Werk

Titel: Mathematische Annalen
Ort: Leipzig
Jahr: 1907
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN235181684_0063
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0063

LOG Id: LOG_0025
LOG Titel: Über die Herleitung der Differentialgleichungen der Variationsrechnung
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684

Terms and Conditions

Contact

Über die Herleitung der Differentialgleichungen der Variationsrechnung.

Von

Hans Hahn in Wien.

Für die Variationsrechnung ist die Frage von großer Bedeutung, ob es außer den durch die Lagrangeschen Gleichungen gelieferten (stetigen und unstetigen) Lösungen noch andere Lösungen geben kann. Man ist aber auch im einfachsten Falle über das von Du Bois-Reymond erzielte Resultat, daß sich unter den stetig differenzierbaren Funktionen keine neuen Lösungen finden können, nicht wesentlich hinausgelangt, denn die Abhandlung von Whittemore*) läßt nur sehr spezielle Verteilung der Unstetigkeitsstellen zu und führt auch dann nur unter bedeutenden Einschränkungen zum Ziele, und auch die in der Dissertation von Gernet**) angedeutete Methode bedarf zu ihrer exakten Durchführung sehr weitgehender Voraussetzungen über das zu untersuchende Variationsproblem. Im ersten Abschnitte dieses Aufsatzes wird nun gezeigt, daß alle rektifizierbaren durchwegs mit einer Tangente versehenen Lösungskurven eines Variationsproblems mit den stetigen Lösungen der Lagrangeschen Gleichungen übereinstimmen, während die bloß mit einer einseitigen Tangente versehenen Lösungskurven mit den bekannten unstetigen Lösungen zusammenfallen. Der zweite Teil dieses Aufsatzes beschäftigt sich mit dem allgemeinen Probleme der Variationsrechnung. Ich habe vor einiger Zeit eine Methode angegeben***), um auch in diesem Falle die Lagrangeschen Gleichungen aufstellen zu können unter der Voraussetzung, daß die Lösungen bloß einmal stetig differenzierbar sind. Hier nun zeige ich, wie das mittlerweile von Hilbert†) mitgeteilte Verfahren zur Aufstellung dieser Gleichungen, das zweimalige Differenzierbarkeit voraussetzt, modifiziert

*) Annals of math. (2) 2 (1900).
**) Gött. Diss. 1902, p. 53.
***) Monatshefte f. Math. u. Phys. 14 (1903).
†) Gött. Nachr. 1905.

werden kann, so daß auch dieses Verfahren nur mehr die Existenz stetiger erster Ableitungen der gesuchten Lösung voraussetzt.

§ 1.

Das einfachste Problem der Variationsrechnung verlangt, in einer gegebenen Klasse von Kurven, die zwei feste Punkte der Ebene miteinander verbinden, diejenigen aufzufinden, welche einem Kurvenintegrale von der Form:

$$\int F(x, y; x', y')\, dt \tag{1}$$

einen kleineren (oder größeren) Wert erteilen, als jede andere genügend benachbarte, dieselben Punkte verbindende Kurve.

Soll der Wert des Integrals (1) unabhängig sein von der Art der Darstellung der Kurvenkoordinaten durch den Parameter t, so muß bekanntlich für alle positiven Zahlen k die Beziehung bestehen:

$$F(x, y; kx', ky') = kF(x, y; x', y').$$

Wir setzen dieselbe als erfüllt voraus. Ferner sei die Funktion $F(x, y; x', y')$ in allen in Betracht kommenden Punkten der Ebene eine regulär-analytische Funktion ihrer vier Argumente, und zwar für alle endlichen Wertepaare x', y', ausgenommen etwa das Wertepaar 0, 0.

Die in der Variationsrechnung übliche Methode lehrt, unser Problem zu lösen, wenn die oben genannte Kurvenklasse aus allen denjenigen Kurven besteht, deren Koordinaten sich als zweimal stetig differenzierbare Funktionen eines Parameters t darstellen lassen. Diese Kurven haben in jedem Punkte eine Tangente und eine bestimmte endliche Krümmung; die Neigung der Tangente gegen die Koordinatenachsen, sowie die Krümmung ändern sich stetig von Punkt zu Punkt. Die gesuchte Kurve muß dann bekanntlich den beiden (voneinander nicht unabhängigen) Differentialgleichungen genügen:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \tag{2}$$

den sogenannten Lagrangeschen Gleichungen*) des Problems.

P. Du Bois-Reymond**) gelang es zu beweisen, daß, wenn man die eben angeführte Kurvenklasse durch die Klasse aller derjenigen Kurven ersetzt, deren Koordinaten sich durch einmal stetig differenzierbare Funk-

---

*) O. Bolza bezeichnet diese Gleichungen in seinen „Lectures on the Calculus of Variations“ als Eulersche Gleichungen.

**) Math. Ann. 15 (1879), p. 564. Eine einfachere Fassung des Beweises rührt von Hilbert her. Beide Fassungen sind wiedergegeben in Bolza, Lectures, p. 22. Ferner ein sehr einfacher Beweis von E. Zermelo, Math. Ann. 58.

tionen eines Parameters t darstellen lassen, zu den durch die Lagrangeschen Gleichungen gelieferten Lösungen keine weiteren hinzukommen. Die nunmehr zugelassenen Kurven besitzen also in jedem Punkte eine bestimmte Tangente, deren Neigung gegen die Koordinatenachsen sich stetig ändert. Eine solche Kurve ist bekanntlich stets rektifizierbar.

Im folgenden wird nun diese Kurvenklasse abermals durch eine umfassendere ersetzt: Es soll von den Kurven, unter denen die Lösung des Variationsproblems gesucht wird, nur vorausgesetzt werden, daß sie rektifizierbar sind und in jedem Punkte eine bestimmte Tangente besitzen, und es soll dargetan werden, daß auch hierdurch keine neuen Lösungen zustande kommen.*) Es ist klar, daß die hier betrachtete Kurvenklasse jede der beiden früher erwähnten in sich einschließt, aber wesentlich allgemeiner ist.

Zunächst sei darauf hingewiesen, daß für jede Kurve aus unserer Klasse der Begriff des Kurvenintegrals einen Sinn besitzt. In der Tat können wir, da die Kurve als rektifizierbar vorausgesetzt ist, die vom Anfangspunkte der Integration an gemessene Bogenlänge s als Parameter einführen. Bezeichnen wir mit γ den Winkel, den die Tangente an die Kurve im Punkte s (positiv gerechnet in der Richtung wachsenden s) mit der positiven x-Achse einschließt, so ist:

$$(3)\qquad \begin{aligned} \cos\gamma &= \lim_{h=0} \frac{x(s+h)-x(s)}{+\sqrt{[x(s+h)-x(s)]^2+[y(s+h)-y(s)]^2}};\\ \sin\gamma &= \lim_{h=0} \frac{y(s+h)-y(s)}{+\sqrt{[x(s+h)-x(s)]^2+[y(s+h)-y(s)]^2}}. \end{aligned}$$

Es sind also $\cos\gamma$ und $\sin\gamma$ dargestellt als Grenzen stetiger Funktionen, und sind daher — nach der Terminologie von R. Baire**) — Funktionen der ersten Klasse. Dasselbe gilt, da $F(x, y; x', y')$ stetig von seinen vier Argumenten abhängt, von der Funktion $F(x, y; \cos\gamma, \sin\gamma)$***); dieser Ausdruck ist also integrierbar im Sinne von H. Lebesgue†) und das Integral:

$$\int_0^s F(x, y; \cos\gamma, \sin\gamma)\, ds$$

*) Die sogenannten diskontinuierlichen Lösungen genügen unseren Forderungen nicht, da sie nicht in jedem Punkte eine Tangente besitzen. Dieselben kommen am Schlusse dieses Paragraphen zur Behandlung.

