Ein Satz über eindeutige Abbildung und seine Anwendung in der Variationsrechnung.

Von

OSKAR BOLZA in Chicago.

Um den fraglichen Satz bequemer formulieren zu können, wollen wir sagen, ein Punkt $(x) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ liege in der Umgebung (ϱ) einer im Raum der Variabeln x definierten Punktmenge $\mathfrak{M}$, wenn er in der Umgebung (ϱ) irgend eines Punktes von $\mathfrak{M}$ liegt, d. h. also, wenn es mindestens einen Punkt $(\bar{x})$ von $\mathfrak{M}$ gibt, so daß

$$|x_i - \bar{x}_i| < \varrho, \qquad i = 1, 2, \cdots, n.$$

Die hierdurch definierte Umgebung (ϱ) der Menge $\mathfrak{M}$ wollen wir mit $(\varrho)_{\mathfrak{M}}$ bezeichnen.

Es soll nun zunächst der folgende Satz*) bewiesen werden:

Satz I: *Die n reellen eindeutigen Funktionen*

$$(1) \qquad y_i = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n), \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

*nebst ihren ersten partiellen Ableitungen seien stetig im Innern eines Bereiches**) $\mathfrak{A}$; ferner möge die durch die Gleichungen* (1) *definierte Beziehung zwischen dem (x)-Raum und dem (y)-Raum ein-eindeutig sein für eine im Innern von $\mathfrak{A}$ gelegene, beschränkte***), abgeschlossene Punktmenge $\mathfrak{C}$, und endlich sei die Funktionaldeterminante*

$$\Delta(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{\partial(f_1, f_2, \cdots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}$$

in $\mathfrak{C}$ von Null verschieden.

Alsdann läßt sich eine ganz im Innern von $\mathfrak{A}$ gelegene Umgebung $(\varrho)_{\mathfrak{C}}$ von $\mathfrak{C}$ angeben, derart daß die Gleichungen (1) *eine ein-eindeutige Be-*

*) Der Satz ist eine Verallgemeinerung eines Satzes, den ich in § 34 meiner Lectures on the Calculus of Variations (Chicago 1904) bewiesen habe.

**) Wir gebrauchen das Wort „Bereich" für eine Punktmenge, welche innere Punkte enthält.

***) „borné".

ziehung zwischen dem Bereich $(\varrho)_{\mathfrak{C}}$ *und dessen Bild* $\mathfrak{S}_\varrho$ *im* (y)*-Raum definieren.*

Man zeigt zunächst leicht, daß sich eine positive Größe d so klein angeben läßt, daß die Umgebung $(d)_{\mathfrak{C}}$ ganz im Innern von $\mathfrak{A}$ liegt.

Dann wähle man eine abnehmende Folge positiver Größen mit der Grenze Null:

$$d > \varrho_1 > \varrho_2 > \cdots > \varrho_\nu > \cdots > 0, \quad \underset{\nu=\infty}{L}\ \varrho_\nu = 0. \tag{2}$$

Angenommen nun, es gäbe für jeden Wert des Index ν in $(\varrho_\nu)_{\mathfrak{C}}$ mindestens *ein* Paar verschiedener Punkte

$$(x'_\nu) = (x'_{1\nu}, x'_{2\nu}, \cdots, x'_{n\nu}), \qquad (x''_\nu) = (x''_{1\nu}, x''_{2\nu}, \cdots, x''_{n\nu}),$$

deren Bilder im (y)-Raum zusammenfallen. Dann können wir den beiden Punkten (x'_ν), (x''_ν) zwei Punkte (ξ'_ν) resp. (ξ''_ν) von $\mathfrak{C}$ zuordnen, derart, daß

$$|x'_{i\nu} - \xi'_{i\nu}| < \varrho_\nu, \qquad |x''_{i\nu} - \xi''_{i\nu}| < \varrho_\nu. \tag{3}$$

Wir betrachten jetzt die Punktmenge

$$\{z_\nu\} = \{(\xi'_{1\nu}, \xi'_{2\nu}, \cdots, \xi'_{n\nu};\ \xi''_{1\nu}, \xi''_{2\nu}, \cdots, \xi''_{n\nu})\}$$

im $2n$-dimensionalen Raum $x'_1, \cdots, x'_n;\ x''_1, \cdots, x''_n$. Sie ist in der beschränkten, abgeschlossenen Menge

