

## Werk

**Titel:** Mathematische Annalen

**Ort:** Leipzig

**Jahr:** 1907

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN235181684\_0063

**PURL:** [http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684\\_0063](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0063)

**LOG Id:** LOG\_0028

**LOG Titel:** Periodical issue

**LOG Typ:** issue

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN235181684

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

# MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, ADOLPH MAYER, CARL NEUMANN, MAX NOETHER  
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

**Felix Klein**

in Göttingen

**Walther v. Dyck**

in München.

**David Hilbert**

in Göttingen

**Otto Blumenthal**

in Aschen.

63. Band. 3. Heft.

Mit 1 Figur im Text.

Ausgegeben am 5. Februar 1907.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1907.

Generalregister zu den Mathematischen Annalen. Band 1—50. Zusammen-  
gestellt von A. Sommerfeld. Mit einem Bildnis von A. Clebsch in Hellogravüre.  
[XI u. 202 S.] gr. 8. geh. n. Mk. 7.—

# GAUSS' WERKE

Weiterführung der von der Königlichen Gesellschaft  
der Wissenschaften zu Göttingen veranstalteten

**GESAMTAUSGABE VON C. F. GAUSS' WERKEN**

Soeben erschien:

Band VII. Theoria motus und Theoretisch-Astronomischer Nachlaß.  
(Parabolische Bewegung, Störungen der Ceres und der Pallas,  
Theorie des Mondes.) 680 S. 4. 1906. . . . . kart. n. 30 Mark.

VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

Verlag von B. G. TEUBNER in LEIPZIG.

Gino Loria:

## Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven.

Theorie und Geschichte.

Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearb. deutsche Ausgabe von  
**Fritz Schütte,**

Oberlehrer am Königl. Gymnasium zu Düren.

Mit 174 Figuren auf 17 lithographierten Tafeln.

[XXI u. 744 S.] gr. 8. 1902. In Leinwand geb. n. M. 28.—

Während die mathematische Literatur verschiedene Werke aufweist, welche die allgemeine Theorie ebener Kurven, insbesondere der algebraischen, behandeln, fehlt eine Zusammenstellung der bisher bekannten speziellen ebenen Kurven und der an ihnen gewonnenen Resultate. Diese Lücke will das vorliegende Werk auszufüllen versuchen. Es behandelt die Erzeugungsweisen, Gleichungen, Eigenschaften und die wichtigsten Sätze für eine ansehnliche Zahl spezieller Kurven; es berücksichtigt nicht nur ihre Verallgemeinerungen, die Verwandtschaft und den Zusammenhang mit anderen Kurven, sondern bietet auch kurze Darlegungen der Theorie spezieller Kurven-Gruppen. Zahlreiche literarische und historische Quellennachweise ermöglichen es dem Leser, sich in der Literatur einer jeden Kurve zu orientieren; über 200 Figuren dienen nicht nur der Erläuterung des Textes, sondern bilden auch, indem sie in genauer Zeichnung die Gestalt der betrachteten Kurven klarlegen, eine hoffentlich recht wertvolle Beigabe des Werkes.

## Bemerkung zu dem Kontinuitätsbeweise für die Lösbarkeit des Riemannschen Problems.

(Auszug aus einem Briefe an Herrn D. Hilbert.)

Von

LUDWIG SCHLESINGER in Klausenburg.

In Ihrem geschätzten Schreiben vom 27. September 1905 bemerken Sie, daß „die Mannigfaltigkeit  $M^*$ ) die Grenzen  $b_1 = \infty, b_2, b_3, \dots$  beliebig;  $b_2 = \infty, b_1, b_3, \dots$  beliebig;  $\dots$  besitzt, d. h. jedenfalls an diesen Stellen ebenfalls die Kenntnis der analytischen Abhängigkeit der  $\beta$  von den  $b$  nötig ist, damit die Kontinuitätsmethode anwendbar wird“.

Ich habe mich in meiner Arbeit darauf beschränkt zu sagen, daß die von Herrn Poincaré aufgestellten Prinzipien der *méthode de continuité* den Schluß gestatten, daß auch jedem Punkte von  $M$  ein Punkt von  $M$  entsprechen müsse. Mit Rücksicht auf Ihre Bemerkung möchte ich mir aber erlauben, etwas ausführlicher auf die Darlegung der in Betracht kommenden Schlüsse einzugehen, namentlich um zu zeigen, daß sich auch das Verhalten der  $\beta$ , wenn die  $b$  in eine der singulären Stellen der Mannigfaltigkeit  $M$  einrücken, in sehr einfacher Weise direkt angeben läßt.

Es sei

$$(1) \quad \frac{dy_x}{dx} = \sum_{\lambda=1}^n \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{A_{\lambda}^{(\nu)}}{x - a_{\nu}} y_{\lambda} \quad (x = 1, 2, \dots, n)$$

ein kanonisches lineares Differentialsystem, für das (wie in meiner erwähnten Abhandlung) der Einfachheit wegen vorausgesetzt werden möge, daß die Wurzeln der zu den singulären Punkten  $a_1, \dots, a_{\sigma}, a_{\sigma+1} = \infty$  gehörigen determinierenden Fundamentalgleichungen

$$(2) \quad |A_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik} r| = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, \sigma + 1),$$

wo

$$A_{ik}^{(\sigma+1)} = - \sum_{\nu=1}^{\sigma} A_{ik}^{(\nu)},$$

\*) Siehe meine Abhandlung Crelles Journal Bd. 130, S. 43.

keine ganzzahligen Differenzen aufweisen. Es seien  $r_1^{(v)}, \dots, r_n^{(v)}$  die Wurzeln der Gleichung (2). Die zum singulären Punkte  $a_v$  gehörige Integralmatrix hat die Form:

$$(\eta_{ik}^{(v)}) = ((x - a_v)^{r_i^{(v)}} \varphi_{ik}^{(v)}),$$

wo die  $\varphi_{ik}^{(v)}$  Funktionen bedeuten, die in der Umgebung von  $x = a_v$  holomorph sind und deren Determinante  $|\varphi_{ik}^{(v)}|$  für  $x = a_v$  von Null verschieden ist. Aus den Gleichungen

$$\left( \sum_{v=1}^{\sigma} \frac{A_{ik}^{(v)}}{x - a_v} \right) = (\eta_{ik}^{(v)})^{-1} \left( \frac{d\eta_{ik}^{(v)}}{dx} \right)$$

oder, wenn

$$(\varphi_{ik}^{(v)})^{-1} = (\psi_{ik}^{(v)})$$

gesetzt wird, aus

$$\sum_{v=1}^{\sigma} \frac{A_{ik}^{(v)}}{x - a_v} = \sum_{\lambda=1}^n \left( \psi_{i\lambda}^{(v)} \frac{d\varphi_{\lambda k}^{(v)}}{dx} + \frac{r_{\lambda}^{(v)}}{x - a_v} \psi_{i\lambda}^{(v)} \varphi_{\lambda k}^{(v)} \right)$$

folgt die Darstellung

$$(3) \quad (A_{ik}^{(v)}) = (\varphi_{ik}^{(v)})_{a_v}^{-1} \begin{pmatrix} r_1^{(v)} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & r_n^{(v)} \end{pmatrix} (\varphi_{ik}^{(v)})_{a_v},$$

wo der den Matrizen angehängte Buchstabenindex andeuten soll, daß die Elemente der Matrix für den betreffenden Wert von  $x$  zu nehmen sind.

Es möge nun  $(y_{ik})$  diejenige Integralmatrix bedeuten, die sich für den regulären Punkt  $x = x_0$  auf die Einheitsmatrix  $(\delta_{ik})$  reduziert, und es sei

$$(y_{ik}) = (c_{ik}^{(v)}) (\eta_{ik}^{(v)});$$

dann ist also

$$(c_{ik}^{(v)}) = (\eta_{ik}^{(v)})_{x_0}^{-1},$$

und folglich ist die Fundamentalsubstitution, die  $(y_{ik})$  bei Umkreisung des Punktes  $a_v$  erfährt, in der Form

$$(A_{ik}^{(v)}) = (\eta_{ik}^{(v)})_{x_0}^{-1} \begin{pmatrix} e^{2\pi\sqrt{-1}r_1^{(v)}} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & e^{2\pi\sqrt{-1}r_n^{(v)}} \end{pmatrix} (\eta_{ik}^{(v)})_{x_0}$$

oder in der Form

$$(4) \quad (A_{ik}^{(v)}) = (\varphi_{ik}^{(v)})_{x_0}^{-1} \begin{pmatrix} e^{2\pi\sqrt{-1}r_1^{(v)}} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & e^{2\pi\sqrt{-1}r_n^{(v)}} \end{pmatrix} (\varphi_{ik}^{(v)})_{x_0}$$

dargestellt.

Denken wir uns für ein bestimmtes Differentialsystem (1) die  $r_k^{(v)}$  ein für alle Male fixiert, so hängen die  $A_{ik}^{(v)}$  noch von gewissen willkürlichen Parametern  $b_1, \dots, b_N$ , wo  $N = n^2\sigma - (\sigma + 1)n + 1$ , ab, deren Mannigfaltigkeit  $M$  in dem Sinne als eine geschlossene zu bezeichnen ist, daß sie durch keine Mannigfaltigkeit von um Eins niedrigerer, also  $(2N - 1)^{\text{ter}}$  Dimension begrenzt wird.\*) In der Tat haben als singuläre Stellen von  $M$  nur diejenigen Wertesysteme der  $b_1, \dots, b_N$  zu gelten, für die mindestens eines der  $A_{ik}^{(v)}$  unendlich wird, und diese bilden Mannigfaltigkeiten von höchstens  $2N - 2$  Dimensionen; wir bezeichnen die Gesamtheit dieser singulären Mannigfaltigkeiten mit  $S$ .

Gehen wir andererseits von einem bestimmten System von Fundamentalsubstitutionen ( $A_{ik}^{(v)}$ ) aus, und denken wir uns die Wurzeln der zugehörigen Fundamentalgleichungen fixiert, so hängen die  $A_{ik}^{(v)}$  von gewissen willkürlichen Parametern  $\beta_1, \dots, \beta_N$  ab, deren Mannigfaltigkeit  $M$  ebenfalls als eine geschlossene bezeichnet werden muß, indem ihre singulären Stellen auch wieder nur diejenigen  $\beta_1, \dots, \beta_N$  sind, für die mindestens eines der  $A_{ik}^{(v)}$  unendlich wird, so daß die Gesamtheit dieser Stellen  $\Sigma$  also auch aus höchstens  $(2N - 2)$ -fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten besteht.

Legen wir das Differentialsystem (1) der Betrachtung zugrunde, so sind nach einem Satze des Herrn Poincaré die  $A_{ik}^{(v)}$  als ganze transzendenten Funktionen der  $A_{ik}^{(v)}$  bestimmt. Die inversen dieser ganzen transzendenten Funktionen, d. h. also die  $A_{ik}^{(v)}$  als Funktionen der  $A_{ik}^{(v)}$  sind im allgemeinen unendlich vieldeutig, wenn wir aber die  $r_k^{(v)}$  fixieren, so ist nach dem Fundamentalsatze der Nr. XII meiner Arbeit\*\*) ein eindeutiges Zweigsystem dieser inversen Funktionen festgelegt, es sind also die  $\beta_1, \dots, \beta_N$  monogene eindeutige Funktionen der  $b_1, \dots, b_N$

$$(5) \quad \beta_k = E_k(b_1, \dots, b_N) \quad (k = 1, 2, \dots, N),$$

deren inverse Funktionen ebenfalls eindeutig sind. Die singulären Stellen der Funktionen (5) sind die Stellen  $S$ . — Um nun das Verhalten der  $A_{ik}^{(v)}$  zu untersuchen, wenn die  $b_1, \dots, b_N$  in eine Stelle  $S$  einrücken, d. h. wenn eines der  $A_{ik}^{(v)}$  so unendlich wird, daß die  $r_k^{(v)}$  festbleiben, greifen wir auf die Gleichungen (3), (4) zurück. Nach (3) ist

$$A_{ik}^{(v)} = \sum_{\lambda=1}^n r_{\lambda}^{(v)} (\psi_{i\lambda}^{(v)} \varphi_{\lambda k}^{(v)})_{x=\alpha_v},$$

soll also  $A_{ik}^{(v)}$  in der angegebenen Weise unendlich groß werden, so muß mindestens einer der Werte  $(\psi_{i\lambda}^{(v)} \varphi_{\lambda k}^{(v)})_{x=\alpha_v}$  ( $\lambda = 1, 2, \dots, n$ ) unendlich groß

\*) Vergl. Poincaré, Acta Mathematica Bd. 4, p. 277 oben.

\*\*) Crelles Journal Bd. 130, p. 35.

werden. Die Funktionen  $\psi_{i\lambda}^{(\nu)} \varphi_{\lambda k}^{(\nu)}$  sind aber ihrer Definition gemäß mit Ausnahme der Stellen

$$a_\mu (\mu \neq \nu) \quad \text{und} \quad \infty$$

allenthalben holomorph. Denken wir uns diese Funktionen in der Umgebung von  $x = a_\nu$  dargestellt:

$$\psi_{i\lambda}^{(\nu)} \varphi_{\lambda k}^{(\nu)} = E_{i\lambda k \nu}^{(0)} + E_{i\lambda k \nu}^{(1)}(x - a_\nu) + \dots$$

und dann nach dem Punkte  $x = x_0$  hin in der durch die Querschnitte  $(a_\nu, \infty)$  ( $\nu = 1, 2, \dots, \sigma$ ) zerschnittenen Ebene fortgesetzt:

$$\psi_{i\lambda}^{(\nu)} \varphi_{\lambda k}^{(\nu)} = C_{i\lambda k \nu}^{(0)} + C_{i\lambda k \nu}^{(1)}(x - x_0) + \dots,$$

so kann man  $E_{i\lambda k \nu}^{(0)}$  dem absoluten Betrage nach stets so groß wählen, daß  $C_{i\lambda k \nu}^{(0)}$  dem absoluten Betrage nach größer wird als eine beliebig große positive Zahl; da aber nach (4)

$$A_{ik}^{(\nu)} = \sum_{\lambda=1}^n e^{2\pi V^{-1} r_\lambda^{(\nu)}} C_{i\lambda k \nu}^{(0)}$$

ist, so heißt dies nichts anderes, als daß, wenn ein  $A_{ik}^{(\nu)}$  so ins Unendliche rückt, daß die  $r_k^{(\nu)}$  fest bleiben, mindestens ein  $A_{ik}^{(\nu)}$  ebenfalls ins Unendliche rückt. Damit ist also gezeigt, daß, wenn die  $b_1, \dots, b_N$  in eine Stelle von  $S$  einrücken, die durch die Funktionen (5) gegebenen  $\beta_1, \dots, \beta_N$  in eine Stelle von  $\Sigma$  einrücken müssen. Es kann folglich\*) keine Mannigfaltigkeit  $(2N-1)^{\text{ter}}$  Dimension geben, die die Mannigfaltigkeit  $M$  der  $\beta_1, \dots, \beta_N$  derart in zwei Gebiete zerschneidet, daß in dem einen dieser Gebiete alle diejenigen  $\beta_1, \dots, \beta_N$  enthalten sind, die als Wertsysteme der Funktionen (5) zum Vorschein kommen, wenn die  $b_1, \dots, b_N$  die ganze Mannigfaltigkeit  $M$  durchlaufen. Denn ein Punkt dieser hypothetischen Mannigfaltigkeit  $(2N-1)^{\text{ter}}$  Dimension könnte nur entweder dadurch erreicht werden, daß die Funktionaldeterminante der  $\beta$  nach den  $b$  verschwindet, was ausgeschlossen ist, weil die  $b$  sich aus den Gleichungen (5) als eindeutige Funktionen der  $\beta$  ergeben, oder dadurch, daß die  $b$  in eine Stelle  $S$  einrücken, was aber ebenfalls ausgeschlossen ist, weil dann, wie gezeigt worden ist, die  $\beta$  in eine Stelle  $\Sigma$  einrücken, und  $\Sigma$  höchstens von  $(2N-2)^{\text{ter}}$  Dimension ist. Der Wertevorrat der Funktionen (5) muß also die ganze Mannigfaltigkeit  $M$  erfüllen, d. h. es entspricht jedem Punkte von  $M$  auch ein Punkt von  $M$ .

Klausenburg, den 11. Oktober 1905.

\*) Vergl. den analogen Schluß bei Poincaré, Acta Mathematica Bd. 4, p. 277, 278.

## Über asymptotische Darstellungen der Lösungen linearer Differentialsysteme als Funktionen eines Parameters.

Von

LUDWIG SCHLESINGER in Klausenburg.

### Einleitung.

Wenn der Punkt  $x = \infty$  eine isolierte Unbestimmtheitsstelle der Lösungen einer linearen Differentialgleichung (oder eines Systems linearer Differentialgleichungen erster Ordnung) mit der unabhängigen Variablen  $x$  ist, so kommt — wie Herr Poincaré gezeigt hat\*) — den nach fallenden Potenzen von  $x$  fortschreitenden Normalreihen des Herrn Thomé, die den Differentialgleichungen formell genügen, aber im allgemeinen divergent sind, die Bedeutung zu, daß sie für große Werte von  $x$  gewisse Integrale asymptotisch darstellen. Hängen die Koeffizienten der Differentialgleichung oder des Differentialsystems von einem Parameter  $\mu$  so ab, daß der Punkt  $\mu = \infty$  eine isolierte Unbestimmtheitsstelle der Integrale ist, so kann man Reihenentwicklungen aufstellen, die in bezug auf  $\mu$  eine ähnliche Struktur aufweisen, wie die Thoméschen Normalreihen in bezug auf  $x$ , und denen die Eigenschaft zukommt, daß sie gewisse Lösungssysteme für große Werte von  $\mu$  asymptotisch darstellen. — Herr Horn, der ja auch zur Theorie der durch die Thoméschen Normalreihen vermittelten asymptotischen Darstellungen so wertvolle Beiträge geliefert hat, betrachtet in zwei in diesen Annalen\*\*) veröffentlichten Arbeiten für gewisse lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung die nach einem Parameter fortschreitenden formalen Entwicklungen, und weist ihre Eigenschaft, für reale Werte der unabhängigen Variablen und für große Werte des Parameters die asymptotische Darstellung gewisser Lösungssysteme zu liefern, mit Hilfe der Methode der sukzessiven Annäherungen nach. — Ich nehme in dieser Arbeit die

\*) American Journal Bd. VII (1885), S. 203 ff. Acta Mathem. Bd. VIII (1885), S. 275 ff.

\*\*) Bd. 52, S. 271 ff. und S. 340 ff.



Untersuchung für ein beliebiges lineares Differentialsystem und für beliebige komplexe Werte der unabhängigen Variablen in Angriff. Als mir bemerkenswert erscheinende Ergebnisse hebe ich die folgenden hervor. Der Nachweis der asymptotischen Darstellung läßt sich durch vorübergehende Verschmelzung des Parameters mit der unabhängigen Variablen auf das fundamentale Lemma des Herrn Poincaré\*) gründen, in ähnlicher Weise, wie es Herr Horn\*\*) für den Fall der Thoméschen Normalreihen durchgeführt hat. — Wenn die Koeffizienten des Differentialsystems rationale Funktionen der unabhängigen Variablen sind, so spielen gewisse algebraische Funktionen und die zu diesen gehörigen Abelschen Integrale eine bedeutsame Rolle, die letzteren reduzieren sich in einem besonders wichtigen Spezialfalle auf Integrale erster Gattung. — Die gefundenen asymptotischen Darstellungen gewähren vollständige Einsicht in die Natur der Grenzfälle, die auftreten, wenn man sich\*\*\*) der Kontinuitätsmethode bedient, um die Existenz der durch das Riemannsche Problem postulierten Funktionssysteme zu erweisen, und ich möchte bemerken, daß die hier mitzuteilenden Untersuchungen aus dem Streben nach dieser Einsicht erwachsen sind. Ein Auszug aus dieser Arbeit ist in den Comptes rendus der Pariser Akademie†) erschienen.

## I.

### Formale Aufstellung der nach fallenden Potenzen des Parameters fortschreitenden Reihen. Ihr Charakter als asymptotische Darstellungen gewisser Integralsysteme.

Die Koeffizienten  $a_{ix}$  des homogenen linearen Differentialsystems

$$(A) \quad \frac{dy_x}{dx} = \sum_{\lambda=1}^n y_\lambda a_{\lambda x} \quad (x = 1, 2, \dots, n),$$

mögen von einem Parameter  $\mu$  dergestalt abhängen, daß sie in der Form von Reihen

$$(1) \quad a_{ix} = \mu^\tau \left( a_{ix}^{(0)} + \frac{1}{\mu} a_{ix}^{(1)} + \dots \text{in inf.} \right) \quad (i, x = 1, 2, \dots, n)$$

dargestellt werden können, wo  $\tau$  eine positive ganze Zahl, die  $a_{ix}^{(0)}, a_{ix}^{(1)}, \dots$  Funktionen von  $x$  bedeuten, und die Reihen (1) in einer von  $x$  unabhängigen Umgebung von  $\mu = \infty$

$$(2) \quad |\mu| > R,$$

konvergieren. Die  $a_{ix}$  werden, um die Vorstellung zu fixieren, als rationale

\*) American Journal Bd. VII, S. 204—209.

\*\*) Acta Mathem. Bd. XXIV, S. 289 ff.; Sammlung Schubert L (1905), S. 190 ff.

\*\*\*) Vergl. die vorhergehende Note.

†) Tome CXLII, p. 1031—1033, 7. Mai 1906.

Funktionen von  $x$  vorausgesetzt. Eine Integralmatrix  $(y_{ix})$  des Systems (A), die sich für den regulären Wert  $x = x_0$  auf die (von  $x$  unabhängige) Matrix  $(\gamma_{ix})$  reduziert, wo in der durch (2) bestimmten Umgebung von  $\mu = \infty$ :

$$(3) \quad \gamma_{ix} = \mu^\lambda \left( \gamma_{ix}^{(0)} + \frac{\gamma_{ix}^{(1)}}{\mu} + \dots \text{in inf.} \right),$$

$\lambda$  eine positive ganze Zahl, läßt sich bekanntlich\*) in der Form

$$(4) \quad y_{ix} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} y_{ix}^{(r)} \mu^r$$

darstellen, wo die  $y_{ix}^{(r)}$  Funktionen von  $x$  bedeuten, und die Reihen für alle regulären Werte von  $x$  und für alle endlichen Werte von  $\mu$ , die der Ungleichung (2) genügen, unbedingd und gleichmäßig konvergieren. Es handelt sich um die Untersuchung der durch die Reihen (4) definierten Funktionen von  $\mu$  in der Umgebung der Unbestimmtheitsstelle  $\mu = \infty$ .

Der Einfachheit wegen beschränken wir uns auf den Fall  $\tau = 1, \lambda = 0$ , bemerken aber, daß die darzulegende Methode mutatis mutandis auch allgemein anwendbar bleibt.

Wir setzen in das Differentialsystem (A) für  $y_x$  die Ausdrücke

$$(5) \quad y_x = e^{\omega} \left( y_x^{(0)} + \frac{1}{\mu} y_x^{(1)} + \dots \text{in inf.} \right) \quad (x = 1, 2, \dots, n)$$

ein und suchen die  $\omega, y_x^{(0)}, y_x^{(1)}, \dots$  als Funktionen von  $x$  so zu bestimmen, daß die Ausdrücke (5) formell das System (A) befriedigen. Nach Division durch  $e^{\omega}$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{dy_x^{(0)}}{dx} + \frac{1}{\mu} \frac{dy_x^{(1)}}{dx} + \dots + \mu \frac{d\omega}{dx} \left( y_x^{(0)} + \frac{1}{\mu} y_x^{(1)} + \dots \right) \\ = \sum_{\lambda=1}^n \mu \left( y_\lambda^{(0)} + \frac{1}{\mu} y_\lambda^{(1)} + \dots \right) \left( a_{\lambda x}^{(0)} + \frac{1}{\mu} a_{\lambda x}^{(1)} + \dots \right) \end{aligned}$$

und durch Vergleichung der Koeffizienten der Potenzen von  $\mu$  auf beiden Seiten:

$$(6) \quad \frac{d\omega}{dx} y_x^{(0)} = \sum_{\lambda} y_\lambda^{(0)} a_{\lambda x}^{(0)},$$

$$(7) \quad \frac{dy_x^{(0)}}{dx} + \frac{d\omega}{dx} y_x^{(1)} = \sum_{\lambda} \left( y_\lambda^{(0)} a_{\lambda x}^{(1)} + y_\lambda^{(1)} a_{\lambda x}^{(0)} \right),$$

$$(8) \quad \frac{dy_x^{(v)}}{dx} + \frac{d\omega}{dx} y_x^{(v+1)} = \sum_{\lambda} \left( y_\lambda^{(0)} a_{\lambda x}^{(v+1)} + y_\lambda^{(1)} a_{\lambda x}^{(v)} + \dots + y_\lambda^{(v+1)} a_{\lambda x}^{(0)} \right) \\ (v = 1, 2, \dots).$$

\*) Vergl. Horn, Mathem. Annalen Bd. 52, 1899, S. 343.

Die Gleichungen (6) oder

$$(6a) \quad \sum_{\lambda} \left( a_{\lambda x}^{(0)} - \delta_{\lambda x} \frac{d\omega}{dx} \right) y_{\lambda}^{(0)} = 0 \quad (x = 1, 2, \dots, n)$$

erfordern, daß

$$(9) \quad \left| a_{ix}^{(0)} - \delta_{ix} \frac{d\omega}{dx} \right| = 0 \quad (i, x = 1, 2, \dots, n)$$

sei, was eine Differentialgleichung erster Ordnung und  $n^{\text{ten}}$  Grades für  $\omega$  ist; bezeichnet man mit  $\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_n$  die Wurzeln der *charakteristischen Gleichung*

$$(10) \quad \left| a_{ix}^{(0)} - \delta_{ix} \bar{\omega} \right| = 0,$$

die, sofern man die  $a_{ix}^{(0)}$  als rationale Funktionen von  $x$  voraussetzt,  $\bar{\omega}$  als algebraische Funktion von  $x$  determiniert, so erhält man

$$(11) \quad \omega_i = \int \bar{\omega}_i dx \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

und dann vermöge (6a):

$$(12) \quad \sum_{\lambda} \left( a_{\lambda x}^{(0)} - \delta_{\lambda x} \bar{\omega}_i \right) y_{\lambda}^{(0)} = 0, \quad (x = 1, 2, \dots, n)$$

woraus sich, allgemein zu reden, die Verhältnisse

$$(13) \quad y_{i1}^{(0)} : y_{i2}^{(0)} : \dots : y_{in}^{(0)}$$

als algebraische Funktionen von  $x$  bestimmen lassen. Wenn die Diskriminante der Gleichung (10), in bezug auf  $\bar{\omega}$ , in  $x$  nicht identisch verschwindet, so sind die  $\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_n$  voneinander verschieden; *wir halten vorläufig an dieser Voraussetzung fest.* — Um die Ausnützung der Rekursionsformeln (8) zur Bestimmung des noch unbekanntenen Proportionalitätsfaktors der  $y_{i1}^{(0)}, \dots, y_{in}^{(0)}$  und der folgenden Koeffizienten in den aus (5) für  $\omega = \omega_i$  hervorgehenden Reihenentwicklungen übersichtlich zu gestalten, verfahren wir wie folgt.

Es bedeute  $u_{i\lambda}^{(0)}$  irgend ein Lösungssystem der Gleichungen (12). Dann ist

$$(14) \quad (u_{ix}^{(0)}) (a_{ix}^{(0)}) (u_{ix}^{(0)})^{-1} = (\bar{\omega}_i \delta_{ix}).$$

Setzen wir nun

$$(15) \quad y_x = \sum_{\lambda=1}^n z_{\lambda} u_{\lambda x}^{(0)},$$

so genügen die  $z_1, \dots, z_n$  dem Differentialsysteme

$$(B) \quad \frac{dz_x}{dx} = \sum_{\lambda=1}^n b_{\lambda x} z_{\lambda}, \quad (x = 1, 2, \dots, n)$$

wo\*) zwischen den  $(b_{i\kappa})$  und den  $(a_{i\kappa})$  die Beziehung:

$$(16) \quad (a_{i\kappa}) = (u_{i\kappa}^{(0)})^{-1} (b_{i\kappa}) (u_{i\kappa}^{(0)}) + (u_{i\kappa}^{(0)})^{-1} \left( \frac{d u_{i\kappa}^{(0)}}{dx} \right)$$

besteht. Hiernach sind mit Rücksicht auf die Gleichung (14) die  $b_{i\kappa}$  in der Form

$$(17) \quad b_{i\kappa} = \mu \left( \delta_{i\kappa} \bar{w}_i + \frac{b_{i\kappa}^{(1)}}{\mu} + \frac{b_{i\kappa}^{(2)}}{\mu^2} + \dots \right)$$

als für  $|\mu| > R$  konvergente Reihen darstellbar, worin

$$(18) \quad \begin{cases} (b_{i\kappa}^{(1)}) = (u_{i\kappa}^{(0)}) (a_{i\kappa}^{(1)}) (u_{i\kappa}^{(0)})^{-1} - \left( \frac{d u_{i\kappa}^{(0)}}{dx} \right) (u_{i\kappa}^{(0)})^{-1}, \\ (b_{i\kappa}^{(\nu)}) = (u_{i\kappa}^{(0)}) (a_{i\kappa}^{(\nu)}) (u_{i\kappa}^{(0)})^{-1}. \end{cases} \quad (\nu = 2, 3, \dots)$$

Setzen wir nun gleich

$$(19) \quad z_{i\kappa} = e^{\mu w_i} \left( z_{i\kappa}^{(0)} + \frac{1}{\mu} z_{i\kappa}^{(1)} + \dots \right), \quad (i, \kappa = 1, 2, \dots, n)$$

so lauten die der Gleichung (8) analog gebildeten Rekursionsformeln für die  $z_{i\kappa}^{(\nu)}$ :

$$(20) \quad \frac{d z_{i\kappa}^{(\nu)}}{dx} + \bar{w}_i z_{i\kappa}^{(\nu+1)} = \sum_{\lambda=1}^n (z_{i\lambda}^{(\nu)} b_{\lambda\kappa}^{(\nu+1)} + \dots + z_{i\lambda}^{(\nu)} b_{\lambda\kappa}^{(1)} + z_{i\lambda}^{(\nu+1)} \delta_{\lambda\kappa} \bar{w}_\lambda),$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \dots)$$

während sich aus der der Gleichung (6) entsprechenden Gleichung:

$$(21) \quad \begin{aligned} \bar{w}_i z_{i\kappa}^{(0)} &= z_{i\kappa}^{(0)} \bar{w}_\kappa, \\ z_{i\kappa}^{(0)} &= 0, \quad i \neq \kappa \end{aligned}$$

ergibt. Die Gleichung (20) liefert nun für  $\nu = 0$  und  $i = \kappa$

$$(22) \quad \frac{d z_{ii}^{(0)}}{dx} = z_{ii}^{(0)} b_{ii}^{(1)}, \quad z_{ii}^{(0)} = \text{const.} e^{\int b_{ii}^{(1)} dx},$$

und für  $i \neq \kappa$

$$(22a) \quad \bar{w}_i z_{i\kappa}^{(1)} = z_{ii}^{(0)} b_{i\kappa}^{(1)} + \bar{w}_\kappa z_{i\kappa}^{(1)},$$

woraus sich die  $z_{i\kappa}^{(1)}$  ( $i \neq \kappa$ ) bestimmen. Die  $z_{ii}^{(1)}$  ergeben sich dann aus (20) für  $\nu = 1$ ,  $i = \kappa$  mittels Quadraturen\*\*) usw. Gehen wir von den

\*) Vergl. z. B. die Formel (III.) meiner Arbeit, Crelles Journal, Bd. 128, S. 267.

\*\*) Man findet:

$$\frac{d z_{ii}^{(1)}}{dx} = c_i e^{\int b_{ii}^{(1)} dx} \left[ b_{ii}^{(2)} + \sum_{\lambda \neq i} \frac{b_{i\lambda}^{(1)} b_{\lambda i}^{(1)}}{\bar{w}_i - \bar{w}_\lambda} \right] + z_{ii}^{(1)} b_{ii}^{(1)}, \quad (c_i = \text{const.}).$$

Ausdrücken (19) zu den das Differentialsystem (A) befriedigenden Ausdrücken

$$(23) \quad y_{ix} = e^{\mu x} \left( y_{ix}^{(0)} + \frac{1}{\mu} y_{ix}^{(1)} + \dots \right)$$

zurück, so ist

$$(24) \quad (y_{ix}) = (z_{ix}) (u_{ix}^{(0)}),$$

also nach (21), (22):

$$(25) \quad y_{ix}^{(0)} = c_i e^{\int v_{ix}^{(1)} dx} u_{ix}^{(0)}$$

usw. — Wir haben somit unter der Voraussetzung, daß die Diskriminante der charakteristischen Gleichung (10) nicht identisch verschwindet,  $n$  Systeme von Reihen der Form (5) gefunden, die dem Differentialsystem (A) formell genügen. Wenn die  $n$  Wurzeln  $\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_n$  nicht voneinander verschieden sind, so treten möglicherweise an die Stelle einiger der Reihen (23) solche von der Form

$$e^{\mu x} \omega_i^{(0)} + \mu \frac{m-1}{m} \omega_i^{(1)} + \dots + \mu \frac{1}{m} \omega_i^{(m)} \left( y_{ix}^{(0)} + \frac{1}{\mu} y_{ix}^{(1)} + \dots \right),$$

wo  $m$  eine ganze Zahl bedeutet, die nicht größer ist, als der Grad der Vielfachheit der betreffenden Wurzel  $\bar{\omega}_i$ . Die Behandlung dieses Falles, der bekannten Verhältnissen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen entspricht (den sogenannten *anormalen* Reihen des Herrn Fabry\*), lassen wir der Einfachheit wegen beiseite.

Natürlich sind die Reihen (23) im allgemeinen für keinen Wert von  $\mu$  konvergent; ohne auf die an sich und für die Anwendungen nicht uninteressante Frage nach den Bedingungen, unter denen jene Reihen konvergieren können, einzugehen, wenden wir uns gleich zur Erörterung der Bedeutung der in Rede stehenden Reihen als *asymptotischer Darstellungen* gewisser Lösungssysteme des Differentialsystems (A) für große Werte des Parameters  $\mu$ .

Wir schreiben das Differentialsystem (B) in der Form

$$(Ba) \quad \frac{dz_x}{dx} = \mu \bar{\omega}_x z_x + \sum_{\lambda=1}^n z_\lambda Q_{\lambda x},$$

wo also die  $Q_{\lambda x}$  Funktionen von  $x$  und  $\mu$  bedeuten, für die

$$(26) \quad \lim_{\mu=\infty} \frac{1}{\mu} Q_{\lambda x} = 0$$

ist. Es sei  $x = a$  ein *regulärer* Punkt, d. h. ein Punkt, der weder zu den

\*) Thèses de la Faculté des Sciences, Paris, 1885, vergl. Poincaré, Acta Mathematica VIII (1885), S. 304.

Polen der rationalen Funktionen  $a_{i,x}$  noch zu den Verzweigungspunkten der durch die Gleichung (10) definierten algebraischen Funktion  $\bar{w}$  von  $x$  gehört. Wir denken uns von  $a$  aus einen *Strahl* gelegt und auf diesem einen Punkt  $b$  fixiert von der Beschaffenheit, daß die zwischen  $a$  und  $b$  gelegenen  $x$  Punkte dieses Strahles ( $b$  eingeschlossen) ebenfalls reguläre Punkte sind. Der Parameter  $\mu$  möge mit einem bestimmten Argumente, also auch in einem Strahle, ins Unendliche rücken. Wir setzen

$$(27) \quad \mu(x-a) = \xi e^{\theta i}, \quad (i = \sqrt{-1})$$

so daß  $\xi$  real positiv,  $\theta$  konstant ist. Die Bezeichnung sei nun so gewählt, daß für alle Werte von  $x$ , die auf unserem  $x$ -Strahle zwischen  $a$  und  $b$  liegen,

$$(28) \quad \Re(\bar{w}_1 e^{\theta i}) > \Re(\bar{w}_2 e^{\theta i}) > \dots > \Re(\bar{w}_n e^{\theta i}),$$

wo  $\Re$  den realen Teil der in Klammern folgenden Größen andeuten soll. Der Punkt  $b$  ist nötigenfalls so zu regulieren, daß die Ungleichungen (28) statthaben. Verbleibt  $x$  zwischen  $a$  und  $b$ , und rückt  $\mu$  auf seinem Strahle ins Unendliche, so wird  $\xi$  als reale positive Variable unendlich groß; indem wir nun dieses  $\xi$  in dem Differentialsysteme (Ba) an Stelle von  $x$  als unabhängige Variable einführen, erhalten wir:

$$(29) \quad \frac{dz_x}{d\xi} = e^{\theta i} \bar{w}_x z_x + \sum_{\lambda=1}^n z_\lambda \frac{1}{\mu} Q_{\lambda x} \cdot e^{\theta i}, \quad (x = 1, 2, \dots, n)$$

woraus für  $x = 2, 3, \dots, n$ :

$$(30) \quad \frac{d \log \frac{z_x}{z_1}}{d\xi} = e^{\theta i} (\bar{w}_x - \bar{w}_1) + \frac{1}{\mu} e^{\theta i} \left( Q_{xx} - Q_{11} + \sum_{\lambda \neq x} Q_{\lambda x} \frac{z_\lambda}{z_x} - \sum_{\lambda > 1} Q_{\lambda 1} \frac{z_\lambda}{z_1} \right)$$

folgt. Da nun hierin

$$(31) \quad \Re(e^{\theta i} (\bar{w}_x - \bar{w}_1)) < 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\mu} e^{\theta i} Q_{\lambda \nu} = 0$$

ist, läßt sich einerseits eine von  $x$  unabhängige negative reale Größe  $\rho$  so angeben, daß in dem betrachteten Intervalle

$$\Re(e^{\theta i} (\bar{w}_x - \bar{w}_1)) \leq \rho < 0;$$

andererseits ist für hinreichend große  $\xi$

$$\left| \frac{1}{\mu} e^{\theta i} Q_{\lambda \nu} \right| < \delta,$$

wo  $\delta$  mit wachsendem  $\xi$  gegen Null konvergiert. Wenn nun

$$\left| \frac{z_\lambda}{z_x} \right| < \frac{1}{\varepsilon}, \quad \left| \frac{z_\lambda}{z_1} \right| < \frac{1}{\varepsilon}, \quad \lambda > 1$$

so haben wir\*) nach (30)

$$\frac{d \log \left| \frac{z_x}{z_1} \right|}{d\xi} < \rho + 2\delta + 2(n-1)\delta \frac{1}{\varepsilon}.$$

Bestimmt man nun für ein gewisses  $\xi$  die positive Größe  $\varepsilon$  aus der Gleichung

$$\rho + 2\delta + 2(n-1)\delta \frac{1}{\varepsilon} = -g,$$

wo  $g$  eine hinreichend kleine positive Größe bedeutet, so wird  $\varepsilon$  zugleich mit  $\delta$  unendlich klein, und man schließt wie Herr Poincaré (a. a. O.), daß ein Integralsystem  $z_1, \dots, z_n$ , für welches in einem  $\xi$ -Punkte

$$\varepsilon < \left| \frac{z_x}{z_1} \right| < \frac{1}{\varepsilon} \quad (x = 2, \dots, n)$$

ist, die Eigenschaft besitzt, daß

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{z_x}{z_1} = 0.$$

Solche Integralsysteme sind stets vorhanden. — Dieses Lemma wird nun in ähnlicher Weise weiter benützt, wie das Poincarésche bei Herrn Horn (a. a. O.)