**) Siehe etwa R. Baire, Leçons sur les fonctions discontinues. Paris, Gauthier-Villars, 1905.

***) Vgl. etwa H. Lebesgue, Journ. de math., 1905, p. 153.

†) H. Lebesgue, Leçons sur l'intégration. Paris, Gauthier-Villars, 1904, p. 111.

bezeichnen wir als das über unsere Kurve erstreckte Integral der Funktion $F(x, y; x', y')$. Man erkennt ferner leicht, daß, wenn mit $x'(s)$ und $y'(s)$ irgend welche der vier Derivierten von $x(s)$ und $y(s)$ bezeichnet werden, stets die Beziehung besteht:

$$\int_0^s F(x, y; x'(s), y'(s))\,ds = \int_0^s F(x, y; \cos\gamma, \sin\gamma)\,ds.$$

In der Tat: Zunächst hat der links stehende Ausdruck immer einen Sinn, da $x'(s)$ sowohl als $y'(s)$ und somit auch $F(x, y; x'(s), y'(s))$ höchstens von der zweiten Klasse sind.*) Andererseits können sich $x'(s)$ und $y'(s)$ von $\cos\gamma$ und $\sin\gamma$ höchstens in den Punkten einer Menge vom Maße Null unterscheiden**); auf die Werte des Integranden in einer solchen Punktmenge kommt es aber bei der Integration von Funktionen, deren Werte zwischen endlichen Grenzen liegen — und nur um solche handelt es sich hier —, bekanntlich gar nicht an.

Soll nun das Stück $(s_0 s_1)$ unserer Kurve dem Integral (1) einen kleinsten oder größten Wert erteilen, so ergibt eine bekannte Schlußweise, daß das über diesen Kurvenbogen erstreckte Integral:

$$\int_{s_0}^{s_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x} u + \frac{\partial F}{\partial y} v + \frac{\partial F}{\partial x'} u' + \frac{\partial F}{\partial y'} v'\right) ds$$

den Wert Null haben muß für alle stetigen, abteilungsweise stetig differenzierbaren Funktionen $u(s)$, $v(s)$, die für $s = s_0$ und $s = s_1$ verschwinden. Dasselbe gilt somit für jedes einzelne der Integrale:

$$\int_{s_0}^{s_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x} u + \frac{\partial F}{\partial x'} u'\right) ds; \quad \int_{s_0}^{s_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} v + \frac{\partial F}{\partial y'} v'\right) ds.$$

Wir zeigen zunächst, daß die Gleichung besteht:

$$(4) \qquad \int_{s_0}^{s_1} \frac{\partial F}{\partial x} u\,ds = -\int_{s_0}^{s_1} \left(\int_{s_0}^{s} \frac{\partial F}{\partial x} ds\right) u'(s)\,ds.$$

Auf Grund unserer Voraussetzungen liegen die Werte der Funktion $\frac{\partial F}{\partial x}$ zwischen endlichen Grenzen. Es liegen daher auch die Werte der vier Ableitungen von $\int_{s_0}^{s} \frac{\partial F}{\partial x} ds$ zwischen endlichen Grenzen, und da das

*) H. Lebesgue, l. c., p. 121.

**) H. Lebesgue, l. c., p. 125.

gleiche nach Voraussetzung von $u(s)$ gilt, so gilt es auch von $u(s)\int\limits_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds$.

Nach einem Satze von Lebesgue*) existiert daher die Ableitung

$$\frac{d}{ds}\left[u\,(s)\int\limits_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds\right]$$

im ganzen Intervall $(s_0 s_1)$, abgesehen höchstens von einer Punktmenge vom Maße Null. Wo aber diese Ableitung existiert, muß sie den Wert haben:

$$u'(s)\int\limits_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds + u(s)\,\frac{d}{ds}\int\limits_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds.$$

Da nun, ebenfalls nach Lebesgue**), abgesehen von einer Punktmenge vom Maße Null, die Gleichung gilt:

$$\frac{d}{ds}\int\limits_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds = \frac{\partial F}{\partial x},$$

so gilt in $(s_0 s_1)$, wieder abgesehen von einer Punktmenge vom Maße Null, die Gleichung:

$$\frac{d}{ds}\left[u\,(s)\int\limits_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds\right] = u'(s)\int\limits_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds + u(s)\cdot\frac{\partial F}{\partial x}. \tag{5}$$

Integriert man eine der vier Ableitungen von $u(s)\int\limits_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds$ von s_0 bis s_1, so erhält man aber***) die Differenz:

$$\left[u(s)\int\limits_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds\right]_{s_0}^{s_1},$$

die wegen der Voraussetzung $u(s_1) = 0$ den Wert Null hat. Da es aber bei Bildung des Lebesgueschen Integrals einer endlichen Funktion auf die Werte des Integranden in einer Punktmenge vom Maße Null nicht ankommt, so muß wegen (5) auch:

$$\int\limits_{s_0}^{s_1}\left(u'(s)\int\limits_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds\right)ds + \int\limits_{s_0}^{s_1}u(s)\,\frac{\partial F}{\partial x}\,ds = 0$$

sein, wodurch Gleichung (4) bewiesen ist.

*) l. c., p. 123.
**) l. c., p. 124.
***) l. c., p. 123.

Wir können also weiter aussagen: Die beiden Integrale:

$$(6)\qquad \int_{s_0}^{s_1}\left(\int_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds-\frac{\partial F}{\partial x'}\right)u'(s)\,ds;\quad \int_{s_0}^{s_1}\left(\int_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial y}\,ds-\frac{\partial F}{\partial y'}\right)v'(s)\,ds$$

müssen für alle stetigen, abteilungsweise stetig differenzierbaren, in s_0 und s_1 verschwindenden Funktionen $u(s)$ und $v(s)$ den Wert Null haben.

