gleichungen der Form

$$\xi - i\eta = \text{const.}, \quad \xi + i\eta = \text{const.}$$

---

*) Ein noch etwas umfassenderer Satz findet sich bereits in einer Abhandlung des Herrn C. Segre (Math. Ann., Bd. 40, 1892, S. 465, Z. 10—14), scheint aber bisher nicht beachtet worden zu sein.

**) H. A. Schwarz, Ges. Werke, Bd. II, S. 149—151.

gewisse imaginäre gerade Linien dar, die sogenannten Minimalgeraden, die wir als link- und rechtseitige Minimalgerade unterscheiden können. Sind dann x, y, u, v reelle Größen, so wird durch die Gleichungen

$$\xi - i\eta = x - iy, \quad \xi + i\eta = u + iv$$

jedem komplexen Punkt (ξ, η) ein wohlbestimmtes Paar reeller Punkte (x, y) und (u, v) zugewiesen, und umgekehrt: das Paar der beiden reellen Punkte, die den durch (ξ, η) gehenden Minimalgeraden angehören.

Nehmen wir jetzt an, daß der Punkt (ξ, η) eine analytische Kurve durchläuft, *die nicht eine Minimalgerade ist*, so bedeutet — wie man ohne weiteres erkennt — die Zuordnung zwischen (x, y) und (u, v) eine reelle, (von singulären Stellen abgesehen) uneigentlich-konforme Abbildung. Umgekehrt kann eine solche in der Form $w = f(\bar{z})$ willkürlich gegeben werden; sie bestimmt dann vermöge der Gleichungen

$$\xi = \frac{1}{2}(w + \bar{z}), \quad \eta = \frac{1}{2i}(w - \bar{z})$$

eindeutig die zugehörige analytische Kurve, die verschieden ist von einer Minimalgeraden. Jede solche Kurve hat also ein *reelles Bild* in einer uneigentlich-konformen Transformation $z \longrightarrow w$, durch die die Punkte zweier Riemannscher Flächen (z) und (w) einander eindeutig-umkehrbar zugeordnet werden.*)

Ist nun die Kurve selbst *reell*, d. h. sind ihre Punkte paarweise konjugiert-komplex, so zeigt sich das an der Abbildung darin, daß die beiden Riemannschen Flächen (z) und (w) zusammenfallen, und daß jedes umgekehrte Punktepaar $w \longrightarrow z$ ebenfalls ein Paar zugeordneter Punkte ist. Tritt überdies der Fall ein, daß die reelle Kurve einen oder mehrere reelle Züge hat, so fällt jeder Punkt eines solchen Kurvenzuges mit dem zugeordneten Punkt zusammen. Die Abbildung selbst aber stimmt in der Umgebung dieses Zuges (der einem bestimmten Blatte der Riemannschen Fläche angehört) überein mit der Schwarzschen Spiegelung.

Wenn also zu einer reellen analytischen Kurve mehrere Schwarzsche Spiegelungen gehören, so hängen diese immer durch analytische Fortsetzung, und zwar durch Fortsetzung auf *reellem* Wege, mit einander zusammen. Jede einzelne unter ihnen bestimmt vollkommen zugleich mit der ganzen Kurve alle übrigen konformen Spiegelungen.

---

*) Ist z. B. die ebene Kurve eine Gerade, so ist die zugehörige Abbildung eine uneigentliche Ähnlichkeitstransformation, und umgekehrt. Ist die Kurve ein (irreduzibeler) Kreis, so ist die Abbildung irgend eine andere uneigentliche Möbiussche Kreisverwandtschaft, und umgekehrt.