Aus den dem Differentialsysteme (B) formell genügenden Reihen (19) ergeben sich insbesondere für  $i = 1$  die Ausdrücke

$$(32) \quad \frac{z_{1x}}{z_{11}} = \frac{\frac{1}{\mu} z_{1x}^{(1)} + \frac{1}{\mu^2} z_{1x}^{(2)} + \dots}{c_1 \int_{b_{11}^{(1)}} dx + \frac{1}{\mu} z_{11}^{(1)} + \dots} = \frac{1}{\mu} \zeta_x^{(1)} + \frac{1}{\mu^2} \zeta_x^{(2)} + \dots,$$

die dem Differentialsysteme

$$(C) \quad \frac{d\zeta_x}{dx} + \zeta_x \sum_{\lambda > 1} Q_{\lambda 1} \zeta_\lambda = \zeta_x \mu (\bar{\omega}_x - \bar{\omega}_1) + \sum_{\lambda > 1} (Q_{\lambda x} - \delta_{\lambda x} Q_{11}) \zeta_\lambda + Q_{1x},$$

$$(x = 1, \dots, n)$$

das sich aus (Ba) für die Quotienten

$$\zeta_2 = \frac{z_2}{z_1}, \dots, \zeta_n = \frac{z_n}{z_1}$$

ableiten läßt, formell Genüge leisten. Für das Gleichungssystem (C) haben wir den folgenden Satz bewiesen: Wenn  $x$  auf das Intervall

\*) Vergl. Poincaré, American Journal VII (1885), p. 204 ff., und Horn, Acta Mathem. XXIV (1900), p. 290, oder „Gewöhnliche Differentialgl.“ (Samml. Schubert L) 1905, S. 190.

( $a \dots b$ ) beschränkt wird und  $\mu$  so ins Unendliche rückt, daß sein Argument konstant bleibt, wenn ferner die Gleichungen (26) und die Ungleichungen (28) bestehen für

$$\theta = \text{Arg } \mu + \text{Arg } (x - a),$$

so besitzt das Differentialsystem (C) Lösungssysteme  $\xi_2, \dots, \xi_n$ , die gegen Null konvergieren, wenn  $\mu$  in der angegebenen Weise dem Unendlichen zustrebt.

Setzt man in dem Gleichungssystem (C) für  $\xi_2, \dots, \xi_n$  die Ausdrücke

$$(33) \quad \xi_x = \frac{1}{\mu} \xi_x^{(1)} + \frac{1}{\mu^2} \xi_x^{(2)} + \dots + \frac{1}{\mu^p} \xi_x^{(p)} + \frac{Z_x}{\mu^p}$$

ein, so ergibt sich für  $Z_2, \dots, Z_n$  ein Differentialsystem von ähnlicher Form wie (C), nur sind an die Stelle der  $Q_{\lambda x}$  andere Funktionen getreten, die aber auch die Eigenschaft haben, mit  $\frac{1}{\mu}$  multipliziert, für ins Unendliche wachsendes  $\mu$  zu verschwinden. Nach dem für (C) bewiesenen Satze besitzt also das für die  $Z_x$  gültige Differentialsystem ein Lösungssystem, das gegen Null konvergiert, wenn  $\mu$  in der angegebenen Weise dem Unendlichen zustrebt, und diesem entspricht demnach, für jedes positive ganzzahlige  $p$ , ein bestimmtes Lösungssystem von der Form (33) des Differentialsystems (C). Daraus folgt nun weiter\*) die Existenz eines Lösungssystems

$$(34) \quad z_{1x} = e^{\mu \omega_1} \left( z_{1x}^{(0)} + \dots + \frac{1}{\mu^p} z_{1x}^{(p)} + \frac{Z_{1x}}{\mu^p} \right) \quad (x = 1, 2, \dots, n)$$

für das System (B) und eines Lösungssystems

$$(35) \quad y_{1x} = e^{\mu \omega_1} \left( y_{1x}^{(0)} + \dots + \frac{1}{\mu^p} y_{1x}^{(p)} + \frac{Y_{1x}}{\mu^p} \right) \quad (x = 1, 2, \dots, n)$$

für das System (A), wo, wenn  $\mu$  in der angegebenen Weise ins Unendliche rückt und  $x$  zwischen  $a$  und  $b$  liegt,

$$(36) \quad \lim_{\mu=\infty} Z_{1x} = 0, \quad \lim_{\mu=\infty} Y_{1x} = 0.$$

Man benutzt nun das Lösungssystem (35) zur Reduktion des Differentialsystems mit  $n$  Unbekannten (A) auf ein ebensolches Differentialsystem mit

\*) Indem man beachtet, daß nach (B)

$$\frac{d \log z_x}{dx} = \mu \bar{\omega}_x + \sum_{\lambda=1}^n \frac{z_\lambda}{z_x} Q_{\lambda x} = \mu \bar{\omega}_x + Q_{xx} + \sum_{\lambda \neq x} \frac{\xi_\lambda}{\xi_x} Q_{\lambda x}$$

$(x = 1, 2, \dots, n; \xi_1 = 1)$

ist, und dann die Gleichungen (22), (22 a), (32) zu Rate zieht.



$n-1$  Unbekannten\*) und schließt durch vollständige Induktion — genau so wie es Herr Horn\*\*) tut — auf die Existenz von weiteren  $n-1$  Lösungssystemen des Systems (A) von der Form

$$(35a) \quad y_{ix} = e^{\mu \omega_i} \left( y_{ix}^{(0)} + \dots + \frac{1}{\mu^p} y_{ix}^{(p)} + \frac{Y_{ix}}{\mu^p} \right), \quad (i = 2, \dots, n),$$

für die, im selben Sinne wie bei den Gleichungen (36)

$$\lim_{\mu=\infty} Y_{ix} = 0.$$

Über die in den  $\omega_i$ ,  $y_{ix}^{(\lambda)}$  enthaltenen willkürlichen Integrationskonstanten denken wir uns auf irgend eine Weise verfügt; die  $\omega_i$  mögen etwa als

$$(37) \quad \omega_i = \int_{x_0}^x \bar{\omega}_i dx$$

erklärt sein, wo  $x_0$  einen zwischen  $a$  und  $b$  gelegenen Wert von  $x$  bedeutet. Führen wir in dem Integrale (37), das natürlich den  $x$ -Strahl entlang zu nehmen ist, die durch (27) definierte Größe als neue Variable ein, so ist

$$\mu \omega_i = \int_{\xi_0}^{\xi} \bar{\omega}_i e^{\theta \sqrt{-1}} d\xi,$$

wir haben also, wenn  $\xi > \xi_0$ , d. h.

$$(38) \quad |x - a| > |x_0 - a|,$$

gemäß den Ungleichungen (28) die Ungleichungen

$$(39) \quad \Re(\mu \omega_1) > \Re(\mu \omega_2) > \dots > \Re(\mu \omega_n).$$

In bezug auf die  $y_{ix}^{(0)}$  können wir z. B. festsetzen, daß (vergl. die Gl. (25))

$$y_{ix}^{(0)} = e^{\int_{x_0}^x \bar{b}_{ii}^{(1)} dx} u_{ix}^{(0)};$$

dann ist jedenfalls die Determinante

$$(40) \quad |y_{ix}^{(0)}| \neq 0.$$

( $i, x = 1, 2, \dots, n$ )

Wir behaupten dann, daß die durch die Formeln (35a) dargestellten  $n$  Integralsysteme eine *Integralmatrix* ausmachen, d. h. daß ihre Determinante nicht identisch verschwindet. In der Tat ist:

\*) Vergl. z. B. Koenigsberger, Lehrbuch d. Theorie d. Differentialgleichungen, (1889) S. 122.

\*\*) Acta Mathematica, XXIV, S. 299.

$$(41) \quad |y_{ix}| = \Gamma \cdot e^{\int_{x_0}^x \sum_{\kappa=1}^n a_{\kappa\kappa} dx},$$

( $i, \kappa = 1, 2, \dots, n$ )

wo  $\Gamma$  eine von  $x$  unabhängige Größe bedeutet, von der gezeigt werden muß, daß sie nicht in  $\mu$  identisch verschwindet. Beachtet man, daß nach (10)

$$\sum_{\kappa=1}^n \bar{\omega}_i = \sum_{\kappa=1}^n a_{\kappa\kappa}^{(0)},$$

so folgt aus (1), (35a), (37), (41) die Gleichung

$$(42) \quad \left| y_{ix}^{(0)} + \frac{1}{\mu} y_{ix}^{(1)} + \dots + \frac{1}{\mu^p} y_{ix}^{(p)} + \frac{1}{\mu^p} Y_{ix} \right|$$

$$= \Gamma \cdot e^{\int_{x_0}^x a_{\kappa\kappa}^{(1)} dx + \frac{1}{\mu} \int_{x_0}^x a_{\kappa\kappa}^{(2)} dx + \dots}.$$

Hieraus ist  $\Gamma$  jedenfalls in der Form

$$\Gamma = \Gamma_0 + \frac{1}{\mu} \Gamma_1 + \dots + \frac{1}{\mu^p} \Gamma_p + \frac{1}{\mu^p} E$$

darstellbar, wo  $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_p$  von  $\mu$  unabhängig, und

$$\lim_{\mu=\infty} E = 0.$$

Läßt man aber in (42) den Parameter  $\mu$  in der wiederholt bezeichneten Weise ins Unendliche rücken, so folgt

$$|y_{ix}^{(0)}| = \Gamma_0 e^{\int_{x_0}^x a_{\kappa\kappa}^{(1)} dx},$$

es ist also nach (40)  $\Gamma_0$  von Null verschieden und folglich auch  $\Gamma$  nicht identisch gleich Null.

Es bedeute nun  $\bar{y}_{ix}$  für einen festen Index  $i$  und  $\kappa = 1, 2, \dots, n$  ein Integralsystem von der Form

$$(43) \quad \bar{y}_{ix} = e^{\mu \omega_i} \left( \bar{y}_{ix}^{(0)} + \dots + \frac{1}{\mu^p} \bar{y}_{ix}^{(p)} + \frac{1}{\mu^p} \bar{Y}_{ix} \right),$$

wo die in den  $\bar{y}_{ix}^{(0)}, \dots, \bar{y}_{ix}^{(p)}$  enthaltenen Integrationskonstanten als *willkürliche Konstanten* zu denken sind und

$$\lim_{\mu=\infty} \bar{Y}_{ix} = 0.$$

Dann lassen sich die  $c_1, \dots, c_n$  als von  $x$  unabhängige Größen derart bestimmen, daß

$$(44) \quad \bar{y}_{ix} = c_1 y_{1x} + \dots + c_n y_{nx} \quad (x = 1, 2, \dots, n).$$

Aus den Gleichungen (44) ergibt sich

$$c_\lambda = e^{\mu(\omega_i - \omega_\lambda)} \left( c_\lambda^{(0)} + \dots + \frac{1}{\mu^p} c_\lambda^{(p)} + \frac{C_\lambda}{\mu^p} \right), \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n),$$

wo die  $c_\lambda^{(0)}, \dots, c_\lambda^{(p)}$  von  $\mu$  unabhängig und die

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} C_\lambda = 0$$

sind. Die Gleichungen

$$\frac{dc_\lambda}{dx} = 0$$

ergeben für  $i = \lambda$

$$\frac{dc_i^{(0)}}{dx} = 0, \quad \frac{dc_i^{(1)}}{dx} = 0, \dots, \frac{dc_i^{(p)}}{dx} = 0, \quad \frac{dC_i}{dx} = 0,$$

und für  $i \neq \lambda$

$$c_\lambda^{(0)} = 0, \quad c_\lambda^{(1)} = 0, \dots, c_\lambda^{(p)} = 0,$$

$$C_\lambda = \text{const. } e^{\mu(\omega_\lambda - \omega_i)}.$$

Es ist folglich für  $\lambda \neq i$

$$c_\lambda y_{\lambda x} = e^{\mu \omega_i} \frac{\Gamma_{\lambda x}}{\mu^p}, \quad \Gamma_{\lambda x} = C_\lambda \left( y_{\lambda x}^{(0)} + \dots + \frac{1}{\mu^p} y_{\lambda x}^{(p)} + \frac{1}{\mu^p} Y_{\lambda x} \right),$$

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \Gamma_{\lambda x} = 0,$$

und somit

$$(45) \quad \bar{y}_{ix} = \left( c_i^{(0)} + \dots + \frac{c_i^{(p)}}{\mu^p} + \frac{1}{\mu^p} C_i \right) y_{ix} + e^{\mu \omega_i} \frac{\Gamma_x}{\mu^p},$$

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \Gamma_x = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \sum_{\lambda \neq x} \Gamma_{\lambda x} = 0,$$

wo die  $c_i^{(0)}, \dots, c_i^{(p)}, C_i$  von  $x$  unabhängige Größen bedeuten. Wir erhalten sonach:

$$(46) \quad \begin{cases} \bar{y}_{ix}^{(0)} = y_{ix}^{(0)} c_i^{(0)}, \\ \bar{y}_{ix}^{(1)} = y_{ix}^{(0)} c_i^{(1)} + y_{ix}^{(1)} c_i^{(0)}, \\ \dots \\ \bar{y}_{ix}^{(p)} = y_{ix}^{(0)} c_i^{(p)} + \dots + y_{ix}^{(p)} c_i^{(0)}; \end{cases}$$

durch diese Gleichungen ist die Art, wie die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungen (6)–(8) von den willkürlichen Konstanten  $c_i^{(0)}, \dots, c_i^{(p)}$  abhängen, in Evidenz gesetzt.

Es bedeute nun  $y_1, \dots, y_n$  ein Lösungssystem des Differentialsystems (A), dessen Anfangswerte für  $x = x_0$  in der Form

$$(47) \quad y_x(x_0) = e^{\mu x} \left( \gamma_x^{(0)} + \frac{1}{\mu} \gamma_x^{(1)} + \frac{1}{\mu^2} \gamma_x^{(2)} + \dots \text{ in inf.} \right)$$



Mit Rücksicht auf die Ungleichungen (39) können wir somit das folgende Theorem aussprechen:

Jedes Integralsystem des Differentialsystems (A), dessen Anfangswerte im Punkte  $x_0$  in der Form (47) darstellbar sind, läßt für die zwischen  $x_0$  und  $x$  gelegenen Punkte des  $x$ -Strahls und für ein den  $\mu$ -Strahl entlang ins Unendliche wachsendes  $\mu$  eine asymptotische Darstellung zu, und zwar im allgemeinen, d. h. wenn die sich aus den Gleichungen (49), (50) ergebenden  $\bar{y}_{1x}^{(\nu)}$  nicht sämtlich identisch verschwinden, in der Form

$$(51) \quad y_x \sim e^{\mu \bar{\omega}_1} \left( \bar{y}_{1x}^{(0)} + \frac{1}{\mu} \bar{y}_{1x}^{(1)} + \frac{1}{\mu^2} \bar{y}_{1x}^{(2)} + \dots \text{ in inf.} \right).$$

Für spezielle Wahlen der Anfangswerte (47) kann es sich ereignen, daß gewisse der aus den Gleichungen (49), (50) zu bestimmenden  $\bar{y}_{ix}^{(\nu)}$  identisch verschwinden. Wenn

$$\bar{y}_{ix}^{(\nu)} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, \lambda - 1; \nu = 0, 1, 2, \dots),$$

aber unter den  $\bar{y}_{\lambda x}^{(\nu)}$  welche vorhanden sind, die nicht identisch verschwinden, so haben wir

$$(52) \quad y_x \sim e^{\mu \bar{\omega}_\lambda} \left( \bar{y}_{\lambda x}^{(0)} + \frac{1}{\mu} \bar{y}_{\lambda x}^{(1)} + \dots \right);$$

dabei ist jedoch zu bemerken, daß für alle Elemente eines Integralsystems, d. h. für alle Werte des Index  $x = 1, 2, \dots, n$ , der Index  $\lambda$  immer derselbe sein muß, wie aus den zur Berechnung der  $\bar{y}_{ix}^{(0)}, \bar{y}_{ix}^{(1)}, \dots$  dienenden Formeln (siehe namentlich Gl. (50)) hervorgeht.

## II.

**Anwendung auf den Fall eines schlechthin kanonischen Differentialsystems, für das die Wurzeln der determinierenden Gleichungen von dem Parameter unabhängig sind.**

Es möge nun der Fall besonders behandelt werden, wo das Differentialsystem (A) ein *schlechthin kanonisches* ist, d. h. die Form hat

$$(A) \quad \frac{dy_x}{dx} = \sum_{\lambda=1}^n \frac{g_{\lambda x}(x)}{\varphi(x)} y_\lambda, \quad (x = 1, 2, \dots, n);$$

dabei bedeuten die  $g_{\lambda x}(x)$  ganze rationale Funktionen von nicht höherem als dem  $(\sigma - 1)$ ten Grade in  $x$ , während

$$(1) \quad \varphi(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_\sigma).$$

Die singulären Punkte  $a_1, \dots, a_\sigma$  seien von  $\mu$  unabhängig, dagegen sei:

$$(2) \quad g_{ix}(x) = \mu \left( g_{ix}^{(0)} + \frac{1}{\mu} g_{ix}^{(1)} + \dots \right).$$

Diese Reihen mögen für  $|\mu| > R$  (wo  $R$  von  $x$  und den  $a_1, \dots, a_\sigma$  un-

abhängig ist) konvergieren, und der Einfachheit wegen wollen wir auch voraussetzen, daß die Entwicklungskoeffizienten  $g_{ix}^{(\lambda)}$  ( $\lambda = 0, 1, \dots$ ) rationale ganze Funktionen von  $x$  sind.

Wir betrachten die algebraische Gleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades\*)

$$(3) \quad \left| \frac{g_{ix}(x)}{\varphi(x)} - \delta_{ix} \Omega \right| = 0, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n);$$

sie definiert uns  $\Omega$  als algebraische Funktion von  $x$  und als in der Umgebung von  $\mu = \infty$   $n$ -deutige Funktion von  $\mu$ . Für diese Funktion sind die Punkte  $a_1, \dots, a_\sigma$  einfache Pole; setzt man

$$(4) \quad \text{Res}_{a_\nu} \frac{g_{ix}(x)}{\varphi(x)} = A_{ix}^{(\nu)}, \quad (\nu = 1, 2, \dots, \sigma),$$

so ist

$$(5) \quad |A_{ix}^{(\nu)} - \delta_{ix} \text{Res}_{a_\nu} \Omega| = 0, \quad (i, \nu = 1, 2, \dots, n).$$

Bezeichnen wir also die Wurzeln der Gleichung (3) mit  $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ , so sind die

$$(6) \quad \text{Res}_{a_\nu} \Omega_i = r_i^{(\nu)}, \quad (i = 1, 2, \dots, n; \nu = 1, 2, \dots, \sigma)$$

nichts anderes als die Wurzeln der zu  $x = a_\nu$  gehörigen determinierenden Fundamentalgleichungen des Systems (A), und ebenso sind für  $x = \infty$  die

$$(7) \quad \text{Res}_\infty \Omega_i = r_i^{(\sigma+1)}$$

die Wurzeln der zu  $x = \infty$  gehörigen determinierenden Fundamentalgleichung. Wir setzen im folgenden stets voraus, daß die Differenzen der  $r_i^{(\nu)}$  weder verschwinden noch ganze Zahlen sind, so daß also die zu den singulären Punkten  $a_1, \dots, a_\sigma, a_{\sigma+1} (= \infty)$  gehörigen Integralmatrizen  $\eta_{ix}^{(\nu)}$  in der Form

$$(8) \quad \eta_{ix}^{(\nu)} = (x - a_\nu) r_i^{(\nu)} \cdot \varphi_{ix}^{(\nu)}$$

darstellbar sind, wo die  $\varphi_{ix}^{(\nu)}$  in der Umgebung von  $x = a_\nu$  holomorphe Funktionen bedeuten, deren Determinante  $|\varphi_{ix}^{(\nu)}|$  für  $x = a_\nu$  nicht verschwindet. Für  $\nu = \sigma + 1$  ist  $x - a_\nu$  durch  $\frac{1}{x}$  zu ersetzen. — Aus dieser Annahme folgt, daß die Diskriminante der Gleichung (3) in bezug auf  $\Omega$  nicht identisch verschwindet, und daß die Punkte  $a_1, \dots, a_\sigma, \infty$  nicht zu den Verzweigungspunkten der algebraischen Funktion  $\Omega$  von  $x$  gehören, solange  $\mu$  einen endlichen Wert besitzt.

\*) Diese für die Theorie der linearen Differentialsysteme wichtige Gleichung wurde unsere Wissens zuerst von Herrn Volterra (Memorie della Soc. Ital. delle Scienze 1899), allerdings bei Fragen anderer Art, als die, mit denen wir es hier zu tun haben, in Betracht gezogen.

Denkt man sich in (3) für  $g_{i\kappa}$  die Entwicklung (2) eingesetzt, so ist in Übereinstimmung mit den Bezeichnungen der vorigen Nummer

$$(9) \quad \lim_{\mu=\infty} \frac{1}{\mu} \Omega = \bar{\omega}$$

durch die charakteristische Gleichung

$$(10) \quad \left| \frac{g_{i\kappa}^{(0)}}{\varphi(x)} - \delta_{i\kappa} \bar{\omega} \right| = 0 \quad (i, \kappa = 1, 2, \dots, n)$$

bestimmt. Wenn die Diskriminante dieser Gleichung nicht identisch verschwindet, d. h. wenn ihre Wurzeln  $\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_n$  für ein unbestimmtes  $x$  voneinander verschieden sind, so ist also in der Umgebung von  $\mu = \infty$

$$(11) \quad \Omega_i = \mu \left( \bar{\omega}_i + \frac{1}{\mu} \Omega_i^{(1)} + \dots \right), \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Wir machen nun die weitere Voraussetzung, daß die Wurzeln  $r_i^{(v)}$  der zu den singulären Punkten  $a_1, \dots, a_\sigma, \infty$  gehörigen determinierenden Fundamentalgleichungen des Systems (A) von dem Parameter  $\mu$  unabhängig sind.

Dann ist also nach (6) und (7)

$$\text{Res}_{a_\nu} \Omega_i = \text{Res}_{a_\nu} \Omega_i^{(1)}, \quad (\nu = 1, 2, \dots, \sigma, \sigma + 1),$$

dagegen

$$(12) \quad \begin{aligned} \text{Res}_{a_\nu} \bar{\omega}_i &= 0, \\ \text{Res}_{a_\nu} \Omega_i^{(\lambda)} &= 0, \quad (\lambda = 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Wir wollen hieraus auf den Charakter der  $\bar{\omega}_i$  schließen, Analoges gilt dann natürlich auch für die  $\Omega_i^{(2)}, \Omega_i^{(3)}, \dots$ .

Die algebraische Funktion  $\bar{\omega}$  besitzt keine anderen Pole als  $a_1, \dots, a_\sigma$  u. z. kann  $\bar{\omega}$  in diesen Punkten von nicht höherer als der ersten Ordnung unendlich werden. Zuzufolge der Gleichungen (12) ist aber ein Unendlichwerden von erster Ordnung auch ausgeschlossen; die  $a_1, \dots, a_\sigma$  und ebenso  $x = \infty$  gehören folglich zu den Verzweigungspunkten der algebraischen Gleichung (10) und die  $\bar{\omega}_i$  werden in diesen Punkten von niedrigerer als der ersten Ordnung unendlich. Hieraus folgt, daß die

$$\omega_i = \int \bar{\omega}_i dx$$

für keinen endlichen oder unendlich großen Wert von  $x$  unendlich werden können, daß sie also den Charakter von Integralen erster Gattung haben. \*)

\*) Man überzeugt sich an Beispielen (etwa  $n = 2, \sigma = 3$ ), daß die  $\omega_i$  nicht etwa identisch verschwinden müssen.

Rückwärts ergibt sich aus dieser Tatsache, daß die  $a_1, \dots, a_\sigma, \infty$  auch die einzigen Verzweigungspunkte von (10) sind.

Der Koeffizient von  $\varpi^{n-1}$  in der Gleichung (10) lautet

$$(13) \quad \sum_{i=1}^n \frac{g_i^{(0)}(x)}{\varphi(x)};$$

da für diese rationale Funktion von  $x$  die Residuen in bezug auf  $a_1, \dots, a_\sigma, \infty$  verschwinden müssen und der Zähler von nicht höherem als dem  $(\sigma - 1)$ ten Grade ist, verschwindet die Funktion (13) identisch, wir haben also — in Übereinstimmung mit einem bekannten Theorem\*) — die Gleichung

$$(14) \quad \sum_{i=1}^n \bar{w}_i = 0.$$

Wir definieren durch die Gleichungen

$$(15) \quad \sum_{\lambda=1}^n u_{i\lambda} \left( \frac{g_{\lambda\kappa}}{\varphi(x)} - \delta_{\lambda\kappa} \Omega_i \right) = 0, \quad (i, \kappa = 1, 2, \dots, n)$$

Größen  $u_{i1}, \dots, u_{in}$ , deren Verhältnisse sich aus (15) als algebraische — mit  $\Omega_i$  gleichverzweigte — Funktionen von  $x$  ergeben. Für ein endliches  $\mu$  sind folglich die  $u_{i\lambda}$  in der Umgebung von  $x = a_\nu$  holomorph und die  $u_{i\lambda}(a_\nu)$  genügen den Gleichungen

$$(16) \quad \sum_{\lambda=1}^n u_{i\lambda}(a_\nu) (A_{\lambda\kappa}^{(\nu)} - \delta_{\lambda\kappa} r_i^{(\nu)}) = 0.$$

Aus den Gleichungen (15) ergibt sich, indem man für  $g_{\lambda\kappa}, \Omega_i$  die Entwicklungen (2), (11) einsetzt, für ein von den  $a_1, \dots, a_\sigma, \infty$  verschiedenes  $x$ :

$$(17) \quad u_{i\lambda} = u_{i\lambda}^{(0)} + \frac{1}{\mu} u_{i\lambda}^{(1)} + \dots \text{ in inf.,}$$

wo diese Gleichungen so zu verstehen sind, daß sich ihre beiden Seiten nur durch einen von dem Index  $\lambda$  unabhängigen Proportionalitätsfaktor unterscheiden. Die  $u_{i\lambda}^{(0)}$  sind, in Übereinstimmung mit der Bezeichnungswiese des vorigen Abschnittes, durch die Gleichungen

$$(18) \quad \sum_{\lambda} u_{i\lambda}^{(0)} \left( \frac{g_{\lambda\kappa}^{(0)}}{\varphi(x)} - \delta_{\lambda\kappa} \bar{w}_i \right) = 0$$

\*) Siehe etwa Appell et Goursat, Théorie des fonctions algébriques (1895), S. 301.



bestimmt. Setzen wir ferner

$$(19) \quad A_{i\lambda}^{(v)} = \mu \left( \alpha_{i\lambda}^{(v)} + \frac{1}{\mu} \beta_{i\lambda}^{(v)} + \dots \right),$$

so daß also

$$(19a) \quad \alpha_{i\lambda}^{(v)} = \lim_{x=a_\nu} (x - a_\nu) \frac{g_{i\lambda}^{(0)}}{\varphi(x)} = \text{Res}_{a_\nu} \frac{g_{i\lambda}^{(0)}}{\varphi(x)},$$

so folgt aus (16), mit Rücksicht auf den Umstand, daß die  $r_i^{(v)}$  von  $\mu$  unabhängig sein sollten:

$$(20) \quad u_{i\lambda}(a_\nu) = u_{i\lambda}^{(0)}(a_\nu) + \frac{1}{\mu} u_{i\lambda}^{(1)}(a_\nu) + \dots \text{ in inf.},$$

wo in Übereinstimmung mit (18)

$$(21) \quad \sum_{\lambda} u_{i\lambda}^{(0)}(a_\nu) \alpha_{i\lambda}^{(v)} = 0$$

ist. — Wenn wir die Gleichung (10) in der Form

$$\left| \frac{g_{i\lambda}^{(0)}}{\varphi(x)}(x - a_\nu) - \delta_{i\lambda} \bar{\omega} \cdot (x - a_\nu) \right| = 0$$

schreiben und darin  $x = a_\nu$  setzen, so erkennen wir mit Rücksicht auf (19a) und (12), daß die zu der Matrix  $(\alpha_{i\lambda}^{(v)})$  gehörige charakteristische Gleichung die  $n$ -fache Wurzel Null besitzt, so daß also die aus den Hauptsubdeterminanten dieser Matrix gebildeten Summen sämtlich verschwinden. Insbesondere ist demnach  $|\alpha_{i\lambda}^{(v)}| = 0$ , so daß die Gleichungen

$$(22) \quad \sum_{\lambda} v_{i\lambda}^{(v)} \alpha_{i\lambda}^{(v)} = 0$$

auflösbar sind. Mit Rücksicht auf (21) haben wir folglich

$$(23) \quad u_{i\lambda}^{(0)}(a_\nu) = v_{i\lambda}^{(0)},$$

d. h. die Werte der Funktionen  $u_{i\lambda}^{(0)}$  im Punkte  $a_\nu$  sind von dem Index  $i$  unabhängig, was mit der Tatsache in Übereinstimmung steht, daß  $x = a_\nu$  ein Verzweigungspunkt der algebraischen Funktion  $\bar{\omega}$  ist. Nach (20) haben wir also

$$(24) \quad u_{i\lambda}(a_\nu) = v_{i\lambda}^{(v)} + \frac{1}{\mu} u_{i\lambda}^{(1)}(a_\nu) + \dots \text{ in inf.},$$

wo diese Gleichungen, ebenso wie (23), (20) in demselben Sinne zu verstehen sind, wie wir es für die Gleichungen (17) festgesetzt haben. Wir bemerken, daß für die durch die Gleichungen (8) erklärten Funktionen  $\varphi_{i\lambda}^{(v)}$  die Gleichungen

$$\sum_{\lambda} \varphi_{i\lambda}^{(v)}(a_\nu) (A_{i\lambda}^{(v)} - \delta_{i\lambda} r_i^{(v)}) = 0$$

bestehen\*), so daß also mit Rücksicht auf (16) und (24)

$$(25) \quad \varphi_{i\lambda}^{(\nu)}(a_\nu) = v_\lambda^{(\nu)} + \frac{1}{\mu} u_{i\lambda}^{(1)}(a_\nu) + \dots \text{ in inf.}$$

Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen wenden wir uns zur asymptotischen Darstellung der Integrale in dem jetzt vorliegenden Falle.

Im I. Abschnitte hatten wir einen  $x$ -Punkt *regulär* genannt, wenn er weder zu den singulären Punkten des Differentialsystems (A) noch zu den Verzweigungspunkten der algebraischen Funktion  $\bar{w}$  gehörte. Da in dem jetzt behandelten Falle die Punkte  $a_1, \dots, a_\sigma, \infty$  die einzigen Verzweigungspunkte von  $\bar{w}$  sind, wird ein *regulärer* Punkt einfach ein solcher sein, in dessen Umgebung sich die Integrale des Systems (A) regulär verhalten. Legen wir also von einem regulären Punkte  $x_0$  aus einen Strahl, und lassen wir  $\mu$  mit festem Argumente ins Unendliche gehen, so wird ein Integralsystem  $y_1, \dots, y_n$  des Differentialsystems (A), dessen Anfangswerte in  $x_0$  in der Form

$$(26) \quad e^{\mu\gamma} \left( \gamma_x^{(0)} + \frac{1}{\mu} \gamma_x^{(1)} + \dots \text{ in inf.} \right)$$

asymptotisch (oder für  $|\mu| > R$  konvergent) darstellbar sind, allgemein zu reden, in der Form

$$(27) \quad y_x \sim e^{\mu\omega_1 + \gamma} \left( \bar{y}_{1x}^{(0)} + \frac{1}{\mu} \bar{y}_{1x}^{(1)} + \dots \text{ in inf.} \right)$$

darstellbar sein, u. z. gilt diese asymptotische Darstellung für alle Punkte des  $x$ -Strahles, die zwischen  $x_0$  und dem nächsten auf jenem Strahle befindlichen singulären Punkte liegen. Dabei bedeutet  $\omega_1$  dasjenige

$$(28) \quad \omega_i = \int_{x_0}^x \bar{w}_i dx,$$

für das, wenn

$$\theta = \text{Arg } \mu + \text{Arg } (x - x_0)$$

gesetzt wird,

$$(29) \quad \Re(\bar{w}_1 e^{\theta} V^{-1}) > \Re(\bar{w}_x e^{\theta} V^{-1}), \quad (x = 2, 3, \dots, n)$$

ist. Da aber nach (14)

$$\sum_{i=1}^n \Re(\bar{w}_i e^{\theta} V^{-1}) = 0$$

ist, so folgt, daß  $\Re(\bar{w}_1 e^{\theta} V^{-1})$  und folglich  $\Re(\mu\omega_1)$  positiv ist für alle  $x$ -Werte, die auf dem  $x$ -Strahle zwischen  $x_0$  und dem nächsten singulären Punkte gelegen sind. Eine Veränderung des  $x$ -Strahles und des Arguments von  $\mu$  kann bewirken, daß in der Ungleichung (29) nicht mehr  $\bar{w}_1$ , sondern ein anderes  $\bar{w}_i$  die *erste Stelle* einnimmt; dann werden in der

\* Siehe die vorhergehende Note, Gl. (3), S. 274.

asymptotischen Darstellung (27), allgemein zu reden,  $\omega_i$  und die entsprechenden  $\bar{y}_{ix}^{(\lambda)}$  an die Stelle der  $\omega_1, \bar{y}_{1x}^{(\lambda)}$  treten, und für die in Betracht kommenden  $x$ - und  $\mu$ -Werte wird  $\Re(\mu\omega_i)$  einen positiven Wert haben. Wir erhalten somit das

Theorem I. Die Elemente eines Integralsystems, dessen Anfangswerte in dem regulären Punkte  $x_0$  in der Form

$$(26a) \quad \gamma_x^{(0)} + \frac{1}{\mu} \gamma_x^{(1)} + \dots \text{ in inf.}$$

asymptotisch darstellbar sind, werden, wenn der Parameter  $\mu$  in beliebiger Richtung ins Unendliche geht, allgemein zu reden, für jeden  $x$ -Wert, der innerhalb des zum Punkte  $x_0$  gehörigen Mittag-Lefflerschen Sternes\*) gelegen ist, unendlich. Nur solche Integralsysteme, deren asymptotische Darstellung nicht zu demjenigen  $\bar{\omega}_i$  gehört, für das  $\Re(\mu\bar{\omega}_i)$  den größten Wert hat, können dem Grenzwerte Null zustreben, oder auch für spezielle Argumente von  $\mu$  völlig unbestimmt werden.

Wir betrachten nun den Fall, daß  $x$  sich auf einer von  $x_0$  ausgehenden gebrochenen Linie bewegt; es genügt offenbar, den Fall näher zu untersuchen, wo jene Linie nur einen Knickpunkt aufweist. Es möge also von  $x_0$  ein erster Strahl ausgehen, an den sich in einem seiner Punkte, etwa  $x_1$ , ein zweiter Strahl anschließt; das Argument von  $\mu$  bleibe ein für alle Male fixiert. Das Integralsystem  $y_1, \dots, y_n$ , dessen Anfangswerte in  $x_0$  in der Form (26a) darstellbar sind, besitzt längs des ersten Strahles eine asymptotische Darstellung von der Form (27), wo  $\gamma = 0$  zu setzen ist, wir haben also für  $x = x_1$

$$(30) \quad y_x(x_1) \sim e^{\mu\omega_1(x_1)} \left( \bar{y}_{1x}^{(0)}(x_1) + \frac{1}{\mu} \bar{y}_{1x}^{(1)}(x_1) + \dots \text{ in inf.} \right),$$

wo, allgemein zu reden,  $\omega_1$  so beschaffen ist, daß längs des ersten Strahles  $\Re(\mu\omega_1)$  am größten, also positiv ist. Es sei nun längs des zweiten Strahles

$$\omega_i' = \int_{x_1}^x \bar{\omega}_i dx$$

und  $\omega_2'$  dasjenige, für welches  $\Re(\mu\omega_2')$  den größten Wert unter allen  $\Re(\mu\omega_i')$  hat, dann ist, allgemein zu reden, für jeden Punkt  $x$  des zweiten Strahles, der zwischen  $x_1$  und dem nächsten singulären Punkte gelegen ist,

$$y_x(x) \sim e^{\mu(\omega_2'(x) + \omega_1(x_1))} \left( \bar{y}_{2x}^{(0)}(x) + \frac{1}{\mu} \bar{y}_{2x}^{(1)}(x) + \dots \text{ in inf.} \right),$$

wo die  $\bar{y}_{2x}^{(\lambda)}$  gemäß den durch (30) gegebenen asymptotischen Darstellungen der Anfangswerte im Punkte  $x_1$  zu bestimmen sind. — Wenn also

\*) Siehe Mittag-Leffler, Acta Mathematica, Bd. XXIII, p. 43 ff.

der Punkt  $x$  mit dem Punkte  $x_0$  durch eine, keinen singulären Punkt enthaltende gebrochene Linie verbunden ist, so werden diejenigen Werte des Integralsystems  $y_1, \dots, y_n$ , die durch analytische Fortsetzung längs dieser Linie im Punkte  $x$  zum Vorschein kommen, in der Form

$$y_x(x) \sim e^{\mu(\omega_i(x) + p)} \left( y_{ix}^{(0)}(x) + \frac{1}{\mu} y_{ix}^{(1)}(x) + \dots \text{ in inf.} \right)$$

asymptotisch darstellbar sein, wo  $p$  eine Konstante bedeutet, und wo, allgemein zu reden,

$$\Re[\mu(\omega_i(x) + p)] > 0$$

ist; die  $\omega_i(x)$ ,  $y_{ix}^{(l)}$  sind so zu bestimmen, daß in einem jeden Knickpunkte der gebrochenen Linie die asymptotische Darstellung für den daselbst *ausgehenden* Strahl denjenigen Anfangswerten gemäß herzustellen ist, die durch die längs des in jenem Knickpunkte *endenden* Strahles gültige asymptotische Darstellung gegeben werden.

Wir sehen also, daß ein Integralsystem, das in *einem* regulären Punkte  $x_0$  einer asymptotischen Darstellung von der Form (26) fähig ist, die Eigenschaft hat, daß jeder Zweig dieses Integralsystems in jedem regulären Punkte  $x$  eine asymptotische Darstellung von derselben Form zuläßt, und wir erhalten diese Darstellung, indem wir den von  $x_0$  nach  $x$  führenden Fortsetzungsweg durch eine ihm äquivalente gebrochene Linie ersetzen und für diese auf die oben angegebene Weise verfahren. Da eine Funktion nur auf eine Weise asymptotisch dargestellt werden kann, erkennen wir zugleich, daß die in  $x$  gültige asymptotische Darstellung von der Wahl der zu ihrer Herstellung benutzten gebrochenen Linie unabhängig ist, vorausgesetzt, daß nur solche gebrochene Linien zugelassen werden, die einander und dem Fortsetzungswege äquivalent sind.