Wir treffen nun für $u(s)$ die folgende Wahl. Es sei:

$$u(s)=0 \text{ in } (s_0\sigma_0);\quad u(s)=s-\sigma_0 \text{ in } (\sigma_0,\sigma_0+\sigma),$$
$$u(s)=\sigma \text{ in } (\sigma_0+\sigma,\sigma_1);\quad u(s)=\sigma-(s-\sigma_1) \text{ in } (\sigma_1,\sigma_1+\sigma),$$
$$u(s)=0 \text{ in } (\sigma_1+\sigma,s_1).$$

Durch Einführung dieser Werte in (6) erhält man:

$$(7)\qquad \int_{\sigma_0}^{\sigma_0+\sigma}\left(\int_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds-\frac{\partial F}{\partial x'}\right)ds=\int_{\sigma_1}^{\sigma_1+\sigma}\left(\int_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds-\frac{\partial F}{\partial x'}\right)ds,$$

wie man auch σ_0, σ_1 und σ wählen mag, wenn nur:

$$s_0\leqq\sigma_0<\sigma_0+\sigma\leqq\sigma_1<\sigma_1+\sigma\leqq s_1.$$

Nun beachte man, daß die vier Ableitungen nach s der Funktion

$$\Psi(s,S)=\int_{S}^{s}\left(\int_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds-\frac{\partial F}{\partial x'}\right)ds,\quad (s_0\leqq S<s_1)$$

durchaus zwischen endlichen Grenzen liegen. Nach einem schon einmal verwendeten Satz von Lebesgue hat sie daher, abgesehen von einer Punktmenge vom Maße Null, überall eine bestimmte Ableitung. Wir wählen für σ_0 und σ_1 solche Werte von s, für welche die genannte Funktion eine bestimmte Ableitung nach s, $\Psi'(s,S)$, hat. Aus Gleichung (7) — $\Psi(\sigma_0+\sigma,\sigma_0)=\Psi(\sigma_1+\sigma,\sigma_1)$ — folgt jetzt unmittelbar:

$$\Psi'(\sigma_0,\sigma_0)=\Psi'(\sigma_1,\sigma_1).$$

Nun hat aber das unbestimmte Integral einer durchaus endlichen Funktion diese Funktion überall zur Ableitung, ausgenommen höchstens eine Punktmenge vom Maße Null. Abgesehen von einer solchen Punktmenge ist daher überall:

$$\Psi'(s,\sigma_0)=\Psi'(s,\sigma_1)=\int_{s_0}^{s}\frac{\partial F}{\partial x}\,ds-\frac{\partial F}{\partial x'}.$$

Wir haben daher das Resultat: *Auf einer Kurve, die dem Integral* (1) *einen kleinsten (oder größten) Wert erteilt, müssen, abgesehen von einer Punktmenge vom Maße Null, durchweg die Gleichungen gelten:*

$$(8)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{s_0}^{s} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y;\ \cos\gamma, \sin\gamma)\,ds - \frac{\partial F}{\partial x'}(x, y;\ \cos\gamma, \sin\gamma) = c, \\ \displaystyle\int_{s_0}^{s} \frac{\partial F}{\partial y}(x, y;\ \cos\gamma, \sin\gamma)\,ds - \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y;\ \cos\gamma, \sin\gamma) \doteq c', \end{cases}$$

wo c und c' Konstante bedeuten.

Wir bezeichnen nun mit $\Phi(s)$ und $\Phi_1(s)$ die stetigen Funktionen:

$$(9)\quad \begin{cases} \displaystyle\Phi(s) = \int_{s_0}^{s} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y;\ \cos\gamma, \sin\gamma)\,ds - c, \\ \displaystyle\Phi_1(s) = \int_{s_0}^{s} \frac{\partial F}{\partial y}(x, y;\ \cos\gamma, \sin\gamma)\,ds - c', \end{cases}$$

und betrachten die Gleichungen:

$$(10)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x'}(x(s), y(s);\ \cos\varphi, \sin\varphi) = \Phi(s), \\ &\frac{\partial F}{\partial y'}(x(s), y(s);\ \cos\varphi; \sin\varphi) = \Phi_1(s). \end{aligned}$$

Abgesehen von einer Punktmenge vom Maße Null muß also der Winkel γ diesen beiden Gleichungen genügen. Es kann Werte von s geben, für die diese Gleichungen identisch in φ erfüllt sind; wegen der Stetigkeit aller in diesen Gleichungen auftretenden Funktionen müssen diese Werte von s eine abgeschlossene Menge bilden. Der Bogen $(s_0 s_1)$ unserer Kurve zerfällt also in eine höchstens abzählbar unendliche Menge von Bögen der folgenden zwei Arten:

1. Bögen, in deren sämtlichen Punkten die beiden Gleichungen (10) identisch in φ erfüllt sind.

2. Bögen, die in ihrem Inneren keinen einzigen Punkt enthalten, in dem die beiden Gleichungen (10) identisch erfüllt sind.

Betrachten wir zuerst die Bögen der ersteren Art. Es müssen auf denselben die Gleichungen bestehen:

$$-\sin\varphi\,\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}(x, y;\ \cos\varphi, \sin\varphi) + \cos\varphi\,\frac{\partial^2 F}{\partial x'\,\partial y'}(x, y;\ \cos\varphi, \sin\varphi) = 0,$$

$$-\sin\varphi\,\frac{\partial^2 F}{\partial x'\,\partial y'}(x, y;\ \cos\varphi, \sin\varphi) + \cos\varphi\,\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x, y;\ \cos\varphi, \sin\varphi) = 0,$$

und zwar identisch in φ. Wegen der Relationen:

$$\frac{1}{y'^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}(x, y; x', y') = -\frac{1}{x'y'}\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}(x, y; x', y')$$
$$= \frac{1}{x'^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x, y; x', y') = F_1(x, y; x', y')$$

reduzieren sie sich auf die eine Gleichung:

$$F_1(x, y; \cos\varphi, \sin\varphi) = 0,$$

die also identisch in φ bestehen muß. Die linke Seite dieser Gleichung ist eine analytische Funktion von x, y und φ; die Gleichung kann also in der Form geschrieben werden:

$$G(x, y)\varphi^m + [\varphi]_{m+1} = 0, \quad (m \geqq 0),$$

wo $G(x, y)$ eine analytische Funktion bedeutet. Hieraus aber folgt:

$$G(x(s), y(s)) = 0.$$

Wir sehen also: *Die Bögen der ersteren Art sind Bögen analytischer Kurven.*

Analytische Kurven aber, die dem Integral (1) einen kleinsten (oder größten) Wert erteilen, müssen den Lagrangeschen Gleichungen (2) genügen, die sich bekanntlich auf die eine Gleichung reduzieren:

$$(11) \qquad (x'y'' - x''y')F_1 + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y} = 0.$$

Da auf den jetzt betrachteten Bögen F_1 identisch verschwindet, so sind sie *singuläre* Lösungen dieser Gleichungen.

Wir gehen nun über zur Untersuchung der Bögen von der zweiten Art. Die Gleichungen (10) sind periodisch in φ von der Periode 2π; es genügt also, die Wurzeln zu betrachten, die im Intervalle $0 \leqq \varphi < 2\pi$ liegen. Für einen im Inneren der jetzt betrachteten Bögen liegenden Punkt können diese Gleichungen nur eine endliche Anzahl von Wurzeln besitzen, die in dieses Intervall fallen; sie mögen mit $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ bezeichnet werden. Unter diesen Wurzeln kann sich eine mehrfache Wurzel φ_ν nur dann finden, wenn für eine der Zahlen $\nu = 1, 2, \cdots, n$ die Gleichung besteht:

$$(12) \qquad F_1(x, y; \cos\varphi_\nu, \sin\varphi_\nu) = 0.$$

Man sieht wieder leicht, daß auf jedem Bogen die Punkte, in denen eine der Wurzeln φ_ν der Gleichungen (10) auch noch die Gleichung (12) befriedigt, eine abgeschlossene Menge bilden. In der Tat, haben die Gleichungen (10) an irgend einer Stelle n Wurzeln, die ins Intervall $(0, 2\pi)$ fallen, unter denen keine der Gleichung (12) genügt, so gilt dasselbe für eine Umgebung dieser Stelle. Der von uns betrachtete Bogen zerfällt also wieder in eine höchstens abzählbar unendliche Teilmenge von Bögen der folgenden zwei Arten:

1. Bögen, in deren jedem Punkte mindestens eine der Wurzeln der Gleichungen (10) auch noch die Gleichung (12) befriedigt, und

2. Bögen, die in ihrem Inneren keinen einzigen Punkt enthalten, in dem die Gleichungen (10) und (12) eine Wurzel gemeinsam haben.