Von den beiden besprochenen Sätzen gehört der erste unmittelbar der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen an; der zweite, in geometrischer Einkleidung vorgetragene, aber kann wenigstens dieser Theorie untergeordnet werden. Gleichungen der Form $w = f(\bar{z})$ sind zwar nicht analytisch im üblichen Sinne des Wortes, und sie sind vielleicht nicht in gleichem Grade nützliche Verallgemeinerungen „reeller" Gleichungen $u = f(x)$, wie Gleichungen der Form $w = f(z)$. Indessen hat doch die Theorie der analytischen Funktionen auch zur Betrachtung derartiger Abhängigkeiten genötigt. Der ebenfalls von Herrn Schwarz formulierte Satz z. B., daß eine analytische Funktion, die in den Punkten eines reellen analytischen Kurvenbogens reelle Werte hat, in den spiegelbildlich einander entsprechenden Punkten zu beiden Seiten des Kurvenbogens konjugiert-komplexe Werte annimmt, gehört gewiß der allgemeinen Funktionentheorie an: die geometrische Fassung ist nebensächlich und könnte auch durch eine andere ersetzt werden. Das gleiche gilt dann auch von unserer Bemerkung über den Zusammenhang verschiedener konformer Spiegelungen. Diese aber beruht, soviel wir sehen, ganz und gar darauf, daß man die zweidimensionale Mannigfaltigkeit (z) oder (x, y), die durch Erweiterung der sogenannten reellen Mannigfaltigkeit (x) entstanden ist, von neuem dem gleichen Erweiterungsprozeß unterwirft, sie als enthalten in einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit (ξ, η) auffaßt.

Dieser letzte Prozeß läuft nun auf den Gebrauch *bikomplexer* Größen hinaus. In der Tat, hat man die reellen Größen x und y in der Form $z = x + iy$ zu einer sogenannten komplexen Größe zusammengefaßt, so braucht man zur Zusammenfassung zweier Größen ξ, η, die selbst schon komplex sind, eine neue Einheit, die man übrigens denselben Verknüpfungsregeln unterwerfen wird. Man wird etwa in obiger Formel das Zahlenpaar (0, 1) statt mit i, mit j bezeichnen. Dann kann man ohne Mehrdeutigkeit $\zeta = \xi + j\eta$ (und $z = x + jy$) setzen, sofern man bei der Darstellung von ξ und η selbst das Zeichen i beibehält:

$$\xi = \xi_1 + i\xi_2, \quad \eta = \eta_1 + i\eta_2, \quad \zeta = \xi + j\eta.$$

Mag man sich nun der Zusammenfassung von je vier Gleichungen in eine einzige mit Hilfe eines Systems bikomplexer Größen der Form

$$a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 ij,$$
$$(i^2 = -1, \; j^2 = -1, \; ij = ji)$$

bedienen wollen, oder nicht, an der Sache wird dadurch nur Unwesentliches geändert: Ist die vorgetragene wenn auch noch so unbedeutende Ergänzung zu dem Satze von der konformen Spiegelung vernünftig, enthält sie eine irgendwie nützliche Erkenntnis, dann kann zwar (wie es ohne Zweifel geschehen wird) auch fernerhin behauptet, aber nicht mit Recht behauptet werden, daß die Erweiterung des Bereiches der reellen Größen zum Bereiche der gemeinen komplexen Größen in der allgemeinen Analysis ausreichend, und noch weniger, daß sie allein *zulässig* sei. Denn diese Behauptung schließt, wie uns scheint, die andere ein, daß die zu jener Erkenntnis unentbehrliche doppelte Erweiterung des Bereiches der reellen Größen überflüssig, ja sogar ein methodischer Mißgriff sei.

Die zentrale Stellung der gemeinen komplexen Größen und ihrer Funktionen ist gewiß durch die ganze Entwickelung der modernen Mathematik gewährleistet. In den Erörterungen über den „tieferen Grund" dieser Erscheinung — oder vielmehr, bei den Versuchen, ihr einen möglichst prägnanten Ausdruck zu geben — ist man aber unseres Erachtens etwas dogmatisch zu Werke gegangen. Zunächst bleiben diese Erörterungen alle auf dem Boden der Algebra.*) Daher bietet vielleicht unsere Bemerkung eine Ergänzung, wonach bei transzendenten Funktionen natürliche Grenzen auch im hyperkomplexen Gebiete (bei Anwendung des beschriebenen *natürlichen* Erweiterungsprozesses) nicht umgangen werden können. Aber allzugroßes Gewicht hat man unseres Erachtens auf die Forderung gelegt, daß auch in dem erweiterten Gebiete ein Produkt nicht soll verschwinden können, wenn nicht einer der Faktoren verschwindet.