Es sei nun die von  $x_0$  ausgehende gebrochene Linie eine *geschlossene*, d. h. also ein geradliniges Polygon, dessen eine Ecke  $x_0$  ist. Es möge im Inneren dieses Polygons ein einziger singulärer Punkt, etwa  $a_v$ , gelegen sein. Dabei verstehen wir unter dem Inneren des Polygons denjenigen Teil der  $x$ -Ebene, der, beim Durchlaufen des Polygons in einem bestimmten Sinne, zur Linken bleibt. Die Zahl  $\nu$  kann dann einen der Werte  $1, 2, \dots, \sigma + 1$  annehmen. Es sei ferner  $(\eta_{ik})$  diejenige Integralmatrix, die sich für  $x = x_0$  auf die Einheitsmatrix  $(\delta_{ix})$  reduziert, so daß also diejenigen Werte der  $\eta_{ix}$ , die in  $x_0$  zum Vorschein kommen, wenn wir längs des Polygons analytisch fortsetzen, nichts anderes sind, als die Elemente der einer Umkreisung von  $a_v$  entsprechenden Fundamentalsubstitution  $(A_{ix}^{(\nu)})$ . Da die Anfangswerte  $\delta_{ix}$  der  $\eta_{ix}$  im Punkte  $x_0$  von  $\mu$  unabhängig, also jedenfalls in der Form (26a) darstellbar sind, folgt, daß die  $A_{ix}^{(\nu)}$  jedenfalls in der Form

$$(31) \quad A_{ix}^{(v)} \sim e^{\mu p_i} \left( \alpha_{ix}^{(v)} + \frac{1}{\mu} \beta_{ix}^{(v)} + \dots \text{ in inf.} \right)$$

asymptotisch dargestellt werden können, wo, allgemein zu reden,

$$\Re(\mu p_i) > 0$$

ist, während die  $\alpha_{ix}^{(v)}$  die Werte gewisser  $y_{\lambda x}^{(0)}$  im Punkte  $x_0$  bedeuten, wo der Index  $\lambda$  von  $i$  unabhängig ist. Wir erkennen hieraus fürs erste, daß *im allgemeinen die sämtlichen  $A_{ix}^{(v)}$  unendlich werden, wenn der Parameter  $\mu$  mit einem beliebigen Argumente ins Unendliche rückt.* Des weiteren können wir aus der Darstellung (31) noch einen bemerkenswerten Schluß ziehen.

Bezeichnen wir die Wurzeln der zu  $a_v$  gehörigen Fundamentalgleichung

$$(32) \quad |A_{ix}^{(v)} - \delta_{ix} \varrho| = 0$$

mit

$$e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}r}{i}} = \varrho_i^{(v)},$$

so sind diese Größen von  $\mu$  unabhängig. Daraus folgt, mit Rücksicht auf (31), daß die durch die linearen Gleichungen

$$\sum_{\lambda=1}^n v_{i\lambda}^{(v)} (A_{\lambda x}^{(v)} - \delta_{\lambda x} \varrho_i^{(v)}) = 0, \quad (i, x = 1, 2, \dots, n)$$

bestimmten Verhältnisse

$$(33) \quad v_{i1}^{(v)} : v_{i2}^{(v)} : \dots : v_{in}^{(v)}$$

einer asymptotischen Darstellung von der Form

$$(34) \quad \alpha_0 + \frac{1}{\mu} \alpha_1 + \dots \text{ in inf.}$$

fähig sind. Diese Verhältnisse sind aber\*) nichts anderes, als die Verhältnisse der Werte, die die durch die Gleichungen (8) definierten Funktionen  $\varphi_{ix}^{(v)}$  im Punkte  $x_0$  annehmen, wir sehen also, daß diese Verhältnisse oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Verhältnisse

$$(35) \quad \eta_{i1}^{(v)} : \eta_{i2}^{(v)} : \dots : \eta_{in}^{(v)}$$

der Elemente der zu  $a_v$  gehörigen Integralmatrix im Punkte  $x_0$  asymptotische Darstellungen von der Form (34) zulassen. Denken wir uns den Punkt  $x_0$  mit  $a_v$  durch einen ganz innerhalb unseres Polygons verlaufenden Strahl, oder, wenn dies nicht möglich ist, durch eine im Inneren des Polygons verbleibende gebrochene Linie verbunden, so sind nach dem Vorhergehenden die Verhältnisse (35) längs jener Linie bis in jede beliebige Nähe des Punktes  $a_v$  asymptotischer Darstellungen fähig, da ja ihre Anfangswerte im Punkte  $x_0$  eine solche Darstellung zulassen. Die längs des in  $a_v$  mündenden Strahles gültigen Darstellungen gehen aber, wenn

\*) Vergl. die vorhergehende Note, Gl. (4), S. 274.

$x$  in den Punkt  $\alpha_\nu$  einrückt, formell in die Verhältnisse der auf der rechten Seite der Gleichungen (25) auftretenden Reihen über; da diese Reihen die Werte  $\varphi_{i\lambda}^{(\nu)}(\alpha_\nu)$  — von einem Proportionalitätsfaktor abgesehen — in einer gewissen Umgebung von  $\mu = \infty$  konvergent darstellen, so können wir sagen:

**Theorem II.** *Die Verhältnisse der Elemente der zu einem singulären Punkte  $\alpha_\nu$  gehörigen Integralmatrix sind längs eines jeden in diesem Punkte einmündenden Strahles einer asymptotischen Darstellung fähig, und diese Darstellung bleibt in jenem singulären Punkte selbst gültig, indem sie da selbst in eine konvergente Reihenentwicklung übergeht.\*)*

Wir haben bereits angemerkt, daß im allgemeinen die sämtlichen  $A_{i\lambda}^{(\nu)}$  unendlich werden, wenn  $\mu$  in beliebiger Richtung ins Unendliche rückt. Diese Bemerkung kann noch schärfer gefaßt werden. Denken wir uns in der zum Punkte  $\alpha_\nu$  gehörigen Fundamentalgleichung (32) für die  $A_{i\lambda}^{(\nu)}$  ihre asymptotischen Darstellungen (31) eingesetzt, so folgt, wenn  $\mu$  mit bestimmtem Argumente ins Unendliche rückt:

$$\left| \alpha_{i\lambda}^{(\nu)} - \delta_{i\lambda} \varrho_\lambda^{(\nu)} \lim_{\mu=\infty} e^{-\mu p_i} \right| = 0, \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n).$$

Es sind nun folgende Fälle denkbar:

1.  $\lim_{\mu=\infty} e^{-\mu p_i} = 0$  für  $i = 1, 2, \dots, n$ . In diesem Falle ist also  $\lim_{\mu=\infty} A_{i\lambda}^{(\nu)} = \infty$ , und die Wurzeln der zu der Matrix  $(\alpha_{i\lambda}^{(\nu)})$  gehörigen charakteristischen Gleichung sind sämtlich gleich Null. Dieser Fall ist der „allgemeine“, wo nämlich die asymptotischen Darstellungen aller  $A_{i\lambda}^{(\nu)}$  zu demjenigen  $\omega_1$  gehören, für das  $\Re(\mu\omega_1)$  am größten, also positiv ist, und wo demnach die

$$\alpha_{i\lambda}^{(\nu)} = y_{1\lambda}^{(0)}(x_0)$$

von dem Index  $i$  unabhängige Werte besitzen.

2.  $\lim_{\mu=\infty} e^{-\mu p_i} = \infty$ ; dieser Fall ist ausgeschlossen, da die zu der Matrix  $(\alpha_{i\lambda}^{(\nu)})$  gehörige charakteristische Gleichung keine unendlich große Wurzel besitzen kann.

3.  $\lim_{\mu=\infty} e^{-\mu p_i} = 0$  wenigstens für einen Wert der Index  $i$ ; dann sind die Grenzwerte der zu diesem Index  $i$  gehörigen  $A_{i\lambda}^{(\nu)}$  unendlich groß.

4.  $\lim_{\mu=\infty} e^{-\mu p_i} = 1$ , also  $p_i = 0$  für jedes  $i = 1, 2, \dots, n$ . Wenn dieser Fall für einen oder mehrere der Werte  $\nu = 1, 2, \dots, \sigma + 1$  eintritt, aber nicht für alle, so können die entsprechenden  $A_{i\lambda}^{(\nu)}$  den endlichen Grenz-

\*) Man vergl. hiermit die von Herrn Bôcher, Encyclopädie der math. Wissensch. II A 7 a, p. 447 angegebenen Bedingungen, unter denen die sogenannten Oszillationstheoreme in einem singulären Punkte, der kein Punkt der Unbestimmtheit ist, bestehen bleiben.

werten  $\alpha_{i\lambda}^{(\nu)}$  zustreben, und die  $\rho_{\lambda}^{(\nu)}$  sind die Wurzeln der zu der Matrix  $(\alpha_{i\lambda}^{(\nu)})$  gehörigen charakteristischen Gleichung

$$(35) \quad |\alpha_{i\lambda}^{(\nu)} - \delta_{i\lambda} \rho| = 0.$$

In diesem Falle muß also die Determinante  $|\alpha_{i\lambda}^{(\nu)}|$  von Null verschieden sein, die Matrix  $(\alpha_{i\lambda}^{(\nu)})$  muß folglich mit der Matrix  $(y_{i\lambda}^{(0)}(x_0))$  übereinstimmen, so daß die asymptotischen Darstellungen der  $A_{i\lambda}^{(\nu)}$  für  $i = 1, 2, \dots, n$  zu den  $n$  verschiedenen  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) gehören. Dann sind unter denjenigen  $A_{i\lambda}^{(\nu)}$ , für deren oberen Index  $\nu$  der eben besprochene Fall nicht eintritt, noch immer welche vorhanden, deren Grenzwert unendlich wird. Es bleibt also noch der Fall:

5. Wo die unter 4. besprochenen Verhältnisse für *alle*  $n = 1, 2, \dots, \sigma + 1$  stattfinden. In diesem Falle verschwinden die sämtlichen Periodizitätsmoduln der Integrale erster Gattung  $\omega_i$ , es sind also die  $\omega_i$  selbst sämtlich identisch gleich Null.

Wir hatten unsere ganze Untersuchung unter der Voraussetzung geführt, daß die  $\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_n$  voneinander verschieden sind. Wenn die sämtlichen Wurzeln der Gleichung (10) zusammenfallen, also rational sind, so müssen sie identisch verschwinden. Alsdann wäre die durch die Gleichung (3) definierte Funktion  $\Omega$  im allgemeinen nicht in der Form (11) nach ganzen, sondern nach gebrochenen Potenzen von  $\mu$ , nämlich nach ganzen Potenzen von  $\mu^{\frac{1}{n}}$  entwickelbar, und auch die Potenzen von  $\mu$ , die in den formalen, dem Differentialsysteme genügenden Entwicklungen auftreten, würden ganze Potenzen von  $\mu^{\frac{1}{n}}$  werden.\*)

Sollten diese Entwicklungen doch nach ganzen Potenzen von  $\mu$  fortschreiten, so müßten die sämtlichen  $g_{i\lambda}^{(0)}$  in Wegfall gebracht werden können, es wäre also  $\mu = \infty$  überhaupt kein wesentlich singulärer Punkt der Integrale. Dieser Fall scheidet demnach aus.

Es wird somit allemal wenigstens eines der  $A_{i\lambda}^{(\nu)}$  unendlich, wenn  $\mu$  mit einem beliebigen Argumente ins Unendliche rückt — nur für spezielle Argumente von  $\mu$  kann es sich ereignen, daß die  $A_{i\lambda}^{(\nu)}$  nicht unendlich, sondern völlig unbestimmt werden — damit ist der in der vorhergehenden Note gemachte Schluß\*\*\*) erhärtet.

Klausenburg, 26. April 1906.

\*) Vergl. die Bemerkung in der No. I, S. 282.

\*\*) Siehe S. 276 dieses Annalenbandes.

## Über lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit drei im Endlichen gelegenen wesentlich singulären Stellen.\*)

Von

RICHARD FUCHS in Halensee bei Berlin.

In der vorliegenden Notiz erlaube ich mir einige Untersuchungen vorzulegen, die aus folgender Überlegung hervorgegangen sind:

Bekanntlich lassen sich die Größen  $\alpha, \beta, \gamma$  der Gaußschen Differentialgleichung

$$x(x-1) \frac{d^2 y}{dx^2} + [(\alpha + \beta + 1)x - \gamma] \frac{dy}{dx} + \alpha \beta y = 0$$

so bestimmen, daß für ein Fundamentalsystem  $y_1, y_2$  von Integralen derselben die Koeffizienten der Substitutionen, die  $y_1, y_2$  bei Umläufen der unabhängigen Variablen um die singulären Stellen  $x=0$  und  $x=1$  erleiden, beliebig vorgeschriebene Werte besitzen. Ich habe mir nun die Frage vorgelegt, welche Gestalt eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit drei im Endlichen gelegenen und dem unendlich fernen Punkt als wesentlich singulären Stellen haben muß, damit die Koeffizienten der Substitutionen, die ein Fundamentalsystem von Integralen bei Umläufen der unabhängigen Variablen um die im Endlichen gelegenen singulären Stellen erleidet, beliebig vorgeschriebene, also insbesondere von der Wahl der singulären Stellen unabhängige Werte besitzen.

Hierbei konnte ich die Resultate, die mein Vater (L. Fuchs, Sitzungsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften, 1888, S. 1115 u. 1273; 1889, S. 713; 1890, S. 21; 1892, S. 157; 1893, S. 975; 1894, S. 1117; 1895, S. 905; 1897, S. 608; 1898, S. 477) „über lineare Differentialgleichungen, deren Substitutionsgruppe von einem in den Koeffizienten auftretenden Parameter unabhängig ist“, veröffentlicht hat, benutzen und ebenso die Abhandlungen des Herrn Schlesinger (Crelles Journal, Bd. 123, S. 138; Bd. 124, S. 292; Bd. 130, S. 26) „Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen im Anschluß an das Riemannsche Problem“.

---

\*) Ein Auszug aus dieser Arbeit ist in den Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (Séance du 2 Octobre 1905), t. 141, p. 555, von Herrn Poincaré vorgelegt, erschienen.



Es zeigt sich zunächst (Nr. I), daß neben den vier wesentlich singulären Stellen, als welche  $0, 1, t, \infty$  genommen werden, mindestens eine scheinbar singuläre Stelle vorhanden sein muß. Dann werden (Nr. II und III) die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die in den Koeffizienten vorhandenen Konstanten aufgestellt, damit die Differentialgleichung die oben angegebenen Eigenschaften besitzt, und gezeigt (Nr. IV), daß diese Bedingungsgleichungen miteinander verträglich sind. Es zeigt sich, daß der Wert  $\lambda$  der scheinbaren singulären Stelle als Funktion von  $t$  einer Differentialgleichung genügt, die in eine eigentümliche Form übergeführt werden kann (Nr. V, VI). Hierauf wird (VII) der Zusammenhang der hier gegebenen Untersuchungen mit dem Riemannschen Problem klargestellt und dann (Nr. VIII) ein Spezialfall hervorgehoben, der zu unserer Differentialgleichung in einer ähnlichen Beziehung steht, wie die sogenannte Legendresche Differentialgleichung, die die Grundlage der Theorie der Modulfunktion bildet, zur allgemeinen Gaußschen Differentialgleichung. Schließlich wird dann noch gezeigt (IX), daß in besonderen Fällen die Differentialgleichung reduktibel sein und bei gewissen Spezialisierungen der Konstanten (Nr. X) in Gaußsche Differentialgleichungen übergeführt werden kann.

## I.

Wenn die Substitutionsgruppe der Differentialgleichung

$$(A) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = py$$

der Fuchsschen Klasse — wir nehmen hier immer den Koeffizienten der ersten Ableitung von  $y$  nach  $x$  als gleich Null an, weil dies ja bekanntlich durch eine einfache Transformation der abhängigen Variablen stets zu erreichen ist — von einem in  $p$  auftretenden Parameter unabhängig sein soll, als welchen wir im folgenden stets einen der singulären Punkte ansehen werden, so muß für ein Fundamentalsystem  $y_1, y_2$  von Integralen das Gleichungssystem erfüllt sein\*)

$$(1) \quad \frac{\partial y_i}{\partial t} = B y_i + A \frac{\partial y_i}{\partial x},$$

wo  $B$  und  $A$  rationale Funktionen von  $x$  sind.

Über die rationale Funktion  $A$  hat mein Vater (Sitz.-Ber. d. Berl. Ak. 1893, S. 986, 987, Nr. 4 und 1894, S. 1117—1121, Nr. 5) einige Eigenschaften hergeleitet, welche wir, soweit wir sie im folgenden brauchen,

\*) L. Fuchs, Sitz.-Ber. der Berl. Ak. 1888, S. 1278—1282, Nr. 11 u. 12. Vgl. auch meine Programmarbeit (Bismarckgymnasium, Wilmersdorf-Berlin 1902).

für Differentialgleichungen zweiter Ordnung hier kurz zusammenstellen wollen:

1. Ist  $x = a_i$  eine wesentlich singuläre Stelle von (A), so verschwindet  $A$  an dieser Stelle mindestens von erster Ordnung.
2. Für die wesentlich singuläre Stelle  $x = t$  wird  $A$  nicht unendlich.
3. Für eine scheinbar singuläre Stelle, d. h. für eine solche, für die die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung sich um eine ganze Zahl unterscheiden, ohne daß in den Integralen Logarithmen auftreten, kann  $A$  unendlich werden.

Nehmen wir also an, daß unsere Differentialgleichung außer  $x = t$  noch die wesentlich singulären Stellen  $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} = \infty$  besitzt, so muß  $A$  die Gestalt haben

$$A = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)A_1.$$

Setzt man nun  $x = \frac{1}{z}$ , so geht (1) über in

$$\frac{\partial y_i}{\partial t} = By_i - Az^2 \frac{\partial y_i}{\partial z}.$$

Soll also  $x = \infty$  oder  $z = 0$  auch eine wesentlich singuläre Stelle sein, so muß  $Az^2$  für  $z = 0$  mindestens von erster Ordnung verschwinden. Es muß also  $A_1$  für  $x = \infty$  von der Ordnung  $n - 1$  verschwinden, d. h. es muß der Grad seines Zählers um  $n - 1$  kleiner sein als der seines Nenners. Da aber  $A$  nur für scheinbar singuläre Stellen unendlich werden kann, so müssen also neben den  $n + 2$  wesentlich singulären Stellen mindestens  $n - 1$  scheinbar singuläre Stellen vorhanden sein, was mit den auf andere Weise gefundenen Resultaten von Herrn Poincaré\*) und Herrn Schlesinger\*\*) übereinstimmt.

Es soll nun im folgenden zunächst angenommen werden, daß, außer  $x = t$ , noch die singulären Stellen  $x = 0$ ,  $x = 1$  und  $x = \infty$  für die Differentialgleichung (A) vorhanden sind. Sollten die im Endlichen gelegenen von  $t$  verschiedenen singulären Stellen andere Werte  $a_1$  und  $a_2$  haben, so kann man es bekanntlich durch eine einfache Transformation der unabhängigen Veränderlichen dahin bringen, daß diese Werte bzw. in 0 und 1 übergehen. Dann muß also neben den vier wesentlich singulären Stellen mindestens noch eine scheinbar singuläre Stelle  $x = \lambda$  für die Differentialgleichung angenommen werden, und wir fragen uns nun: Läßt sich  $\lambda$  so bestimmen, daß die Koeffizienten der Substitutionen, die ein Fundamentalsystem  $y_1, y_2$  der Differentialgleichung bei Umläufen um die singulären Stellen erleidet, beliebige von  $t$  unabhängige Werte besitzen?

\*) Acta Math., Bd. IV, S. 217—219.

\*\*) Crelles Journal, Bd. 123, S. 168 und Handbuch der Theorie der lin. Differentialgl., Bd. II, S. 383 und 388.

## II.

Wir gehen also nunmehr aus von folgender Differentialgleichung:

$$(A) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = p y,$$

wo

$$(1) \quad p = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-t)^2} + \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-1} + \frac{\gamma}{x-t} + \frac{e}{(x-\lambda)^2} + \frac{\varepsilon}{x-\lambda}.$$

Damit die Differentialgleichung zur Fuchsschen Klasse gehöre, die Integrale also auch im Unendlichen nicht von unendlich hoher Ordnung unendlich werden, muß noch angenommen werden, daß

$$(2) \quad \alpha + \beta + \gamma + \varepsilon = 0$$

sei. Wegen der über die Substitutionsgruppe gemachten Voraussetzung müssen die Konstanten  $a, b, c, e$ , welche die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen bestimmen, von  $t$  unabhängig sein.\*) Die rationale Funktion  $A$  der Gleichung (1) I wird dann bei der Annahme nur einer einfachen scheinbar singulären Stelle die Gestalt haben:

$$(3) \quad A = \frac{x(x-1)}{x-\lambda} M,$$

wo  $M$  eine von  $x$  unabhängige Größe bedeutet. Damit  $A$  für  $x = \lambda$  nur von erster Ordnung verschwinde, muß, wie schon gesagt,  $\lambda$  eine einfache scheinbar singuläre Stelle sein, d. h. es müssen sich die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung für  $x = \lambda$  um 2 unterscheiden.

Es ist nämlich zufolge (1) Nr. I

$$(4) \quad A = C \begin{vmatrix} y_1 & \frac{\partial y_1}{\partial t} \\ y_2 & \frac{\partial y_2}{\partial t} \end{vmatrix};$$

weil der Koeffizient von  $\frac{dy}{dx}$  in (A) gleich Null angenommen worden ist, muß

$$(5) \quad \frac{1}{C} = \begin{vmatrix} y_1 & \frac{\partial y_1}{\partial x} \\ y_2 & \frac{\partial y_2}{\partial x} \end{vmatrix}$$

eine Konstante in bezug auf  $x$  sein. Es sei nun die Differenz der Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung für  $x = \lambda$

$$(6) \quad r(r-1) = e$$

eine ganze Zahl  $g$ , so sind diese Werte, da ihre Summe gleich 1 ist,

$$\frac{1-g}{2} \quad \text{und} \quad \frac{1+g}{2}.$$

\*) Vgl. L. Fuchs, S.-B. d. Berl. Ak. 1892, Nr. 3, S. 162, Satz I.

Ist nun  $\eta_1$  das zu  $\frac{1-g}{2}$  und  $\eta_2$  das zu  $\frac{1+g}{2}$  gehörige Integral und ist

$$y_1 = c_{11}\eta_1 + c_{12}\eta_2,$$

$$y_2 = c_{21}\eta_1 + c_{22}\eta_2,$$

so ergibt sich

$$(7) \quad A = C \left\{ y_1^2 \left( c_{11} \frac{\partial c_{21}}{\partial t} - c_{21} \frac{\partial c_{11}}{\partial t} \right) + y_1 y_2 \left( c_{11} \frac{\partial c_{22}}{\partial t} - c_{21} \frac{\partial c_{12}}{\partial t} + c_{12} \frac{\partial c_{21}}{\partial t} - c_{22} \frac{\partial c_{11}}{\partial t} \right) \right. \\ \left. + y_2^2 \left( c_{12} \frac{\partial c_{22}}{\partial t} - c_{22} \frac{\partial c_{12}}{\partial t} \right) + (c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21}) \left( y_1 \frac{\partial y_2}{\partial t} - y_2 \frac{\partial y_1}{\partial t} \right) \right\}.$$

Das einzige Glied, welches hier zu einem negativen Exponenten gehören kann, ist das mit  $y_1^2$ ; dieses gehört zum Exponenten  $1-g$ . Soll also

$$1-g = -1$$

sein, so folgt  $g = 2$ .

Wenn aber die Wurzeln von (6)

$$\frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$$

sein sollen, so muß

$$(8) \quad e = \frac{3}{4}$$

sein.

### III.

Für die rationale Funktion  $A$  ergibt sich noch die partielle Differentialgleichung\*

$$(B) \quad \frac{\partial p}{\partial t} = A \frac{\partial p}{\partial x} + 2p \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2},$$

und man sieht also, daß sich unser Problem auf das folgende zurückführt:

*Lassen sich  $\lambda$  und  $M$  in (3) II so bestimmen, daß die Gleichung (B) durch eine rationale Funktion  $p$  der Form (1) II befriedigt wird?*

Vergleicht man zunächst die Koeffizienten von  $(x-t)^{-3}$  auf beiden Seiten von (B), so ergibt sich

$$2c = -M \frac{t(t-1)}{t-\lambda} 2c$$

oder

$$(1) \quad M = -\frac{t-\lambda}{t(t-1)},$$

so daß also nun  $A$  die Gestalt hat

$$(2) \quad A = -\frac{x(x-1)}{x-\lambda} \frac{t-\lambda}{t(t-1)}.$$

\* L. Fuchs, S.-B. d. Berl. Ak. 1894, Nr. 7, S. 1124, Gl. (5).

Beide Seiten der Gleichung (B) werden nach Einsetzen dieses Wertes von  $\lambda$  und der rationalen Funktion  $p$  (siehe (1) I) echt gebrochene rationale Funktionen; zerlegt man diese in Partialbrüche, so gibt die Vergleichung entsprechender Koeffizienten das folgende System von Gleichungen:

$$(3) \quad \alpha + \beta + \gamma + \varepsilon = 0,$$

$$(4) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial t} = -\frac{\lambda - t}{t(t-1)} \{2\lambda - 1 + 2\varepsilon\lambda(\lambda - 1)\},$$

$$(5) \quad \frac{a}{\lambda^2} + \frac{b}{(\lambda-1)^2} + \frac{c}{(\lambda-t)^2} + \frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\beta}{\lambda-1} + \frac{\gamma}{\lambda-t} = \varepsilon^2,$$

$$(6) \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t} = -\frac{\lambda-t}{t(t-1)} \left\{ -\frac{\alpha}{\lambda} + 2a \frac{\lambda-1}{\lambda^2} \right\},$$

$$(7) \quad \frac{\partial \beta}{\partial t} = -\frac{\lambda-t}{t(t-1)} \left\{ \frac{\beta}{\lambda-1} + 2b \frac{\lambda}{(\lambda-1)^2} \right\},$$

$$(8) \quad \frac{\partial \gamma}{\partial t} = -\frac{\lambda-t}{t(t-1)} \left\{ \gamma \frac{\lambda(\lambda-1) - (\lambda-t)^2}{(\lambda-t)^2} + 2c \frac{\lambda(\lambda-1)}{(\lambda-t)^2} \right\}.$$

Die Gleichung (5) besagt, daß in der Umgebung von  $x = \lambda$ , wie es für eine scheinbar singuläre Stelle notwendig ist, die Integrale der Differentialgleichung (A) keinen Logarithmus enthalten. Sind nämlich, wie oben gezeigt, die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung für  $x = \lambda$ ,  $\gamma_1 = \frac{3}{2}$  und  $\gamma_2 = -\frac{1}{2}$ , so gehört zum Exponenten  $\frac{3}{2}$  ein logarithmenfreies Integral

$$y_1 = (x - \lambda)^{\frac{3}{2}} \{c_0 + c_1(x - \lambda) + c_2(x - \lambda)^2 + \dots\},$$

und es ist dann bekanntlich

$$y_2 = y_1 \int \frac{cdx}{y_1^2},$$

wo  $c$  eine willkürliche von Null verschiedene Konstante bezeichnet, ein mit  $y_1$  ein Fundamentalsystem bildendes Integral. Soll  $y_2$  bei  $x = \lambda$  keinen Logarithmus enthalten, so ergibt sich

$$(9) \quad 3c_1^2 = 2c_0c_2.$$

Außerdem bestehen zufolge (A) zwischen  $c_0, c_1, c_2$ , wenn

$$q = \frac{a}{\lambda^2} + \frac{b}{(\lambda-1)^2} + \frac{c}{(\lambda-t)^2} + \frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\beta}{\lambda-1} + \frac{\gamma}{\lambda-t}$$

gesetzt wird, die Gleichungen

$$(10) \quad \begin{cases} 3c_1 = \varepsilon c_0, \\ 8c_2 = \varepsilon c_1 + qc_0. \end{cases}$$

Aus (9) und (10) folgt aber

$$q = \varepsilon^2,$$

was mit der Gleichung (5) übereinstimmt.

## IV.

Es ist nunmehr zu untersuchen, ob die Gleichungen (3) bis (8) voriger Nummer miteinander verträglich sind.

Zunächst ergibt sich, daß

$$(1) \quad \alpha\lambda + \beta(\lambda - 1) + \gamma(\lambda - t) = \kappa$$

sein muß, wo  $\kappa$  eine von  $t$  unabhängige Konstante bedeutet. Diese Gleichung besagt, daß auch die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung von (A) für  $x = \infty$  von  $t$  unabhängig sein müssen. Diese determinierende Gleichung für  $x = \infty$  oder  $z = 0$  lautet nämlich

$$(2) \quad r(r-1) + 2r = a + b + c + \frac{3}{4} - \alpha\lambda - \beta(\lambda - 1) - \gamma(\lambda - t),$$

und ihre Wurzeln sind dann und nur dann von  $t$  unabhängig, wenn  $\alpha\lambda + \beta(\lambda - 1) + \gamma(\lambda - t) = \kappa$  von  $t$  unabhängig ist.

Die Behandlung der Bedingungsgleichungen kann nun weiter folgendermaßen erfolgen:

Setzt man

$$(3) \quad \varrho = \frac{a}{\lambda^2} + \frac{b}{(\lambda-1)^2} + \frac{c}{(\lambda-t)^2},$$

so folgt aus (1) dieser und (3), (5) voriger Nummer

$$\begin{aligned} \alpha\lambda + \beta(\lambda - 1) + \gamma(\lambda - t) &= \kappa, \\ \alpha + \beta + \gamma &= -\varepsilon, \\ \frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\beta}{\lambda-1} + \frac{\gamma}{\lambda-t} &= \varepsilon^2 - \varrho, \end{aligned}$$

und hieraus berechnet man:

$$(4) \quad \alpha = \frac{\kappa\lambda}{t} + \frac{\lambda}{t} [1 + \varepsilon(\lambda-1)][1 + \varepsilon(\lambda-t)] - \varrho \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t},$$

$$(5) \quad \beta = -\frac{\kappa(\lambda-1)}{t-1} - \frac{\lambda-1}{t-1} [1 + \varepsilon\lambda][1 + \varepsilon(\lambda-t)] + \varrho \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t-1},$$

$$(6) \quad \gamma = \frac{\kappa(\lambda-t)}{t(t-1)} + \frac{\lambda-t}{t(t-1)} [1 + \varepsilon\lambda][1 + \varepsilon(\lambda-1)] - \varrho \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t(t-1)}.$$

Setzt man in diese Ausdrücke für  $\varepsilon$  seinen Wert aus (4) III ein, so ergibt sich:

$$(P) \quad \alpha = \frac{\kappa\lambda}{t} - \frac{\lambda(2\lambda-t-1)^2}{4t(\lambda-1)(\lambda-t)} - \varrho \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t} + \frac{1}{4} \frac{t(t-1)^2}{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)} \left\{ \frac{d\lambda}{dt} - \frac{\lambda-1}{t-1} \right\}^2,$$

$$(Q) \quad \beta = -\frac{\kappa(\lambda-1)}{t-1} + \frac{(\lambda-1)(2\lambda-t)^2}{4(t-1)\lambda(\lambda-t)} + \varrho \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t-1} - \frac{1}{4} \frac{t^2(t-1)}{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)} \left\{ \frac{d\lambda}{dt} - \frac{\lambda}{t} \right\}^2,$$

$$(R) \quad \gamma = \frac{\kappa(\lambda-t)}{t(t-1)} - \frac{(\lambda-t)(2\lambda-1)^2}{4t(t-1)\lambda(\lambda-1)} - \varrho \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t(t-1)} + \frac{1}{4} \frac{t(t-1)}{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)} \left\{ \frac{d\lambda}{dt} \right\}^2.$$

Die Entscheidung der Frage, ob die Bedingungsgleichungen (3) bis (8) Nr. III miteinander verträglich sind, kann nun in der Weise erfolgen, daß diese Werte für  $\alpha, \beta, \gamma$  in (6) bis (8) Nr. III eingesetzt werden. Das Ergebnis dieser Substitutionen ist:

aus (6) III

$$(7) \quad \left( \frac{d\lambda}{dt} - \frac{\lambda-1}{t-1} \right) D(\lambda) = 0,$$

aus (7) III

$$(8) \quad \left( \frac{d\lambda}{dt} - \frac{\lambda}{t} \right) D(\lambda) = 0,$$

aus (8) III

$$(9) \quad \frac{d\lambda}{dt} D(\lambda) = 0.$$

Hierbei bedeutet:

$$(S) \quad D(\lambda) = \frac{d^2\lambda}{dt^2} + \left[ \frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{\lambda-t} \right] \frac{d\lambda}{dt} - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda-t} \right] \left( \frac{d\lambda}{dt} \right)^2 \\ - 2 \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t^2(t-1)^2} \left\{ -(\alpha-1) + a + b + c - \left( a + \frac{1}{4} \right) \frac{t}{\lambda^2} \right. \\ \left. + \left( b + \frac{1}{4} \right) \frac{t-1}{(\lambda-1)^2} - c \frac{t(t-1)}{(\lambda-t)^2} \right\}.$$

Die Gleichungen (7), (8), (9) werden gleichzeitig erfüllt, wenn

$$(L) \quad D(\lambda) = 0$$

ist.

Die Gleichungen (3)–(8) Nr. III lassen also eine Auflösung zu:  $\lambda$  als Funktion von  $t$  muß Integral der Gleichung (L) sein und  $\alpha, \beta, \gamma$  müssen durch ihre Ausdrücke (P), (Q), (R) berechnet werden. Dabei ergeben sich die folgenden sechs willkürlichen Konstanten:  $a, b, c, \alpha$  und die beiden zu der Differentialgleichung 2<sup>ter</sup> Ordnung (L) gehörigen Integrationskonstanten.

## V.

Setzt man nun:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} -4(\alpha-1) + 4a + 4b + 4c = k_\infty, \\ 4 \left( a + \frac{1}{4} \right) = k_0, \\ 4 \left( b + \frac{1}{4} \right) = k_1, \\ 4 \left( c + \frac{1}{4} \right) = k_t, \end{array} \right.$$

so lautet die Gleichung (L)

$$(L') \quad \frac{d^2\lambda}{dt^2} + \left[ \frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{\lambda-t} \right] \frac{d\lambda}{dt} - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda-t} \right] \left( \frac{d\lambda}{dt} \right)^2 \\ = \frac{1}{2} \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t^2(t-1)^2} \left[ k_\infty - k_0 \frac{t}{\lambda^2} + k_1 \frac{t-1}{(\lambda-1)^2} - (k_t - 1) \frac{t(t-1)}{(\lambda-t)^2} \right] *).$$

\*) Die Differentialgleichung (L') besitzt, worauf ich bei anderer Gelegenheit eingehen möchte, die festen Verzweigungspunkte  $0, 1, t, \infty$ . In der Tat findet sie sich in dem speziellen Fall  $k_0 = k_1 = k_t = k_\infty = 0$  in den von Herrn Painlevé für Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit festen Verzweigungspunkten aufgestellten Tableaux (Acta Math. Bd. 25 z. B. Tabl. III). Darauf, daß diese Tableaux noch nach

Die Bedeutung der Größen  $k_\infty, k_0, k_1, k_t$  ist dabei folgende:

Lautet die determinierende Fundamentalgleichung für  $x = 0$

$$r(r-1) = a,$$

und ist  $r_1$  eine Wurzel dieser Gleichung, so ist auch  $1 - r_1$  eine solche, und  $2r_1 - 1$  ist die Differenz der Wurzeln. Nun ist aber

$$(2r_1 - 1)^2 = 4a + 1 = k_0.$$

Demnach ist  $k_0$  das Quadrat der Differenz der Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung für  $x = 0$ , und ebenso sind  $k_1, k_t$  bzw. die Quadrate der Wurzeldifferenzen für  $x = 1$  und  $x = t$ .

Weiter lautet nach (2) IV die determinierende Fundamentalgleichung für  $x = \infty$

$$r(r-1) + 2r = a + b + c + \frac{3}{4} - x,$$

also

$$(2r+1)^2 = 4a + 4b + 4c - 4(x-1) = k_\infty.$$

Da aber  $2r + 1$  die Wurzeldifferenz ist, so ist also  $k_\infty$  das Quadrat dieser Wurzeldifferenz für  $x = \infty$ . Die Differentialgleichung (L') für  $\lambda$  läßt sich nun in merkwürdiger Weise umgestalten:

Setzt man:

$$(2) \quad u = \int_{\infty}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}},$$

so ist

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}} \frac{d\lambda}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t},$$

wo  $\frac{\partial u}{\partial t}$  bedeutet, daß bei dieser Differentiation  $\lambda$  als Konstante in bezug auf  $t$  anzusehen ist. Weiter folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}} \left[ \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda-t} \right] \left( \frac{d\lambda}{dt} \right)^2 \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}} \frac{1}{\lambda-t} \frac{d\lambda}{dt} + \frac{1}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}} \frac{d^2 \lambda}{dt^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{2t-1}{t(t-1)} \frac{du}{dt} + \frac{1}{4t(t-1)} u \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}} \left[ \frac{d^2 \lambda}{dt^2} + \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{\lambda-t} \right) \frac{d\lambda}{dt} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda-t} \right) \left( \frac{d\lambda}{dt} \right)^2 \right] \\ &+ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2t-1}{t(t-1)} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{4t(t-1)} u, \end{aligned}$$

also wegen (L')

einigen Richtungen hin zu ergänzen sind, hat schon Herr Gambier (C. R. de l'Ac. des Sc. de Paris 1906, t. 142, p. 268) hingewiesen; siehe auch seine weiteren Veröffentlichungen C. R. 1906, t. 142, p. 1403 u. 1497, t. 143, p. 741.