Der erste dieser beiden Fälle ist wieder leicht zu erledigen. Da die Gleichung (12) nicht identisch in φ_ν erfüllt ist — sonst würde ja der Bogen zu den bereits oben betrachteten gehören —, ergibt sich daraus φ_ν als algebroide Funktion von x und y. Die Einführung dieser Werte in die Gleichungen (10) zeigt dann, daß unser Bogen einer analytischen Gleichung genügt. Wie bei den bereits erledigten Bögen erkennen wir daher auch bei den jetzt betrachteten, *daß sie den Lagrangeschen Gleichungen* (2) *genügen müssen, und zwar als singuläre Lösungen.*

Es bleibt der letzte und schwierigste Fall zu untersuchen, nämlich solche Bögen, auf denen keine mehrfache Wurzel der Gleichungen (10) liegt. Sei (σ_0, σ_1) ein beliebiger ganz im Inneren eines solchen Bogens liegender Bogen. Auf (σ_0, σ_1) haben die Gleichungen (10) dann überall gleichviel Wurzeln: $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \cdots, \varphi_n(s)$. Dieselben sind stetige Funktionen von s, und es gibt eine positive Konstante ε, so daß die Ungleichungen gelten:

$$(13) \qquad |\varphi_\mu(s) - \varphi_\nu(s)| > \varepsilon, \quad (\mu, \nu = 1, 2, \cdots, n;\ \mu \neq \nu).$$

Ein oben erhaltenes Resultat besagt: In jedem Punkte des Bogens (σ_0, σ_1), abgesehen höchstens von einer Punktmenge vom Maße Null, ist der Winkel $\gamma(s)$, den die positive Richtung der Kurventangente mit der positiven x-Richtung bildet, gleich einer der Wurzeln $\varphi_\nu(s)$ der Gleichungen (10). Ferner ist der Winkel $\gamma(s)$ zufolge eines Satzes von R. Baire*) als Funktion der ersten Klasse auf dem Bogen (σ_0, σ_1) höchstens punktweise unstetig, seine Stetigkeitsstellen liegen also auf diesem Bogen überall dicht.

Sei σ irgend eine Stetigkeitsstelle von $\gamma(s)$. Dann muß offenbar an der Stelle σ der Winkel $\gamma(\sigma)$ zusammenfallen mit einer der Wurzeln $\varphi_\nu(s)$ der Gleichungen (10). In der Tat, wäre dies nicht der Fall, so gäbe es, da für $s = \sigma$ alle $\varphi_\nu(s)$ und nach Voraussetzung auch $\gamma(s)$ stetig sind, eine Umgebung von σ, in der nirgends $\gamma(s)$ mit einer der Funktionen $\varphi_\nu(s)$ zusammenfiele, was unmöglich ist, da die Menge der Punkte, in denen $\gamma(s)$ mit keinem $\varphi_\nu(s)$ zusammenfällt, nur das Maß Null hat, und somit kein Intervall enthalten kann.

An jeder Stetigkeitsstelle σ von $\gamma(s)$ ist daher für ein geeignetes ν: $\gamma(\sigma) = \varphi_\nu(\sigma)$. Aus dem Bestehen der Ungleichungen (13) folgt aber, daß

*) R. Baire, Leçons sur les fonctions discontinues, p. 83.

es dann eine Umgebung von σ geben muß, in der nirgends $\gamma(s) = \varphi_\mu(s)$, $(\mu \neq \nu)$ wird; da nun aber überall, abgesehen von einer Punktmenge vom Maße Null, $\gamma(s)$ gleich einer der Wurzeln $\varphi_\mu(s)$ der Gleichungen (10) sein muß, so sehen wir:

Jede Stetigkeitsstelle von $\gamma(s)$ läßt sich mit einem Intervall umgeben, in dem — abgesehen von einer Punktmenge vom Maße Null — $\gamma(s)$ mit ein und derselben stetigen Funktion $\varphi_\nu(s)$ übereinstimmt.

Das ist aber nur so möglich, daß in diesem Intervall $\gamma(s)$ und $\varphi_\nu(s)$ *ausnahmslos* übereinstimmen. In der Tat hat man für alle diesem Intervall angehörenden s und S:

$$x(s) - x(S) = \int_S^s \cos\gamma(s)\,ds = \int_S^s \cos\varphi_\nu(s)\,ds;$$

$$y(s) - y(S) = \int_S^s \sin\gamma(s)\,ds = \int_S^s \sin\varphi_\nu(s)\,ds.$$

Aus der Stetigkeit von $\varphi_\nu(s)$ folgt aber:

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi_\nu(s); \quad \frac{dy}{ds} = \sin\varphi_\nu(s)$$

und somit:

$$\operatorname{tg}\gamma(s) = \frac{dy}{ds} : \frac{dx}{ds} = \operatorname{tg}\varphi_\nu(s),$$

wie behauptet wurde.

Wir können also unser Resultat präziser so aussprechen: Jede Stetigkeitsstelle s_0 von $\gamma(s)$ liegt im Inneren eines Intervalls, in dem $\gamma(s)$ durchweg mit einer und derselben stetigen Funktion $\varphi_\nu(s)$ übereinstimmt.

Unter allen den Punkt s_0 enthaltenden Intervallen, in denen die Gleichung $\gamma(s) = \varphi_\nu(s)$ besteht, gibt es ein größtes. Wir behaupten, daß auch noch in den Endpunkten dieses größtmöglichen Intervalls die Gleichung $\gamma(s) = \varphi_\nu(s)$ besteht. In der Tat, wir haben vorausgesetzt, daß unsere Kurve in jedem Punkte eine Tangente besitzt. Die eben verwendete Schlußweise lehrt, daß im Anfangspunkte dieses größtmöglichen Intervalls der Richtungswinkel $\gamma(s)$ der vorderen Tangente, im Endpunkte des Intervalls der der hinteren Tangente nicht von den Werten der Funktion $\varphi_\nu(s)$ in diesen Punkten verschieden sein kann. Wegen der vorausgesetzten Existenz einer einzigen Tangente gilt aber das von vorderer und hinterer Tangente Bewiesene von der Tangente selbst. Schließlich sehen wir also, daß jeder Stetigkeitspunkt von $\gamma(s)$ sich mit einem Intervall umgeben läßt derart, daß für jeden Punkt dieses Intervalls (die Endpunkte inbegriffen) die Beziehung $\gamma(s) = \varphi_\nu(s)$ gilt, während für ein größeres Intervall dies nicht mehr gelten würde.