Mit dem Nachweise, daß dann der Fundamentalsatz der Algebra seine Gültigkeit verliert, wird zwar die ausgezeichnete Stellung der gemeinen komplexen Größen auf eine kurze Formel gebracht, die Anwendung anderer komplexer Größen aber, auch in der allgemeinen Analysis, nicht endgültig ausgeschlossen. Es dürfte auch zu bedenken sein, daß man schon bei dem Übergang zu den gemeinen komplexen Größen kaum minder wichtige Eigenschaften der reellen Größen aufgibt, nämlich die durch Ungleichungen ausgedrückten Anordnungssätze.

Sind diese Überlegungen sachgemäß, so wird jener bekannte Ausspruch von Gauß**), an den alle diese Erörterungen angeknüpft haben (falls man ihn im Sinne von Weierstraß deuten will), selbst dann nicht in vollem Umfange aufrecht zu erhalten sein, wenn man das von Gauß in einem sonst gewiß nicht üblichen Sinne gebrauchte Wort „nicht zulässig" durch die milderen Ausdrücke „unzweckmäßig" oder „überflüssig" erklärt.

Es ist gewiß, daß *jedes* Wort des Princeps Mathematicorum die aller-

*) Daß schon von diesem Gesichtspunkte aus die von Weierstraß und anderen bekundeten Ansichten sich nicht in vollem Umfange aufrecht erhalten lassen, hat der Verfasser bei anderen Gelegenheiten darzulegen versucht (Gött. Nachr. 1898, S. 5—8. Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, S. 596).

**) Gauß Werke, Bd. II, S. 178.

sorgfältigste Erwägung verdient (einige Kommentatoren scheinen uns die Worte „in der allgemeinen Arithmetik" nicht hinreichend beachtet zu haben). Indessen aus einem seiner Aussprüche ein Verbot gewisser Forschungsrichtungen oder ein aprioristisches Werturteil über diese ableiten zu wollen, das scheint uns wirklich *unzulässig* zu sein, im eigentlichen, nicht abgeschwächten Sinne des Wortes.*) Es kommt hinzu, daß wir nicht einmal sicher sein können, recht verstanden zu haben: So hat sich Dedekind der Weierstraßchen Interpretation jener fragmentarischen und dunkeln Äußerung nicht angeschlossen.

Im Grunde ist eigentlich schon nicht einzusehen, warum die Lösungen der Laplaceschen Gleichung nicht in das komplexe Gebiet hinein sollen fortgesetzt werden dürfen, da man doch alle anderen analytischen Funktionen von zwei reellen Veränderlichen dieser Fortsetzung unterwirft. Ist es überhaupt möglich, die wissenschaftliche Systematik auf diese Art zu durchlöchern?

Im übrigen verweisen wir wegen des zuerst von Herrn Segre angewendeten Prozesses der wiederholten Erweiterung des betrachteten Größengebietes auf dessen schon erwähnte Abhandlung, und außerdem auf eine Arbeit des Verfassers „Sugli enti analitici", die kürzlich in den Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (t. XXI, p. 345) erschienen ist. Man findet dort allgemeinere Entwicklungen, u. a. auch eine Ausdehnung des Begriffs der Schwarzschen Spiegelung auf die Theorie einer unbestimmten Zahl von komplexen Veränderlichen.

Anwendungen der vorgetragenen und verwandter Ideen sollen den Gegenstand weiterer Arbeiten bilden, in denen der Verfasser besonders gewisse flächentreue Abbildungen als ein Seitenstück zu den konformen Abbildungen und in ihrer Beziehung zu diesen eingehend zu erörtern gedenkt.

---

*) Wir sehen davon ab, durch Zitate (aus den Schriften namhafter Autoren) zu zeigen, daß wir hier nicht etwa offene Türen einrennen.