$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{2t-1}{t(t-1)} \frac{du}{dt} + \frac{1}{4t(t-1)} u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2t-1}{t(t-1)} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{4t(t-1)} u \\ + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}{t^2(t-1)^2} \left[ k_\infty - k_0 \frac{t}{\lambda^2} + k_1 \frac{t-1}{(\lambda-1)^2} - (k_t-1) \frac{t(t-1)}{(\lambda-t)^2} \right].$$

Nun besteht aber, wie leicht durch die Rechnung zu bestätigen, für das elliptische Integral

$$(3) \quad v = \int_{\infty}^x \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-t)}}$$

die Beziehung

$$(4) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{2t-1}{t(t-1)} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{4t(t-1)} v = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{x(x-1)(x-t)}}{t(t-1)} \frac{1}{(x-t)^2};$$

also ergibt sich, wenn, wie oben, bei den Differentiationen  $\lambda$  als Konstante angesehen wird:

$$(5) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2t-1}{t(t-1)} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{4t(t-1)} u = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}{t(t-1)} \frac{1}{(\lambda-t)^2}.$$

Daher folgt

$$(L'') \quad \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{2t-1}{t(t-1)} \frac{du}{dt} + \frac{u}{4t(t-1)} \\ = \frac{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}{2t^2(t-1)^2} \left[ k_\infty - k_0 \frac{t}{\lambda^2} + k_1 \frac{t-1}{(\lambda-1)^2} - k_t \frac{t(t-1)}{(\lambda-t)^2} \right].$$

Bezeichnet man die durch Umkehrung des elliptischen Integrals

$$u = \int_{\infty}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}$$

entstehende elliptische Funktion durch

$$(6) \quad \lambda = f(u, t),$$

so daß also

$$(7) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial u} = \sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}$$

und setzt

$$(8) \quad \psi(u, t) = k_\infty f(u) + k_0 \frac{t}{f(u)} + k_1 \frac{1-t}{f(u)-1} + k_t \frac{t(t-1)}{f(u)-t},$$

wo hier der Einfachheit wegen das zweite Argument bei  $f$  weggelassen ist, so daß also  $\psi(u, t)$  in bezug auf  $u$  eine eindeutige doppelperiodische Funktion ist, die für solche Werte von  $u$  unendlich wird, für die

$$f(u) = \infty, \quad f(u) = 0, \quad f(u) = 1 \quad \text{oder} \quad f(u) = t$$

wird; so lautet (L''')

$$(L''') \quad \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{2t-1}{t(t-1)} \frac{du}{dt} + \frac{u}{4t(t-1)} = \frac{1}{2t^2(t-1)^2} \frac{\partial \psi(u, t)}{\partial u}.$$

## VI.

Man kann sich die Frage vorlegen, für welche rationale Transformationen der abhängigen und der unabhängigen Variablen die Differentialgleichung (A) in eine Gleichung derselben Form mit denselben wesentlich singulären Stellen  $0, 1, t, \infty$  übergeht. Das Ergebnis dieser Untersuchung ist, daß folgende Transformationen von  $x$  möglich sind:

$$(9) \quad \xi_1 = \frac{t}{x}, \quad \xi_2 = \frac{x-t}{x-1}, \quad \xi_3 = \frac{(x-1)t}{x-t}.$$

Und zwar geht über, bei  $\xi_1$ :

$$\begin{aligned} x = 0 & \quad \text{in} \quad \xi_1 = \infty, \\ x = 1 & \quad \text{in} \quad \xi_1 = t, \\ x = t & \quad \text{in} \quad \xi_1 = 1, \\ x = \infty & \quad \text{in} \quad \xi_1 = 0; \end{aligned}$$

bei  $\xi_2$ :

$$\begin{aligned} x = 0 & \quad \text{in} \quad \xi_2 = t, \\ x = 1 & \quad \text{in} \quad \xi_2 = \infty, \\ x = t & \quad \text{in} \quad \xi_2 = 0, \\ x = \infty & \quad \text{in} \quad \xi_2 = 1; \end{aligned}$$

bei  $\xi_3$ :

$$\begin{aligned} x = 0 & \quad \text{in} \quad \xi_3 = 1, \\ x = 1 & \quad \text{in} \quad \xi_3 = 0, \\ x = t & \quad \text{in} \quad \xi_3 = \infty, \\ x = \infty & \quad \text{in} \quad \xi_3 = t. \end{aligned}$$

Die abhängige Variable  $y$  muß dann jedesmal noch so transformiert werden, daß wieder der Koeffizient der ersten Ableitung nach der neuen unabhängigen Veränderlichen gleich Null wird. Die scheinbar singuläre Stelle  $\lambda$  geht dabei über bzw. in

$$(10) \quad \lambda_1 = \frac{t}{\lambda}, \quad \lambda_2 = \frac{\lambda-t}{\lambda-1}, \quad \lambda_3 = \frac{(\lambda-1)t}{\lambda-t}.$$

Die Größen  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  müssen demnach genau ebenso gebildeten Differentialgleichungen genügen wie  $\lambda$  selbst, was auch die Rechnung unmittelbar liefert, wenn man in (L') statt  $\lambda$  die Werte  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  substituiert. In diesen Gleichungen ist nur entsprechend der Vertauschung der singulären Stellen untereinander zu setzen für

$$k_0, k_1, k_t, k_\infty:$$

in der Gleichung für  $\lambda_1$  bzw.:

$$k_\infty, k_t, k_1, k_0;$$

in der Gleichung für  $\lambda_2$  bezw.:

$$k_i, k_\infty, k_0, k_1;$$

in der Gleichung für  $\lambda_3$  bezw.:

$$k_1, k_0, k_\infty, k_i.$$

In den Gleichungen (L'') und (L''') ist dann an Stelle von  $u$  zu setzen

$$(11) \quad u_i = \int_0^{\lambda_i} \frac{d\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i(\lambda_i-1)(\lambda_i-t)}}, \quad i=1, 2, 3,$$

welche Ausdrücke wegen

$$\frac{d\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i(\lambda_i-1)(\lambda_i-t)}} = \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}, \quad i=1, 2, 3$$

übergeführt werden können in

$$(12) \quad u_1 = \int_0^{\frac{t}{\lambda}} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}, \quad u_2 = \int_1^{\frac{\lambda-t}{\lambda-1}} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}, \quad u_3 = \int_t^{\frac{(\lambda-1)t}{\lambda-t}} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}.$$

## VII.

Das in der neueren Literatur vielfach behandelte sogenannte *Riemannsche Problem* gründet sich auf die Fragmente einer aus dem Nachlasse Riemanns veröffentlichten Arbeit: Zwei allgemeine Sätze über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Koeffizienten (Riemanns Werke II. Auflage, S. 379). Auf die Bedeutung der in diesen Fragmenten enthaltenen Problemstellungen hat zuerst Herr Klein (vgl. Math. Ann. Bd. 46, S. 83) hingewiesen. Später hat dann Herr Schlesinger in einer Reihe von Abhandlungen\*) dieses Problem in Angriff genommen und seine Lösbarkeit gezeigt, wenn die sogenannten Konvergenzbedingungen\*\*) erfüllt sind. Neuerdings hat Herr Hilbert (Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Integralgleichungen III, Göttinger Nachrichten 1905, p. 330—337) das Problem für Differentialgleichungen zweiter Ordnung erledigt. Dieses Problem ist das folgende:

Es soll ein System von  $n$  Funktionen  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$  gesucht werden, die in der ganzen Ebene mit Ausnahme der Stellen  $a_1, a_2, \dots, a_\sigma, a_{\sigma+1} = \infty$  eindeutig, endlich und stetig sind. An den singulären Stellen sollen die

\*) L. Schlesinger: Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen im Anschluß an das Riemannsche Problem, I, Crelles Journal Bd. 123, S. 138 ff.; II, Bd. 124, S. 292 ff.; Bd. 130, S. 26 ff.

\*\*) a. a. O. Bd. 123, S. 147.

Funktionen nicht von unendlich hoher Ordnung unendlich werden und sollen bei Umläufen der unabhängigen Veränderlichen um  $a_1, a_2, \dots, a_\sigma$  bzw. die vorgeschriebenen Substitutionen  $A_1, A_2, \dots, A_\sigma$ , also bei  $a_{\sigma+1} = \infty$  dann die Substitution

$$A_1^{-1} A_2^{-1} A_3^{-1} \dots A_\sigma^{-1}$$

erleiden.

Da die singulären Stellen  $a_1, a_2, \dots, a_\sigma$  willkürlich vorgeschrieben werden sollen und ebenso die Koeffizienten der Substitutionen  $A_1, A_2, \dots, A_\sigma$ , die also auch von  $a_1, a_2, \dots, a_\sigma$  unabhängig sind, so genügen, wie Herr Schlesinger in den angegebenen Abhandlungen zeigt, die  $y_1, y_2, \dots, y_n$  einer linearen homogenen Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse, deren Substitutionsgruppe von der Wahl der singulären Stellen unabhängig ist.

Die vorstehenden Untersuchungen geben nun diese Differentialgleichung für zwei Funktionen und drei im Endlichen gelegene singuläre Stellen  $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = t$ . Wir wollen zeigen, daß die Anzahl der willkürlich gebliebenen Konstanten mit der für das Riemannsche Problem erforderlichen übereinstimmt.

Die Anzahl der in  $A_1, A_2, A_3$  vorkommenden Konstanten ist 12. Da man es aber stets durch eine Transformation des Funktionssystems so einrichten kann, daß die Determinanten der Substitutionen gleich 1 sind, was darauf hinauskommt, daß, wie wir angenommen haben, der Koeffizient der ersten Ableitung in der Differentialgleichung, der das Funktionssystem genügt, den Wert Null hat, so reduziert sich die Zahl dieser Konstanten auf 9, wenn wir von vorneherein annehmen, daß die Determinanten von  $A_1, A_2, A_3$  den Wert 1 haben. Nun hatte sich die Zahl der direkt verfügbaren Konstanten unserer Differentialgleichung gleich 6 ergeben. Hierzu kommen aber noch drei Konstante dadurch, daß man von einem Fundamentalsystem  $y_1, y_2$  zu einem anderen

$$\eta_1 = c_{11} y_1 + c_{12} y_2,$$

$$\eta_2 = c_{21} y_1 + c_{22} y_2$$

übergehen kann. Die Zahl der hier hinzutretenden Konstanten ist deshalb nur 3, weil ein den Elementen eines Fundamentalsystems hinzugefügter gemeinsamer konstanter Faktor die Substitutionsgruppe unverändert läßt. Wir haben also, wie es sein muß, im ganzen neun Konstanten zur Verfügung.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich eine Bemerkung zu einer von meinem Vater (L. Fuchs, Sitzungsber. der Berl. Ak. 1894, S. 1125, Nr. 8) aufgestellten Differentialgleichung machen. Die dort aufgestellte lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit drei im Endlichen gelegenen

singulären Stellen, deren Substitutionsgruppe von der Wahl einer singulären Stelle  $t$  unabhängig ist, hat keine scheinbar singuläre Stelle; es kann also der unendlich ferne Punkt keine wesentlich singuläre Stelle sein. In der Tat läßt sich diese Differentialgleichung in folgender Form schreiben:

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\alpha_2 x^2 (t-1)^2 - (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha') x(x-1)t(t-1) + \alpha_1 (x-1)^2 t^2}{x^2 (x-1)^2 (x-t)^2} y,$$

wo die konstanten Größen  $\alpha$  dieselbe Bedeutung haben wie in der Arbeit meines Vaters.

Die Gleichung (1) kann nun durch eine einfache Transformation in eine andere mit zwei im Endlichen gelegenen Punkten und dem unendlich fernen Punkt als wesentlich singulären Stellen übergeführt werden.

Setzt man nämlich

$$(2) \quad \begin{cases} x = \frac{t}{t + z(1-t)}, \\ y = xu, \end{cases}$$

so geht (1) über in

$$(3) \quad \frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{\alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha') z + \alpha_1 z^2}{z^2 (z-1)^2} u,$$

welche Gleichung leicht in eine Gaußsche Differentialgleichung übergeführt werden kann.

## VIII.

Wir wollen nun einen besonders interessanten Spezialfall hervorheben, der von der allgemeinen von uns behandelten Differentialgleichung eine ähnliche Spezialisierung bildet, wie die sogenannte Legendresche Differentialgleichung von der allgemeinen Gaußschen.

Die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen der Gaußschen Differentialgleichung

$$(1) \quad x(x-1) \frac{d^2 y}{dx^2} + [(\alpha + \beta + 1)x - \gamma] \frac{dy}{dx} + \alpha\beta y = 0,$$

die ja bekanntlich die Lösung des oben angegebenen Riemannschen Problems für zwei im Endlichen gelegene singuläre Stellen 0, 1 und zwei Funktionen  $y_1, y_2$  enthält, sind

$$\text{bei } x = 0 : 0, 1 - \gamma,$$

$$\text{bei } x = 1 : 0, \gamma - \alpha - \beta,$$

$$\text{bei } x = \infty : \alpha, \beta.$$

Fragt man sich, wie  $\alpha, \beta, \gamma$  gewählt werden müssen, damit die Wurzeln für jede singuläre Stelle einander gleich werden, so ergibt sich

$$\gamma = 1, \quad \alpha + \beta = \gamma, \quad \alpha = \beta,$$

d. h. also

$$\gamma = 1, \quad \alpha = \beta = \frac{1}{2}.$$

Die Differentialgleichung (1) lautet dann

$$(2) \quad x(x-1) \frac{d^2 y}{dx^2} + (2x-1) \frac{dy}{dx} + \frac{1}{4} y = 0.$$

Es ist dies die sogenannte Legendresche Differentialgleichung, die von Legendre\*) zuerst aufgestellt worden ist. Diese Gleichung wird befriedigt durch die Periodizitätsmoduln des elliptischen Integrals

$$u = \int_{\infty}^z \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(z-x)}};$$

sie spielt bekanntlich in der Theorie der Modulfunktion eine bedeutende Rolle.

Wir fragen uns nun ebenso, welche Form unsere Differentialgleichung (A) annimmt, wenn die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen für alle wesentlich singulären Stellen 0, 1,  $t$ ,  $\infty$  einander gleich werden.

Damit die Wurzeln der Gleichung

$$r(r-1) = a$$

einander gleich werden, muß  $a = -\frac{1}{4}$  sein; und ebenso folgt:  $b = -\frac{1}{4}$ ,  $c = -\frac{1}{4}$ . Damit ferner die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung für  $x = \infty$  (2) IV)

$$r(r+1) = a + b + c + \frac{3}{4} - \kappa$$

einander gleich werden, muß  $\kappa = \frac{1}{4}$  sein.

Da ferner nach Nr. V  $k_0, k_1, k_t, k_\infty$  die Quadrate der Differenzen der Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen bzw. für  $x=0$ ,  $x=1$ ,  $x=t$ ,  $x=\infty$  sind, so müssen diese Größen hier den Wert Null haben.

Dann geht aber zufolge (L'') die Differentialgleichung, der  $\lambda$  als Funktion von  $t$  genügt, wenn wieder

$$(3) \quad u = \int_{\infty}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}$$

gesetzt wird, über in

$$(4) \quad \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{2t-1}{t(t-1)} \frac{du}{dt} + \frac{1}{4t(t-1)} u = 0,$$

\*) Legendre, *Traité des fonctions elliptiques*, Bd. I (1825), S. 62 ff.

d. h. in die Legendresche Differentialgleichung, die durch die Periodizitätsmoduln des Integrals (3) befriedigt wird.

Bezeichnet man also die durch Umkehrung von (3) entstehende elliptische Funktion mit  $f(u)$  und ihre der Differentialgleichung (4) genügenden Perioden mit  $u_1$  und  $u_2$ , so ist

$$(5) \quad \lambda = f(c_1 u_1 + c_2 u_2),$$

wo  $c_1, c_2$  zwei willkürliche Konstanten sind, so daß  $c_1 u_1 + c_2 u_2$  das allgemeine Integral von (4) darstellt.

Wir erhalten also das folgende Ergebnis:

Die Differentialgleichung lautet:

$$(A') \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \left[ -\frac{1}{4} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{(x-t)^2} + \frac{3}{4} \frac{1}{(x-\lambda)^2} \right. \\ \left. + \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-1} + \frac{\gamma}{x-t} + \frac{\varepsilon}{x-\lambda} \right] y.$$

Dabei ist

$$\alpha = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{t} - 1 \right] + \frac{t(t-1)^2}{4\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)} \left[ \frac{d\lambda}{dt} - \frac{\lambda-1}{t-1} \right]^2, \\ \beta = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{\lambda-1} - \frac{1}{t-1} + 1 \right] - \frac{t^2(t-1)}{4\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)} \left[ \frac{d\lambda}{dt} - \frac{\lambda}{t} \right]^2, \\ \gamma = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{\lambda-t} + \frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} \right] + \frac{1}{4} \frac{t(t-1)}{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)} \left[ \frac{d\lambda}{dt} \right]^2, \\ \varepsilon = -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} \right] - \frac{1}{2} \frac{t(t-1)}{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)} \frac{d\lambda}{dt}, \\ \lambda = f(c_1 u_1 + c_2 u_2),$$

wenn  $f(u)$  die durch Umkehrung des Integrals

$$u = \int_{\infty}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}$$

entstehende elliptische Funktion bedeutet und  $u_1$  und  $u_2$  die Perioden dieser elliptischen Funktion

$$u_1 = \frac{1}{2} \int_t^0 \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}, \quad u_2 = \frac{1}{2} \int_t^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}},$$

die der Legendreschen Differentialgleichung

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{2t-1}{t(t-1)} \frac{du}{dt} + \frac{1}{4t(t-1)} u = 0$$

als ein Fundamentalsystem genügen.

Natürlich kann die Differentialgleichung (A') leicht durch die Transformation

$$(6) \quad y = x^{\frac{1}{2}} (x-1)^{\frac{1}{2}} (x-t)^{\frac{1}{2}} (x-\lambda)^{-\frac{1}{2}} u$$

so umgewandelt werden, daß die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen für  $x = 0, 1, t$  beide den Wert Null haben (für  $x = \lambda$  die Werte 0 und 2), wie dies bei der Legendreschen Differentialgleichung bei 0 und 1 der Fall ist. Für  $x = \infty$  werden die Wurzeln dann beide wie bei der Legendreschen Gleichung  $\frac{1}{2}$ . Ebenso kann auch die allgemeine Gleichung (A) so umgewandelt werden, daß von den Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen für die im Endlichen gelegenen singulären Punkte, wie bei der Gaußschen Differentialgleichung, eine den Wert Null hat.

## IX.

Die Differentialgleichung für  $\lambda$  kann reductibel sein und zwar kann sie mit einer Riccatischen Differentialgleichung ein Integral gemeinsam haben.

Ist nämlich  $r_1$  eine Wurzel der determinierenden Fundamentalgleichung für  $x = 0$ ,  $r_2$  eine solche für  $x = 1$  und  $r_3$  für  $x = t$ , so genügt jedes Integral von

$$(1) \quad \frac{d\lambda}{dt} = (1 - 2r_2) \frac{\lambda}{t} + (1 - 2r_1) \frac{\lambda - 1}{t - 1} + 2(r_1 + r_2 + r_3 - 1) \frac{\lambda(\lambda - 1)}{t(t - 1)}$$

der Differentialgleichung für  $\lambda$ , wenn

$$(2) \quad \kappa = r_1 + r_2 + r_3 - 2(r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3),$$

d. h., wegen (2) IV, wenn

$$r = r_1 + r_2 + r_3 - \frac{3}{2}$$

eine Wurzel der determinierenden Fundamentalgleichung für  $x = \infty$  wird.

Eine einfache Rechnung zeigt, daß in diesem Falle die Differentialgleichung für  $y$  (A) lautet:

$$(3) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \left[ \left( \frac{r_1}{x} + \frac{r_2}{x-1} + \frac{r_3}{x-t} - \frac{1}{x-\lambda} \right)^2 - \left( \frac{r_1}{x^2} + \frac{r_2}{(x-1)^2} + \frac{r_3}{(x-t)^2} - \frac{1}{(x-\lambda)^2} \right) \right] y.$$

Diese Gleichung ist reductibel, sie wird befriedigt durch jedes Integral von

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = \left[ \frac{r_1}{x} + \frac{r_2}{x-1} + \frac{r_3}{x-t} - \frac{1}{x-\lambda} \right] y.$$

Da aus (4)

$$y = \text{const. } x^{r_1} (x-1)^{r_2} (x-t)^{r_3} (x-\lambda)^{-\frac{1}{2}}$$

folgt, so ist, wenn  $c_1, c_2$  willkürliche Konstanten bedeuten,



$$(5) \quad y = c_1 x^{r_1} (x-1)^{r_2} (x-t)^{r_3} (x-\lambda)^{-\frac{1}{2}} \\ + c_2 x^{r_1} (x-1)^{r_2} (x-t)^{r_3} (x-\lambda)^{-\frac{1}{2}} \\ \int_0^x (x-\lambda) x^{-2r_1} (x-1)^{-2r_2} (x-t)^{-2r_3} dx$$

das allgemeine Integral von (3).

Es muß nun zufolge der Grundlage unserer Untersuchungen ein Fundamentalsystem von (3) so angegeben werden können, daß die Koeffizienten der Substitutionsgruppe von  $t$  unabhängig werden. Dieses Fundamentalsystem sei  $\eta_1, \eta_2$ .

Setzt man nun

$$y_1 = x^{r_1} (x-1)^{r_2} (x-t)^{r_3} (x-\lambda)^{-\frac{1}{2}}, \\ y_2 = y_1 \int_0^x (x-\lambda) x^{-2r_1} (x-1)^{-2r_2} (x-t)^{-2r_3} dx,$$

so gehen bei einem beliebigen Umlauf von  $x$   $y_1, y_2$  bzw. über in

$$\bar{y}_1 = \omega y_1, \\ \bar{y}_2 = \omega y_2 + \omega y_1 \int_L (x-\lambda) x^{-2r_1} (x-1)^{-2r_2} (x-t)^{-2r_3} dx,$$

wo das Integral über den geschlossenen Weg  $L$  zu erstrecken ist, den  $x$  bei dem Umlauf beschrieben hat, und  $\omega$  eine von  $x$  und  $t$  unabhängige Konstante bedeutet.

Es sei nun

$$\eta_1 = c_{11} y_1 + c_{12} y_2, \\ \eta_2 = c_{21} y_1 + c_{22} y_2,$$

wo  $c_{ix}$  von  $x$  unabhängige Größen sind, dann gehen bei dem Umlaufe  $L$ , wenn

$$\int_L (x-\lambda) x^{-2r_1} (x-1)^{-2r_2} (x-t)^{-2r_3} dx = P$$

gesetzt wird,  $\eta_1, \eta_2$  über in

$$\bar{\eta}_1 = \omega \eta_1 + c_{12} \omega y_1 P, \\ \bar{\eta}_2 = \omega \eta_2 + c_{22} \omega y_1 P,$$

oder

$$\bar{\eta}_1 = \omega \eta_1 + c_{12} \omega P (c_{22} \eta_1 - c_{12} \eta_2), \\ \bar{\eta}_2 = \omega \eta_2 + c_{22} \omega P (c_{22} \eta_1 - c_{12} \eta_2),$$

da man es stets durch Multiplikation von  $\eta_1, \eta_2$  mit einem gemeinsamen Faktor so einrichten kann, daß die Determinante der  $c_{ix}$  gleich 1 wird.

Sollen also die Koeffizienten der Substitutionen, die  $\eta_1, \eta_2$  bei dem Umlauf erfahren, von  $t$  unabhängig sein, so müssen  $c_{12}, c_{22}$  so gewählt werden, daß

$$\begin{aligned} c_{12} P c_{22} &= \gamma_1, & c_{12} P c_{12} &= \gamma_2, \\ c_{22} P c_{22} &= \gamma_3, & c_{22} P c_{12} &= \gamma_4 \end{aligned}$$

wird, wo  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  von  $t$  unabhängige Größen sind. Daraus folgt aber, daß sich  $c_{12}$  und  $c_{22}$  nur durch einen von  $t$  unabhängigen Faktor unterscheiden dürfen, und daraus, daß die Funktion von  $t$ :

$$P = \int_L (x - \lambda) x^{-2\nu_1} (x - 1)^{-2\nu_2} (x - t)^{-2\nu_3} dx$$

für jeden beliebigen geschlossenen Weg, abgesehen von einem konstanten Faktor, stets denselben Wert haben muß.

Es ist also die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das Integral

$$\int_L (x - \lambda) x^{\varepsilon_1} (x - 1)^{\varepsilon_2} (x - t)^{\varepsilon_3} dx$$

über irgend einen geschlossenen Weg der  $x$ -Ebene erstreckt, abgesehen von einem konstanten Faktor, immer denselben Wert hat, die, daß  $\lambda$  der Differentialgleichung

$$\frac{d\lambda}{d t} = (1 + \varepsilon_1) \frac{\lambda}{t} + (1 + \varepsilon_2) \frac{\lambda - 1}{t - 1} - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + 2) \frac{\lambda(\lambda - 1)}{t(t - 1)}$$

genügt.

Wenn  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + 2 = 0$  ist, so ist diese Differentialgleichung linear. Ist dies nicht der Fall, so setze man:

$$\lambda = \frac{t(t - 1)}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + 2} \frac{u'}{u} + t,$$

dann erhält man für  $u$  die Gaußsche Differentialgleichung

$$t(t - 1) \frac{d^2 u}{d t^2} + [(\alpha + \beta + \gamma)t - \gamma] \frac{d u}{d t} + \alpha \beta u = 0,$$

wenn

$$\alpha = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + 2,$$

$$\beta = 1 + \varepsilon_3,$$

$$\gamma = 2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_3$$

gesetzt wird.\*)

\*) Hieraus folgt z. B. die bekannte Tatsache, daß die Integrale

$$\int_L x^{\varepsilon_1 + 1} (x - 1)^{\varepsilon_2} (x - t)^{\varepsilon_3} dx \quad \text{und} \quad \int_L x^{\varepsilon_1} (x - 1)^{\varepsilon_2} (x - t)^{\varepsilon_3} dx$$

linearen Differentialgleichungen derselben Klasse genügen.

Z. B. für  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{1}{2}$  erhält man:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sich die Periodizitätsmoduln des elliptischen Integrals zweiter Gattung

$$\int \frac{x - \lambda}{\sqrt{x(x-1)(x-t)}} dx$$

nur durch einen von  $t$  unabhängigen Faktor unterscheiden, ist die, daß

$$\lambda = 2t(t-1) \frac{u'}{u} + t,$$

wo  $u$  ein beliebiges Integral der Legendreschen Gleichung

$$t(t-1) \frac{d^2 u}{dt^2} + (2t-1) \frac{du}{dt} + \frac{1}{4} u = 0$$

ist.

### X.

Es soll nun noch gezeigt werden, daß durch gewisse Spezialisierung der Konstanten die Differentialgleichung (A) in die Gaußsche Differentialgleichung übergeführt werden kann.

Wenn  $k_i = 0$  ist, so folgt aus der Gleichung (L'') S. 310, daß  $\lambda = t$  gewählt werden kann. In der Tat werden dann beide Seiten von (L'') gleich Null, da

$$u = \int_{\infty}^t \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}$$

der Legendreschen Differentialgleichung, deren linke Seite mit der linken Seite von (L'') übereinstimmt, genügt. Die Ausdrücke (P), (Q), (R) der Nr. IV, S. 307, geben dann, daß für  $\lambda = t$

$$[\alpha]_{\lambda=t} = \kappa - \frac{1}{2},$$

$$[\beta]_{\lambda=t} = -\kappa + \frac{1}{2},$$

$$[\gamma(\lambda-t)]_{\lambda=t} = \frac{1}{2}$$

ist. Da nun  $\varepsilon = -\alpha - \beta - \gamma$ , also der Koeffizient von (A)

$$p = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-t)^2} + \frac{\frac{3}{4}}{(x-\lambda)^2} + \frac{\alpha}{x} - \frac{\alpha}{x-\lambda} \\ + \frac{\beta}{x-1} - \frac{\beta}{x-\lambda} - \frac{\gamma(\lambda-t)}{(x-t)(x-\lambda)},$$

so ergibt sich, da, wie schon früher gezeigt, aus  $k_t = 0$   $c = -\frac{1}{4}$  folgt, für  $\lambda = t$ :

$$p = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{\frac{1}{2} - x}{x(x-1)} - \frac{\frac{1}{4}}{(x-t)^2} + \frac{\frac{3}{4}}{(x-t)^2} - \frac{\frac{1}{2}}{(x-t)^2}.$$

Die Differentialgleichung (A) lautet also

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left[ \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{\frac{1}{2} - x}{x(x-1)} \right] y$$

und kann durch eine einfache Transformation in die Gaußsche Differentialgleichung übergeführt werden.

Ebenso kann für  $k_1 = 0$  das Integral  $\lambda = 1$  gewählt werden, wobei dann eine Differentialgleichung mit den wesentlich singulären Stellen

$$0, t, \infty \text{ und nicht } 1,$$

für  $k_0 = 0$ ,  $\lambda = 0$  eine Differentialgleichung mit den singulären Stellen

$$1, t, \infty \text{ und nicht } 0$$

entsteht. Endlich ergibt sich für  $k_\infty = 0$  das Integral  $\lambda = \infty$  und daraus eine Differentialgleichung mit den singulären Stellen

$$0, 1, t \text{ und nicht } \infty.$$

Diese Gleichung stimmt mit der in VII, S. 313—314 behandelten Gleichung meines Vaters überein und kann also ebenfalls leicht, wie dort gezeigt, in eine Gaußsche Differentialgleichung übergeführt werden.

Über die Abhängigkeit der Konvergenz einer Potenzreihe von der Konvergenz ihrer reellen oder imaginären Komponente.

Von

EUGEN KÁLMÁN in Göttingen.

In den folgenden Zeilen werden wir feststellen, wie aus den Konvergenzverhältnissen der einen Komponente einer Potenzreihe auf die Konvergenz der Potenzreihe selbst geschlossen werden kann.

Daß überhaupt die Konvergenz einer Potenzreihe aus der Konvergenz der einen ihrer Komponenten folgen kann, das sieht man deutlich aus folgendem Satze:

Es sei  $AB$  ein Kurvenstück, das nicht in seinem ganzen Verlaufe auf einer durch den Nullpunkt gehenden geraden Linie liegt, und  $R$  der Abstand desjenigen Punktes des Kurvenstücks  $AB$  vom Nullpunkte, welcher diesem am nächsten liegt. Ist nun eine der Komponenten einer Potenzreihe auf dem Kurvenstück  $AB$  überall konvergent, so konvergiert auch die Potenzreihe selbst innerhalb eines Kreises um den Nullpunkt, dessen Radius mindestens  $R$  ist.

Der Beweis des Satzes ist sehr einfach. Ist nämlich z. B. die imaginäre Komponente der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + i b_n) r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

d. h. die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n (a_n \sin n\varphi + b_n \cos n\varphi) = f(r, \varphi)$$

in jedem Punkte des Kurvenstücks  $AB$  konvergent, und sind  $\bar{r}, \bar{\varphi}$  die Polarkoordinaten eines beliebigen Punktes  $P$  auf dem Kurvenstücke, so ist speziell auch die Reihe

$$f(\bar{r}, \bar{\varphi}) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{r}^n (a_n \sin n\bar{\varphi} + b_n \cos n\bar{\varphi})$$

konvergent. Diese Reihe ist aber nichts anderes, als der Wert der Potenzreihe  $f(r, \varphi)$  an der Stelle  $r = \bar{r}$ , so daß also die Potenzreihe  $f(r, \varphi)$  auch an jeder Stelle konvergiert, wo  $r < \bar{r}$  ist. D. h. geometrisch: Die Reihe  $f(r, \varphi)$  konvergiert in jedem Punkte der Strecke  $\overline{OP}$ . Auf dieser Strecke ist nämlich  $\varphi = \bar{\varphi}$ ,  $r \leq \bar{r}$ .

Der Punkt  $P$  kann aber, wie gesagt, auf der Kurve beliebig gewählt werden.

Verbinden wir also jeden Punkt des Kurvenstückes  $AB$  durch gerade Linien mit dem Nullpunkte, so konvergiert  $f(r, \varphi)$  in jedem Punkte des so erhaltenen zweidimensionalen Bereiches (der schraffierte Flächenteil in Fig. 1). Daß man tatsächlich mit einem zweidimensionalen Bereiche zu

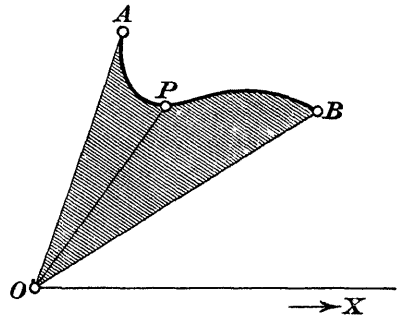


Fig. 1.

tun hat, dafür bürgt die Voraussetzung, daß  $AB$  nicht in seinem ganzen Verlauf auf einer durch den Nullpunkt gehenden geraden Linie liegt.

Daraus folgt aber, daß auf dem Teile des Kreisbogens mit dem Radius  $R$  um den Nullpunkt, der im schraffierten Bereich liegt, zwei Punkte  $C$  und  $D$  zu finden sind, die eine endliche Entfernung voneinander haben. Bezeichnen wir nun die Winkel der Strahlen  $CO$  und  $DO$  gegen die positive  $x$ -Achse mit  $\alpha$  und  $\beta$ , so können wir also folgendes behaupten:

Für jeden  $\varphi$ -Wert zwischen  $\alpha$  und  $\beta$  ist

$$\lim_{n=\infty} (R^n a_n \sin n\varphi + R^n b_n \cos n\varphi) = 0.$$

Das folgt offenbar aus der Konvergenz der Reihe  $f(r, \varphi)$  auf dem Kreise mit dem Radius  $R$ .

Wir können jetzt von einem Satze des Herrn G. Cantor Anwendung machen, den er in Bd. 4 der Math. Annalen auf folgende Weise ausgesprochen hat:

„Ist für jeden  $x$ -Wert zwischen  $\alpha$  und  $\beta$

$$\lim_{n=\infty} (a_n \sin n\lambda + b_n \cos n\lambda) = 0,$$

so ist auch

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty} b_n = 0.$$

Es ist also in unserem Falle

$$\lim_{n=\infty} R^n a_n = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty} R^n b_n = 0.$$

Somit konvergieren die Reihen  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$  gewiß innerhalb des Kreises mit dem Radius  $R$  um den Nullpunkt. Innerhalb dieses Kreises konvergiert also auch die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + i b_n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n,$$

was zu beweisen war.

Es ist auch leicht zu sehen, daß der Radius des Konvergenzkreises unserer Potenzreihe, wenn nur das Kurvenstück  $AB$  kein Kreisbogen ist, oder allgemeiner keine Figur, die aus lauter Kurvenstücken mit den Gleichungen  $r = \text{const.}$  oder  $\varphi = \text{const.}$  zusammengesetzt ist, immer größer ist als  $R$ .

Ist  $\bar{R}$  der Abstand desjenigen Punktes einer Kurve von der genannten Eigenschaft — von der also kein Teil eine der Gleichungen  $r = \text{const.}$ ,  $\varphi = \text{const.}$  hat — vom Nullpunkte, welcher von diesem am weitesten liegt, so ist leicht zu sehen, daß die Potenzreihe in jedem Kreis konvergiert, dessen Radius kleiner als  $\bar{R}$  ist.

Es liegt nun die Frage nahe, ob die Konvergenz der Potenzreihe nicht schon dann bewiesen werden kann, wenn über die Komponente weniger vorausgesetzt wird, als in unserem Satze, also wenn etwa nur vorausgesetzt wird, daß  $f(r, \varphi)$  in einer überalldichten Punktmenge auf dem Kurvenstücke konvergiert; oder wenn sie auf dem Kurvenstücke zwar nirgends konvergiert, aber in jedem Punkte derselben die Bedingung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n (a_n \sin n\varphi + b_n \cos n\varphi) = 0$$

erfüllt ist.

Wie wir gesehen, konvergiert die Potenzreihe innerhalb des Kreises mit dem Radius  $R$  um den Nullpunkt, wenn ein Kurvenstück, mag es auch noch so klein sein, existiert, auf welchem die imaginäre Komponente überall konvergiert. Ist aber nur bekannt, daß die imaginäre Komponente in überalldicht liegenden Punkten eines Kurvenstückes konvergiert, so braucht die Potenzreihe im Kreise mit dem Radius  $R$  nicht zu konvergieren. Auf diese Tatsache hat mich Herr L. Fejér aufmerksam gemacht und zwar durch das folgende Beispiel:

Die imaginäre Komponente der Potenzreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$ , d. h. die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n!} \sin n! \varphi$  konvergiert auf jedem beliebigen Kurvenstück in den Punkten, für welche  $n = \frac{\mu}{\nu} \pi$  ist ( $\mu$  und  $\nu$  ganze Zahlen), die also auf dem Kurvenstücke überalldicht liegen.

Die Potenzreihe selbst konvergiert aber keinesfalls im Kreise mit dem Radius  $R$ , wenn dieser Radius  $> 1$  ist, weil der Einheitskreis für die Potenzreihe eine natürliche Grenze ist.

Was nun die Voraussetzung anbelangt, daß in jedem Punkte eines Kurvenstückes wenn auch nicht die Konvergenz der imaginären Komponente, so doch die Bedingung

$$\lim_{n=\infty} r^n (a_n \sin n\varphi + b_n \cos n\varphi) = 0$$

stattfindet, so unterscheidet sich diese Voraussetzung von der, daß die Reihe  $f(r, \varphi)$  in jedem Punkte des Kurvenstückes tatsächlich konvergiert, bloß formal.

Hier stehen wir nämlich einer merkwürdigen Eigenschaft der Reihe  $f(r, \varphi)$  gegenüber.

Im allgemeinen folgt aus dem Verschwinden des Grenzwertes des allgemeinen Gliedes einer Reihe noch gar nicht die Konvergenz der Reihe, und zwar weder in einem einzelnen Punkte noch auf einem Kurvenstücke.

Ist aber für die Reihe  $f(r, \varphi)$  in jedem Punkte eines Kurvenstückes der Grenzwert ihres allgemeinen Gliedes, d. h. von

$$r^n a_n \sin n\varphi + r^n b_n \cos n\varphi$$

gleich Null, so folgt daraus, daß die Reihe  $f(r, \varphi)$  auf dem Kurvenstücke konvergiert.

Aus der Voraussetzung, daß auf dem Kurvenstück  $AB$  überall

$$\lim_{n=\infty} r^n (a_n \sin n\varphi + b_n \cos n\varphi) = 0$$

ist, folgt nämlich schon die Konvergenz der Reihe  $f(r, \varphi)$  in einem Kreise, dessen Radius  $\rho$  sich von  $\bar{R}$  beliebig wenig unterscheidet, wenn er nur kleiner ist als  $\bar{R}$ .

Wenn wir also  $\rho$  groß genug wählen, so liegen so viele Punkte des Kurvenstückes  $AB$  im Konvergenzkreise, wie wir wollen.

Somit konvergiert  $f(r, \varphi)$  in jedem Punkte des Kurvenstückes, höchstens mit Ausnahme desjenigen, der vom Nullpunkte am weitesten liegt.

Keszthely in Ungarn.



## Sur les fonctions dérivées.

Par

D. POMPEIU à Jassy.

Dans un Mémoire *Sur la continuité des fonctions de variables complexes* [inséré dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2<sup>e</sup> série, t. VII (1905)] j'ai été amené à me servir d'une fonction dérivée réelle, dépendant d'une variable réelle, bornée et s'annulant dans tout intervalle. J'ai admis, dans mon Mémoire, l'existence d'une pareille fonction que j'ai appelée fonction de M. Köpcke, car c'est M. Köpcke qui le premier (*Mathematische Annalen* 29, 34 et 35) en a donné un exemple.

Dans cette Note je me propose de montrer comment on peut définir simplement une fonction d'une variable réelle dont la dérivée soit bornée et s'annule dans tout intervalle.

## § 1.

**Définition de la fonction  $G(t)$ .**

Je considère la série

$$(1) \quad F(x) = \sum_1^{\infty} A_n(x - a_n)^{\frac{1}{3}}$$

dans laquelle tous les nombres sont réels et je suppose :

1<sup>o</sup> que la série  $\sum A_n$  est convergente, les  $A_n$  étant des nombres positifs;

2<sup>o</sup> les  $a_n$  forment, dans un certain intervalle  $(x', x'')$ , un ensemble dénombrable partout dense.

Il est clair que, dans ces conditions, la série (1) est uniformément convergente, dans l'intervalle  $(x', x'')$  et sa somme  $F(x)$  est, dans le même intervalle, une fonction continue.

Mais  $F(x)$  est, en outre, une fonction *croissante*. Cela résulte de ce que toutes les fonctions

$$A_n(x - a_n)^{\frac{1}{3}}$$

sont croissantes.

Posons, maintenant

$$t = F(x)$$

et

$$t' = F(x'), \quad t'' = F(x'').$$

A chaque point  $t$  de l'intervalle  $(t', t'')$  correspond un point  $x$ , de l'intervalle  $(x', x'')$ , et un seul. On peut donc considérer  $x$  comme une fonction de  $t$ , définie dans l'intervalle  $(t', t'')$ : nous appellerons  $G(t)$  cette fonction inverse:

$$x = G(t).$$

## § 2.

### Convergence d'une série dérivée.

Considérons la série

$$(2) \quad f(x) = \frac{1}{3} \sum_1^{\infty} \frac{A_n}{(x - a_n)^3}$$

obtenue en dérivant terme à terme la série (1). Je me propose d'étudier la convergence de cette série pour les points  $x$  de l'intervalle  $(x', x'')$  qui ne coïncident avec aucun des points  $a_n$ . Les  $a_n$  forment, d'après nos hypothèses, dans l'intervalle  $(x', x'')$  un ensemble dénombrable partout dense.