Die Punkte, die nicht innere Punkte eines solchen Intervalls*) sind, bilden bekanntlich eine abgeschlossene Menge M; dieselbe ist nirgends dicht, da diese Intervalle — ebenso wie die Stetigkeitsstellen von $\gamma(s)$ — überall dicht liegen. Diese Menge muß weiter eine perfekte Menge sein, d. h. es müssen ihre sämtlichen Punkte Häufungspunkte sein. In der Tat, gemäß der Definition der Menge M ist jeder ihrer Punkte Unstetigkeitspunkt von $\gamma(s)$. Enthielte sie nun einen isolierten Punkt, so müßte derselbe Endpunkt eines Intervalls δ_1 und Anfangspunkt eines anderen δ_2 sein. In δ_1 wäre $\gamma(s) = \varphi_\nu(s)$, in δ_2 wäre $\gamma(s) = \varphi_\mu(s)$; in dem betrachteten Punkte aber würde, wie oben gezeigt, $\gamma(s) = \varphi_\nu(s) = \varphi_\mu(s)$ sein. Wegen der Ungleichungen (13) folgt daraus $\mu = \nu$; d. h. der betrachtete Punkt wäre kein Unstetigkeitspunkt von $\gamma(s)$, entgegen der Voraussetzung, daß er zur Menge M gehört.

Wir sehen also: Die Unstetigkeitsstellen von $\gamma(s)$ bilden eine perfekte Menge; in allen Punkten dieser Menge, die Endpunkte eines der die Menge definierenden Intervalle sind, fällt $\gamma(s)$ zusammen mit einer der Wurzeln $\varphi_\nu(s)$ der Gleichungen (10).

Als Funktion der ersten Klasse kann $\gamma(s)$ nach dem Satze von R. Baire**) auch bezüglich dieser perfekten Menge nur punktweise unstetig sein, d. h. ihre Stetigkeitsstellen bezüglich dieser Menge liegen in dieser Menge überall dicht. Sei also σ ein Punkt von M, der Stetigkeitspunkt von $\gamma(s)$ in bezug auf M ist. Dann muß wieder $\gamma(\sigma)$ mit einer der Wurzeln $\varphi_\nu(\sigma)$ der Gleichungen (10) zusammenfallen. Denn in der Tat, es ist bekanntlich jeder Punkt M Häufungspunkt von Endpunkten der die Menge M definierenden Intervalle. In jedem solchen Intervallendpunkte aber hat, wie erwähnt, $\gamma(s)$ einen der Werte $\varphi_\nu(s)$; wäre nun $\gamma(\sigma)$ verschieden von allen $\varphi_\nu(\sigma)$, so ließe sich σ so mit einem Intervall umgeben, daß auch in allen Punkten von M, die in dieses Intervall fallen, $\gamma(s)$ von allen $\varphi_\nu(s)$ verschieden wäre; das ist aber unmöglich. Es muß also eine Gleichung bestehen: $\gamma(\sigma) = \varphi_\nu(\sigma)$.

Hieraus aber folgt, daß σ Stetigkeitsstelle von $\gamma(\sigma)$ im gewöhnlichen Sinne ist (also nicht bloß in bezug auf die perfekte Menge M). In der Tat, in allen den Intervallen, deren Endpunkte sich in σ häufen, muß ebenfalls $\gamma(s) = \varphi_\nu(s)$ sein. Denn lägen in jeder Nähe von σ Intervalle, in denen $\gamma(s) = \varphi_\mu(s)$ wäre $(\mu \neq \nu)$, so bestände dieselbe Beziehung in den Endpunkten dieser Intervalle, und σ könnte wegen der Ungleichungen

*) Zu ihnen gehören u. a. die Endpunkte der genannten Intervalle.

**) R. Baire, l. c., p. 88 ff. Dabei heißt eine Funktion $f(s)$ stetig bezüglich einer perfekten Menge M im Punkte s_0 dieser Menge, wenn zu jedem positiven ε ein positives η gehört, so daß in allen Punkten s von M, für welche $|s - s_0| < \eta$ ist, auch $|f(s) - f(s_0)| < \varepsilon$ wird.

(13) auch nicht Stetigkeitsstelle von $\gamma(s)$ in bezug auf die Menge M sein. Es läßt sich also σ mit einem Intervall umgeben, in dem wieder — abgesehen höchstens von einer Punktmenge vom Maße Null — die Beziehung gilt: $\gamma(s) = \varphi_\nu(s)$, und wir haben schon oben gesehen, daß dann diese Beziehung in dem genannten Intervall ausnahmslos gilt.

Wir sehen also: In jedem Punkte von M, in dem $\gamma(s)$ stetig in bezug auf M ist, ist $\gamma(s)$ auch stetig im gewöhnlichen Sinne. Andererseits kann aber die Menge M gemäß ihrer Definition nur Unstetigkeitsstellen von $\gamma(s)$ enthalten. Dieser Widerspruch läßt nur eine Lösung zu: *Die Menge M enthält keinen einzigen Punkt.*

Wir haben also das wichtige Resultat: Der Winkel $\gamma(s)$ ist auf dem ganzen Bogen (σ_0, σ_1) eine stetige Funktion von s. Die Gleichungen (8), von denen wir bisher nur beweisen konnten, daß sie auf unserem Bogen abgesehen von einer Punktmenge vom Maße Null bestehen, *müssen daher auf diesem Bogen ausnahmslos erfüllt sein.*

Aus dem Bestehen der Gleichungen (8) kann man nun aber, da, wie bewiesen, der Winkel γ als Funktion von s stetig ist, und ferner auf unserem Bogen der Ausdruck $F_1(x, y, \cos\gamma, \sin\gamma)$ durchaus von Null verschieden ist, wie Du Bois-Reymond und Hilbert gezeigt haben*), schließen, *daß dieser Bogen ebenfalls den Lagrangeschen Gleichungen* (2) *genügen muß.*

Das Schlußresultat dieser Untersuchungen läßt sich nunmehr so aussprechen: *Jeder rektifizierbare, durchweg mit einer Tangente versehene Kurvenbogen, der dem Integrale* (1) *einen kleinsten (oder größten) Wert erteilt, ist zusammengesetzt aus Teilbögen, deren jeder analytisch ist und den Lagrangeschen Gleichungen genügt.* Wo zwei verschiedene solche Bögen aneinander grenzen, ist:

$$F_1(x, y, \cos\gamma, \sin\gamma) = 0.$$

Ein solches Linienelement ist ein singuläres Element der Lagrangeschen Gleichungen.

Um auch die sogenannten *diskontinuierlichen* Lösungen unseres Variationsproblems zu erhalten, müssen wir eine weitere Verallgemeinerung unserer Voraussetzungen eintreten lassen. Während wir bisher von der Klasse von Kurven, unter denen wir die Lösung unseres Problems suchten, vorausgesetzt haben, sie seien rektifizierbar und durchweg mit einer Tangente versehen, wollen wir von denselben außer der Rektifizierbarkeit nur mehr verlangen, daß sie in jedem Punkte eine vordere Tangente besitzen. D. h. also, es müssen die durch die Gleichungen (3) definierten Grenzwerte nur für positives h bestehen. Dann bedeute γ wieder den Winkel,

*) Siehe die in Fußnote auf S. 254 angeführte Literatur.

den die vordere Tangente mit der x-Achse einschließt. Wie oben sieht man, daß $\cos\gamma$ und $\sin\gamma$ und somit auch γ selbst, als Funktionen von s betrachtet, von der ersten Baireschen Klasse und somit auf jeder perfekten Menge höchstens punktweise unstetig sind. Alle auftretenden Integrale haben daher auch hier einen Sinn.