$\mathfrak{D}$: $\qquad x'_1, x'_2, \cdots, x'_n$ in $\mathfrak{C}$, $\qquad x''_1, x''_2, \cdots, x''_n$ in $\mathfrak{C}$

enthalten. Enthält daher die Menge $\{z_\nu\}$ unendlich viele verschiedene Punkte, so besitzt sie mindestens *einen* Häufungspunkt

$$h = (a'_1, \cdots, a'_n;\ \ a''_1, \cdots, a''_n),$$

der zugleich Häufungspunkt von $\mathfrak{D}$ ist und daher zu $\mathfrak{D}$ gehört, d. h. (a') ist ein Punkt von $\mathfrak{C}$ und ebenso (a''). Es läßt sich dann eine unendliche Teilfolge $\{z_{\nu_\mu}\}$ aus $\{z_\nu\}$ herausheben, so daß

$$\underset{\mu=\infty}{L}\ z_{\nu_\mu} = h, \qquad \nu_{\mu+1} > \nu_\mu,$$

d. h.

$$\underset{\mu=\infty}{L}\ (\xi'_{\nu_\mu}) = (a'), \qquad \underset{\mu=\infty}{L}\ (\xi''_{\nu_\mu}) = (a''). \tag{4}$$

Enthält die Menge $\{z_\nu\}$ nur eine endliche Anzahl verschiedener Punkte, so läßt sich aus $\{z_\nu\}$ eine unendliche Teilfolge $\{z_{\nu_\mu}\}$ von gleichen Punkten herausgreifen, und man gelangt zu demselben Resultat (4).

Verbindet man (4) mit (2) und (3), so folgt, daß auch

$$\underset{\mu=\infty}{L}\ (x'_{\nu_\mu}) = (a'), \qquad \underset{\mu=\infty}{L}\ (x''_{\nu_\mu}) = (a''). \tag{5}$$

Es läßt sich nun aber zeigen, daß

$$(a') = (a''). \tag{6}$$

Denn setzt man

$$D(x_1', \cdots, x_n';\ x_1'', \cdots, x_n'') = \sum_{i=1}^{n} [f_i(x_1', \cdots, x_n') - f_i(x_1'', \cdots, x_n'')]^2,$$

so ist nach der Definition der Punkte (x_ν'), (x_ν''):

$$D(x_{1\nu_\mu}', \cdots, x_{n\nu_\mu}';\ x_{1\nu_\mu}'', \cdots, x_{n\nu_\mu}'') = 0,$$

und daher, wenn wir zur Grenze $\mu = +\infty$ übergehen und beachten, daß $D(x_1', \cdots, x_n';\ x_1'', \cdots, x_n'')$ in $a_1', \cdots, a_n';\ a_1'', \cdots, a_n''$ stetig ist:

$$D(a_1', \cdots, a_n',\ a_1'', \cdots, a_n'') = 0,$$

also

$$f_i(a_1', \cdots, a_n') = f_i(a_1'', \cdots, a_n''), \qquad i = 1, 2, \cdots, n.$$

Da wir aber voraussetzen, daß die Abbildung (1) für die Menge $\mathfrak{C}$ eineindeutig ist, so folgt hieraus

$$(a') = (a'').$$

Aus unserer Annahme folgt also, daß es einen Punkt (a) von $\mathfrak{C}$ gibt, derart, daß in jeder Nähe von (a) Paare von verschiedenen Punkten existieren, deren Bilder im (y)-Raum zusammenfallen.

Dies ist aber nach dem Satz über implizite Funktionen nicht möglich, da die Funktionen $f_i(x_1, \cdots, x_n)$ nebst ihren ersten Ableitungen in der Umgebung von (a) stetig sind und überdies

$$\Delta(a_1, \cdots, a_n) \neq 0.$$

Wir sind also zu einem Widerspruch gelangt; daher muß es mindestens einen Wert $\nu = r$ geben, derart, daß zwei verschiedenen Punkten von $(\varrho_r)_{\mathfrak{C}}$ allemal zwei verschiedene Punkte im (y)-Raum entsprechen. Dasselbe gilt dann a fortiori für die Umgebung $(\varrho)_{\mathfrak{C}}$, sobald $\varrho \overline{\gtrless} \varrho_r$ gewählt wird, womit unser Satz bewiesen ist.