Nous ferons une hypothèse supplémentaire relative aux  $A_n$ , pour pouvoir utiliser un résultat dû à M. Borel. M. Borel a étudié, dans son livre bien connu: *Leçons sur la théorie des fonctions* (pages 62—69) la convergence de la série

$$(3) \quad \sum_1^{\infty} \frac{A_n}{r_n}, \quad r_n = |x - a_n|$$

les coefficients  $A_n$  étant des nombres positifs et les  $a_n$  formant dans un certain intervalle  $(x', x'')$  un ensemble dénombrable partout dense. Voici le résultat de M. Borel:

*Si l'on suppose convergente la série  $\sum \sqrt{A_n}$ , la série (3) converge pour un ensemble de points\*) dont la longueur est égale à  $|x' - x''|$ . Ou encore: l'ensemble des valeurs de  $x$  pour lesquelles la série (3) n'est pas convergente a pour longueur zéro.*

Je dis maintenant que si l'on admet la convergence de la série

$$\sum \sqrt{A_n}$$

la série (2) converge pour un ensemble de points, pris dans l'intervalle  $(x', x'')$ , dont la longueur est égale à  $|x' - x''|$ .

\*) pris dans l'intervalle  $(x' x'')$ .

En effet, soit  $x$  un point, pris dans l'intervalle  $(x', x'')$ , pour lequel la série (3) est convergente. Je vais montrer que la série (2) converge au même point.

Décomposons la série

$$\sum \frac{A_n}{r_n^{\frac{2}{3}}}$$

en une somme de deux séries partielles

$$\sum \frac{A_h}{r_h^{\frac{2}{3}}} + \sum \frac{A_k}{r_k^{\frac{2}{3}}} = \sum \frac{A_n}{r_n^{\frac{2}{3}}},$$

la première contenant tous les termes pour lesquels

$$r_h < 1,$$

et la seconde tous les termes pour lesquels

$$r_k \geq 1$$

La série

$$\sum_1^{\infty} \frac{A_k}{r_k^{\frac{2}{3}}}$$

est convergente, car ses termes sont respectivement inférieurs à ceux de la série convergente  $\sum A_k$ , puisque, quel que soit  $k$ , on a

$$r_k^{\frac{2}{3}} \geq 1.$$

Quant à la série

$$\sum_1^{\infty} \frac{A_h}{r_h^{\frac{2}{3}}}$$

elle est aussi convergente, car ses termes sont respectivement inférieurs aux termes de la série convergente

$$\sum \frac{A_h}{r_h}.$$

En effet, en vertu de l'hypothèse faite sur les  $r_h$ , on a, quel que soit  $h$ ,

$$r_h < r_h^{\frac{2}{3}}$$

d'où l'on conclut

$$\frac{A_h}{r_h} > \frac{A_h}{r_h^{\frac{2}{3}}}$$

ce qui démontre la convergence de la série  $\sum \frac{A_h}{r_h^{\frac{2}{3}}}$ .

À l'aide de notre hypothèse supplémentaire: que la série  $\sum \sqrt{A_n}$  est convergente, nous avons donc démontré que la série

$$(2) \quad f(x) = \frac{1}{3} \sum \frac{A_n}{(x - a_n)^{\frac{3}{2}}}$$

converge pour un ensemble de points, pris dans  $(x', x'')$  dont la longueur est  $|x' - x''|$ .

§ 3.

**Dérivée de la fonction  $F(x)$ .**

Je vais démontrer maintenant qu'en tout point où la série (2) converge,  $f(x)$  est égal à la dérivée de  $F(x)$  en ce point.

Considérons l'expression

$$\frac{F(x+y) - F(x)}{y} = \sum_1^{\infty} A_n \cdot \frac{(x+y - a_n)^{\frac{3}{2}} - (x - a_n)^{\frac{3}{2}}}{y}$$

On peut l'écrire encore

$$(2') \quad \frac{F(x+y) - F(x)}{y} = \sum_1^{\infty} \frac{A_n}{(x+y - a_n)^{\frac{3}{2}} + (x+y - a_n)^{\frac{1}{2}}(x - a_n)^{\frac{1}{2}} + (x - a_n)^{\frac{3}{2}}},$$

en vertu d'une identité élémentaire.

Je dis que la série du second membre, où la variable est  $y$ , est uniformément convergente dans l'intervalle

$$- \eta, + \eta$$

$\eta$  étant un nombre positif.

En effet, posons

$$\alpha_n = \left( \frac{x+y - a_n}{x - a_n} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On aura

$$\frac{F(x+y) - F(x)}{y} = \sum_1^{\infty} \frac{1}{1 + \alpha_n + \alpha_n^2} \cdot \frac{A_n}{(x - a_n)^{\frac{3}{2}}}.$$

Mais le trinôme  $1 + \alpha_n + \alpha_n^2$  ne s'annule jamais et son minimum est égal à  $\frac{3}{4}$ ; donc la fraction

$$\frac{1}{1 + \alpha_n + \alpha_n^2}$$

admet une limite supérieure égale à  $\frac{4}{3}$ . Par suite, quel que soit  $y$ , on aura

$$\frac{A_n}{(x+y - a_n)^{\frac{3}{2}} + (x+y - a_n)^{\frac{1}{2}}(x - a_n)^{\frac{1}{2}} + (x - a_n)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{4}{3} \cdot \frac{A_n}{(x - a_n)^{\frac{3}{2}}}$$

quel que soit l'indice  $n$ , ce qui prouve que la série (2') est uniformément convergente.

Donc  $F(x)$  admet  $f(x)$  comme dérivée au point  $x$  où la série (2) converge.

Considérons maintenant un point  $\xi$  où la série (2) diverge. Je vais démontrer que si l'on se donne un nombre positif  $M$ , aussi grand que l'on voudra, on peut lui faire correspondre un entier  $m$  et un nombre positif  $\varepsilon$  tels que l'on ait

$$(m) \quad \sum_{n=1}^{n=m} \frac{A_n}{(\xi+y-a_n)^{\frac{2}{3}} + (\xi+y-a_n)^{\frac{1}{3}} (\xi-a_n)^{\frac{1}{3}} + (\xi-a_n)^{\frac{2}{3}}} \geq M$$

dès que

$$|y| \leq \varepsilon.$$

En effet, la série à termes positifs

$$\frac{1}{3} \sum_1^{\infty} \frac{A_n}{(\xi-a_n)^{\frac{2}{3}}}$$

étant divergente on peut trouver un entier  $m$  tel que

$$\frac{1}{3} \sum_1^m \frac{A_n}{(\xi-a_n)^{\frac{2}{3}}} > M.$$

D'autre part, la fonction de  $y$

$$\varphi(y) = \sum_1^m \frac{A_n}{(\xi+y-a_n)^{\frac{2}{3}} + (\xi+y-a_n)^{\frac{1}{3}} (\xi-a_n)^{\frac{1}{3}} + (\xi-a_n)^{\frac{2}{3}}}$$

étant continue au point  $y = 0$ , on peut délimiter autour de ce point un intervalle  $(-\varepsilon, +\varepsilon)$  tel que pour toute valeur de  $y$  comprise dans cet intervalle on ait

$$\varphi(y) \geq M$$

ce qui est justement l'inégalité (m).

Cela étant, puisque les termes de la série (2') sont tous positifs, on peut écrire

$$\frac{F(\xi+y) - F(\xi)}{y} \geq M$$

dès que

$$0 < |y| \leq \varepsilon.$$

Donc le rapport

$$\frac{F(\xi+y) - F(\xi)}{y}$$

augmente indéfiniment lorsque  $|y|$  tend vers zéro.

Ce résultat est capital pour notre objet: il nous prouve, en effet, que la courbe  $(C)$ , définie par l'équation

$$t = F(x)$$

possède une tangente même pour les points  $(\tau, \xi)$ ,  $\xi$  étant un point où la série (2) diverge: mais cette tangente est perpendiculaire à l'axe des  $x$ . La courbe  $(C)$  possède évidemment une tangente pour les points  $(t, x)$ ,  $x$  étant un point où la série (2) converge.

Donc la courbe  $t = F(x)$  possède partout une tangente. Nous avons laissé de côté le cas où  $x$  est égal à l'un quelconque des points  $a_n$ ; mais ce cas rentre, comme on le voit facilement, dans le cas des points  $\xi$ : aux points  $(t_n, a_n)$  la courbe  $(C)$  admet une tangente perpendiculaire à l'axe des  $x$ .

Si l'on adopte les définitions posées par M. Baire dans ses *Leçons sur les fonctions discontinues* (page 220) on peut dire, en résumant les résultats de ce paragraphe: la fonction  $F(x)$  admet, dans l'intervalle  $(x', x'')$ , la fonction  $f(x)$  comme dérivée; mais pour un certain ensemble de points la fonction  $f(x)$  prend la valeur  $+\infty$ .

#### § 4.

### La fonction $G(t)$ et sa dérivée $g(t)$ .

Considérons maintenant la fonction inverse

$$x = G(t).$$

Elle admet, d'après ce qui précède, une dérivée  $x' = g(t)$  et, aux points  $t_n = F(a_n)$  et  $\tau = F(\xi)$  cette dérivée s'annule.

Il importe d'insister sur l'existence des points  $\tau$ , autres que les  $t_n$ . On sait, aujourd'hui, d'après les travaux de M. Baire qu'une fonction dérivée est ponctuellement discontinue; en d'autres termes: elle possède, dans toute intervalle, des points de continuité. D'autre part, on sait que, pour toute fonction ponctuellement discontinue, l'ensemble des points de continuité est de *seconde catégorie\**): il n'est pas constitué par la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses; en particulier il n'est pas dénombrable.

Si l'on considère maintenant la fonction dérivée  $g(t)$ , on voit facilement que l'ensemble des points  $t_n$  est partout dense et, dans ces conditions, il est aisé de montrer que  $g(t)$  ne peut être continue que pour les points où elle s'annule. Or, l'ensemble des points  $t_n$  est dénombrable: donc il existe des points  $\tau$ , autres que les  $t_n$  pour lesquels la fonction  $g(t)$  s'annule.

\*) Baire, Ouvrage cité (page 78).

Et, revenant à la série

$$f(x) = \frac{1}{3} \sum_1^{\infty} \frac{A_n}{(x - a_n)^{\frac{2}{3}}}$$

nous pouvons affirmer qu'il existe, certainement, des points (en infinité non dénombrable) autres que les  $a_n$  pour lesquels la série diverge. Mais nous savons, grâce à l'hypothèse sur la convergence de la série

$$\sum \sqrt{A_n},$$

que la longueur de l'ensemble des points, pour lesquels la série  $f(x)$  diverge, est zéro.

Remarquons enfin, pour terminer, que la fonction positive  $f(x)$  admet comme limite inférieure le nombre

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\sum A_n}{|x' - x''|^{\frac{2}{3}}}.$$

Donc la fonction dérivée  $g(t)$  est bornée.

Jassy, le 2 février 1906.

## Bericht über den Stand der Herausgabe von Gauß' Werken.

## Siebenter Bericht.\*)

Von

FELIX KLEIN in Göttingen.

Der nachstehende Bericht knüpft an den Umstand an, daß soeben (Nov. 1906) der *Band VII der Gesamtausgabe* ausgegeben werden konnte. Der Bearbeiter, Herr Brendel, berichtet darüber folgendermaßen:

„Band VII enthält außer der *Theoria motus* den gesamten theoretisch-astronomischen Nachlaß; da er schon sehr viel stärker ausgefallen ist, als die früher erschienenen Bände, so konnten die noch restierenden kleineren Stücke des Nachlasses über Gegenstände der praktischen und stellaren Astronomie nicht mehr darin Platz finden; sie sollen zugleich mit einigen physikalischen Nachträgen auf Band X verschoben werden.“

„Die *Theoria motus* ist bekanntlich bereits 1871 von Schering im Verlage von F. A. Perthes in einer der Gesamtausgabe entsprechenden Ausstattung herausgegeben und mit einigen kleineren Notizen aus dem Nachlaß versehen worden; die Gesellschaft der Wissenschaften hat aber immer an der Ansicht festgehalten, daß hiermit der spätern Aufnahme der *Theoria motus* in die Gesamtausgabe nicht vorgegriffen sein könne. Bei dem neuen Abdruck, der dementsprechend den Band VII einleitet, wurde das ganze Werk einer nochmaligen genauen Durchsicht unterworfen, wobei eine Reihe von bisher nicht bemerkten Druckfehlern und anderen Unrichtigkeiten aufgefunden und verbessert wurde. Die von Gauß gegebenen numerischen Beispiele zur Bahnbestimmung (Ceres, Pallas, Juno, Vesta) sind klassisch geworden und werden häufig in Lehrbüchern und zur Prüfung neuer Methoden herangezogen. Eine genaue Nachrechnung

\*) Abgedruckt aus den Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Geschäftliche Mitteilungen, 1906, Heft 2. — Vergl. den sechsten Bericht in den Nachrichten d. K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Geschäftliche Mitteilungen, 1904, pag. 15—19. Abgedruckt in Bd. 61 der *Mathematischen Annalen*.



derselben erschien schon aus diesem Grunde keine überflüssige Arbeit; hierbei fanden sich nun mehrere Rechenfehler und andere Stellen, bei denen die Zahlen der Natur der Sache nach etwas unsicher waren. Es wird wertvoll für den Leser sein, diese Stellen, da wo es anging, verbessert und wo dies nicht möglich war, ohne die ganze folgende Rechnung zu ändern, wenigstens genau angegeben zu finden. Für die Einzelheiten muß ich auf meine ausführlichen Bemerkungen hinweisen, die dem Abdruck im siebenten Bande (S. 281) folgen.“

„Der *zweite Abschnitt* des Bandes bringt kleinere „Zusätze zur *Theoria motus* und andere Nachträge zur elliptischen Bewegung“. Die letzteren betreffen hauptsächlich die Zodiaken der Himmelskörper; so bezeichnet Gauß den Teil der Himmelskugel, innerhalb dessen ein Himmelskörper, von der Erde gesehen, überhaupt erscheinen kann. Verschiedenes darüber hat er bereits selbst veröffentlicht. Gauß bezeichnet in seinem späteren Alter (vgl. Bd. VII, Seite 314) diese Frage als eine nicht uninteressante mathematische Aufgabe und scheint sich darüber zu wundern, daß niemand anderes sich inzwischen damit beschäftigt hat; auch bis heute scheint dies nicht der Fall zu sein. Die abgedruckten Nachlaßnotizen enthalten einige interessante Ergänzungen der Gaußschen Veröffentlichungen.“

„Der *dritte Abschnitt* handelt von der parabolischen Bewegung. Gauß beabsichtigte, als Supplement zur *Theoria motus* eine Theorie der parabolischen Bahnen herauszugeben; er schrieb darüber 1815 an Olbers und Bessel (vgl. Bd. VII, Seite 350). Die abgedruckten Stellen geben das, was sich im Nachlaß darüber vorgefunden hat. Speziell interessant sind einige Kunstgriffe, die er anwandte, sowie die Idee, durch Herstellung von Hilfstafeln die Bestimmung einer Bahn zu erleichtern (vgl. Bd. VII, Seite 331). Ein Aufsatz über die Entwerfung einer der Barkerschen ähnlichen Tafel fand sich vollkommen druckfertig im Nachlaß vor, ebenso die Tafel selbst, bei der Gauß nur noch die Interpolation auf das halbe Intervall auszuführen beabsichtigte.“

„Sodann folgen als *vierter Abschnitt* die ersten Störungsrechnungen von Gauß; sie betreffen die Ceres und datieren von 1802 bis 1805. Gauß schließt sich zunächst an Laplace an und rechnet Koordinatenstörungen, wobei er jedoch die säkularen Störungen in solche der Elemente umwandelt; auch entwirft er Tafeln zur leichteren Berechnung der Störungen. Die Resultate der ersten Untersuchung hat Gauß selbst, ohne die Rechnung, kurz veröffentlicht (vgl. Bd. VI). Die späteren Untersuchungen von 1805 sind dann nach einer gänzlich neuen Methode ausgeführt. Auch sie betreffen Koordinatenstörungen; aber die Entwicklung der Störungsfunktion hat Gauß schon damals im Anschluß an seine *Theoria interpolationis* (die sich ebenfalls druckfertig im Nachlaß vorfand, und Band III, Seite 265 ff.

abgedruckt ist) auf interpolatorischem Wege ausgeführt, also dieselbe Methode angewandt, die Hansen über 30 Jahre später neu auffand. Indessen war das Verfahren, das Gauß hier zunächst brauchte, noch etwas umständlich und wurde von ihm erst zur höchsten Vollkommenheit entwickelt bei Gelegenheit der Berechnung der Pallasstörungen.“

„Die Veröffentlichung der Gaußschen Arbeiten über die Störungen der Pallas, welche den *fünften* und wichtigsten Abschnitt des Bandes bilden, wurden seit Jahrzehnten von den Astronomen mit Spannung erwartet, da viele Einzelheiten darüber, im speziellen seine Entdeckung des rationalen Verhältnisses der Umlaufzeiten von Pallas und Jupiter, bereits in die Öffentlichkeit gedrungen waren. Zwar sind die Aufzeichnungen über diese Entdeckung im Nachlaß äußerst spärlich; indessen geht aus ihnen doch hervor, wie Gauß die Störungsglieder mit verschwindendem Divisor behandelte. Nur konnte nicht festgestellt werden, wie Gauß zuerst im Jahre 1812 auf dies Resultat geführt wurde. Es dürfte sich kaum in aller Strenge aufrecht erhalten lassen, schon weil die Störungen höherer Ordnung nicht in Rücksicht gezogen sind. Die Ausführungen, welche ich Herrn F. Klein für den sechsten Bericht zur Verfügung gestellt hatte über die Art und Weise, wie Gauß anfangs auf die Komensurabilität der mittleren Bewegungen beider Planeten geschlossen hat, habe ich später als nicht zutreffend erkannt, und ich muß deswegen auf die Bemerkungen im siebenten Bande selbst (Seite 607—608) verweisen.“

„Gauß hat seiner Rechnung eine ganz außerordentliche Ausdehnung gegeben und die Störungsfunktion auf dem bereits erwähnten interpolatorischen Wege bis zur 18-fachen Anomalie Jupiters und bis zur 21-fachen der Pallas entwickelt. Über diese Entwicklung hat er auch Tagebuch geführt (Bd. VII, Seite 605), woraus hervorgeht, daß er zu dieser Entwicklung allein in etwas über drei Monaten circa 340 000 Ziffern gerechnet hat. In den Ausdrücken für die Störungen der Elemente hat er dann über 3000 Sinus- und ebenso viele Cosinusglieder. Die Vergleichung mit den Beobachtungen zeigte eine recht gute Übereinstimmung (bis auf wenige Bogensekunden) und führte sogar zu einer Verbesserung der Jupitermasse, welche Gauß schließlich überraschend genau gleich  $\frac{1}{1050}$  fand. Von der Pariser Akademie war damals ein hoher Preis ausgesetzt auf die Berechnung der Pallasstörungen; man nahm an, daß er Gauß zufallen würde, und dieser beabsichtigte auch sich darum zu bewerben. Da die Vollendung der Gaußschen Untersuchungen sich aber immer länger hinzog, so wurde auch die Verteilung des Preises mehrfach weiter hinausgeschoben und schließlich verlief die Angelegenheit im Sande, obwohl Gauß' Rechnungen eigentlich als vollendet angesehen werden konnten.

Er wollte indessen, wie immer, so auch hier, etwas ganz Vollkommenes liefern und hatte auch Nikolai veranlaßt, die Saturnstörungen zu berechnen, sowie selbst die Berechnung der Marsstörungen übernommen; nur diese letzteren sind nicht ganz fertig geworden; für die Jupiterstörungen hat Gauß sogar fertige Tafeln hergestellt. Er fand nicht mehr die Zeit, die Arbeit zum Abschluß zu bringen und druckfertig zu machen; er sagt 1834 in einem Briefe an Gerling (Bd. VII, Seite 432): „Es ist mir ein schmerzlicher Gedanke, daß meine vor mehr als 20 Jahren gemachte Arbeit über die Pallasstörungen ohne Fortsetzung, Entwicklung und Bekanntmachung bisher hat bleiben müssen, auch wahrscheinlich, wie vieles Andere, einst mit mir untergehen wird. Sie glauben nicht, wie schwer es mir durch so vielfache Zersplitterung der Zeit sowie unter dem Druck so mancher Verhältnisse wird, eine wissenschaftliche Arbeit durchzuführen.“ Übrigens fand sich im Nachlaß ein Anfang zur Drucklegung seiner Untersuchungen, nämlich ein begonnenes Manuskript (abgedruckt Bd. VII, Seite 439ff.): „Exposition d'une nouvelle méthode de calculer les perturbations planétaires, avec l'application au calcul numérique des perturbations du mouvement de Pallas“. Dasselbe enthält die Ableitung der Differentialgleichungen für die Variationen der Elemente, welche bald nachher auch von Lagrange veröffentlicht wurden; auch ein interessantes Kapitel über die Entwicklung periodischer Funktionen in Reihen findet sich darin.“

„Der *letzte Abschnitt* des Bandes endlich bringt eine Theorie des Mondes, die wegen der Behandlung der Differentialgleichungen der Mondbewegung Interesse verdient. Die Methode ist ähnlich der Laplaceschen, die dieser veröffentlichte, während Gauß vermutlich noch mit seinen Untersuchungen beschäftigt war; er hat sie ziemlich plötzlich abgebrochen. Die Resultate erhalten dieselbe Form wie später bei Plana.“

„Da die Bände VII und IX der Gesamtausgabe bereits 1900, bezw. 1903, erschienen sind, soll nunmehr an die Bearbeitung des letzten Bandes (X) unmittelbar herangegangen werden; er wird die noch fehlenden Nachlaßstücke über Gegenstände der praktischen und stellaren Astronomie, Chronologie, theoretische Physik und Optik bringen; sodann Biographisches, Mitteilungen allgemeinen Interesses, insbesondere aus dem Briefwechsel, einen Bericht über die Herausgabe der Gauß'schen Werke, einen solchen über das Gauß-Archiv und ein ausführliches Generalregister.“

## Die Fokaltheorie der linearen Strahlenkongruenzen.

Von

STANISLAUS JOLLES in Berlin.

1. Die Fokaltheorie der linearen Strahlenkongruenzen fehlt bisher. Man weiß nur, daß eine elliptische lineare Kongruenz in zwei reellen Geraden — ihren Fokalachsen — zirkulare Ebeneninvolutionen hervorruft, hingegen eine hyperbolische lineare Kongruenz keine reellen Fokalachsen besitzt.\*) Ich wurde anfangs durch diese merkwürdige Eigenschaft der sonst so leicht zugänglichen hyperbolischen linearen Kongruenz abgeschreckt, nach allgemeinen Fokaleigenschaften der linearen Kongruenzen zu suchen. Später jedoch führten mich Fragen über die in einer linearen Kongruenz enthaltenen rotatorischen Regelscharen zu einigen allgemein gültigen Fokaleigenschaften und diese endlich zur Fokaltheorie der linearen Kongruenzen.

Eng verknüpft mit der Fokaltheorie der linearen Kongruenzen erweist sich die Theorie des Zylindroides. Synthetisch sind Grundeigenschaften dieser Fläche schon von Herrn Schoenflies\*\*) und Herrn Sturm\*\*\*) abgeleitet worden, doch erzeugt dieser die Regelschar der Fläche durch zwei ein-zweideutig aufeinander bezogene Punktreihen, während jener von kinematischen Überlegungen ausgeht. Da die Untersuchungen in dieser Arbeit rein synthetisch geführt werden, so war zunächst eine rein synthetische Theorie des Zylindroides aufzustellen. — Ein Zylindroid ist bekanntlich das Hauptachsenzylindroid von  $\infty^1$  linearen Kongruenzen. Ihre drei gemeinschaftlichen Symmetrieachsen sind natürlich Symmetrieachsen ihres Hauptachsenzylindroides und des jene  $\infty^1$  linearen Kongruenzen umfassenden quadratischen Komplexes. Mit Hilfe dieser

\*) Reye, Die Geometrie der Lage. 2. Abteilung. 3. Auflage. Leipzig 1892, S. 259, N. 15.

\*\*) Schoenflies, Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung. Leipzig 1886, S. 157, N. 10.

\*\*\*) Sturm, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. 1. Teil. Leipzig 1892, S. 150.

Symmetrieachsen lassen sich manche Sätze aus der Theorie dieser Gebilde recht einfach und anschaulich beweisen.

Eine Ebene, welcher durch eine lineare Kongruenz  $C_1^1$  eine zu ihr normale Ebene zugeordnet ist, heiße eine Mittelebene der Kongruenz. Die Mittelebenen von  $C_1^1$  umhüllen ein gleichseitiges Paraboloid  $C^2$ , das Fokalparaboloid der linearen Kongruenz. Seine Erzeugenden sind durch  $C_1^1$  paarweise einander zugeordnet. Werden die beiden Regelscharen von  $C^2$  die Fokalregelscharen und die sie bzw. paarenden Involutionen die Fokalinvolutionen von  $C_1^1$  genannt, so ist  $C_1^1$  hyperbolisch, wenn beide Fokalinvolutionen elliptisch sind, elliptisch, wenn die eine Fokalinvolution hyperbolisch, die andere elliptisch ist. Die Doppelstrahlen der auf  $C^2$  gelegenen Fokalinvolutionen sind die Fokalachsen von  $C_1^1$ . Eine hyperbolische lineare Kongruenz hat also zwei Paare konjugiert imaginärer Fokalachsen, eine elliptische ein Paar reeller und ein Paar konjugiert imaginärer. Bei einer parabolischen linearen Kongruenz ist die eine Fokalinvolution parabolisch, die andere elliptisch. Letztere wird gebildet durch die sich rechtwinklig kreuzenden Strahlen der betreffenden Fokalregelschar. Je zwei einander zugeordnete Geraden  $e^1$ ,  $e^2$  einer Fokalinvolution sind Leitstrahlen einer in  $C_1^1$  enthaltenen orthogonalen Regelschar II. Ordnung, welche zu  $C^2$  und  $C_1^1$  in sehr merkwürdigen Beziehungen steht. Zu jeder Fokalregelschar gehört ein Büschel solcher orthogonalen Regelscharen. Die in vier Geraden zerfallende Basis-kurve jedes solchen Büschels enthält ein Paar Fokalachsen von  $C_1^1$ , sie sind zugleich die Leitgeraden einer für die Theorie von  $C_1^1$  besonders wichtigen linearen Kongruenz, welche eine Fokalkongruenz von  $C_1^1$  genannt wird. Zu einer linearen Kongruenz gehören hiernach zwei Fokalkongruenzen. — Eine gleichseitige parabolische Regelschar, deren Strahlen derart involutorisch gepaart werden, daß ihrem unendlich fernen Strahle der ihn rechtwinklig kreuzende Scheitelstrahl zugeordnet wird, ist stets eine Fokalregelschar einer gewissen linearen Kongruenz. Da nun eine elliptische Fokalinvolution sowohl eine hyperbolische als auch eine elliptische lineare Kongruenz bestimmen kann, so ist es von Wichtigkeit, die Kriterien für das eine und das andere zu ermitteln, wobei sich wieder eine Fülle von interessanten Beziehungen ergeben. *Überhaupt scheinen die Fokalinvolutionen einer linearen Kongruenz für sie von derselben Wichtigkeit zu sein, wie die Fokalinvolutionen für das polare Feld und die Fokalfelder für den polaren Raum.*

Mit der Fokaltheorie der linearen Kongruenzen eng verknüpft ist die Frage nach den rotatorischen polaren Räumen  $\Gamma_e^2$ , die eine lineare Kongruenz  $C_1^1$  derart in sich selbst überführen, daß die durch  $C_1^1$  einander zugeordneten Punkte und Ebenen in  $\Gamma_e^2$  konjugiert sind; insbesondere also

die Frage nach den reellen in  $C_1^1$  enthaltenen rotatorischen Regelscharen. Bisher hat man solche polaren Räume wohl für die hyperbolische lineare Kongruenz bestimmt, hingegen die betreffenden Untersuchungen für die elliptische lineare Kongruenz ganz unterlassen, und gerade für diese bieten sie besonders Bemerkenswertes. Die rotatorischen polaren Räume  $\Gamma_e^2$  haben in diesem Falle sowohl reelle wie auch imaginäre Inzidenzflächen, während sie in jenem nur reelle Inzidenzflächen haben.

Lineare Strahlenkongruenzen mit demselben Fokalparaboloide  $C^3$  sollen konfokal heißen. Konfokale lineare Strahlenkongruenzen sind für  $C^3$  autopolar und haben dasselbe Hauptachsenzyliindroid  $C^3$ . Diese Fläche ist der Ort der Mittelpunkte aller  $C^2$  umschriebenen Kegel des Hachette und ebenfalls autopolar für  $C^2$ . Die zwischen  $C^2$  und  $C^3$  bestehenden Beziehungen gestatten einerseits bekannte Sätze einfacher und schärfer zu beweisen, andererseits neue Sätze abzuleiten. Zu diesen gehört der Satz, daß die Scheitelstrahlen konfokaler hyperbolischer Paraboloides Regelstrahlen eines Zylindroides sind; zu jenen, daß die zueinander polaren Fokalachsen eines gleichseitigen Paraboloides die Regelschar eines Zylindroides bilden. \*) Die Theorie des Fokalparaboloides und Hauptachsenzyliindroides konfokaler linearer Kongruenzen führt, beiläufig bemerkt, recht anschaulich zu den synthetischen Bedingungen, unter denen zueinander normale Tangentialebenen eines Kegels II. Ordnung sich in den Strahlen eines Kegels II. Ordnung oder zweier Strahlenbüschel I. Ordnung schneiden. — Die  $\infty^1$  konfokalen linearen Kongruenzen mit demselben Fokalparaboloide sollen eine Kette konfokaler linearer Kongruenzen heißen. Eine solche Kette läßt sich auf jedes Gebilde I. Stufe projektiv beziehen, insbesondere bilden die einem beliebigen Raumpunkte durch die Kongruenzen einer Kette zugeordneten Punkte eine zur Kette projektive Parabel. — Erheblich einfacher als im allgemeinen Falle ergeben sich endlich jene oben erwähnten orthogonalen Regelscharen II. Ordnung und rotatorischen polaren Räume  $\Gamma_e^2$  bei den rotatorischen linearen Kongruenzen.

Wie schon hervorgehoben wurde, ist die Beweismethode durchgängig rein synthetisch. Ihr stellten sich sehr häufig Schwierigkeiten entgegen, wollte man nicht in den leider noch immer so häufigen Fehler verfallen, für reelle Gebilde Bewiesenes ohne weiteres auf imaginäre zu übertragen. Jedes Gebilde, dessen imaginärer Charakter nicht ausdrücklich hervor-

\*) Schröter, Über ein einfaches Hyperboloid von besonderer Art. Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 85 (1877), S. 39, N. 7 b.

Schröter spricht weder diesen noch die ihm in 39, 40 und 41 außerdem zugeschriebenen Sätze über das Zylindroid aus, da er nicht erkennt, daß die von ihm gefundenen Geraden  $s, s_1$  Regelstrahlen eines Zylindroides sind. Doch ergeben sie sich ohne weiteres aus seinen Untersuchungen, sobald letzteres nachgewiesen wurde.

gehoben oder unmittelbar zu erkennen ist, ist also als reell zu betrachten.

Fördernde Anregung zu einigen Untersuchungen in dieser Arbeit verdanke ich der soeben angeführten Abhandlung Schröters und dem ersten Teile der Liniengeometrie\*) des Herrn Sturm. Ich fühle mich verpflichtet, dies außer durch die betreffenden Literaturangaben hier noch besonders hervorzuheben.

### Das Zylindroid.

2. Alle in einer linearen Kongruenz  $C_1^1$  sich schneidenden linearen Komplexe bilden bekanntlich einen Büschel linearer Komplexe  $[C_1^1]$ . Durch die Komplexe dieses Büschels sind im allgemeinen einer unendlich fernen Geraden  $r_\infty$  die Strahlen einer zum Büschel projektiven parabolischen Regelschar II. Ordnung  $\mathfrak{R}^2$  zugeordnet. (Für eine hyperbolische lineare Kongruenz, deren eine Leitgerade unendlich fern liegt, zerfällt  $\mathfrak{R}^2$  stets in zwei Strahlenbüschel I. Ordnung. Dieser Ausnahmefall wird ausgeschlossen.) — Die Strahlen von  $\mathfrak{R}^2$  sind Durchmesser der ihnen entsprechenden Komplexe. Werden von einem beliebigen Punkte auf diese Durchmesser senkrechte Ebenen gefällt, so bilden sie einen zur Regelschar  $\mathfrak{R}^2$  und zu dem Komplexbüschel  $[C_1^1]$  projektiven Ebenenbüschel I. Ordnung. Die durch die Komplexe von  $[C_1^1]$  der Achse  $a$  dieses Ebenenbüschels zugeordneten Geraden sind wiederum Strahlen einer zum Komplexbüschel  $[C_1^1]$  und folglich auch zum Ebenenbüschel  $[a]$  projektiven Regelschar II. Ordnung  $\mathfrak{R}_1^2$ , zu der  $a$  selbst gehört. Sie schneiden die ihnen entsprechenden Ebenen des Büschels  $[a]$  je in dem Nullpunkte bezüglich desjenigen Komplexes, durch den sie selbst  $a$  zugeordnet werden. Diese Nullpunkte bilden also eine zu  $\mathfrak{R}_1^2$  perspektive und somit zu  $\mathfrak{R}^2$  projektive Kurve II. Ordnung  $\alpha^2$ . — Jede Ebene des Büschels  $[a]$  steht auf den Durchmessern des ihr entsprechenden Komplexes senkrecht und dieser weist ihr einen Nullpunkt zu. Der durch diesen Nullpunkt gehende Durchmesser des betreffenden Komplexes ist also eine Hauptachse. Da die Hauptachsen der Komplexe des Büschels  $[C_1^1]$  den Kegelschnitt  $\alpha^2$  und den unendlich fernen Strahl  $c_\infty$  der Trägerkongruenz  $C_1^1$  des Komplexbüschels in projektiven Punktreihen schneiden, so bilden sie, solange die Ebene  $\alpha$  von  $\alpha^2$  nicht durch  $c_\infty$  geht — und dies werde nunmehr vorausgesetzt — eine Regelschar III. Ordnung  $\mathfrak{C}^3$  mit der einfachen Leitgeraden  $c_\infty$ . Der Träger von  $\mathfrak{C}^3$  ist eine Regelfläche III. Grades  $C^3$ , das sogenannte Zylindroid. Es ist zunächst als der Ort der Hauptachsen eines Büschels

\*) Der lineare Komplex oder das Strahlengewinde und der tetraedale Komplex. Leipzig 1892.

linearer Komplexe definiert. Die Doppelpunktgerade  $c_a$  des Zylindroids ist der zu den Ebenen des Büschels  $[c_\infty]$  senkrechte, also zu  $a$  parallele Strahl der Trägerkongruenz  $C_1^1$ . Jede durch  $c_a$  gehende Ebene enthält folglich einen Regelstrahl von  $\mathbb{C}^3$ . Zur Regelschar  $\mathbb{C}^3$  gehören beim hyperbolischen Komplexbüschel die Leitgeraden seiner Trägerkongruenz. — Der zur Doppelpunktgeraden  $c_a$  parallele Strahl  $a$  schneidet die Regelschar  $\mathbb{C}^3$  in dem unendlich fernen Punkte von  $c_a$  und in einem im Endlichen gelegenen Punkt  $A$ . Zu der Ebene  $Ac_a$  ist ein Regelstrahl von  $\mathbb{C}^3$  normal. Er schneidet  $c_a$  in einem Punkte, durch welchen noch derjenige Regelstrahl  $s$  von  $\mathbb{C}^3$  geht, der in der Ebene  $\alpha$  des zu  $\mathbb{C}^3$  perspektiven Kegelschnittes  $\alpha^2$  liegt.  $\alpha$  ist im allgemeinen durch  $A$  und  $s$  bestimmt. Sei nun  $\xi^2$  ein beliebiger zur Regelschar  $\mathbb{C}^3$  perspektiver Kegelschnitt,  $x$  der in seiner Ebene gelegene und  $x'$  der mit  $x$  inzidente Regelstrahl von  $\mathbb{C}^3$ , so folgt demnach:  $\alpha^2$  fällt mit  $\xi^2$  zusammen, sobald der zu  $c_a$  parallele Strahl  $a$  durch den Schnittpunkt von  $\xi^2$  mit demjenigen Regelstrahle von  $\mathbb{C}^3$  geht, der  $x'$  rechtwinklig kreuzt. Der Kegelschnitt  $\alpha^2$  kann somit als ein ganz beliebiger zur Regelschar  $\mathbb{C}^3$  perspektiver Kegelschnitt angesehen werden. — Die Ebenenbüschel  $[a]$  und  $[c_a]$  sind perspektiv zum Kegelschnitt  $\alpha^2$ , also projektiv zueinander und erzeugen, da ihre Achsen parallel laufen und entsprechende Ebenen aufeinander senkrecht stehen, einen zu  $\alpha^2$  perspektiven Rotationszylinder. Aus den vorstehenden Betrachtungen ergeben sich nunmehr die folgenden bekannten Sätze:

Auf einem Zylindroide  $C^3$  gelegene Kegelschnitte sind Ellipsen, seine beiden mit seiner einfachen Leitgeraden  $c_\infty$  inzidenten doppelt berührenden Ebenen (Kuspidalebene)  $\gamma', \gamma''$  sind also reell. Die auf  $C^3$  gelegenen Ellipsen projizieren sich auf  $\gamma', \gamma''$  orthogonal als Kreise, und jeder durch die Doppelpunktgerade  $c_a$  von  $C^3$  gehende Rotationszylinder hat mit  $C^3$  eine Ellipse gemein. Werden von einem im Endlichen gelegenen Punkte  $A$ , der nicht der Doppelpunktgeraden  $c_a$  des Zylindroides  $C^3$  angehört, auf die Regelstrahlen der Fläche Normalen gefällt, so bilden ihre Fußpunkte eine Ellipse  $\alpha^2$ , sie selbst also einen Strahlenkegel II. Ordnung. Dieser Kegel zerfällt, wenn  $A$  auf  $C^3$  liegt, in zwei Strahlenbüschel I. Ordnung. Die Fußpunkte der Normalen, welche aus den Punkten einer Parallelen zur Doppelpunktgeraden  $c_a$  von  $C^3$  auf seine Regelstrahlen gefällt werden, liegen auf der nämlichen Ellipse. — Die beiden parallelen Kuspidalebenen  $\gamma', \gamma''$  berühren die auf der Fläche gelegenen Ellipsen je in ihren Hauptscheitelpunkten. Die Nebenachsen dieser Ellipsen liegen in der Symmetrieebene  $\gamma$  beider Kuspidalebenen und ihre Exzentrizität ist stets gleich dem halben Abstände dieser Ebenen. Sich schneidende Regelstrahlen eines Zylindroids



droides  $C^3$  treffen eine auf ihm gelegene Ellipse  $\alpha^2$  je in den Punktepaaren einer hyperbolischen Involution, deren Zentrum der unendlich ferne Punkt der Nebenachse von  $\alpha^2$  ist. Zu dieser Nebenachse ist der in der Ebene von  $\alpha^2$  gelegene Regelstrahl parallel.