Wie oben werden die beiden Gleichungen (8) abgeleitet, die wieder, abgesehen von einer Punktmenge vom Maße Null, überall erfüllt sein müssen, ein Resultat, das sich auch so aussprechen läßt:

Auf unserer Kurve müssen

$$\frac{\partial F}{\partial x'}(x, y;\, \cos\gamma, \sin\gamma) \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y;\, \cos\gamma, \sin\gamma)$$

bezw. übereinstimmen mit den durch die Gleichungen (9) definierten stetigen Funktionen $\Phi(s)$ und $\Phi_1(s)$, wieder abgesehen von einer Punktmenge vom Maße Null.

Wieder läßt sich unser Kurvenbogen zerlegen in eine höchstens abzählbar unendliche Menge von Teilbögen der folgenden drei Arten:

1. Bögen, auf denen die Gleichung:

$$F_1(x, y;\, \cos\varphi, \sin\varphi) = 0$$

identisch in φ erfüllt ist.

2. Bögen, in deren jedem Punkte mindestens eine Wurzel φ_ν der Gleichungen (10) auch noch der eben angeschriebenen Gleichung genügt.

3. Bögen, die in ihrem Inneren keinen einzigen Punkt enthalten, in dem eine Wurzel φ_ν der Gleichungen (10) auch noch der Gleichung $F_1 = 0$ genügt.

Von den Bögen der ersten und zweiten Art erkennt man wie oben, daß sie *stückweise analytisch sind und sich aus Bögen von singulären Lösungen der Lagrangeschen Gleichungen zusammensetzen müssen*, die aber nunmehr auch Ecken bilden können. Bei Betrachtung der Bögen dritter Art schlagen wir, analog wie oben, den folgenden Weg ein:

Die Stetigkeitsstellen von $\gamma(s)$ müssen wegen des Satzes von Baire auf einem solchen Bogen überall dicht liegen. In jedem Stetigkeitspunkte muß $\gamma(s)$ mit einer der Wurzeln $\varphi_\nu(s)$ der Gleichungen (10) übereinstimmen, und dieser Punkt läßt sich dann mit einem Intervall umgeben, in dessen Innerem durchweg $\gamma(s) = \varphi_\nu(s)$ ist. Hieraus schließen wir wieder, daß die Unstetigkeitsstellen von $\gamma(s)$ eine abgeschlossene Menge M bilden, nur können wir hier nicht mehr wie oben schließen, daß diese Menge keine isolierten Punkte enthalten kann; hingegen ergibt sich wie oben, daß die Menge M keine perfekte Teilmenge enthalten kann. Nun ist aber jede abgeschlossene Menge, die keine perfekte Teilmenge enthält, abzählbar*), so daß wir schließlich sehen:

*) Vgl. etwa Schoenflies, Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten, p. 65 ff.

Auf den Bögen der dritten Art bilden die Unstetigkeitsstellen von $\gamma(s)$ — falls es solche überhaupt gibt — eine abgeschlossene abzählbare Menge. Jeder von zwei solchen Unstetigkeitspunkten begrenzte Teilbogen genügt den Lagrangeschen Gleichungen, und in den isolierten Unstetigkeitsstellen schließen sich diese Teilbögen so aneinander, daß die Ausdrücke:

$$\frac{\partial F}{\partial x'}(x, y; \cos\gamma, \sin\gamma); \quad \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y; \cos\gamma, \sin\gamma)$$

stetig bleiben. Mehr aber läßt sich, wie man aus Beispielen sehen kann, aus dem Verschwinden der ersten Variation nicht ableiten.

§ 2.

In diesem Abschnitte wollen wir die folgende Aufgabe behandeln*): Es seien zwischen den drei unbekannten Funktionen $y(x)$, $z(x)$, $s(x)$ die zwei Differentialgleichungen erster Ordnung vorgeschrieben:

$$(14) \qquad \begin{aligned} f(y', z', s', y, z, s; x) &= 0, \\ g(y', z', s', y, z, s; x) &= 0. \end{aligned}$$

Ferner seien für $x = a_1$ die Anfangswerte vorgeschrieben:

$$(15) \qquad y(a_1) = y^{(1)}, \quad z(a_1) = z^{(1)}, \quad s(a_1) = s^{(1)},$$

für $x = a_2$ hingegen die beiden Endwerte:

$$(16) \qquad z(a_2) = z^{(2)}, \quad s(a_2) = s^{(2)}.$$

Es soll ein System von drei diesen Bedingungen genügenden Funktionen $y(x)$, $z(x)$, $s(x)$ gefunden werden, so daß an der Stelle $x = a_2$ die Funktion $y(x)$ einen kleinsten Wert hat (d. h. mit anderen Worten: wenn $Y(x)$, $Z(x)$, $S(x)$ ein zweites System von Funktionen bedeutet, das ebenfalls den Bedingungen (14) — (16) genügt und dem ersten hinlänglich benachbart ist, so soll stets $Y(a_2) - y(a_2) > 0$ sein).

Wir machen die folgenden Voraussetzungen:

1. Die beiden in (14) auftretenden Funktionen f und g mögen für alle in Betracht kommenden Systeme ihrer Argumente regulär-analytisch sein.

2. Die drei Funktionen $y(x)$, $z(x)$, $s(x)$ sollen stetig und stetig differenzierbar sein.

3. Nach Einsetzen dieser drei Funktionen in den Ausdruck:

$$(17) \qquad \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial g}{\partial z'} - \frac{\partial f}{\partial z'}\frac{\partial g}{\partial y'},$$

möge derselbe durchaus von Null verschieden ausfallen.

*) Dabei schließe ich mich in Gedankengang und Bezeichnungsweise so eng als möglich an die in der Einleitung zitierte Abhandlung von Hilbert an.

Wir wollen beweisen, daß, wenn außerdem die später zu entwickelnde Bedingung (27) erfüllt ist, *die Funktionen* $y(x)$, $z(x)$, $s(x)$ *analytisch sein müssen und zusammen mit zwei ebenfalls analytischen Funktionen* $\lambda(x)$ *und* $\mu(x)$ *die Lagrangeschen Differentialgleichungen:*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial y'} = 0, \\ (18) \qquad &\frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial z'} = 0, \\ &\frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial s} - \frac{d}{dx}\frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial s'} = 0 \end{aligned}$$

befriedigen müssen.