Zusatz I: *Die Größe ϱ läßt sich so klein wählen, daß jeder Punkt des Bildes $\mathfrak{S}_\varrho$ von $(\varrho)_{\mathfrak{C}}$ ein innerer Punkt von $\mathfrak{S}_\varrho$ ist, und daß die durch Auflösung der Gleichungen* (1) *erhaltenen und in $\mathfrak{S}_\varrho$ eindeutig definierten inversen Funktionen*

$$x_\varkappa = \psi_\varkappa(y_1, y_2, \cdots, y_n), \qquad \varkappa = 1, 2, \cdots, n \tag{7}$$

im Bereich $\mathfrak{S}_\varrho$ stetig sind und stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzen.

Denn bezeichnet man mit $\overset{+}{\mathfrak{C}}$ denjenigen Bestandteil von $\mathfrak{C}$, in welchem $\Delta(x_1, \cdots, x_n) > 0$, mit $\overset{-}{\mathfrak{C}}$ denjenigen, in welchem $\Delta(x_1, \cdots, x_n) < 0$, so folgt leicht aus den über die Menge $\mathfrak{C}$ gemachten Voraussetzungen, daß auch die Mengen $\overset{+}{\mathfrak{C}}$ und $\overset{-}{\mathfrak{C}}$ beschränkt und abgeschlossen sind. Nach bekannten Sätzen*) über stetige Funktionen folgt dann, indem man zunächst $\overset{+}{\mathfrak{C}}$ und $\overset{-}{\mathfrak{C}}$ getrennt betrachtet, daß sich eine positive Größe d_1 so wählen läßt, daß

$$\Delta(x_1, \cdots, x_n) \neq 0 \quad \text{in} \quad (\varrho)_{\mathfrak{C}},$$

sobald $\varrho < d_1$.

Wird ϱ dieser Bedingung entsprechend und zugleich $\overline{\leqq} \varrho_r$ gewählt, so führt der Satz über implizite Funktionen unmittelbar zum Beweis der oben ausgesprochenen Behauptungen.

Es sei $\mathfrak{E}$ das Bild der Menge $\mathfrak{C}$ im (y)-Raum; dann ist die Menge $\mathfrak{E}$, ebenso wie $\mathfrak{C}$, beschränkt und abgeschlossen.**) Da sie in $\mathfrak{S}_\varrho$ enthalten ist, so liegt sie nach dem Vorigen ganz im Innern von $\mathfrak{S}_\varrho$. Daraus folgt

Zusatz II: *Es läßt sich eine Umgebung* $(\sigma)_{\mathfrak{E}}$ *des Bildes* $\mathfrak{E}$ *von* $\mathfrak{C}$ *angeben, welche ganz in* $\mathfrak{S}_\varrho$ *liegt.*

Hiernach läßt sich der Satz I auch so aussprechen: Unter den angegebenen Voraussetzungen lassen sich zwei positive Größen ϱ und σ angeben, derart, daß für jedes (y) in $(\sigma)_{\mathfrak{E}}$ die Gleichungen (1) eine und nur eine Lösung (x) in $(\varrho)_{\mathfrak{C}}$ besitzen.

In dieser Form läßt sich der Satz auf implizite Funktionen verallgemeinern, und man erhält den folgenden

Satz II: *Es sei das System von n Gleichungen gegeben:*

$$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_m, \;\; y_1, y_2, \cdots, y_n) = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{8}$$

wobei die Funktionen f_i *nebst ihren ersten partiellen Ableitungen als Funktionen ihrer* $m+n$ *Argumente im Innern eines Bereiches* $\mathfrak{A}$ *stetig sind.*

Die Gleichungen (8) *mögen befriedigt sein für die sämtlichen Punkte einer ganz im Innern von* $\mathfrak{A}$ *gelegenen, beschränkten, abgeschlossenen Punktmenge* $\mathfrak{A}$, *welche die Eigenschaft hat, daß, wenn* $(x_1', \cdots, x_m', \;\; y_1', \cdots, y_n')$ *und* $(x_1'', \cdots, x_m'', \;\; y_1'', \cdots, y_n'')$ *zwei verschiedene Punkte von* $\mathfrak{C}$ *sind, dann allemal* $(x_1', \cdots, x_m') \neq (x_1'', \cdots, x_m'')$.