3. Je zwei zueinander senkrechte durch die Doppelpunktsgerade  $c_a$  eines Zylindroides  $C^3$  gehende Ebenen projizieren zwei sich rechtwinklig kreuzende Regelstrahlen der Fläche, somit werden die sich rechtwinklig kreuzenden Regelstrahlen von  $C^3$  aus  $c_a$  durch Ebenenpaare einer zirkularen Ebeneninvolution projiziert, und diese schneiden folglich eine auf  $C^3$  gelegene Ellipse  $\alpha^2$  in den Punktepaaren einer Involution. Durch die zirkuläre Ebeneninvolution mit der Achse  $c_a$  werden aber nicht nur die Punkte von  $\alpha^2$ , sondern auch die Strahlen des Rotationszylinders involutorisch gepaart, der  $\alpha^2$  nach 2. aus dem unendlich fernen Punkte von  $c_a$  projiziert, und da zugeordnete Strahlen aus  $c_a$  durch orthogonale Ebenen projiziert werden, so ist die Involutionsachse für die involutorische Paarung der Zylinderstrahlen die Rotationsachse des Zylinders, das Involutionzentrum für die involutorische Paarung der Punkte von  $\alpha^2$  durch sich rechtwinklig kreuzende Regelstrahlen von  $C^3$  also der Mittelpunkt dieser Ellipse. Ein Punktepaar der Involution auf  $\alpha^2$  bilden die Hauptscheitelpunkte, in ihnen berührt  $\alpha^2$  nach 2. die Berührungsstrahlen der Kuspidelebenen  $\gamma', \gamma''$ , d. h. die Kuspidalstrahlen  $c', c''$  von  $C^3$ . Die Kuspidalstrahlen kreuzen sich hiernach rechtwinklig, und die sie aus der Doppelpunktsgeraden  $c_a$  projizierenden Ebenen sind zueinander orthogonal. Nun sind die beiden  $c', c''$  aus  $c_a$  projizierenden Ebenen bekanntlich die Doppelebenen der Ebeneninvolution, deren Ebenenpaare die inzidenten Regelstrahlen der Fläche projizieren, folglich gilt:

Sich rechtwinklig kreuzende Regelstrahlen eines Zylindroides  $C^3$  schneiden eine Ellipse der Fläche in den Punktepaaren einer Involution. Das zugehörige Involutionzentrum ist der Mittelpunkt des Kegelschnittes.

Ferner ergibt sich mit Rücksicht auf 2. der bekannte Satz:

Sich schneidende Regelstrahlen von  $C^3$  werden aus der Doppelpunktsgeraden  $c_a$  durch die Ebenenpaare einer symmetrischen Ebeneninvolution projiziert, deren Doppelebenen die Kuspidalstrahlen  $c', c''$  von  $C^3$  enthalten. Diese Doppelebenen sind Symmetrieebenen von  $C^3$ .

4. Der unendlich ferne Punkt der Nebenachse einer Ellipse  $\alpha^2$  des Zylindroides  $C^3$  ist nach 2. das Involutionzentrum für diejenige Punktinvolution auf  $\alpha^2$ , in deren Punktepaaren sich schneidende Regelstrahlen von  $C^3$  den Kegelschnitt treffen. Der Mittelpunkt von  $\alpha^2$  hingegen ist nach 3. das Involutionzentrum für diejenige Punktinvolution auf  $\alpha^2$ , deren Punktepaare auf zueinander rechtwinkligen Strahlen von  $C^3$  liegen. Beide

Punktinvolutionen haben das aus den Nebenseitelpunkten von  $\alpha^2$  bestehende Punktepaar gemein, demnach erweisen sich die durch diese Punkte gehenden Regelstrahlen  $c_1, c_2$  von  $C^3$  als die einzigen sich rechtwinklig schneidenden Strahlen dieser Fläche. Sie liegen nach 2. in der Symmetrieebene  $\gamma$  der beiden Kuspidalebenen  $\gamma', \gamma''$  von  $C^3$ . — Die sich rechtwinklig schneidenden Strahlen  $c_1, c_2$  sind bzw. die Hauptachsen zweier füreinander nullinvarianten Komplexe des Komplexbüschels  $[C_1^1]$ , folglich sind die Nullpunkte der Ebene  $c_d c_1$  bezüglich dieser Komplexe — d. h. der Punkt  $c_d \gamma$  und der unendlich ferne Punkt von  $c_d$  — durch die Trägerkongruenz  $C_1^1$  des Büschels einander zugeordnet.  $c_d$  ist aber nach 2. der Hauptstrahl von  $C_1^1$ , somit fällt  $\gamma$  mit der Fluchtebene von  $C_1^1$  zusammen.

Der Punkt  $c_d \gamma$  hat in bezug auf die beiden Komplexe des Büschels  $[C_1^1]$ , deren Hauptachsen  $c_1, c_2$  sind, bzw. die Nullebenen  $c_d c_2, c_d c_1$ . Diese Ebenen sind sonach durch seine Trägerkongruenz  $C_1^1$  einander zugeordnet und schneiden folglich die unendlich ferne Ebene bzw. in den  $c_1, c_2$  durch  $C_1^1$  bzw. zugeordneten Strahlen  $c_2^\infty, c_1^\infty$ . Bei einer hyperbolischen Trägerkongruenz  $C_1^1$  ist der Punkt  $c_d \gamma$  zugleich der Mittelpunkt des kürzesten Abstandes  $d$  ihrer beiden Leitgeraden  $u, v$ , ferner hälften bei ihr die normalen einander zugeordneten Ebenen  $c_d c_1, c_d c_2$  die Winkel der sich selbst zugeordneten Ebenen  $c_d u, c_d v$ . Somit ergeben sich bei einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz die Strahlen  $c_1, c_2$  als die Hälftgeraden der Winkel, welche die durch die Mitte von  $d$  gehenden Parallelen zu  $u, v$  miteinander bilden.

5. Je zwei sich rechtwinklig kreuzende Regelstrahlen von  $C^3$  schneiden eine auf der Fläche gelegene Ellipse  $\alpha^2$  nach 3. in den Endpunkten je eines Durchmessers dieses Kegelschnittes. Da nach 2. die Nebenachse von  $\alpha^2$  in der Symmetrieebene  $\gamma$  der Kuspidalebenen des Zylindroides liegt, so hälftet  $\gamma$  den Abstand je zweier sich rechtwinklig kreuzenden Regelstrahlen. — Von zwei sich schneidenden Regelstrahlen  $u_1, u_2$  von  $C^3$  kreuzt  $u_1$  einen Regelstrahl  $v_2$  und  $u_2$  einen Regelstrahl  $v_1$  rechtwinklig;  $v_1, v_2$  schneiden sich, und die Ebenen  $u_1 u_2, v_1 v_2$  liegen symmetrisch zu  $\gamma$ . — Wird unter dem Winkel  $\varphi_w$  zweier sich schneidenden Regelstrahlen  $w_1, w_2$  von  $C^3$  einer der beiden Winkel verstanden, den die durch den Doppelstrahl  $c_d$  und den Kuspidalstrahl  $c'$  gehende Ebene  $c_d c'$  hälftet, und sind  $u_1, u_2$  und  $v_1, v_2$  zwei Paar sich schneidender Regelstrahlen, deren Ebenen symmetrisch zu  $\gamma$  liegen, so ist:

$$\varphi_u + \varphi_v = \pi.$$

Eine Ellipse  $\alpha^2$  projiziert sich nach 2. auf  $\gamma$  orthogonal als ein Kreis, dessen Mittelpunkt mit dem von  $\alpha^2$  zusammenfällt. Geht die Ebene von  $\alpha^2$  — was nunmehr vorausgesetzt werden soll — durch einen der beiden sich rechtwinklig schneidenden Regelstrahlen von  $C^3$ , und schließt sie mit

$\gamma$  einen Winkel von  $45^\circ$  ein, so ist der Halbmesser jenes Kreises gleich dem Abstände der Kuspidalstrahlen des Zylindroides von der Ebene  $\gamma$ . — Den Abständen aller Punkte des Raumes von  $\gamma$  möge ein positiver oder negativer Wert zuerteilt werden, je nachdem sie mit dem Kuspidalstrahle  $c'$  von  $C^3$  auf derselben Seite von  $\gamma$  liegen oder nicht. Ist dann  $a_{c'}$  der Abstand des Kuspidalstrahles  $c'$  und  $a_u$  der zweier sich schneidenden Regelstrahlen  $u_1, u_2$  von  $\gamma$ , so folgt, da sich nunmehr leicht in  $\gamma$  ein gleichschenkliges Dreieck nachweisen läßt, dessen Winkel an der Spitze gleich  $2\varphi_u$ , dessen von ihr ausgehende Höhe gleich  $a_u$  und dessen gleiche Seiten gleich  $a_{c'}$  sind:

$$a_{c'} \cos \varphi_u = a_u.$$

Der Winkel  $\varphi_u$  zweier sich schneidenden Regelstrahlen  $u_1, u_2$ , deren Ebene bzw. einen positiven oder negativen Abstand von  $\gamma$  hat, ist  $<$  bzw.  $>$   $\frac{\pi}{2}$ . Im folgenden wird unter dem Winkel zweier sich schneidenden Regelstrahlen eines Zylindroides  $C^3$  stets einer der beiden Winkel verstanden, die von der Ebene  $c_d c'$  gehäuftet werden.

6. Schneidet der zur Doppelpunktgeraden  $c_d$  eines Zylindroides  $C^3$  parallele Strahl  $a$  einen Regelstrahl  $s$  von  $C^3$  in einem Punkte  $A$ , so geht die Ebene des durch ihn bestimmten Kegelschnittes  $\alpha^2$  der Fläche nach  $\mathfrak{Z}$  durch  $A$  und den Strahl  $s'$  von  $C^3$ , der den  $s$  rechtwinklig kreuzenden Regelstrahl schneidet. Die Ebene von  $\alpha^2$  geht durch  $s$  selbst, wenn  $s$  einer der beiden sich rechtwinklig schneidenden Regelstrahlen  $c_1, c_2$  von  $C^3$  ist.  $c_1$  und  $c_2$  fallen hierbei bzw. mit der Nebenachse von  $\alpha^2$  zusammen und ergeben sich somit als Symmetrieachsen von  $C^3$ . Eine dritte Symmetrieachse von  $C^3$  ist bekanntlich seine Doppelpunktgerade  $c_d$ . Diese möge als Hauptsymmetrieachse, jene als Nebensymmetrieachsen des Zylindroides bezeichnet werden. Während die Hauptsymmetrieachse des Zylindroides längst bekannt ist, hat die Nebensymmetrieachsen wohl zuerst Herr Reye bemerkt.

Alle Strahlen einer linearen Strahlenkongruenz  $C_1^1$ , die einen Strahl  $x$  ihres Hauptachsenzylindroides  $C^3$  schneiden, bilden eine gleichseitige parabolische Regelschar. Der zu ihr gehörige Scheitelstrahl ist die Hauptsymmetrieachse  $c_d$  von  $C^3$ , der zu ihren Strahlen normale Scheitelstrahl der Strahl  $x$  selbst und ihre Hauptachse ist die Normale im Punkte  $x c_d$  auf der Ebene  $x c_d$ . Fällt  $x$  bzw. mit einer der beiden Nebensymmetrieachsen  $c_1, c_2$  von  $C^3$  zusammen, so ist hiernach  $c_2$  bzw.  $c_1$  die Hauptachse der gleichseitigen parabolischen Regelschar  $\mathfrak{P}_1^2$  bzw.  $\mathfrak{P}_2^2$ . Durch Spiegelung an  $c_2$  gehen daher die Regelscharen  $\mathfrak{P}_2^2$  und  $\mathfrak{P}_1^2$  in sich selbst über. Die in  $C_1^1$  enthaltenen Regelscharen  $\mathfrak{P}_1^2, \mathfrak{P}_2^2$  bestimmen nun  $C_1^1$  eindeutig, folglich geht auch diese lineare Kongruenz durch Spiegelung an  $c_2$  in sich

selbst über, oder  $c_2$  ist eine Symmetrieachse von  $C_1^1$ . Das gleiche gilt von  $c_1$ . Bekanntlich ist auch die Hauptsymmetrieachse  $c_d$  von  $C^3$  eine Symmetrieachse von  $C_1^1$ . Sie heie mit Rücksicht hierauf die Hauptsymmetrieachse der linearen Kongruenz und ebenso jede der Nebensymmetrieachsen  $c_1, c_2$  des Zylindroides eine Nebensymmetrieachse der Kongruenz. Beim Hauptachsenzylindroid einer hyperbolischen Strahlenkongruenz  $C_1^1$  werden die mit den Leitgeraden von  $C_1^1$  zusammenfallenden Regelstrahlen von  $C^3$  an jeder der beiden Nebensymmetrieachsen ineinander gespiegelt.

7. Eine Nebensymmetrieachse  $c_x$  von  $C_1^1$  ist ein Scheitelstrahl der gleichseitigen parabolischen Regelschar  $\mathfrak{P}_x^2$ , die von allen mit ihr inzidenten Kongruenzstrahlen gebildet wird. Ist nun  $C_1^1$  hyperbolisch, so ist die durch  $C_1^1$  in der Leitschar von  $\mathfrak{P}_x^2$  hervorgerufene Involution ebenfalls hyperbolisch und ihre Doppelstrahlen sind die Leitgeraden  $u, v$  von  $C_1^1$ . Die Leitgeraden  $u, v$  gehen durch Spiegelung von  $C_1^1$  an  $c_x$  ineinander über,  $c_x$  ist also die Rotationsachse einer in  $C_1^1$  enthaltenen rotatorischen Regelschar. In bezug auf diese Regelschar sind die durch  $C_1^1$  einander zugeordneten Punkte und Ebenen einander konjugiert und die Strahlen von  $C_1^1$  paarweise reziproke Polaren. Insbesondere sind polar zueinander je zwei sich rechtwinklig kreuzende Regelstrahlen von  $\mathfrak{P}_x^2$ . Diese parabolische Regelschar ist somit für jene rotatorische autopolar.

Ist  $C_1^1$  elliptisch, so ist die durch  $C_1^1$  in der Leitschar von  $\mathfrak{P}_x^2$  hervorgerufene Involution ebenfalls elliptisch, und ihre Potenzstrahlen  $h, h'$  gehen durch Spiegelung an  $c_x$  ineinander über. Durch  $c_x$  als Rotationsachse und  $h, h'$  als reziproke Polaren ist ein rotatorischer polarer Raum  $\Gamma_x^2$  mit imaginärer Inzidenzfläche bestimmt. Seine Rotationsachse  $c_x$  und ihre Polare sowie  $h$  und  $h'$  sind durch  $C_1^1$  einander zugeordnet, ferner sind zwei sich rechtwinklig kreuzende Strahlen der in  $C_1^1$  enthaltenen parabolischen Regelschar  $\mathfrak{P}_x^2$  in  $\Gamma_x^2$  reziprok polar. Durch  $C_1^1$  wird hiernach  $\Gamma_x^2$  in sich selbst übergeführt und umgekehrt sind die Strahlen von  $C_1^1$  also paarweise in  $\Gamma_x^2$  zueinander polar. — In den Strahlen von  $\mathfrak{P}_x^2$  rufen  $\Gamma_x^2$  und  $C_1^1$  identische Punkt- und Ebeneninvolutionen hervor. Sind nun  $\alpha, \alpha'$  ein Paar sich in einem Strahle  $z$  von  $\mathfrak{P}_x^2$  schneidende durch  $C_1^1$  einander zugeordnete und somit auch in  $\Gamma_x^2$  konjugierte Ebenen, so schneiden sie den  $z$  rechtwinklig kreuzenden Regelstrahl  $z_r$  von  $\mathfrak{P}_x^2$  wechselweise in ihren Polen  $A, A'$ , und diese Punkte sind durch  $C_1^1$  einander zugeordnet. Einem mit  $A, \alpha'$  inzidenten Strahle  $g'$  ist durch  $C_1^1$  ein mit  $A', \alpha$  inzidenter Strahl  $g$  zugeordnet.  $g, g'$  treffen den Strahl  $z$  bzw. in den durch  $C_1^1$  einander zugeordneten und in  $\Gamma_x^2$  konjugierten Punkten  $G, G'$ , deren Polarebenen  $\gamma, \gamma'$  durch  $z_r$  und bzw.  $G', G$  gehen und folglich  $g'$  bzw.  $g$  enthalten. In  $g'$  schneiden sich somit die Polarebenen  $\alpha', \gamma$  der mit  $g$  inzidenten

Punkte  $A', G$ , und die durch  $C_1^1$  einander zugeordneten Geraden  $g, g'$  sind also in  $\Gamma_x^2$  zueinander polar. Die Strahlen von  $C_1^1$  treffen nun  $\alpha, \alpha'$  in Punkten, die durch  $C_1^1$  einander zugeordnet sind. Ein mit  $g$  inzidenter Strahl  $x$  von  $C_1^1$  ist demnach inzident mit der  $g$  durch  $C_1^1$  zugeordneten Geraden  $g'$ , und da die Geraden  $g, g'$  in  $\Gamma_x^2$  polar zueinander sind, so sind die Treffpunkte von  $x$  mit  $\alpha, \alpha'$  durch  $C_1^1$  einander zugeordnet und in  $\Gamma_x^2$  konjugiert. Was von  $\alpha, \alpha'$  gilt, gilt für je zwei andere durch  $C_1^1$  einander zugeordnete Ebenen des Kongruenzstrahles  $z$ . Durch  $C_1^1$  einander zugeordnete Punkte sind folglich in  $\Gamma_x^2$  konjugiert und ebenso auch je zwei durch  $C_1^1$  einander zugeordnete Ebenen. — Jede der beiden Nebensymmetrieachsen  $c_x$  einer linearen Kongruenz  $C_1^1$  ist hiernach die Rotationsachse eines rotatorischen polaren Raumes  $\Gamma_x^2$ , der  $C_1^1$  in sich selbst derart überführt, daß durch  $C_1^1$  einander zugeordnete Punkte und Ebenen in  $\Gamma_x^2$  konjugiert sind. Diese rotatorischen polaren Räume haben bei einer hyperbolischen linearen Kongruenz reelle, bei einer elliptischen imaginäre Inzidenzflächen.

8. Zwei Zylindroide  $C^3, D^3$ , welche eine Nebensymmetrieachse und einen mit keiner Nebensymmetrieachse zusammenfallenden Regelstrahl  $u_1$  gemein haben, haben nach 6. auch das Spiegelbild  $v_1$  von  $u_1$  an jener Symmetrieachse gemein.  $C^3, D^3$  haben ferner dieselbe Hauptsymmetrieachse und folglich auch dieselbe zweite Nebensymmetrieachse. Die sich schneidenden Regelstrahlen zweier Zylindroide mit der nämlichen Hauptsymmetrieachse  $c_a$  und den nämlichen Nebensymmetrieachsen  $c_1, c_2$  werden aber aus  $c_a$  durch die Ebenenpaare der nämlichen symmetrischen Ebeneninvolution projiziert, somit liegen auf  $C^3, D^3$  noch die  $u_1$  bzw.  $v_1$  schneidenden Regelstrahlen  $u_2, v_2$ . Beide Zylindroide gehen also durch dieselbe Hauptsymmetrieachse  $c_a$ , dieselben Nebensymmetrieachsen  $c_1, c_2$  und dieselben vier Regelstrahlen  $u_1, u_2, v_1, v_2$ . Sie schneiden hiernach die Ebenen des Ebenenbüschels  $[u_1]$  im allgemeinen in je zwei Ellipsen, welche fünf Punkte gemein haben und folglich identisch sind. Ein Zylindroid ist somit durch eine Nebensymmetrieachse und einen mit keiner Nebensymmetrieachse zusammenfallenden Regelstrahl  $u$  bestimmt oder auch im allgemeinen durch die Hauptsymmetrieachse, eine Nebensymmetrieachse und einen beliebigen Punkt eines solchen Regelstrahles.

9. Ist  $r$  ein Regelstrahl eines Zylindroides  $C^3$ , der nicht mit einer Nebensymmetrieachse der Fläche zusammenfällt, und  $n$  eine zur Hauptsymmetrieachse  $c_a$  von  $C^3$  windschiefe Normale zu  $r$ , so ist jede der beiden Nebensymmetrieachsen von  $C^3$  die Hauptachse eines durch  $n$  gehenden linearen Komplexes. Das Hauptachsenzylindroid  $D^3$  der Schnittkongruenz  $D_1^1$  beider Komplexe hat dieselben Nebensymmetrieachsen  $c_1, c_2$  und dieselbe Hauptsymmetrieachse  $c_a$  wie  $C^3$ . Ferner liegt auf ihm der Strahl  $r$

als Träger des kürzesten Abstandes der Strahlen  $c_d, n$  von  $D_1^1$ , folglich sind nach 8. beide Zylindroide  $C^3, D^3$  identisch.

Schneidet nunmehr die Normale  $n$  zum Regelstrahle  $r$  die Hauptsymmetrieachse  $c_d$  von  $C^3$ , so ist wiederum jede Nebensymmetrieachse  $c_1, c_2$  der Fläche die Hauptachse je eines durch  $n$  gehenden linearen Komplexes und  $c_d$  ist die Hauptsymmetrieachse und  $c_1, c_2$  sind die Nebensymmetrieachsen des Hauptachsenszylindroides  $D^3$  der Schnittkongruenz. Sie ist, da die zu ihr gehörigen Strahlen  $c_d$  und  $n$  inzident sind, hyperbolisch. Ihre Leitgeraden liegen also auf  $D^3$  und gehen bzw. durch den Punkt  $c_d n$  und sein Spiegelbild  $P$  an der mit  $c_1, c_2$  inzidenten Ebene  $\gamma$ . Die  $P$  enthaltende Leitgerade liegt in der Ebene  $c_d n$  und ist folglich der mit dieser Ebene inzidente in  $P$  zu  $c_d$  orthogonale Strahl. Nun steht die Ebene  $c_d n$  auf dem Regelstrahle  $r$  des gegebenen Zylindroides  $C^3$  senkrecht, sonach enthält sie auch den  $r$  rechtwinklig kreuzenden Regelstrahl von  $C^3$ . Er geht nach 6. ebenfalls durch das Spiegelbild des Punktes  $c_d n$  an  $\gamma$  und fällt folglich mit dem in der Ebene  $c_d n$  gelegenen Strahle von  $D^3$  zusammen. Da aber beide Zylindroide außer diesem Regelstrahle noch die Hauptsymmetrieachse und die Nebensymmetrieachsen gemein haben, so sind sie identisch.

Fällt ferner  $r$  mit einer der beiden Nebensymmetrieachsen — etwa mit  $c_1$  — zusammen, ist also  $n$  eine Normale von  $c_1$ , die zu  $c_d$  windschief ist, so wird  $c_2$  und ein nicht mit  $c_1$  zusammenfallender Regelstrahl  $x$  von  $C^3$  zur Hauptachse je eines durch  $n$  gehenden linearen Komplexes gewählt. Die beiden Komplexe und das zu ihrer Schnittkongruenz  $D_1^1$  gehörige Hauptachsenszylindroid  $D^3$  sind hierdurch eindeutig bestimmt. Auf dem Zylindroide  $D^3$  liegen ebenfalls die Regelstrahlen  $c_2, x$ , folglich hat es mit  $C^3$  die Hauptsymmetrieachse  $c_d$  und, da  $c_1$  der Träger des kürzesten Abstandes der Strahlen  $c_d, n$  von  $D_1^1$  ist, auch den Regelstrahl  $c_1$  gemein. Als aufeinander senkrecht stehende Regelstrahlen sind  $c_1, c_2$  sowohl die Nebensymmetrieachsen von  $C^3$ , wie von  $D^3$ . Die beiden Flächen haben demnach außer dem Regelstrahle  $x$  auch ihre Nebensymmetrieachsen gemein, und somit fallen die Zylindroide  $C^3, D^3$  wiederum zusammen.

Ist endlich  $n$  eine zur Hauptsymmetrieachse  $c_d$  parallele Gerade, so hat  $n$  sowie jeder zu  $n$  parallele Strahl mit dem Zylindroide zwei unendlich ferne zusammenfallende Punkte gemein, und jeder dieser Strahlen steht in dem im Endlichen gelegenen dritten Schnittpunkte mit  $C^3$  auf dem durch ihn gehenden Regelstrahle der Fläche senkrecht. Alle zu  $c_d$  parallelen Geraden bilden zusammen mit den Strahlen der unendlich fernen Ebene eine ausgeartete lineare Kongruenz. Die sich in ihr schneidenden linearen Komplexe sind also ebenfalls speziell. Ihre Inzidenzachsen bilden einen in der unendlich fernen Ebene gelegenen Strahlenbüschel, dessen

Mittelpunkt der unendlich ferne Punkt von  $c_a$  ist. Jeder dieser Komplexe hat  $\infty^2$  Hauptachsen, zu ihnen gehören jedesmal die Geraden der unendlich fernen Ebene und je ein Bündel paralleler Strahlen, dessen Mittelpunkt der Pol der Inzidenzachse des betreffenden speziellen Komplexes bezüglich des unendlich fernen imaginären Kugelkreises ist. Er liegt also auf der unendlich fernen einfachen Leitgeraden  $c_\infty$  von  $C^3$  und wird aus ihr durch denjenigen Regelstrahl von  $C^3$  ausgeschnitten, der jene Inzidenzachse rechtwinklig kreuzt. Ein Regelstrahl von  $C^3$  gehört demnach je zu den Hauptachsen jedes dieser Komplexe, und  $C^3$  kann somit auch als ein Hauptachsenzyliindroid der Schnittkongruenz dieses singulären Komplexbüschels angesehen werden.

Mit Rücksicht auf alle in dieser Nummer durchgeführten Untersuchungen gilt folglich:

Gehört zur Schnittkongruenz zweier linearen Komplexe, deren Hauptachsen zwei Regelstrahlen eines Zylindroides  $C^3$  sind, eine nicht mit seiner Hauptsymmetrieachse  $c_a$  zusammenfallende Normale eines Regelstrahles der Fläche, so ist  $C^3$  auch das Hauptachsenzyliindroid dieser Schnittkongruenz.

Jede Normale in einem Punkte  $P$  eines Regelstrahles von  $C^3$  bestimmt mit diesem Zylindroide, wenn  $P$  nicht unendlich fern liegt, eine lineare Kongruenz mit dem Hauptachsenzyliindroide  $C^3$ . Somit gibt es  $\infty^1$  lineare Kongruenzen mit dem Hauptachsenzyliindroide  $C^3$ .

10. Je nachdem der auf einem Regelstrahle des Zylindroides  $C^3$  senkrechte Strahl  $n$  die Fläche noch in zwei reellen Punkten  $U, V$  schneidet oder nicht, ist nach 2. die durch  $C^3$  und  $n$  bestimmte lineare Kongruenz hyperbolisch oder elliptisch, und zwar sind im ersteren Falle die durch  $U, V$  gehenden Regelstrahlen  $u, v$  die Leitgeraden der hyperbolischen Kongruenz.  $u, v$  sind Spiegelbilder voneinander an den Nebensymmetrieachsen  $c_1, c_2$ , und  $U, V$  haben also gleichen Abstand von der Ebene  $c_1 c_2 = \gamma$ . Überhaupt sind je zwei Regelstrahlen  $u_1, v_1$  von  $C^3$ , die an einer und folglich an jeder der beiden Nebensymmetrieachsen der Fläche ineinander gespiegelt werden, Leitgeraden einer hyperbolischen linearen Kongruenz mit dem Hauptachsenzyliindroide  $C^3$ . Zwei solche Regelstrahlen sind die Kuspidalstrahlen  $c', c''$  von  $C^3$ . Unter den zu  $C^3$  gehörigen hyperbolischen Kongruenzen gibt es also eine mit zueinander orthogonalen Leitgeraden.

Sind  $u_1, v_1$  die Leitgeraden einer zu  $C^3$  gehörigen hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz, so sind es auch die bzw. mit  $u_1, v_1$  je in einer Ebene gelegenen Regelstrahlen  $u_2, v_2$ . Der Regelstrahl  $u_1$  kreuzt nach 5.  $v_2$  rechtwinklig, und ebenso  $u_2, v_1$ . Die sich orthogonal kreuzenden Regelstrahlen rufen nach 3. auf einer Ellipse  $\alpha^2$  von  $C^3$  eine Involution

hervor, deren Involutionen Zentrum der Mittelpunkt von  $\alpha^2$  ist, und ferner liegt nach 2. die Nebenachse von  $\alpha^2$  in  $\gamma$ . Somit rufen auch die Leitgeraden  $u_1, v_1$  der zu  $C^3$  gehörigen hyperbolischen Kongruenzen auf  $\alpha^2$  eine Involution hervor. Ihr Involutionen Zentrum ist der unendlich ferne Punkt der Hauptachse von  $\alpha^2$ . Sie ist hyperbolisch und ihre Doppelpunkte liegen auf der Nebenachse von  $\alpha^2$ . Da die Regelschar von  $C^3$  zu  $\alpha^2$  perspektiv ist, so gilt also:

Die Leitgeraden der zu einem Zylindroide  $C^3$  gehörigen hyperbolischen Kongruenzen sind Strahlenpaare einer hyperbolischen Involution. Ihre Doppelstrahlen sind die Nebensymmetrieachsen  $c_1, c_2$  von  $C^3$ .\*)

Eine durch eine Nebensymmetrieachse — etwa  $c_1$  — des Zylindroides  $C^3$  gehende Ebene  $\varepsilon$  schneidet im allgemeinen  $C^3$  nach 2. in einer Ellipse  $\varepsilon^2$ , deren Nebenscheitelpunkte  $E, E'$  auf  $c_1$  liegen, und zwar ist der eine dieser Punkte — etwa  $E'$  — zugleich ein Punkt der Doppelpunktgeraden  $c_a$  von  $C^3$ . Die Tangente von  $\varepsilon^2$  in  $E$  ist die Haupttangente von  $C^3$  im Punkte  $E$ . Da sie  $c_1$  in  $E$  rechtwinklig schneidet, so bestimmt sie nach obigem eine lineare Strahlenkongruenz mit dem Hauptachsenzylindroid  $C^3$  und zwar eine parabolische. Zu ihr gehören auch alle übrigen  $c_1$  schneidenden Haupttangente von  $C^3$ . In jeder Ebene  $\varepsilon$  von  $c_1$  ruft diese parabolische Strahlenkongruenz also einen Strahlenbüschel I. Ordnung hervor, dessen Mittelpunkt der Berührungspunkt von  $\varepsilon$  mit  $C^3$  ist. Unter den linearen Strahlenkongruenzen mit demselben Hauptachsenzylindroid  $C^3$  sind demnach zwei parabolische, ihre Leitgeraden sind bzw. die Nebensymmetrieachsen  $c_1, c_2$  von  $C^3$ .

11. Eine zu einem Zylindroide  $C^3$  als Hauptachsenzylindroid gehörige lineare Kongruenz  $N_1^1$  ist nach 9. bestimmt durch  $C^3$  und einen auf einem Regelstrahl  $r$  von  $C^3$  senkrechten im Endlichen gelegenen Strahl  $n$ , der nicht mit der Hauptsymmetrieachse  $c_a$  der Fläche identisch ist. Beschreibt  $n$  in der auf  $r$  senkrechten Ebene  $\nu$  um seinen Schnittpunkt  $N$  mit  $r$  den Strahlenbüschel  $[N]$ , so fällt  $N_1^1$  nacheinander mit allen zum Hauptachsenzylindroid  $C^3$  gehörigen linearen Kongruenzen zusammen.  $n$  als Komplexstrahl und zwei von  $r$  verschiedene Regelstrahlen  $s, t$  von  $C^3$  als Hauptachsen bestimmen im allgemeinen zwei sich in  $N_1^1$  schneidende lineare Komplexe  $\Gamma_s^n, \Gamma_t^n$ . Sie weisen, wenn  $d_s, d_t$  bzw. die mit  $N$  inzidenten Normalen der Hauptachsen  $s$  und  $t$  sind, dem Punkte  $N$  bzw. die Nullebenen  $nd_s, nd_t$  zu. Die linearen Komplexe mit den Hauptachsen  $s, t$  bilden die beiden Komplexbüschel  $[C_1^1(s)], [C_1^1(t)]$ . Durchläuft  $n$  den

\*) Sturm, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. 1. Teil, Leipzig 1892, S. 169, N. 122.



Strahlenbüschel  $[N]$ , so beschreiben  $\Gamma_s^n, \Gamma_t^n$  die Büschel  $[C_1^1(s)]$  bzw.  $[C_1^1(t)]$ , und die durch  $\Gamma_s^n$  und  $\Gamma_t^n$  bzw. dem Punkte  $N$  zugewiesenen Nullebenen  $n\bar{d}_s, n\bar{d}_t$  beschreiben bzw. um  $\bar{d}_s, \bar{d}_t$  zwei zum Strahlenbüschel  $[N]$  perspektive, also zueinander projektive Ebenenbüschel  $[\bar{d}_s], [\bar{d}_t]$ . Die beiden Komplexbüschel  $[C_1^1(s)], [C_1^1(t)]$  sind folglich projektiv aufeinander bezogen, wenn je zwei Komplexe einander entsprechen, die je durch denselben Strahl  $n$  des Strahlenbüschels  $[N]$  gehen. Zwei homologe Komplexe  $\Gamma_s^n, \Gamma_t^n$  beider projektiven Komplexbüschel schneiden sich in je einer zum Hauptachsenzylindroid  $C^3$  gehörigen linearen Kongruenz  $N_1^1$ , und durch jede der zu  $C^3$  gehörigen linearen Kongruenzen geht ein Paar homologer Komplexe. Diese linearen Kongruenzen bilden also als Schnitt homologer Komplexe zweier projektiven Büschel linearer Komplexe einen quadratischen Komplex  $\Gamma^{2*}$ ), und da an die Stelle der Regelstrahlen  $s, t$  von  $C^3$  irgend zwei andere Regelstrahlen der Fläche treten können, so sind  $\infty^2$  projektive Komplexbüschel nachgewiesen, welche  $\Gamma^2$  erzeugen.  $\Gamma^2$  besteht auch aus allen hyperbolischen linearen Kongruenzen, deren eine Leitgerade je ein Regelstrahl von  $C^3$  und deren andere Leitgerade der ihn rechtwinklig kreuzende Strahl in der unendlich fernen Ebene ist. Die Hauptsymmetrieachse  $c_a$  und die einfache Leitgerade  $c_\infty$  von  $C^3$  sind Doppelstrahlen von  $\Gamma^2$ . Die singuläre Fläche des Komplexes besteht nach 9. aus  $C^3$ , der unendlich fernen Ebene und dem Strahlenbündel, dessen Mittelpunkt der unendlich ferne Punkt der Hauptsymmetrieachse ist. — Ist  $P$  ein im Endlichen außerhalb des Zylindroides  $C^3$  gelegener Punkt, so ist der von ihm ausstrahlende Komplexkegel von  $\Gamma^2$  der Ort aller Normalen, die von ihm aus auf die Regelstrahlen von  $C^3$  gefällt werden. Daß diese Normalen die Strahlen eines Kegels II. Ordnung sind, ging schon aus der projektiven Erzeugung des Zylindroides in 2. hervor. Liegt  $P$  im Endlichen auf  $C^3$ , so steht die Ebene des einen von ihm ausgehenden Komplexstrahlenbüschels I. Ordnung zu dem durch  $P$  gehenden Regelstrahle  $r$  von  $C^3$  senkrecht, während die Ebene des andern nach 10. mit demjenigen Regelstrahle von  $C^3$  inzident ist, in den  $r$  an den Nebensymmetrieachsen der Fläche gespiegelt wird. Gehört der Punkt  $P$  der unendlich fernen Ebene an, ist er aber nicht mit  $c_a$  inzident, so ist er der Mittelpunkt eines unendlich fernen und eines Parallelstrahlenbüschels von  $\Gamma^2$ . Die Ebene dieses Büschels enthält denjenigen Regelstrahl von  $C^3$ , welcher auf der Ebene  $Pc_a$  senkrecht steht. — Alle linearen Kongruenzen mit dem Hauptachsenzylindroid  $C^3$  haben dieselben Symmetrieachsen, folglich sind nach 6. die Geraden  $c_a, c_1, c_2$  auch Symmetrieachsen von  $\Gamma^2$ . Die Symmetrieachse  $c_a$  heiße die Hauptsymmetrieachse, jede der beiden

\*) Sturm, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. 1 Teil, Leipzig 1892, S. 171, N. 123.

anderen Symmetrieachsen eine Nebensymmetrieachse dieses quadratischen Komplexes.

12. Die Regelstrahlen des Hauptachsenzylindroides  $C^3$  eines Büschels linearer Komplexe und nur diese schneiden bekanntlich die Hauptsymmetrieachse  $c_a$  und die bzw. mit ihnen inzidenten Strahlen der Trägerkongruenz  $C_1^1$  jenes Büschels rechtwinklig. Nun ist eine hyperbolische lineare Strahlenkongruenz durch zwei ihrer sich schneidenden Strahlen  $a, b$  und durch die nicht mit dem Punkte  $ab$  inzidente Hauptsymmetrieachse  $c_a$  bestimmt, somit bilden — vorausgesetzt, daß  $c_a$  nur einen Strahl des Büschels  $[ab]$  und zwar im Endlichen trifft — alle einen Strahl  $c_a$  und je einen Strahl eines Strahlenbüschels  $[ab]$  rechtwinklig schneidenden Strahlen die Regelschar eines Zylindroides mit der Hauptsymmetrieachse  $c_a$ .\*)

Die Punkte einer Ellipse  $\varepsilon^2$  eines Rotationszylinders  $R^2$  werden aus den auf einer Durchmesserenebene der Fläche gelegenen Erzeugenden  $d, e$  durch je zwei zueinander normale Ebenen projiziert. Eine  $d$  rechtwinklig schneidende Unisekante von  $\varepsilon^2$  steht folglich in ihrem Treffpunkte  $T$  mit  $\varepsilon^2$  auf der Ebene  $eT$  senkrecht, sie schneidet also den Strahl  $TE$ , der  $T$  mit dem Schnittpunkte  $E$  von  $e$  und  $\varepsilon^2$  verbindet, rechtwinklig. Fällt nun  $T$  nacheinander mit allen Punkten von  $\varepsilon^2$  zusammen, so ergeben sich demnach die von diesen Punkten auf  $d$  gefälltten Normalen auch als Normalen zu den Strahlen des in der Ebene von  $\varepsilon^2$  gelegenen Strahlenbüschels I. Ordnung  $[E]$ , und somit nach obigem Satze als Regelstrahlen eines Zylindroides mit der Hauptsymmetrieachse  $d$ . Kurz:

Die von den Punkten einer Ellipse  $\varepsilon^2$  eines Rotationszylinders auf eine Erzeugende  $d$  von ihm gefälltten Normalen bilden die Regelschar eines Zylindroides mit der Doppelpunktgeraden  $d$  und jede derart erzeugte Fläche kann als Hauptachsenfläche eines Büschels linearer Komplexe angesehen werden.

Bekanntlich bestimmen vier windschiefe Strahlen, die nicht einer Regelschar II. Ordnung angehören, im allgemeinen eine einzige sie enthaltende lineare Strahlenkongruenz  $C_1^1$ . Eine solche ist also auch gegeben, wenn eine in ihr enthaltene parabolische Regelschar II. Ordnung  $\mathfrak{P}^2$  bekannt ist und ein zu den Ebenen des unendlichen fernen Strahles von  $\mathfrak{P}^2$  normaler Kongruenzstrahl  $c_a$ , der mit keinem Leitstrahle dieser Regelschar zusammenfällt.  $c_a$  ist die Hauptsymmetrieachse von  $C_1^1$ . Da nun der kürzeste Abstand eines zu  $c_a$  windschiefen Kongruenzstrahles von  $c_a$  auf einem Regelstrahle des Hauptachsenzylindroides  $C^3$  von  $C_1^1$  liegt, so bilden alle  $c_a$  und je einen Strahl von  $\mathfrak{P}^2$  rechtwinklig schneidenden Geraden Regelstrahlen eines Zylindroides.