Nach dem Vorgange von D. Hilbert setzen wir nun:

$$S(x) = s(x) + \varepsilon_1 \sigma_1(x) + \varepsilon_2 \sigma_2(x),$$

wo $\sigma_1(x)$ und $\sigma_2(x)$ für $x = a_1$ und $x = a_2$ verschwinden mögen, sonst aber willkürlich sind, und bestimmen die beiden Funktionen $Y(x, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $Z(x, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ als diejenigen Lösungen der Differentialgleichungen:

$$(19) \qquad \begin{aligned} f(Y', Z', S', Y, Z, S; x) = 0, \\ g(Y', Z', S', Y, Z, S; x) = 0, \end{aligned}$$

die für $x = a_1$ die Anfangswerte $y^{(1)}$ und $z^{(1)}$ haben (siehe Gleichung (15)). Die Funktionen Y und Z werden dann analytische Funktionen*) von ε_1 und ε_2 in der Umgebung der Stelle (0, 0) dieser beiden Veränderlichen und reduzieren sich für $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ auf $y(x)$ und $z(x)$. Diejenigen unter ihnen, für welche auch noch

$$Z(a_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = z(a_2)$$

ist, gehören daher — für genügend kleine ε_1, ε_2 — zu den Funktionen, denen gegenüber $y(x)$ Minimum sein soll. Die Theorie der gewöhnlichen Maxima und Minima mit Nebenbedingungen zeigt, daß es dann zwei Konstanten l, m gibt, die nicht beide Null sind und für welche

$$(20) \qquad \begin{aligned} \left[\frac{\partial(l\,Y(a_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2) + m Z(a_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2))}{\partial \varepsilon_1}\right]_{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0} = 0, \\ \left[\frac{\partial(l\,Y(a_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2) + m Z(a_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2))}{\partial \varepsilon_2}\right]_{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0} = 0 \end{aligned}$$

wird. Differenziert man die Gleichungen (19) nach ε_1 und ε_2 und setzt dann $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, so bekommt man:

*) Der Umstand, daß die unabhängige Veränderliche x in (19) in nicht analytischer Weise vorkommt, stört hierbei nicht. Siehe Picard, Traité III, p. 157.

$$\frac{\partial f}{\partial y'}\left[\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 + \frac{\partial f}{\partial y}\left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 + \frac{\partial f}{\partial z'}\left[\frac{\partial Z'}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 + \frac{\partial f}{\partial z}\left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 + \frac{\partial f}{\partial s'}\sigma_1' + \frac{\partial f}{\partial s}\sigma_1 = 0,$$

$$\frac{\partial g}{\partial y'}\left[\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 + \frac{\partial g}{\partial y}\left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 + \frac{\partial g}{\partial z'}\left[\frac{\partial Z'}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 + \frac{\partial g}{\partial z}\left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 + \frac{\partial g}{\partial s'}\sigma_1' + \frac{\partial g}{\partial s}\sigma_1 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'}\left[\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 + \frac{\partial f}{\partial y}\left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 + \frac{\partial f}{\partial z'}\left[\frac{\partial Z'}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 + \frac{\partial f}{\partial z}\left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 + \frac{\partial f}{\partial s'}\sigma_2' + \frac{\partial f}{\partial s}\sigma_2 = 0,$$

$$\frac{\partial g}{\partial y'}\left[\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 + \frac{\partial g}{\partial y}\left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 + \frac{\partial g}{\partial z'}\left[\frac{\partial Z'}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 + \frac{\partial g}{\partial z}\left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 + \frac{\partial g}{\partial s'}\sigma_2' + \frac{\partial g}{\partial s}\sigma_2 = 0.$$

Durch Multiplikation dieser Gleichungen mit zwei später zu bestimmenden Funktionen $\lambda(x)$ und $\mu(x)$, Addition und Integration folgt weiter:

$$(21)\quad \begin{aligned} &\int_{a_1}^{a_2}\Big\{\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y'}\left[\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y}\left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z'}\left[\frac{\partial Z'}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 \\ &\quad + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z}\left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s'}\sigma_1' + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s}\sigma_1\Big\}\,dx = 0, \\ &\int_{a_1}^{a_2}\Big\{\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y'}\left[\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y}\left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z'}\left[\frac{\partial Z'}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 \\ &\quad + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z}\left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s'}\sigma_2' + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s}\sigma_2\Big\}\,dx = 0. \end{aligned}$$

Bisher konnten wir uns wörtlich dem Hilbertschen Gedankengang anschließen. Um nun die Voraussetzung einer zweimaligen Differenzierbarkeit von $y(x)$, $z(x)$, $s(x)$ zu vermeiden, müssen wir von hier ab einen abweichenden Weg einschlagen. Wir formen die Gleichungen (21) durch partielle Integration um:

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{a_1}^{a_2}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y}\,dx\cdot\left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_1}\right]_0^{x=a_2} + \int_{a_1}^{a_2}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z}\left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_1}\right]_0^{x=a_2} \\ &+\int_{a_1}^{a_2}\Big\{\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y'} - \int_{a_1}^{x}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y}\,dx\Big\}\left[\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 dx \\ &+\int_{a_1}^{a_2}\Big\{\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z'} - \int_{a_1}^{x}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z}\,dx\Big\}\left[\frac{\partial Z'}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 dx \\ &+\int_{a_1}^{a_2}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s'}\sigma_1'\,dx + \int_{a_1}^{a_2}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s}\sigma_1\,dx = 0, \end{aligned}\right.$$

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int\limits_{a_1}^{a_2}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y}\,dx\cdot\left[\frac{\partial Y}{\partial\varepsilon_2}\right]_0^{x=a_2}+\int\limits_{a_1}^{a_2}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z}\,dx\left[\frac{\partial Z}{\partial\varepsilon_2}\right]_0^{x=a_2}\\
&+\int\limits_{a_1}^{a_2}\left\{\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y'}-\int\limits_{a_1}^{x}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y}\,dx\right\}\left[\frac{\partial Y'}{\partial\varepsilon_2}\right]dx\\
&+\int\limits_{a_1}^{a_2}\left\{\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z'}-\int\limits_{a_1}^{x}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z}\,dx\right\}\left[\frac{\partial Z'}{\partial\varepsilon_2}\right]_0 dx\\
&+\int\limits_{a_1}^{a_2}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s'}\,\sigma_2'\,dx+\int\limits_{a_1}^{a_2}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s}\,\sigma_2\,dx=0.
\end{aligned}\right.$$

Wir werden weiter unten beweisen, daß die beiden Gleichungen*):

$$(23)\quad \begin{aligned}
&\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y'}-\left[\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y'}\right]^{x=a_2}-\int\limits_{a_2}^{x}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y}\,dx=0,\\
&\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z'}-\left[\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z'}\right]^{x=a_2}-\int\limits_{a_2}^{x}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z}\,dx=0,
\end{aligned}$$

wenn noch die Anfangswerte von $\lambda(x)$ und $\mu(x)$ für $x=a_2$ willkürlich vorgeschrieben sind, stets ein und nur ein Paar von Funktionen $\lambda(x)$, $\mu(x)$ bestimmen. Wir wählen diese Anfangswerte so, daß:

$$(24)\quad \left[\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y'}\right]^{x=a_2}=l,\qquad \left[\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z'}\right]^{x=a_2}=m$$

wird (wo l und m die in (20) eingeführten Größen bedeuten).