Endlich sei die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(f_1, \cdots f_n)}{\partial(y_1, \cdots, y_n)} \neq 0 \quad in \quad \mathfrak{C}. \tag{9}$$

*Wenn alsdann X (resp. Y) die Projektion***) der Menge* $\mathfrak{C}$ *in den* $(x_1, \cdots, x_n)$*-Raum (resp. den* $(y_1, \cdots, y_n)$*-Raum) bezeichnet, so lassen sich*

*) Vgl. Jordan, Cours d'Analyse, I, Nr. 62, 64.

**) Vgl. Jordan, l. c. Nr. 64.

***) Unter der Projektion eines Punktes $(x_1', \cdots, x_m'; \; y_1', \cdots, y_n')$ von $\mathfrak{C}$ in den (x)-Raum wird der Punkt: $(x) = (x_1', \cdots, x_m')$ verstanden.

zwei positive Größen ϱ *und* σ *angeben, derart daß für jedes* (x) *in der Umgebung* $(\sigma)_X$ *die Gleichungen* (8) *eine und nur eine Lösung* (y) *besitzen, für welche der Punkt* (x, y) *in der Umgebung* $(\varrho)_{\mathfrak{G}}$ *liegt; die hierdurch für den Bereich* $(\sigma)_X$ *eindeutig definierten impliziten Funktionen*

$$y_i = \psi_i(x_1, \cdots, x_m) \tag{10}$$

sind in diesem Bereich stetig und besitzen stetige partielle Ableitungen erster Ordnung.

Zum Beweis betrachte man das Gleichungssystem

$$u_h = x_h, \quad h = 1, 2, \cdots, m,$$
$$u_{m+i} = f_i(x_1, \cdots, x_m, \; y_1, \cdots, y_n), \qquad i = 1, 2, \cdots, n.$$

Dasselbe erfüllt alle Bedingungen des Satzes I und läßt sich daher in dem angegebenen Sinn eindeutig nach $x_1, \cdots, x_m, \; y_1, \cdots, y_n$ auflösen. Setzt man insbesondere $u_{m+1} = 0, \; \cdots, \; u_{m+n} = 0$, so erhält man den obigen Satz.

Um die Brauchbarkeit der angegebenen Säze zu zeigen, führe ich zwei der Variationsrechnung entlehnte Beispiele an:

1) *Der Satz von der Existenz eines Feldes.*

Es sei im $n+1$-dimensionalen Raum eine n-fach unendliche Kurvenschar in Parameterdarstellung gegeben:

$$x_j = \varphi_j(t, a_1, a_2, \cdots, a_n), \qquad i = 1, 2, \cdots, n+1, \tag{12}$$

wobei die Funktionen φ_j nebst ihren ersten partiellen Ableitungen stetig sein sollen in dem Bereich

$$T_0 < t < T_1, \quad |a_i - a_i^0| < d. \tag{13}$$

Die spezielle Kurve

$$\mathfrak{E}: \qquad x_j = \varphi_j(t, a_1^0, a_2^0, \cdots, a_n^0), \qquad t_0 \leqq t \leqq t_1,$$

wo $T_0 < t_0, \; t_1 < T_1$, soll keine mehrfachen Punkte besitzen, und die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)}{\partial(t, a_1, \cdots, a_n)}$$

sei von Null verschieden für

$$t_0 \gtreqless t \gtreqless t_1, \quad a_1 = a_1^0, \cdots, a_n = a_n^0. \tag{14}$$

Dann läßt sich eine positive Größe $\varkappa$ angeben, derart daß die Gleichungen (12) eine ein-eindeutige Beziehung zwischen dem Bereich

$$t_0 - \varkappa < t < t_1 + \varkappa, \quad |a_i - a_i^0| < \varkappa, \qquad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{15}$$

und dessen Bild $\mathfrak{S}_\varkappa$ im (x)-Raum definieren; mit andern Worten: durch jeden Punkt des Bereiches $\mathfrak{S}_\varkappa$ geht eine und nur eine Kurve der Schar (12), für welche die Bedingungen (14) erfüllt sind.

Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz I; die Menge $\mathfrak{C}$ ist hier durch (14) definiert, die Umgebung $(\varkappa)_{\mathfrak{C}}$ durch (15).