\*) Sir R. S. Ball, A treatise on the theory of screws. Cambridge 1900, S. 150.

## Die Fokaleigenschaften der linearen Strahlenkongruenzen.

**13.** Durch eine lineare Kongruenz  $C_1^1$  ist einer Ebene  $\varepsilon$  im allgemeinen eine andere Ebene  $\varepsilon'$  des Raumes zugeordnet. Soll  $\varepsilon$  auf  $\varepsilon'$  senkrecht stehen, so muß die Ebene  $\varepsilon$  im allgemeinen den zu ihr normalen Kongruenzstrahl  $e$  in dem Mittelpunkt der Punktinvolution schneiden, die  $C_1^1$  auf  $e$  hervorruft. Eine auf der ihr zugeordneten Ebene senkrechte Ebene heie eine Mittelebene der linearen Kongruenz. Insbesondere heie die Hauptmittelebene der linearen Kongruenz die auf ihrer Hauptsymmetrieachse  $c_a$  senkrechte Mittelebene, sie ist identisch mit der Fluchtebene  $\gamma$  von  $C_1^1$ . Durch einen Strahl von  $C_1^1$  gehen im allgemeinen zwei einander zugeordnete Mittelebenen. Die durch den unendlich fernen Kongruenzstrahl gehenden Mittelebenen sind die Hauptmittelebene  $\gamma$  und die unendlich ferne Ebene.

Alle mit einer Nebensymmetrieachse  $c_x$  von  $C_1^1$  inzidenten Kongruenzstrahlen bilden eine gleichseitige parabolische Regelschar  $\mathfrak{P}_x^2$ , deren Scheitelstrahlen  $c_x$  und  $c_a$  sind. Aus jedem solchen Kongruenzstrahl wird also der unendlich ferne Punkt von  $c_a$  und der ihm durch  $C_1^1$  zugeordnete Punkt  $c_a\gamma$  durch zwei durch  $C_1^1$  zugeordnete zueinander normale Ebenen projiziert. Die zu einer Nebensymmetrieachse  $c_x$  von  $C_1^1$  normalen und die mit ihr inzidenten Ebenen sind folglich Mittelebenen von  $C_1^1$ .

**14.** Werden zu den Mittelebenen einer linearen Kongruenz  $C_1^1$  durch einen beliebigen Punkt  $P$  parallele Ebenen gelegt, so gehören sie zu einem zum Punktfelde  $[\gamma]$  der Hauptmittelebene  $\gamma$  korrelativen Ebenenbndel  $[P]$ , wenn jeder Ebene  $\pi$  von  $[P]$  der Schnittpunkt  $\mathfrak{P}$  des zu ihr normalen Kongruenzstrahles mit  $\gamma$  zugewiesen wird. Die Ebenen  $\pi$  schneiden die unendlich ferne Ebene in einem zum Ebenenbndel  $[P]$  perspektiven, also zum Punktfelde  $[\gamma]$  korrelativen Strahlenfelde. Entsprechende Elemente beider Felder werden durch die Mittelebenen von  $C_1^1$  verbunden, und diese bilden somit einen parabolischen Ebenenbndel II. Ordnung. Zu ihm gehören nach **13.** die beiden Ebenenbüschel  $[c_1]$ ,  $[c_2]$ , deren Achsen  $c_1$ ,  $c_2$  die Nebensymmetrieachsen von  $C_1^1$  sind, und ferner die beiden Büschel paralleler Ebenen, die von den zu  $c_1$  bzw.  $c_2$  normalen Ebenen gebildet werden. Da  $c_1$ ,  $c_2$  sich rechtwinklig schneiden, so ergibt sich:

Die von den Mittelebenen einer linearen Kongruenz  $C_1^1$  umhüllte Regelfläche II. Grades ist ein gleichseitiges Paraboloid  $C^2$ . Seine Hauptachse fällt mit der Hauptsymmetrieachse  $c_a$  und seine Scheitelstrahlen mit den Nebensymmetrieachsen  $c_1$ ,  $c_2$  von  $C_1^1$  zusammen. \*)

\*) Sturm, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. 1. Teil, Leipzig 1892, S. 167, N. 121.

15. Durch eine beliebige Gerade gehen zwei reelle oder konjugiert imaginäre Mittelebenen von  $C_1^1$ , hingegen ist jede durch eine Erzeugende von  $C^2$  gehende Ebene eine Mittelebene. Einer Erzeugenden  $e^1$  von  $C^2$  ist somit durch  $C_1^1$  wiederum eine Erzeugende  $e^2$  von  $C^2$  zugeordnet, die mit ihr zur selben Regelschar gehört. Durch  $e^1$  und  $e^2$  gehende einander zugeordnete Ebenen stehen aufeinander senkrecht. Das gleichseitige Paraboloid  $C^2$  wird also durch  $C_1^1$  in sich selbst übergeführt. Hierbei ruft die Kongruenz  $C_1^1$  in jeder seiner beiden Regelscharen eine Involution hervor. Sind die Strahlen beider Regelscharen von  $C^2$  elliptisch involutorisch gepaart, so ist  $C_1^1$  eine hyperbolische lineare Kongruenz, hingegen ist  $C_1^1$  eine elliptische lineare Kongruenz, wenn die Strahlen der einen Regelschar hyperbolisch involutorisch, die der andern elliptisch involutorisch gepaart sind.\*) Bei einer elliptischen linearen Kongruenz  $C_1^1$  sind die Doppelstrahlen der hyperbolisch involutorischen Regelschar zwei Kongruenzstrahlen, in denen  $C_1^1$  zirkuläre Ebeneninvolutionen hervorruft. Sie fallen also mit den Fokalachsen der elliptischen linearen Kongruenz zusammen. Werden überhaupt die Doppelstrahlen der in den beiden Regelscharen von  $C^2$  durch eine lineare Kongruenz  $C_1^1$  hervorgerufenen Involutionen die Fokalachsen von  $C_1^1$  genannt, so hat eine hyperbolische lineare Strahlenkongruenz zwei Paar konjugiert imaginärer Fokalachsen, eine elliptische ein Paar reeller  $f', f''$  und ein Paar konjugiert imaginärer. Das von den Mittelebenen von  $C_1^1$  umhüllte gleichseitige Paraboloid  $C^2$  heiße das Fokalparaboloid, jede seiner Regelscharen  $\mathfrak{C}_1^1, \mathfrak{C}_2^2$  eine Fokalregelschar, endlich die Involution, die  $C_1^1$  in jeder der beiden Fokalregelscharen hervorruft, eine Fokalinvolution von  $C_1^1$ . Durch  $C_1^1$  einander zugeordnete normale Ebenen schneiden jede seiner beiden Fokalregelscharen in zwei Strahlen, die durch die betreffenden Fokalinvolutionen einander zugeordnet sind, gleichwie einander zugeordnete normale Strahlen eines polaren Feldes jede seiner Achsen in Punktepaaren schneiden, die zu den auf diesen Achsen gelegenen Brennpunktinvolutionen gehören. Die Fokalinvolutionen von  $C_1^1$  sind voneinander abhängig. Zwei zueinander normale Ebenen, die bzw. durch zwei zugeordnete Strahlen der einen Fokalregelschar gehen, gehen auch durch zwei zugeordnete Strahlen der andern.

Da die Nebensymmetrieachsen  $c_1, c_2$  einer linearen Kongruenz  $C_1^1$  mit den Scheitelstrahlen des Fokalparaboloides  $C^2$  zusammenfallen, so ist dieses bei einer elliptischen linearen Kongruenz bekannt, sobald außer  $c_1, c_2$  noch eine reelle Fokalachse — etwa  $f'$  — von  $C_1^1$  gegeben ist. Bei

\*) v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage. Erstes Heft, Nürnberg 1856, S. 64, N. 102.

einer hyperbolischen linearen Kongruenz genügt es mit Hilfe der beiden Leitgeraden  $u, v$  außer  $c_1, c_2$  noch eine beliebige Mittelebene aufzusuchen. Die in ihr gelegenen Normalen zu  $c_1, c_2$  sind nämlich zwei weitere Erzeugende von  $C^2$ . Jede von ihnen bestimmt mit der zu ihr windschiefen Nebensymmetrieachse und der zu dieser normalen unendlich fernen Geraden eine Regelschar von  $C^2$  und folglich diese Fläche selbst.

16. Bei einer parabolischen linearen Kongruenz  ${}^p C_1^1$  ist jede durch ihre Leitgerade  $l$  gehende Ebene  $\xi$  eine Mittelebene. Die einer solchen Mittelebene  $\xi$  zugeordneten Mittelebenen bilden einen Ebenenbüschel I. Ordnung, dessen Achse  $x$  auf der Ebene  $\xi$  im Mittelpunkte des in ihr gelegenen Büschels von Kongruenzstrahlen senkrecht steht. Beschreibt  $\xi$  den Ebenenbüschel  $[l]$ , so erzeugt die zu  $\xi$  normale Achse  $x$  die eine Regelschar  $\mathfrak{C}_1^2$  des Fokalparaboloides  $C^2$  von  ${}^p C_1^1$ . Da  $l$  alle Strahlen von  $\mathfrak{C}_1^2$  rechtwinklig schneidet, so ist  $l$  ein Scheitelstrahl von  $C^2$ . — Der  $x$  durch  ${}^p C_1^1$  zugeordnete Regelstrahl von  $\mathfrak{C}_1^2$  liegt in  $\xi$  und kreuzt folglich  $x$  rechtwinklig. Durch  ${}^p C_1^1$  wird also die Fokalregelschar  $\mathfrak{C}_1^2$  derartig elliptisch involutorisch gepaart, daß zugeordnete Strahlen zueinander normal sind. Die Strahlen der andern Fokalregelschar  $\mathfrak{C}_2^2$  sind alle dem zu ihr gehörigen Leitstrahle  $l$  von  ${}^p C_1^1$  zugeordnet, die sie paarende Fokalinvolution ist folglich parabolisch. — Die Leitgerade  $l$  der parabolischen linearen Kongruenz  ${}^p C_1^1$  liegt in ihrer Hauptmittelebene  $\gamma$  und ist eine Nebensymmetrieachse von  ${}^p C_1^1$ , die andere ist der ebenfalls in  $\gamma$  gelegene zweite Scheitelstrahl von  $C^2$ . Endlich ist der zu  $\gamma$  senkrechte Kongruenzstrahl die Hauptsymmetrieachse von  ${}^p C_1^1$ . Mit  $l$  fallen die beiden Fokalachsen der parabolischen linearen Kongruenz zusammen.

17. Einander zugeordnete Strahlen jeder Fokalregelschar einer allgemeinen linearen Kongruenz  $C_1^1$  sind die Achsen zweier projektiven Ebenenbüschel  $[e^1], [e^2]$ , wenn einander zugeordnete Mittelebenen beider Büschel als entsprechend einander zugewiesen werden. Homologe Ebenen beider projektiven Büschel sind also zueinander senkrecht, und somit ist ihr Erzeugnis eine in  $C_1^1$  enthaltene orthogonale Regelschar II. Ordnung  $\mathfrak{R}^2$ , deren Kreisschnitte bzw. normal zu  $e^1$  und  $e^2$  sind.  $e^1, e^2$  schneiden die zu ihnen normale Nebensymmetrieachse von  $C_1^1$  in Punkten, durch welche wechselweise zu ihnen parallele Kongruenzstrahlen gehen. Diese Nebensymmetrieachse ist ferner die Schnittgerade zweier Kreisschnittebenen von  $\mathfrak{R}^2$ , und da sie  $\mathfrak{R}^2$  in zwei Punkten schneidet, deren Tangentialebenen zu ihr normal sind, so fällt sie mit einer Hauptachse von  $\mathfrak{R}^2$  zusammen. Die sich in ihr schneidenden Kreisschnittebenen von  $\mathfrak{R}^2$  enthalten also kongruente Kreise, deren Mittelpunkte mit dem von  $\mathfrak{R}^2$  zusammenfallen. Aus der orthogonalen Regelschar  $\mathfrak{R}^2$  wird eine gleichseitige

parabolische, sowie  $e^1$  mit einer der beiden Nebensymmetrieachsen  $c_1, c_2$  von  $C_1^1$  zusammenfällt, und  $e^2$  folglich mit dem  $c_1$  bzw.  $c_2$  rechtwinklig kreuzenden unendlich fernen Strahle. —

In einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz degeneriert  $\mathfrak{R}^2$  zweimal in einen Strahl, nämlich in je eine der reellen Fokalachsen  $f', f''$ ; sie liegen auf allen orthogonalen Regelscharen  $\mathfrak{R}^2$  von  $C_1^1$ , zu deren Leitstrahlen zwei einander zugeordnete Strahlen der elliptisch involutorischen Fokalregelschar gehören. Die in einer elliptischen linearen Kongruenz enthaltenen durch  $f', f''$  gehenden Regelscharen II. Ordnung sind demnach orthogonal.

In einer parabolischen linearen Kongruenz  ${}^p C_1^1$  berühren sich die orthogonalen Regelscharen  $\mathfrak{R}^2$  längs der Leitgeraden  $l$ , sobald die durch  ${}^p C_1^1$  einander zugeordneten Geraden  $e^1, e^2$  der parabolisch involutorischen Fokalregelschar angehören, also eine von beiden mit  $l$  zusammenfällt. Sind hingegen die beiden Strahlen zugeordnete Elemente der elliptisch involutorischen Fokalregelschar, so zerfallen die orthogonalen Regelscharen  $\mathfrak{R}^2$  in je zwei in den zueinander orthogonalen Ebenen des Ebenenbüschels  $[U]$  gelegene Strahlenbüschel I. Ordnung.

18. Eine in einer linearen Kongruenz  $C_1^1$  enthaltene orthogonale Regelschar II. Ordnung, zu deren Leitschar zwei durch  $C_1^1$  einander zugeordnete Geraden einer Fokalregelschar gehören und jede Fläche auf welcher eine solche Regelschar liegt, heiße mit dieser Fokalregelschar der linearen Kongruenz verbunden.

Zwei orthogonale Regelscharen von  $C_1^1$ , von denen die eine mit der einen, die andere mit der andern Fokalregelschar verbunden ist, haben zwei reelle Kongruenzstrahlen gemein und schneiden sich außerdem noch, je nachdem  $C_1^1$  hyperbolisch oder elliptisch ist, in den beiden reellen oder konjugiert imaginären Leitgeraden von  $C_1^1$ .

19. Durch einen Strahl  $s$  der linearen Kongruenz  $C_1^1$  gehen die bzw. mit ihren Fokalregelscharen  $\mathfrak{C}_1^2, \mathfrak{C}_2^2$  verbundenen orthogonalen Regelscharen  $\mathfrak{R}_1^2, \mathfrak{R}_2^2$ . Sind die Strahlen  $e_1^1, e_1^2$  von  $\mathfrak{C}_1^2$  und  $e_2^1, e_2^2$  von  $\mathfrak{C}_2^2$  bzw. Leitstrahlen von  $\mathfrak{R}_1^2$  und  $\mathfrak{R}_2^2$ , so trifft  $s$  von diesen vier auf dem Fokalparaboloide  $C^2$  gelegenen Geraden zwei in seinem einen und zwei in seinem andern Schnittpunkte mit  $C^2$ . Liegen auf  $s$  die Punkte  $e_1^1 e_2^1, e_1^2 e_2^2$  von  $C^2$ , so liegen auf dem zweiten Kongruenzstrahle  $t$ , den die Regelscharen  $\mathfrak{R}_1^2, \mathfrak{R}_2^2$  außer  $s$  noch gemein haben, die Punkte  $e_1^1 e_2^2, e_1^2 e_2^1$  der Fläche, und folglich sind die Kongruenzstrahlen  $s, t$  für  $C^2$  zueinander polar. Als Kongruenzstrahl  $s$  kann jeder Strahl von  $\mathfrak{R}_1^2$  oder  $\mathfrak{R}_2^2$  angesehen werden, demnach wird jede von beiden Regelscharen durch den polaren Raum des Fokalparaboloides  $C^2$  in sich selbst übergeführt. Das gleiche gilt von jeder mit einer Fokalregelschar von  $C_1^1$  verbundenen orthogonalen

Regelschar II. Ordnung. — Die Leitstrahlen einer mit einer Fokalregelschar verbundenen orthogonalen Regelschar — etwa von  $\mathfrak{R}_1^2$  — sind durch  $C_1^1$  paarweise einander zugeordnet und ein Paar  $e_1^1, e_1^2$  dieser zugeordneten Strahlen gehört jener Fokalregelschar an. Der polare Raum des Fokalparaboloides  $C^2$  ruft demnach in der Leitschar von  $\mathfrak{R}_1^2$  eine hyperbolische Involution mit den Doppelstrahlen  $e_1^1, e_1^2$  hervor und somit ist bewiesen:

Jede mit einer Fokalregelschar einer linearen Kongruenz  $C_1^1$  verbundene orthogonale Regelschar wird durch den polaren Raum des Fokalparaboloides  $C^2$  von  $C_1^1$  in sich selbst übergeführt. Hierbei gehen je zwei durch  $C_1^1$  einander zugeordnete Leitstrahlen einer solchen orthogonalen Regelschar wiederum in je zwei einander durch  $C_1^1$  zugeordnete Leitstrahlen derselben Regelschar über.

Die Regelscharen  $\mathfrak{R}_1^2, \mathfrak{R}_2^2$  liegen bzw. auf den orthogonalen Hyperboloiden  $R_1^2, R_2^2$ . Als Diagonalen des auf  $R_1^2$  gelegenen einfachen Vierecks mit den Gegenseiten  $s, t$  und  $e_1^1, e_1^2$  sind  $e_2^1, e_2^2$  reziproke Polaren für dieses orthogonale Hyperboloid, ebenso sind  $e_1^1, e_1^2$  reziproke Polaren für  $R_2^2$ . Die zugeordneten Geraden einer Fokalregelschar einer linearen Kongruenz sind folglich reziproke Polaren für alle mit der andern Fokalregelschar verbundenen orthogonalen Regelflächen. Zwei zugeordnete Strahlen der einen Fokalregelschar sind Leitstrahlen von  $\mathfrak{R}_1^2$ , zwei der andern Leitstrahlen von  $\mathfrak{R}_2^2$ . Sonach gilt:

Der polare Raum jeder mit einer Fokalregelschar einer linearen Kongruenz verbundenen orthogonalen Regelfläche führt auch umgekehrt das Fokalparaboloid  $C^2$  der linearen Kongruenz in sich selbst über. Hierbei gehen zugeordnete Strahlen der mit ihr verbundenen Fokalregelschar wieder in zugeordnete Strahlen dieser Fokalregelschar über, während zugeordnete Strahlen der nicht mit ihr verbundenen Fokalregelschar in bezug auf die orthogonale Regelfläche zueinander polar sind.

Auf die Modifikationen, welche diese und die folgenden Sätze und Beweise bei der parabolischen linearen Kongruenz erleiden, kann hier nicht näher eingegangen werden.

20. Sind wiederum  $\mathfrak{R}_1^2, \mathfrak{R}_2^2$  zwei bzw. mit den Fokalregelscharen  $\mathfrak{C}_1^2, \mathfrak{C}_2^2$  einer linearen Kongruenz  $C_1^1$  verbundene orthogonale Regelscharen,  $e_1^1, e_1^2$  und  $e_2^1, e_2^2$  bzw. die Leitstrahlen, die den betreffenden Fokalregelscharen angehören, so sind  $e_2^1, e_2^2$  nach 19. zueinander polar in bezug auf die  $\mathfrak{R}_1^2$  enthaltende Fläche  $R_1^2$ . Sie rufen folglich, wenn sie zu Involutionsachsen dieser Regelschar erwählt werden, eine involutorische Paarung ihrer Strahlen hervor, und zwar ist jedes Paar zugeordneter Regelscharen  $x, y$  durch  $e_2^1, e_2^2$  harmonisch getrennt. Einem Strahle  $x$  von

$\mathfrak{R}_1^2$  ist nun durch die  $\mathfrak{R}_2^2$  enthaltende Regelfläche  $R_2^2$  wiederum ein Strahl von  $C_1^1$  als Polare zugeordnet\*); es ist derjenige Strahl, welcher von  $x$  durch irgend zwei durch  $C_1^1$  einander zugeordnete Leitgeraden von  $\mathfrak{R}_2^2$  harmonisch getrennt ist. Solche zwei einander zugeordneten Leitgeraden sind aber  $e_2^1, e_2^2$ , folglich fällt die gesuchte Polare von  $x$  in bezug auf  $R_2^2$  mit dem Strahle  $y$  von  $\mathfrak{R}_1^2$  zusammen. Die Regelschar  $\mathfrak{R}_1^2$  wird also durch den polaren Raum von  $R_2^2$  in sich selbst übergeführt und, wie auf gleiche Weise folgt, führt auch der polare Raum von  $R_1^2$  die Regelschar  $\mathfrak{R}_2^2$  in sich selbst über. Zwei von  $e_2^1, e_2^2$  verschiedene durch  $C_1^1$  einander zugeordnete Leitgeraden  $g_1, g_2$  von  $\mathfrak{R}_2^2$  sind nun durch je zwei in bezug auf  $R_2^2$  polare Regelstrahlen von  $\mathfrak{R}_1^2$  harmonisch getrennt, und sonach reziproke Polaren in bezug auf  $R_1^2$ . Kurz, es ist bewiesen:

Der polare Raum jeder mit der einen Fokalregelschar einer linearen Kongruenz verbundenen orthogonalen Regelfläche transformiert jede mit der andern Fokalregelschar verbundene in sich selbst. Die durch die lineare Kongruenz einander zugeordneten Leitstrahlen einer mit einer Fokalregelschar verbundenen orthogonalen Regelschar sind reziproke Polaren für alle mit der andern Fokalregelschar verbundenen orthogonalen Regelflächen.

**21.** Alle Flächen II. Ordnung, die  $\infty^2$  gemeinsame reziproke Polaren haben, bilden einen speziellen  $F^2$  Büschel.\*\*\*) Nun sind nach **20.** die  $\infty^2$  durch  $C_1^1$  einander zugeordneten Leitstrahlen der orthogonalen Regelscharen, die mit der einen Fokalregelschar von  $C_1^1$  verbunden sind, reziproke Polaren für die mit der andern Fokalregelschar verbundenen orthogonalen Regelflächen, folglich liegen die mit einer bestimmten Fokalregelschar von  $C_1^1$  verbundenen orthogonalen Regelscharen auf je einer Fläche eines  $F^2$  Büschels.

Durch die reellen Fokalachsen  $f', f''$  einer elliptischen linearen

\*) v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage. Erstes Heft, Nürnberg 1856, S. 71, N. 109.

\*\*) Diese  $\infty^2$  reziproken Polaren bilden bekanntlich eine lineare Kongruenz. Daß alle Flächen II. Ordnung, deren gemeinsame reziproke Polaren eine lineare Strahlenkongruenz bilden, die Elemente eines speziellen  $F^2$  Büschels sind, scheint nicht bekannt zu sein. Man begnügt sich vielmehr im allgemeinen, diesen speziellen  $\mathfrak{R}^2$  Büschel als einen  $F^2$  Büschel zu definieren, dessen Flächen in zwei gemeinsamen (reellen) reziproken Polaren dieselben Punkt- und Ebeneninvolutionen hervorrufen. Letztere Definition ist aber zu eng; sie umfaßt nur diejenigen  $F^2$  Büschel, bei denen beide Paar Gegenseiten des allen  $F^2$  gemeinsamen einfachen Vierseits reell oder konjugiert imaginär sind, nicht aber den  $F^2$  Büschel, bei dem das eine Paar Gegenseiten reell, das andere konjugiert imaginär ist. Obige Definition hingegen umfaßt alle Einzelfälle. Weitere Beziehungen zwischen diesem  $F^2$  Büschel und der linearen Kongruenz gedenke ich demnächst zu veröffentlichen.



Kongruenz gehen nach 17. alle orthogonalen Regelscharen, die mit ihrer elliptisch involutorischen Fokalregelschar verbunden sind, durch jeden andern Strahl einer linearen Kongruenz sendet hingegen jede Fokalregelschar nur eine mit ihr verbundene orthogonale Regelschar. Somit besteht der reelle Teil der Grundkurven der beiden  $F^2$  Büschel, welche zu den Fokalregelscharen einer hyperbolischen linearen Kongruenz  $C_1^1$  gehören, aus den beiden Leitgeraden von  $C_1^1$ . Der reelle Teil der Grundkurve des  $F^2$  Büschels, welcher zu der elliptisch involutorischen Fokalregelschar einer elliptischen linearen Kongruenz  $C_1^1$  gehört, setzt sich aus den beiden Fokalachsen  $f', f''$  zusammen, während die Grundkurve des mit der hyperbolisch involutorischen Fokalregelschar verknüpften  $F^2$  Büschels keinen reellen Punkt enthält.

Der zur hyperbolisch involutorischen Fokalregelschar einer elliptischen linearen Kongruenz gehörige  $F^2$  Büschel enthält außer den  $\infty^1$  orthogonalen Regelflächen  $\infty^1$  polare Räume mit imaginären Inzidenzflächen. In ihnen sind ebenfalls die durch  $C_1^1$  einander zugeordneten Leitstrahlen der orthogonalen Regelscharen, welche mit der elliptisch involutorischen Fokalregelschar verbunden sind, reziprok polar, und die durch  $C_1^1$  einander zugeordneten Punkte und Ebenen konjugiert. Aus diesem Grunde mögen auch sie mit der hyperbolisch involutorischen Fokalregelschar verbunden heißen. Überhaupt heiße von nun an jede reelle oder imaginäre Regelfläche, auf welcher eine mit einer Fokalregelschar von  $C_1^1$  verbundene orthogonale Regelschar liegt, und ebenso der  $F^2$  Büschel, dem sie angehört, mit dieser Fokalregelschar verbunden.

22. Die Leitstrahlen aller mit der einen Fokalregelschar  $\mathfrak{C}_1^2$  einer linearen Kongruenz  $C_1^1$  verbundenen orthogonalen Regelscharen  $\mathfrak{R}_1^2$  gehören nach 21. einer linearen Kongruenz  ${}^1F_1^1$  an. Da die mit  $\mathfrak{C}_1^2$  verbundenen Regelflächen selbst einen  $F^2$  Büschel bilden, so geht durch einen Punkt, der nicht auf einem gemeinsamen Strahle der Regelscharen  $\mathfrak{R}_1^2$  liegt, eine Gerade, die zu den Leitstrahlen dieser Regelscharen gehört. Jeder Strahl der linearen Kongruenz  ${}^1F_1^1$  ist somit ein Leitstrahl einer mit der Fokalregelschar  $\mathfrak{C}_1^2$  verbundenen Regelschar,  ${}^1F_1^1$  enthält die Fokalregelschar  $\mathfrak{C}_1^2$ . — Ebenso bilden die Leitstrahlen der mit der andern Fokalregelschar  $\mathfrak{C}_2^2$  verbundenen Regelscharen  $\mathfrak{R}_2^2$  eine zweite lineare Kongruenz  ${}^2F_1^1$ , die durch  $\mathfrak{C}_2^2$  geht. Die lineare Kongruenz  ${}^1F_1^1$  heiße mit der Fokalregelschar  $\mathfrak{C}_1^2$ , die lineare Kongruenz  ${}^2F_1^1$  mit der Fokalregelschar  $\mathfrak{C}_2^2$  der linearen Kongruenz  $C_1^1$  verbunden.

Ist  $C_1^1$  hyperbolisch, so enthalten die je mit ihren beiden Fokalregelscharen  $\mathfrak{C}_1^2, \mathfrak{C}_2^2$  verbundenen orthogonalen Regelscharen keine reellen gemeinsamen Regelstrahlen, und die mit  $\mathfrak{C}_1^2, \mathfrak{C}_2^2$  bzw. verbundenen linearen

Kongruenzen  ${}^1F_1^1$ ,  ${}^2F_1^1$  sind elliptisch. Ist  $C_1^1$  elliptisch, so ist die mit ihrer hyperbolisch involutorischen Fokalregelschar verbundene Kongruenz elliptisch, hingegen die mit ihrer elliptisch involutorischen Fokalregelschar verbundene Kongruenz hyperbolisch. Die Leitgeraden der letzteren linearen Kongruenz sind die reellen Fokalachsen  $f'$ ,  $f''$  von  $C_1^1$ .

**23.** Die mit der einen Fokalregelschar  $\mathfrak{C}_1^2$  einer linearen Kongruenz  $C_1^1$  verbundene lineare Kongruenz  ${}^1F_1^1$  geht nach **22.** durch diese Regelschar, sie paart folglich die Strahlen der anderen Fokalregelschar  $\mathfrak{C}_2^2$  involutorisch.  ${}^1F_1^1$  enthält nun die Leitschar jeder mit  $\mathfrak{C}_1^2$  verbundenen Regelschar  $\mathfrak{R}_1^2$ , folglich wird durch den polaren Raum jeder mit der Fokalregelschar  $\mathfrak{C}_1^2$  verbundenen Regelfläche  $R_1^2$  die Kongruenz  ${}^1F_1^1$  und die Fokalregelschar  $\mathfrak{C}_2^2$  derart in sich selbst übergeführt, daß irgend zwei durch  ${}^1F_1^1$  einander zugeordnete Strahlen von  $\mathfrak{C}_2^2$  wieder in zugeordnete Strahlen dieser Regelschar übergehen. Nach **19.** sind die für  $R_1^2$  paarweise zueinander polaren Strahlen von  $\mathfrak{C}_2^2$  auch durch  $C_1^1$  einander zugeordnet. Demnach verwandelt die durch  $C_1^1$  in der Regelschar  $\mathfrak{C}_2^2$  hervorgerufene Involution die durch  ${}^1F_1^1$  hervorgerufene in sich selbst. — Bei einer hyperbolischen linearen Kongruenz  $C_1^1$  sind nach **22.** die Fokalregelscharen elliptisch involutorisch und die bzw. mit ihnen verbundenen Kongruenzen  ${}^1F_1^1$ ,  ${}^2F_1^1$  elliptisch. Die elliptische lineare Kongruenz  ${}^1F_1^1$  paart die Regelschar  $\mathfrak{C}_2^2$ , deren Leitschar  $\mathfrak{C}_1^2$  ihr angehört, ebenfalls elliptisch involutorisch. Von diesen beiden durch  $C_1^1$  und  ${}^1F_1^1$  in  $\mathfrak{C}_2^2$  hervorgerufenen elliptischen Strahleninvoluntionen führt jede die andere nur dann in sich selbst über, wenn beide Involuntionen identisch sind. Bei einer hyperbolischen linearen Kongruenz bedingen also  ${}^1F_1^1$  in  $\mathfrak{C}_2^2$  und  ${}^2F_1^1$  in  $\mathfrak{C}_1^2$  dieselbe elliptische Involution, wie  $C_1^1$ . — Bei einer elliptischen linearen Kongruenz  $C_1^1$  ist nach **15.** die eine Fokalregelschar — etwa  $\mathfrak{C}_1^2$  — hyperbolisch, die andere  $\mathfrak{C}_2^2$  elliptisch involutorisch. Die mit  $\mathfrak{C}_1^2$  verbundene lineare Kongruenz  ${}^1F_1^1$  ist nach **22.** wiederum elliptisch, dagegen die mit  $\mathfrak{C}_2^2$  verbundene  ${}^2F_1^1$  hyperbolisch. Daß die elliptische lineare Kongruenz  ${}^1F_1^1$  in  $\mathfrak{C}_2^2$  dieselbe elliptische Involution, wie  $C_1^1$ , festlegt, ergibt sich auf gleiche Weise, wie bei der hyperbolischen linearen Kongruenz, und daß  $C_1^1$  und die hyperbolische lineare Kongruenz  ${}^2F_1^1$  in  $\mathfrak{C}_1^2$  auch dieselbe hyperbolische Involution bestimmen, ist ohne weiteres zu erkennen. Die Doppelstrahlen der durch  $C_1^1$  in  $\mathfrak{C}_1^2$  hervorgerufenen hyperbolischen Involution sind ja die reellen Fokalachsen  $f'$ ,  $f''$  der elliptischen Kongruenz  $C_1^1$ , und folglich nach **22.** die Leitgeraden der hyperbolischen Kongruenz  ${}^2F_1^1$ . Werden die linearen Kongruenzen  ${}^1F_1^1$ ,  ${}^2F_1^1$  die Fokalkongruenzen der linearen Kongruenz  $C_1^1$  genannt, so ist somit nach **15.** dargetan:

Die Leitgeraden der Fokalkongruenzen  ${}^1F_1^1$ ,  ${}^2F_1^1$  einer linearen Kongruenz  $C_1^1$  sind die Fokalachsen dieser Kongruenz. Durch die

zu  $\mathfrak{C}_2^2$  bzw.  $\mathfrak{C}_1^2$  gehörigen Fokalinvolutionen sind die Leitgeraden von  ${}^1F_1^1$  bzw.  ${}^2F_1^1$  bestimmt.

Der geschart involutorische Raum  $\Gamma$ , dessen Doppelstrahlen die lineare Kongruenz  $C_1^1$  bilden, und folglich diese selbst, sind eindeutig gegeben, sobald außer einer in  $C_1^1$  enthaltenen Regelschar II. Ordnung die Involution bekannt ist, die  $\Gamma$  in ihrer Leitschar hervorruft. Eine Regelschar des Fokalparaboloides einer linearen Kongruenz bestimmt also zusammen mit der ihrer Leitschar zugehörigen Fokalinvolution die mit jener Regelschar verbundene Fokalkongruenz.

24. Einer reellen Fokalachse  $f'$  einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz  $C_1^1$  ist durch jede orthogonale Regelschar  $\mathfrak{R}^2$ , welche mit ihrer hyperbolisch involutorischen Fokalregelschar  $\mathfrak{C}_1^2$  verbunden ist, ein Strahl  $s$  von  $C_1^1$  als Polare bezüglich der  $\mathfrak{R}^2$  enthaltenden Fläche II. Grades  $R^2$  zugewiesen. Nun ist  $f'$  von  $s$  durch je zwei durch  $C_1^1$  einander zugeordnete Leitstrahlen von  $\mathfrak{R}^2$  harmonisch getrennt, also auch durch die beiden einander zugeordneten Strahlen  $e_1, e_2$ , die die Leitschar von  $\mathfrak{R}^2$  mit  $\mathfrak{C}_1^2$  gemein hat. Diese aber trennen auch harmonisch  $f'$  von  $f''$ , folglich ist  $f''$  mit  $s$  identisch. Die reellen Fokalachsen  $f', f''$  sind somit reziproke Polaren für alle mit  $\mathfrak{C}_1^2$  verbundenen orthogonalen Regelflächen II. Ordnung. Zwei reziproke Polaren für zwei Flächen eines  $F^2$  Büschels sind es für alle seine Flächen, gleichgültig ob diese alle reell sind oder nicht.  $f', f''$  erweisen sich hiernach auch als reziproke Polaren in den polaren Räumen mit imaginären Inzidenzflächen, die nach 21. in dem mit  $\mathfrak{C}_1^2$  verbundenen  $F^2$  Büschel vorkommen. Da nun sowohl  $C_1^1$  wie auch alle Flächen II. Grades, auf denen in  $C_1^1$  enthaltene Regelscharen II. Ordnung liegen, in  $f'$  und  $f''$  zirkuläre Ebeneninvolutionen hervorrufen, so gilt letzteres auch von allen polaren Räumen dieses  $F^2$  Büschels, und es kann somit der Satz ausgesprochen werden:

Die reellen Fokalachsen  $f', f''$  einer elliptischen linearen Kongruenz  $C_1^1$  sind zueinander polare Fokalachsen in allen polaren Räumen, welche zu dem mit der hyperbolisch involutorischen Fokalregelschar von  $C_1^1$  verbundenen Büschel orthogonaler Regelflächen gehören.

25. Eine Involution unter den Strahlen einer gleichseitigen parabolischen Regelschar  $\mathfrak{P}_1^2$  ist unter anderm bestimmt, sobald dem unendlich fernen Regelstrahle  $c_1^2$  der ihn rechtwinklig kreuzende  $c_1^1$  zugeordnet wird, und sich zwei beliebige Regelstrahlen  $x_1^1, x_1^2$  entsprechen. Sind — was nunmehr vorausgesetzt werden soll — die zugeordneten Strahlen  $x_1^1, x_1^2$  die Achsen zweier projektiven Ebenenbüschel  $[x_1^1], [x_1^2]$ , bei denen entsprechende Ebenen zueinander senkrecht stehen, so projizieren je zwei homologe Ebenen dieser projektiven Büschel zwei zugeordnete Strahlen einer Involution unter den Strahlen der Leitschar  $\mathfrak{P}_2^2$  von  $\mathfrak{P}_1^2$ . Bei ihr

entspricht wiederum dem unendlich fernen Leitstrahle  $c_3^1$  der ihn rechtwinklig kreuzende  $c_2^2$ . — Beide auf dem gleichseitigen Paraboloid  $P^2$  gelegene Regelscharen  $\mathfrak{P}_1^2, \mathfrak{P}_2^2$  sind somit jetzt involutorisch gepaart. Sie bestimmen folglich eine lineare Strahlenkongruenz  $P_1^1$ , für welche je zwei zugeordnete Strahlen dieser involutorischen Regelscharen einander zugeordnet sind. Da je zwei aufeinander senkrechte durch zwei zugeordnete Strahlen von  $P^2$  gehende Ebenen zugeordnete Mittelebenen von  $P_1^1$  sind, so ist  $P^2$  das Fokalparaboloid der linearen Kongruenz  $P_1^1$ . Seine Scheitelebene  $c_1^2 c_2^2$  ist die Hauptmittelebene, seine Hauptachse die Hauptsymmetrieachse und seine Scheitelstrahlen  $c_1^2, c_2^2$  die Nebensymmetrieachsen von  $P_1^1$ . Kurz:

Eine gleichseitige parabolische Regelschar, deren Strahlen derart involutorisch gepaart werden, daß ihrem unendlich fernen Strahle der ihn rechtwinklig kreuzende Regelstrahl zugeordnet wird, ist stets eine Fokalregelschar einer gewissen linearen Kongruenz. Eine elliptische lineare Kongruenz ist durch ihre Hauptsymmetrieachse und ihre beiden reellen Fokalachsen bestimmt.

Eine parabolische Involution der Strahlen einer gleichseitigen parabolischen Regelschar  $\mathfrak{P}_1^2$ , bei der alle Strahlen demjenigen Strahle zugeordnet sind, der den unendlich fernen Strahl von  $\mathfrak{P}_1^2$  rechtwinklig kreuzt, ist die eine Fokalinvolution einer parabolischen linearen Kongruenz  $\bar{P}_1^1$ . Die andere Fokalinvolution dieser linearen Kongruenz paart die Leitschar  $\mathfrak{P}_2^2$  von  $\mathfrak{P}_1^2$  derart, daß zueinander normale Strahlen von  $\mathfrak{P}_2^2$  einander zugeordnet werden.