Man erkennt aus (23) unmittelbar, daß nun:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y'}-\int\limits_{a_1}^{x}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y}\,dx=\left[\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y'}\right]^{x=a_1},\\
&\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z'}-\int\limits_{a_1}^{x}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z}\,dx=\left[\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z'}\right]^{x=a_1}
\end{aligned}$$

wird, so daß die Gleichungen (22) sich wegen (24) und (20) auf:

*) Wir können nicht durch Differentiation von (23) zu einem System von Differentialgleichungen für λ und μ übergehen, da wir nicht wissen, ob die auftretenden Größen differenzierbar sind.

$$(25)\qquad \begin{aligned}&\int_{a_1}^{a_2}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s'}\,\sigma_1'\,dx+\int_{a_1}^{a_2}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s}\,\sigma_1\,dx=0,\\&\int_{a_1}^{a_2}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s'}\,\sigma_2'\,dx+\int_{a_1}^{a_2}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s}\,\sigma_2\,dx=0\end{aligned}$$

reduzieren. Schreiben wir nun, wie Hilbert:

$$(\lambda,\mu;\sigma)=\int_{a_1}^{a_2}\left\{\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s'}\,\sigma'+\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s}\,\sigma\right\}dx,$$

so haben wir: Für irgend zwei in $x=a_1$ und $x=a_2$ verschwindende Funktionen σ_1, σ_2 gibt es stets ein offenbar nicht identisch verschwindendes Lösungssystem der Gleichungen (23), so daß:

$$(\lambda,\mu;\sigma_1)=0 \quad\text{und}\quad (\lambda,\mu;\sigma_2)=0$$

wird.

Von hier an können wir wieder die Schlußweise von Hilbert benützen. Entweder es gilt $(\lambda,\mu;\sigma)=0$ für alle σ, oder es gibt ein σ_3, so daß $(\lambda,\mu;\sigma_3)\neq 0$. Dann aber gibt es offenbar ein Lösungssystem λ', μ' von (23), für welches $(\lambda',\mu';\sigma_3)=0$. Wäre nun nicht für alle $\sigma:(\lambda',\mu';\sigma)=0$, so gäbe es ein σ_4, so daß $(\lambda',\mu';\sigma_4)\neq 0$ wird. Nach dem obigen Satze aber müßte es dann ein Lösungssystem λ'', μ'' von (23) geben, für welches

$$(\lambda'',\mu'';\sigma_3)=0 \quad\text{und}\quad (\lambda'',\mu'';\sigma_4)=0$$

ist. Wir werden nun aber weiter unten zeigen, daß zwischen λ, λ', λ''; μ, μ', μ'' eine Relation bestehen muß:

$$a\lambda+a'\lambda'+a''\lambda''=0;\qquad a\mu+a'\mu'+a''\mu''=0,$$

in der nicht a, a', a'' alle drei verschwinden. Aus den angeschriebenen Gleichungen aber würde folgen*)

$$a=a'=a''=0.$$

Es gibt also ein Lösungssystem von (23) — es werde wieder mit λ, μ bezeichnet —, so daß:

$$(\lambda,\mu;\sigma)=0$$

für alle in $x=a_1$ und $x=a_2$ verschwindenden σ. Bringt man nun aber $(\lambda,\mu;\sigma)$ auf die Form:

$$(\lambda,\mu;\sigma)=\int_{a_1}^{a_2}\left\{\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s'}-\int_{a_1}^{x}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s}\,dx\right\}\sigma'\,dx,$$

*) Hilbert l. c.

so ergibt eine bekannte Schlußweise*) das Bestehen der Gleichung:

$$(26)\qquad \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s'}-\left[\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s'}\right]^{x=a_2}-\int_{a_2}^{x}\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s}\,dx=0.$$

Aus den Gleichungen (14), (23) und (26) ergeben sich nun aber, vorausgesetzt daß:

$$(27)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2(\lambda f+\mu g)}{\partial y'^2} & \frac{\partial^2(\lambda f+\mu g)}{\partial y'\,\partial z'} & \frac{\partial^2(\lambda f+\mu g)}{\partial y'\,\partial s'} & \frac{\partial f}{\partial y'} & \frac{\partial g}{\partial y'} \\ \frac{\partial^2(\lambda f+\mu g)}{\partial z'\,\partial y'} & \frac{\partial^2(\lambda f+\mu g)}{\partial z'^2} & \frac{\partial^2(\lambda f+\mu g)}{\partial z'\,\partial s'} & \frac{\partial f}{\partial z'} & \frac{\partial g}{\partial z'} \\ \frac{\partial^2(\lambda f+\mu g)}{\partial s'\,\partial y'} & \frac{\partial^2(\lambda f+\mu g)}{\partial s'\,\partial z'} & \frac{\partial^2(\lambda f+\mu g)}{\partial s'^2} & \frac{\partial f}{\partial s'} & \frac{\partial g}{\partial s'} \\ \frac{\partial f}{\partial y'} & \frac{\partial f}{\partial z'} & \frac{\partial f}{\partial s'} & 0 & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y'} & \frac{\partial g}{\partial z'} & \frac{\partial g}{\partial s'} & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

ist, y', z', s', λ, μ als differenzierbare Funktionen von x.**) Es können nunmehr die Gleichungen (23) und (26) nach x differenziert werden, wodurch sie in die Gleichungen (18) übergehen; die Funktionen y, z, s, λ, μ genügen also dem Differentialgleichungssysteme (14), (18); woraus unter Berücksichtigung von (27) weiter folgt, daß alle diese Funktionen analytisch sind.

Es sind somit alle unsere Behauptungen erwiesen, und es sind nur die Beweise der die Gleichungen (23) betreffenden Sätze, die zur Verwendung gelangten, nachzutragen.***)

Angenommen, es sei eine Lösung λ, μ der Gleichungen (23) gegeben, so erkennt man aus diesen Gleichungen, daß die Ausdrücke:

$$(28)\qquad v=\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y'},\qquad w=\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z'}\quad .$$

nach x differenzierbar sind. Wegen der Voraussetzung (17) lassen sich umgekehrt λ, μ als lineare Funktionen von v, w mit in x stetigen Koeffizienten ausdrücken. Differenzieren wir nun die Gleichungen (23) nach x und substituieren die Veränderlichen v, w, so erhalten wir ein System linearer Differentialgleichungen:

---

*) Siehe Bolza, Lectures on the Calculus of Variations, p. 22.

**) Nach einem bekannten Satze über die impliziten Funktionen. Siehe etwa C. Jordan, Cours d'analyse I, p. 82.

***) In meinem Aufsatze „Über die Lagrangesche Multiplikatorenmethode in der Variationsrechnung" (Monatshefte f. Math. u. Phys. 14 (1903)) habe ich viel allgemeinere Systeme dieser Art betrachtet und die Existenz ihrer Lösungen nachgewiesen.

$$v' = a(x)\,v + a_1(x)\,w,$$
$$w' = b(x)\,v + b_1(x)\,w$$

für v und w, und die darin auftretenden Koeffizienten sind stetige Funktionen von x. Bedeutet umgekehrt v, w irgend ein System von Lösungen dieser Differentialgleichungen, und bestimmt man λ, μ aus den Gleichungen (28), so ist ersichtlich, daß λ, μ den Gleichungen (23) genügen. Man erkennt nunmehr leicht, daß tatsächlich die Sätze bestehen:

Die Gleichungen (23) besitzen immer eine und nur eine Lösung λ, μ, die für $x = a_2$ vorgeschriebene Werte annimmt. Zwischen je drei Lösungen von (23) besteht immer eine linear-homogene Relation mit konstanten Koeffizienten.

Es sind somit auch unsere ursprünglichen Behauptungen vollständig bewiesen.