Das Bild $\mathfrak{S}_\varkappa$ ist hier ein Kontinuum, da*) die Menge (15) zusammenhängend ist.

In dem speziellen Fall der nicht-parametrischen Darstellung hat eine der Gleichungen, z. B. die letzte, die Form

$$x_{n+1} = t$$

und die Bedingung, daß die Kurve $\mathfrak{C}$ keine mehrfachen Punkte enthält, ist stets erfüllt, kann also bei der Formulierung des Satzes weggelassen werden.

2) *Reduktion der Differentialgleichungen für das allgemeinste Problem des Extremums eines einfachen Integrals auf ein kanonisches System***):

Auch bei dieser bekannten Aufgabe tritt eine Schwierigkeit bezüglich der eindeutigen Auflösung eines Gleichungssystems auf, welche durch den obigen Satz II in befriedigender Weise gelöst werden kann. Die Funktionen

$$f(x, y_1, \cdots, y_n, y_1', \cdots, y_n'), \quad f_\varrho(x, y_1, \cdots, y_n, y_1', \cdots, y_n'), \qquad \varrho = 1, 2, \cdots, r$$

seien als Funktionen ihrer $2n+1$ Argumente nebst ihren partiellen Ableitungen bis zur dritten Ordnung (inkl.) im Innern eines Bereiches $\mathfrak{A}$ stetig, und es werde

$$\Omega = f + \sum_{\varrho=1}^{r} \lambda_\varrho f_\varrho,$$

$$\Omega_i = \frac{\partial \Omega}{\partial y_i}, \qquad \Omega_{n+i} = \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}$$

gesetzt. Es handelt sich dann um die Auflösungen des Gleichungssystems

$$(16) \qquad \begin{cases} \Omega_{n+i} = v_i, & i = 1, 2, \cdots, n, \\ f_\varrho = 0, & \varrho = 1, 2, \cdots, r \end{cases}$$

nach den Unbekannten $y_1', \cdots, y_n', \lambda_1, \cdots, \lambda_\varrho$.

Dabei soll angenommen werden, daß man eine Lösung

$$y_i = y_i(x), \qquad \lambda_\varrho = \lambda_\varrho(x)$$

der Differentialgleichungen

$$\Omega_i - \frac{d}{dx}\Omega_{n+i} = 0, \qquad f_\varrho = 0$$

von folgenden Eigenschaften gefunden habe:

---

*) Vgl. Jordan, l. c. Nr. 64.

**) Ich folge der Bezeichnung von A. Mayer in den Abhandlungen: Über den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz etc., Sächsische Berichte, Mai 1903, Mai 1905, Juli 1905. Abgedruckt in Math. Ann. Bd. 58 und 62.

Die Funktionen $y_i(x)$ nebst ihren ersten und zweiten Ableitungen, die Funktionen $\lambda_\varrho(x)$ nebst ihren ersten Ableitungen sind stetig in einem Intervall $(x_0 x_1)$ und die Kurve

$$x_0 \gtreqless x \gtreqless x_1, \quad y_i = y_i(x), \quad y_i' = y_i(x)$$

liegt ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{A}$. Endlich soll die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(\Omega_{n+1}, \cdots, \Omega_{2n}, f_1, \cdots, f_r)}{\partial(y_1', \cdots, y_n', \lambda_1, \cdots, \lambda_r)}$$

von Null verschieden sein für

$$x_0 \gtreqless x \gtreqless x_1, \quad y_i = y_i(x), \quad y_i' = y_i'(x), \quad \lambda_\varrho = \lambda_\varrho(x).$$

Definiert man dann die Funktionen $v_i(x)$ durch

$$v_i(x) = \Omega_{n+i}(x, y_1(x), \cdots, y_1'(x), \cdots, \lambda_1(x), \cdots),$$

so lassen sich die Gleichungen (16) im Sinne des Satzes II eindeutig nach $y_1', \cdots, y_n'$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ auflösen für jedes Wertsystem $x, y_1, \cdots, y_n$, $v_1, \cdots, v_n$ in einer gewissen Umgebung (σ) der Kurve

$$x_0 \gtreqless x \gtreqless x_1, \quad y_i = y_i(x), \quad v_i = v_i(x).$$

Freiburg i./B., den 26 März 1906.