26. Die Strahleninvolutionen  $[x_1^1, x_1^2 - \dots]$ ,  $[x_2^1, x_2^2 - \dots]$ , welche eine lineare Kongruenz  $C_1^1$  bzw. in ihren Fokalregelscharen  $\mathfrak{C}_1^2, \mathfrak{C}_2^2$  hervorruft, rufen auf jedem Kegelschnitte des Fokalparaboloides  $C^2$  von  $C_1^1$  und somit auch auf einer Hauptparabel  $\pi^2$  der Fläche zwei Punktinvolutionen hervor. In jeder der beiden involutorischen Fokalregelscharen ist nun dem zugehörigen Scheitelstrahle von  $C^2$  der ihn rechtwinklig kreuzende unendlich ferne Strahl zugeordnet, demnach liegen die Involutionen  $J_1, J_2$  der Punktinvolutionen  $[X_1^1, X_1^2 - \dots]$ ,  $[X_2^1, X_2^2 - \dots]$ , in denen bzw. die beiden involutorischen Fokalregelscharen  $[x_1^1, x_1^2 - \dots]$ ,  $[x_2^1, x_2^2 - \dots]$  die Hauptparabel  $\pi^2$  schneiden, auf der mit der Hauptsymmetrieachse  $c_x$  von  $C_1^1$  zusammenfallenden Achse von  $\pi^2$ . Zwei zueinander normale Ebenen  $\xi_1, \xi_2$ , welche bzw. zwei zugeordnete Strahlen  $x_1^1, x_1^2$  der involutorischen Fokalregelschar  $[x_1^1, x_1^2 - \dots]$  projizieren, projizieren nach 15. bzw. zugleich zwei zugeordnete Strahlen  $y_2^1, y_2^2$  der andern involutorischen Fokalregelschar. Nun sind durch  $C_1^1$  die Ebenen  $x_1^1 y_2^1, x_1^2 y_2^2$  einander zugeordnet, ebenso die Ebenen  $x_1^1 y_2^2, x_1^2 y_2^1$ ; sie gehen bzw. durch die Gegenseiten  $X_1^1 Y_2^1, X_1^2 Y_2^2$  und  $X_1^1 Y_2^2, X_1^2 Y_2^1$  des vollständigen Vierecks  $X_1^1 X_1^2 Y_2^1 Y_2^2$ , und somit schneiden zwei Paar Gegenseiten dieses Vierecks und folglich auch

das dritte Paar  $X_1^1 X_1^2$ ,  $Y_2^1 Y_2^2$  den Kongruenzstrahl  $c_a$  in Punktepaaren der durch  $C_1^1$  auf ihm hervorgerufenen Involution. Die Schnittpunkte von  $X_1^1 X_1^2$  und  $Y_2^1 Y_2^2$  mit  $c_a$  sind aber die Involutionenzzentren  $J_1, J_2$ , diese sind also durch  $C_1^1$  einander zugeordnet.

Geht insbesondere  $\xi_1$  durch die Tangente  $x_1$  von  $\pi^2$  im Punkte  $X_1^1$ , so schneidet  $\xi_2$  die Ebene  $\pi$  von  $\pi^2$  in der durch den Punkt  $X_1^2$  gehenden Normalen  $n_1^x$  zu  $x_1$ . Dem Punkte  $X_1^1$  entspricht also als Punkt  $U_2^1$  der Involution  $[X_2^1, X_2^2 - \dots]$  der Punkt  $U_2^2$ , in dem die aus  $X_1^2$  auf die Tangente  $x_1$  gefällte Senkrechte  $n_1^x$  die Parabel noch einmal schneidet. Ebenso entspricht dem Punkte  $X_1^2$  als Punkt  $V_2^1$  dieser Involution der Schnittpunkt  $V_2^2$  von  $\pi^2$  mit demjenigen Strahle  $n_2^x$  von  $X_1^1$ , der zur Tangente  $x_2$  von  $\pi^2$  im Punkte  $X_1^2$  normal ist. Nun liegt der Schnittpunkt  $J_2$  der Gegenseiten  $X_1^1 U_2^2$ ,  $X_1^2 V_2^2$  und der Schnittpunkt der Gegenseiten  $X_1^2 U_2^2$ ,  $X_1^1 V_2^2$  des  $\pi^2$  eingeschriebenen einfachen Vierecks  $X_1^1 U_2^2 X_1^2 V_2^2$  mit dem Schnittpunkte  $X$  der Tangenten  $x_1, x_2$  in seinen Gegenpunkten  $X_1^1, X_1^2$  auf einer Geraden. Sie ist, da  $X_1^2 U_2^2$ ,  $X_1^1 V_2^2$  bzw. mit den Höhenstrahlen  $n_1^x, n_2^x$  des Dreiecks  $J_2 X_1^2 X_1^1$  zusammenfallen, identisch mit dem dritten zur Seite  $X_1^1 X_1^2$  senkrechten Höhenstrahle  $n_3^x$  dieses Dreiecks.  $X$  ist aber der Pol dieser Seite bezüglich  $\pi^2$ , folglich sind  $X_1^1 X_1^2$  und  $n_3^x$  konjugierte zueinander normale Strahlen bezüglich dieser Parabel und die bzw. auf ihnen gelegenen Involutionenzzentren  $J_1, J_2$  zugeordnete Punkte der Brennpunktsinvolution von  $\pi^2$ . Kurz:

Die involutorischen Fokalregelscharen einer linearen Kongruenz  $C_1^1$  rufen auf einer Hauptparabel  $\pi^2$  ihres Fokalparaboloides  $C^2$  zu ihnen perspektive Punktinvolutionen hervor, deren Involutionenzzentren durch  $C_1^1$  einander zugeordnet sind und ein Punktepaar der Fokalinvolution jener Hauptparabel bilden.

Der Brennpunkt der Hauptparabel  $\pi^2$  hälftet den Abstand zweier zugeordneten Punkte ihrer Fokalinvolution, folglich auch die Strecke  $J_1 J_2$ . Bezeichnet  $d$  den Abstand dieses Brennpunktes vom Scheitelpunkte von  $\pi^2$ , so liegen bei einer hyperbolischen linearen Kongruenz die beiden durch ihre Fokalinvolutionen bestimmten Involutionenzzentren  $J_1, J_2$  innerhalb  $\pi^2$  auf der Achse dieser Parabel symmetrisch zum Brennpunkte und ihr Abstand  $J_1 J_2$  ist  $< 2d$ . Ist der Abstand  $J_1 J_2 = 2d$ , so ist die vorliegende lineare Kongruenz parabolisch, ist er  $> 2d$ , elliptisch.

27. Eine elliptisch involutorische Fokalregelschar  $[x_\pi^1, x_\pi^2 - \dots]$  einer linearen Kongruenz  $C_1^1$  schneidet eine Hauptparabel  $\pi^2$  und den nicht zur Fokalregelschar gehörigen Scheitelstrahl  $c_\pi$  ihres Fokalparaboloides  $C^2$  bzw. in den zu ihr perspektiven elliptischen Punktinvolutionen  $[X_\pi^1, X_\pi^2 - \dots]$  und  $[\mathfrak{X}_\pi^1, \mathfrak{X}_\pi^2 - \dots]$ . Das durch die Punktinvolution  $[X_\pi^1, X_\pi^2 - \dots]$  bestimmte Involutionenzzentrum  $J_\pi$  liegt nach 26. auf der

Achse  $c_d$  der Parabel  $\pi^2$  im Inneren dieser Kurve, und die in  $J_x$  auf der Achse errichtete Normale schneidet  $\pi^2$  in zwei zugeordneten Punkten  $P_x^1, P_x^2$  der Involution  $[X_x^1, X_x^2 - \dots]$ , welche durch die beiden bzw. durch sie hindurchgehenden zugeordneten Strahlen  $p_x^1, p_x^2$  der Fokalinvolution  $[x_x^1, x_x^2 - \dots]$  orthogonal in die Potenzpunkte  $\mathfrak{P}_x^1, \mathfrak{P}_x^2$  der elliptischen Punktinvolution  $[\mathfrak{X}_x^1, \mathfrak{X}_x^2 - \dots]$  auf  $c_x$  projiziert werden. Die Sehne  $P_x^1 P_x^2$  von  $\pi^2$  hat, wenn der Brennpunkt dieser Parabel und das Involutionzentrum  $J_x$  vom Scheitelpunkte von  $\pi^2$  bzw. um  $d$  und  $i_x$  abstehen, die Länge  $2\sqrt{4di_x}$ , folglich hat die Potenz der elliptischen Punktinvolution  $[\mathfrak{X}_x^1, \mathfrak{X}_x^2 - \dots]$  den Wert  $-2di_x$ . Bei einer hyperbolischen linearen Kongruenz ist nun  $i_x$  nach 26. stets  $< 2d$  und auch die zweite Fokalinvolution  $[x_x^1, x_x^2 - \dots]$  elliptisch, sie schneidet den Scheitelstrahl  $c_x$  von  $C^2$  in einer zu ihr perspektiven elliptischen Punktinvolution  $[\mathfrak{X}_x^1, \mathfrak{X}_x^2 - \dots]$ , deren Potenz den Wert  $-2d(2d - i_x)$  hat. — Alle elliptischen Fokalinvolutionen  $[x_x^1, x_x^2 - \dots]$ , deren Potenzstrahlen auf dem Scheitelstrahle  $c_x$  eine Strecke  $< 4d$  begrenzen, bestimmen hyperbolische lineare Kongruenzen mit dem Fokalparaboloide  $C^2$ . Eine elliptische Fokalinvolution  $[x_x^1, x_x^2 - \dots]$ , deren Potenzstrahlen auf  $c_x$  eine Strecke  $= 4d$  begrenzen, legt eine parabolische lineare Kongruenz mit diesem Fokalparaboloide fest, endlich eine elliptische Fokalinvolution, deren Potenzstrahlen auf  $c_x$  eine Strecke  $> 4d$  ausschneiden, eine zum gleichen Fokalparaboloide gehörige elliptische lineare Kongruenz. Die elliptische Fokalinvolution  $[x_x^1, x_x^2 - \dots]$  einer parabolischen linearen Kongruenz wird nach 16. von den zueinander normalen Strahlen der Regelschar  $\mathfrak{C}_x^2$  des Fokalparaboloides  $C^2$  gebildet. Diese schneiden also den Scheitelstrahl  $c_x$  von  $C^2$  — wie ja auch sonst bekannt ist — in den Punktepaaren einer elliptischen Punktinvolution von der Potenz  $-(2d)^2$ . Schneidet die elliptische Fokalinvolution einer elliptischen linearen Kongruenz  $C_1^1$  auf dem Scheitelstrahle  $c_x$  des zugehörigen Fokalparaboloides  $C^2$  eine zu ihr perspektive elliptische Punktinvolution mit der Potenz  $-2di_x$  aus, so schneidet ihre hyperbolische Fokalinvolution den anderen Scheitelstrahl  $c_x$  von  $C^2$  in einer zu ihr perspektiven hyperbolischen Punktinvolution mit der Potenz  $2d(i_x - 2d)$ .

28. Ist  $[\mathfrak{X}_x^1, \mathfrak{X}_x^2 - \dots]$  die durch die Fokalinvolution  $[x_x^1, x_x^2 - \dots]$  von  $C_1^1$  auf dem Scheitelstrahle  $c_x$  von  $C^2$  ausgeschnittene Punktinvolution, so gehen nach 17. durch die zugeordneten Punkte  $\mathfrak{X}_x^1, \mathfrak{X}_x^2$  die bzw. zu  $x_x^2, x_x^1$  parallelen Kongruenzstrahlen  $x_1, x_2$ . Sie beschreiben die gleichseitige parabolische Regelschar  $\mathfrak{P}_x^2$ , welche alle mit  $c_x$  inzidenten Kongruenzstrahlen bilden, wenn  $x_x^1, x_x^2$  die Fokalinvolution in der Fokalregelschar  $\mathfrak{C}_x^2$  durchlaufen. In  $\mathfrak{P}_x^2$  kreuzt  $x_1$  einen Regelstrahl  $n_2$  rechtwinklig.  $n_2$  wird gefunden, indem man zunächst in der Regelschar  $\mathfrak{C}_x^2$

von  $C^2$  den  $x_x^2$  rechtwinklig kreuzenden Regelstrahl  $n_x^1$  aufsucht und seinen Schnittpunkt  $\mathfrak{N}_x^1$  mit  $c_2$  bestimmt,  $n_x^2$  ist dann inzident mit dem  $\mathfrak{N}_x^1$  durch die Punktinvolution  $[\mathfrak{X}_x^1, \mathfrak{X}_x^2 - \dots]$  zugeordneten Punkt  $\mathfrak{N}_x^2$ . Die Potenz der elliptischen Involution, die alle sich rechtwinklig kreuzenden Regelstrahlen von  $\mathfrak{C}_x^2$  auf  $c_2$  ausschneiden, ist nach 27.  $-(2d)^2$ , ferner sei  $+d_x^2$  oder  $-d_x^2$  die Potenz der Punktinvolution  $[\mathfrak{X}_x^1, \mathfrak{X}_x^2 - \dots]$ , je nachdem die zu ihr perspektive Fokalinvolution  $[x_x^1, x_x^2 - \dots]$  hyperbolisch oder elliptisch ist, endlich sei  $-d_x^2$  die gesuchte Potenz der Punktinvolution, in der alle sich rechtwinklig kreuzenden Regelstrahlen von  $\mathfrak{B}_x^2$  den Scheitelstrahl  $c_2$  treffen. Dann gelten, wenn  $C$  wiederum der Scheitelpunkt des Fokalparaboloides  $C^2$  ist, gemäß der soeben durchgeführten Konstruktion des  $x_1$  rechtwinklig kreuzenden Strahles  $n_x^2$  die Beziehungen:

$$C\mathfrak{X}_x^2 \cdot C\mathfrak{N}_x^1 = -(2d)^2,$$

$$C\mathfrak{N}_x^1 \cdot C\mathfrak{N}_x^2 = \pm d_x^2,$$

$$C\mathfrak{X}_x^1 \cdot C\mathfrak{N}_x^2 = -d_x^2.$$

Geht insbesondere  $x_1$  durch einen Doppelpunkt bzw. einen Potenzpunkt der Punktinvolution  $[\mathfrak{X}_x^1, \mathfrak{X}_x^2 - \dots]$  — etwa durch den, der von  $C$  den Abstand  $+d_x$  hat, so ist  $C\mathfrak{X}_x^1 = d_x$  und  $C\mathfrak{X}_x^2 = \pm d_x$ , und es folgt:

$$\pm d_x \cdot C\mathfrak{N}_x^1 = -(2d)^2,$$

$$C\mathfrak{N}_x^1 \cdot C\mathfrak{N}_x^2 = \pm d_x^2,$$

$$d_x \cdot C\mathfrak{N}_x^2 = -d_x^2,$$

oder:

$$-\left(\frac{d_x^2}{2d}\right)^2 = -d_x^2.$$

$\frac{d_x^2}{2d}$  ist aber gleich dem absoluten Werte des Abstandes des Involutionszentrums  $J_x$  vom Scheitelpunkte  $C$  von  $C^2$ . Wird dieser absolute Wert durch  $[J_x C]$  bezeichnet und ferner der absolute Wert des Abstandes der Potenzpunkte der elliptischen Punktinvolution, welche die sich rechtwinklig kreuzenden Strahlen von  $\mathfrak{B}_x^2$  auf der Nebensymmetrieachse  $c_2$  bestimmen, durch  $[2d_x]$ , so ergibt sich die merkwürdige Beziehung:

$$[J_x C] = [d_x].$$

Die Strecke  $[J_x C]$  auf  $c_2$  von  $C$  aus nach beiden Seiten abgetragen, liefert also die Potenzpunkte der Involution, in der die mit  $c_2$  inzidenten sich rechtwinklig kreuzenden Kongruenzstrahlen diese Nebensymmetrieachse von  $C_1^1$  treffen.

29. Die Abstände der in 26. bestimmten Involutionszentren  $J_1, J_2$  vom Scheitelpunkte  $C$  der Hauptparabel  $\pi^2$  sollen positiven Wert haben, wenn das betreffende Involutionszentrum innerhalb  $\pi^2$ , negativen, wenn es

außerhalb  $\pi^2$  liegt. Somit wird die Potenz der von einer linearen Kongruenz  $C_1^1$  auf ihrer Hauptsymmetrieachse  $c_a$  hervorgerufenen Involution, da  $J_1, J_2$  nach 26. durch  $C_1^1$  einander zugeordnet sind, dargestellt durch das Produkt  $CJ_1 \cdot CJ_2$ . Die Involutionen  $J_1, J_2$  sind aber, wie ebenfalls daselbst bewiesen wurde, auch symmetrisch zum Brennpunkte von  $\pi^2$ . Ist demnach  $J_1$  das zu einer elliptischen Fokalinvolution einer linearen Kongruenz gehörige Involutionenzentrum,  $2d_1$  die Strecke, die ihre Potenzstrahlen auf dem Scheitelstrahle  $c_2$  des Fokalparaboloides  $C^2$  begrenzen, und  $d$  wiederum der Abstand des Brennpunktes vom Scheitelpunkte  $C$  von  $\pi^2$ , so läßt sich jenes Produkt auch in der Form:

$$\frac{d_1^2(4d^2 - d_1^2)}{4d^2}$$

oder nach 28. in der Form:

$$d_1^2 - d_x^2 \quad \text{bzw.} \quad d_1^2 - CJ_1^2$$

darstellen.

Bei einer elliptischen linearen Kongruenz  $C_1^1$  ist  $2\sqrt{d_1^2 - d_x^2}$  gleich dem Abstände der beiden zur Hauptmittelebene  $\gamma$  parallelen und durch  $C_1^1$  einander zugeordneten Ebenen, in denen die Potenzpunkte der durch die lineare Kongruenz auf ihren Strahlen hervorgerufenen elliptischen Punktinvolutionen liegen.

### Die in einer linearen Strahlenkongruenz enthaltenen rotatorischen Regelscharen.

**30.** Nach 14. ist das in der Hauptmittelebene  $\gamma$  einer linearen Kongruenz  $C_1^1$  gelegene Punktfeld korrelativ zu dem unendlich fernen Strahlenfelde, wenn der Spur  $\mathfrak{X}$  jedes Kongruenzstrahles  $x$  mit  $\gamma$  die Schnittgerade  $x_\infty$  der zu ihm senkrechten Mittelebene  $\xi$  mit der unendlich fernen Ebene zugewiesen wird. Alle durch eine Erzeugende  $e$  des Fokalparaboloides  $C^2$  von  $C_1^1$  gehenden Ebenen sind nun Mittelebenen von  $C_1^1$ . Dem Strahlenbüschel, in dem die unendlich ferne Ebene den Ebenenbüschel I. Ordnung  $[e]$  schneidet, entspricht in  $\gamma$  eine zum Ebenenbüschel  $[e]$  perspektive Punktreihe I. Ordnung  $[e]$ . Die durch die Punkte dieser Punktreihe gehenden Strahlen von  $C_1^1$  sind normal zu den durch diese Punkte gehenden Ebenen des Büschels  $[e]$ , sie bilden folglich eine parabolische Regelschar  $\mathfrak{C}^2$  II. Ordnung, deren unendlich ferne Leitgerade der  $e$  durch  $C_1^1$  zugeordnete Strahl  $e_\infty$  ist.  $e_\infty$  kreuzt  $e$  rechtwinklig. Zur Regelschar  $\mathfrak{C}^2$  gehört der mit der unendlich fernen Geraden von  $\gamma$  zusammenfallende Kongruenzstrahl  $c_\infty$ , ferner, wenn  $c_\lambda$  der  $e$  schneidende Scheitelstrahl von  $C^2$  ist, der zur Ebene  $ec_\lambda$  normale Kongruenzstrahl  $n_e$ , somit ist  $e$  die in der Ebene  $\gamma$  gelegene im Punkte  $c_\lambda n_e$  auf  $c_\lambda$  errichtete Senkrechte. Die Ebene



$n_e c_\lambda$  enthält den unendlich fernen Leitstrahl, die Ebene  $\gamma$  den unendlich fernen Regelstrahl  $c_\infty$  der Regelschar  $\mathfrak{G}^2$ . Die Geraden  $e, n_e$  sind also, da sie auf der Schnittgeraden  $c_\lambda$  dieser beiden Ebenen normal sind, die Scheitelstrahlen und  $c_\lambda$  die Hauptachse des Paraboloides  $E^2$ , auf dem  $\mathfrak{G}^2$  liegt. — Die Regelschar  $\mathfrak{G}^2$  ist projektiv zum Ebenenbüschel  $[e]$ , wenn jedem ihrer Strahlen  $a_e, b_e, c_e, n_e, \dots$  die zu ihm senkrechte Ebene dieses Büschels zugewiesen wird, folglich ist  $\mathfrak{G}^2$  auch projektiv zu der zum Ebenenbüschel  $[e]$  perspektiven orthogonalen Regelschar  $\mathfrak{R}_e^2$ , welche alle mit  $e$  inzidenten Kongruenzstrahlen  $a_r, b_r, c_r, \dots$  bilden, sobald — was nunmehr vorausgesetzt wird —  $e$  mit keiner Fokalachse von  $C_1^1$  zusammenfällt. Entsprechende Strahlen  $a_e, a_r - b_e, b_r - c_e, c_r - \dots$  der beiden projektiven Regelscharen kreuzen sich rechtwinklig.

Aus ihrem unendlich fernen Leitstrahle  $e_\infty$  wird die Regelschar  $\mathfrak{G}^2$  durch einen zu ihr perspektiven Ebenenbüschel  $[e_\infty]$  projiziert, dessen Ebenen auf  $e$  senkrecht stehen. Dieser Ebenenbüschel ist durch die Regelschar  $\mathfrak{G}^2$  projektiv auf die Regelschar  $\mathfrak{R}_e^2$  bezogen und schneidet folglich  $e$  in einer zu  $\mathfrak{R}_e^2$  projektiven Punktreihe. Es entspricht dabei der durch den Regelstrahl  $n_e$  von  $\mathfrak{G}^2$ , also auch zugleich durch  $c_\lambda$  gehenden Ebene der zu  $e$  parallele Kongruenzstrahl, und der unendlich fernen Ebene der im Punkte  $ec_\lambda$  auf  $c_\lambda$  normale, somit schneiden entsprechende Elemente der beiden projektiven Gebilde  $[e_\infty]$  und  $\mathfrak{R}_e^2$  die Erzeugende  $e$  in einer Punktinvolution. Sind also die Kongruenzstrahlen  $a_r, b_r, c_r, \dots$  mit einer Erzeugenden  $e$  des Fokalparaboloides  $C^2$  inzident, und sind  $a_e, b_e, c_e, \dots$  die bzw. zu den Ebenen  $a_r e, b_r e, c_r e, \dots$  normalen Kongruenzstrahlen, so schneiden  $a_r$  und die durch  $a_e$  gehende Normalebene  $\alpha$  von  $e$ ,  $b_r$  und die durch  $b_e$  gehende Normalebene  $\beta$  von  $e$  usf. die Gerade  $e$  je in den Punktepaaren  $A, A_\alpha - B, B_\beta - C, C_\gamma - \dots$  einer Involution. Ihr Mittelpunkt ist der Schnittpunkt  $E$  der Erzeugenden  $e$  mit dem Scheitelstrahle  $c_\lambda$  von  $C^2$ . — Die Regelscharen  $\mathfrak{G}^2$  und  $\mathfrak{R}_e^2$  fallen zusammen, sobald die Erzeugende  $e$  von  $C^2$  zu einem Scheitelstrahle dieser Fläche wird. Die bzw. auf den Ebenen  $a_r e, b_r e, c_r e, \dots$  normalen Kongruenzstrahlen  $a_e, b_e, c_e, \dots$  sind nämlich dann die  $a_r, b_r, c_r, \dots$  bzw. rechtwinklig kreuzenden Strahlen der gleichseitigen parabolischen Regelschar, welche alle mit jenem Scheitelstrahle inzidenten Kongruenzstrahlen bilden.

**31.** Unter der Voraussetzung, daß  $e$  weder mit einem Scheitelstrahle noch mit einer unendlich fernen Erzeugenden von  $C^2$  zusammenfällt, ist die orthogonale Projektion der Regelschar  $\mathfrak{G}^2$  des Paraboloides  $E^2$  auf die durch  $c_\lambda$  gehende Normalebene  $\nu$  von  $e$  ein parabolischer Strahlenbüschel  $\varepsilon^2$ . In  $\nu$  liegt der zur Ebene  $ec_\lambda$  senkrechte Scheitelstrahl  $n_e$  von  $\mathfrak{G}^2$  und die Scheitalebene  $n_e e$  von  $E^2$  ist zu  $c_\lambda$  normal, somit fällt  $c_\lambda$  mit der Achse und  $n_e$  mit dem Scheitelstrahle des parabolischen Büschels  $\varepsilon^2$  zu-

sammen. Sein Brennpunkt ist, da seine Strahlen bzw. auf den Ebenen des Büschels  $[e]$  senkrecht stehen, der Punkt  $ec_\lambda = E$ . — Sind auf  $\nu$  die Geraden  $z_r', z_e'$  die Orthogonalprojektionen der sich rechtwinklig kreuzenden Regelstrahlen  $z_r, z_e$  von  $\mathfrak{R}_e^2$  und  $\mathfrak{C}^2$ , so geht  $z_r'$  durch den Brennpunkt  $E$  von  $\varepsilon^2$  und steht in seinem Schnittpunkte  $Z_e$  mit dem Scheitelstrahl  $n_e$  von  $\varepsilon^2$  auf  $z_e'$  senkrecht.  $z_r$  durchbohrt nun  $\nu$  in einem Punkte  $Z_r'$  der Schnittkurve von  $\mathfrak{R}_e^2$  und  $\nu$ . Da diese nach 17. ein Kreis ist, dessen Mittelpunkt auf der Achse des parabolischen Büschels  $\varepsilon^2$  liegt, so besteht zwischen den Strecken  $Z_r'E$  und  $Z_eE$  die Beziehung:

$$Z_r'E \cdot Z_eE = \text{Const.}$$

Der Durchstoßungspunkt  $Z_r'$  eines Strahles  $z_r$  von  $\mathfrak{R}_e^2$  mit der Ebene  $\nu$  und die Orthogonalprojektion des  $z_r$  rechtwinklig kreuzenden Strahles  $z_e$  von  $\mathfrak{C}^2$  auf  $\nu$  sind folglich Pol und Polare in einem zirkular polaren Felde  $\gamma_\nu^2$  mit dem Mittelpunkte  $E$ . Nun schneiden aber nach 30. die Strahlen  $a_r, b_r, \dots, z_r, \dots$  von  $\mathfrak{R}_e^2$  und die durch die Strahlen  $a_e, b_e, \dots, z_e, \dots$  von  $\mathfrak{C}^2$  gehenden zu  $e$  normalen Ebenen  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \zeta, \dots$  die Gerade  $e$  je in den Punktepaaren  $A, A_\alpha - B, B_\beta - \dots - Z, Z_\zeta - \dots$  einer Involution mit dem Mittelpunkte  $E$ , demnach folgt:

Die bzw. sich rechtwinklig kreuzenden Strahlen

$$a_r, a_e - b_r, b_e - \dots - z_r, z_e - \dots$$

der in der linearen Kongruenz enthaltenen Regelscharen  $\mathfrak{R}_e^2, \mathfrak{C}^2$  sind reziproke Polaren in einem rotatorischen polaren Raume  $\Gamma_e^2$ . Seine Rotationsachse ist  $e$ , seine zu  $e$  senkrechte Symmetrieebene ist  $\nu$ . Dieser polare Raum ruft in  $\nu$  das zirkular polare Feld  $\gamma_\nu^2$  und auf  $e$  die Punktinvolution  $A, A_\alpha - B, B_\beta - \dots - Z, Z_\zeta - \dots$  hervor, und er führt, da die in ihm enthaltenen reziproken Polaren

$$a_r, a_e - b_r, b_e - \dots - z_r, z_e - \dots$$

nicht einer und derselben Regelschar von  $C_1^1$  angehören, die lineare Kongruenz  $C_1^1$  in sich selbst über.

32. Dem unendlich fernen Punkte  $Z_r^\infty$  eines Regelstrahles  $z_r$  von  $\mathfrak{R}_e^2$  ist durch  $C_1^1$  der Treffpunkt  $Z_r'$  mit der Hauptmittelebene  $\gamma$  der Kongruenz zugeordnet, ferner im rotatorischen polaren Raum  $\Gamma_e^2$  die mit dem Mittelpunkte  $E$  von  $\Gamma_e^2$  und der Polare  $z_e$  von  $z_r$  inzidente Durchmesserenebene  $z_eE$ . Nun durchbohrt  $z_e$  als der zur Mittelebene  $z_re$  von  $C_1^1$  normale Kongruenzstrahl die Hauptmittelebene  $\gamma$  in einem Punkte der Schnittgeraden  $Z_r'E$  dieser beiden Ebenen, folglich enthält die Durchmesserenebene  $z_eE$  die Gerade  $Z_r'E$  selbst, und  $Z_r'$  ist also auch dem unendlich fernen Punkte  $Z_r^\infty$  von  $z_r$  im rotatorischen polaren Raume  $\Gamma_e^2$  konjugiert.

Dem unendlich fernen Punkte  $Z_e^\infty$  eines Regelstrahles  $z_e$  von  $\mathfrak{C}^2$  ist

ferner durch  $C_1^1$  der Schnittpunkt  $Z'_e$  von  $z_e$  mit der zu ihm normalen Ebene  $ez_r$  zugeordnet. Die Punkte  $Z'_e, Z_e^\infty$  sind konjugiert für jede Regelfläche II. Grades, auf welcher eine in  $C_1^1$  enthaltene Regelschar II. Ordnung liegt, insbesondere also auch für die durch die orthogonale Regelschar  $\mathfrak{R}_e^2$  gehende Fläche  $R_e^2$  und den Kreis  $z^2$ , den die mit  $z_e$  inzidente zu  $e$  normale Ebene  $\xi$  mit  $R_e^2$  gemein hat. Der Mittelpunkt von  $z^2$  liegt auf der mit  $\xi$  inzidenten in  $Z'_e$  auf  $z_e$  errichteten Normalen, sie schneidet die beiden Leitstrahlen  $e, e'$  von  $\mathfrak{R}_e^2$ , aus denen die Strahlen dieser Regelschar durch je zwei zueinander normale Ebenen projiziert werden, bzw. in den Punkten  $Z_\xi, Z'$ . Da die Ebene  $eZ'$  somit den  $z_e$  rechtwinklig kreuzenden Strahl  $z_r$  von  $\mathfrak{R}_e^2$  enthält, so geht  $z_r$  durch  $Z'$ . Dieser Punkt liegt aber auf  $e'$ , und  $e, e'$  sind nach 17. durch  $C_1^1$  einander zugeordnet, folglich schneidet  $z_r$  diese Strahlen in den durch  $C_1^1$  einander zugeordneten Punkten  $Z = z_r e$  und  $Z'$ . Ersterer Punkt ist nach 31. der Pol der Ebene  $\xi$  im rotatorischen polaren Raume  $\Gamma_e^2$ , folglich sind  $Z, Z'$  nicht nur durch  $C_1^1$  einander zugeordnet, sondern auch in  $\Gamma_e^2$  einander konjugiert.

Die auf  $z_r$  durch  $C_1^1$  und  $\Gamma_e^2$  hervorgerufenen Punktinvolutionen haben also die beiden Punktepaare  $Z'_r, Z_r^\infty$  und  $Z, Z'$  gemein und sind folglich identisch. Nur wenn  $z_r$  zu dem zu  $e$  bzw.  $e'$  parallelen Regelstrahle  $n_r$  bzw.  $n_r^1$  von  $\mathfrak{R}_e^2$  wird, gilt dieser Schluß nicht. Die Strahlen  $n_r, n_r^1$  nehmen jedoch keine Ausnahmestellung ein, wie die folgende Untersuchung zeigt.

Auf einem weder mit  $n_r$  noch  $n_r^1$  zusammenfallenden Strahle  $z_r$  von  $\mathfrak{R}_e^2$  sei dem Punkte  $z_r e = Z$  durch  $C_1^1$  der Punkt  $Z'$  zugeordnet. Beide Punkte sind in  $\Gamma_e^2$  konjugiert. Die Punkte  $Z, Z'$  liegen mit dem  $n_r$  rechtwinklig kreuzenden Regelstrahle  $n_e$  von  $\mathbb{C}^2$  in zwei durch  $C_1^1$  einander zugeordneten Ebenen  $n_e Z = \xi_n, n_e Z' = \xi'_n$ . Nach 31. ist nun  $Z$  in  $\Gamma_e^2$  der Pol der durch  $z_e$  und  $Z'$  gehenden Normalebene  $\xi$  von  $e$ , und  $n_e$  die Polare von  $n_r$ , folglich fällt der Pol von  $\xi_n$  in den Punkt  $n_r \xi$ . Die Ebenen  $\xi, \xi'_n$  schneiden sich nun in der durch  $Z'$  laufenden Parallelen zu  $n_e$ . Sie fällt, da  $Z'$  ein Punkt der  $e$  durch  $C_1^1$  zugeordneten Geraden  $e'$  ist, in die  $e'$  enthaltende Normalebene von  $c_\lambda$ . In ihr liegt  $n_r$ , folglich ist der Pol  $n_r \xi$  von  $\xi_n$  ein Punkt von  $\xi'_n$ , und demnach sind die durch  $C_1^1$  einander zugeordneten Ebenen  $\xi_n, \xi'_n$  im rotatorischen polaren Raume  $\Gamma_e^2$  konjugiert. Jede trifft  $n_r$  im Pole der anderen. Die beiden durch  $C_1^1$  und  $\Gamma_e^2$  einander zugeordneten Ebenen  $\xi_n, \xi'_n$  schneiden also den Kongruenzstrahl  $n_r$  in zwei durch  $C_1^1$  einander zugeordneten und in  $\Gamma_e^2$  konjugierten Punkten. Außer dem Mittelpunkte  $N_r'$  haben hiernach die beiden auf  $n_r$  durch  $C_1^1$  und  $\Gamma_e^2$  hervorgerufenen Involutionen noch ein Punktepaar gemein, sie sind folglich identisch.

$n_r^1$  ist der zu  $e'$  parallele Strahl von  $\mathfrak{R}_e^2$ , folglich ist die Ebene  $en_r^1$

normal zu  $c_\lambda$ , also auch zur Hauptmittelebene  $\gamma$ . In  $\gamma$  liegt der unendlich ferne Kongruenzstrahl  $c_\infty$ , er ist der  $n_r^1$  rechtwinklig kreuzende Strahl von  $\mathfrak{G}^2$ . Die von  $c_\infty$  nach den Punkten  $Z, Z'$  gesandten Ebenen  $\xi_c, \xi'_c$  sind wiederum durch  $C_1^1$  einander zugeordnet, und  $n_r^1$  trifft als Polare von  $c_\infty$  in  $\Gamma_e^2$  die Polarebene  $\xi$  von  $Z$  in dem  $\xi_c$  durch  $\Gamma_e^2$  zugewiesenen Pole. Nun gehen die Hauptmittelebene  $\gamma$  und die zu  $e$  normale Symmetrieebene  $\nu$  von  $\Gamma_e^2$  durch  $c_\lambda$ . Zu  $\gamma$  bzw.  $\nu$  ist die Ebene  $\xi'_c$  bzw.  $\xi$  parallel, sonach schneiden sich  $\xi'_c$  und  $\xi$  in einer zu  $c_\lambda$  parallelen Geraden. Sie enthält den auf  $e'$  gelegenen Punkt  $Z'$ , und da die parallelen Geraden  $n_r^1$  und  $e'$  mit  $c_\lambda$  inzident sind, so ist sie selbst mit  $n_r^1$  inzident. Als Pol  $n_r^1 \xi$  von  $\xi_c$  ergibt sich also ein Punkt von  $\xi'_c$ . Die durch  $C_1^1$  einander zugeordneten Ebenen  $\xi_c, \xi'_c$  sind demnach zugleich in  $\Gamma_e^2$  konjugiert. Jede schneidet  $n_r^1$  im Pole der anderen, und diese Pole sind durch  $C_1^1$  einander zugeordnet. Die beiden durch  $C_1^1$  und  $\Gamma_e^2$  auf  $n_r^1$  hervorgegerufenen Involutionen haben denselben Mittelpunkt  $E$  und, wie soeben gezeigt wurde, noch ein Punktepaar gemein, folglich fallen auch auf  $n_r^1$  alle ihre Punktepaare zusammen. Das Ergebnis der Untersuchungen in dieser Nummer ist also:

In allen Strahlen der orthogonalen Regelschar  $\mathfrak{R}_e^2$  rufen  $C_1^1$  und  $\Gamma_e^2$  die nämlichen Punktinvolutionen, in allen Strahlen der zu  $\mathfrak{R}_e^2$  in  $\Gamma_e^2$  polaren parabolischen Regelschar  $\mathfrak{G}^2$  die nämlichen Ebeneninvolutionen hervor.

**33.** Nach **32.** sind zwei mit einem Strahle  $z_e$  der Regelschar  $\mathfrak{G}^2$  inzidente durch  $C_1^1$  einander zugeordnete Ebenen  $\alpha, \alpha'$  auch in  $\Gamma_e^2$  konjugiert und schneiden die Regelschar  $\mathfrak{R}_e^2$  bzw. in den Kegelschnitten  $\alpha^2, \alpha'^2$ , deren Punkte ebenfalls paarweise durch  $C_1^1$  einander zugeordnet und in  $\Gamma_e^2$  konjugiert sind. Ein solches Punktepaar bilden die Pole  $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$  der Ebenen  $\alpha, \alpha'$ , sie werden aus  $\alpha'$  bzw.  $\alpha$  nach **31.** durch den  $z_e$  rechtwinklig kreuzenden Regelstrahl  $z_r$  von  $\mathfrak{R}_e^2$  ausgeschnitten. Die Polare einer mit  $\mathfrak{A}$  und  $\alpha'$  inzidenten Geraden  $g'$  sei in  $\Gamma_e^2$  die mit  $\mathfrak{A}'$  und  $\alpha$  inzidente Gerade  $g$ . Auf  $g'$  liegt außer  $\mathfrak{A}$  noch ein Punkt  $\mathfrak{G}'$  von  $\alpha'^2$ , auf  $g$  außer  $\mathfrak{A}'$  der  $\mathfrak{G}'$  in  $\Gamma_e^2$  konjugierte und folglich auch durch  $C_1^1$  zugeordnete Punkt  $\mathfrak{G}$  von  $\alpha^2$ . Die reziproken Polaren  $g, g'$  in  $\Gamma_e^2$  sind demnach durch  $C_1^1$  einander zugeordnet. — Die Strahlen von  $C_1^1$  treffen die durch  $C_1^1$  einander zugeordneten Ebenen  $\alpha, \alpha'$  in einander zugeordneten Punkten. Ein von  $z_e$  verschiedener Kongruenzstrahl  $x$  trifft also die Ebenen  $\alpha, \alpha'$  bzw. in den einander zugeordneten Punkten  $X, X'$  der bzw. durch  $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$  gehenden einander zugeordneten Geraden  $\gamma, \gamma'$ . Diese sind aber auch reziproke Polaren in  $\Gamma_e^2$ , folglich sind die Treffpunkte von  $x$  mit  $\alpha, \alpha'$  durch  $C_1^1$  einander zugeordnet und in  $\Gamma_e^2$  konjugiert. Was von  $\alpha, \alpha'$  gilt, gilt für jedes andere Paar der sich in  $z_e$  schneidenden, durch  $C_1^1$  einander zugeordneten und

folglich auch in  $\Gamma_e^2$  konjugierten Ebenen, somit rufen  $\Gamma_e^2$  und  $C_1^1$  in jedem Strahle von  $C_1^1$  identische Punktinvolutionen, und da  $C_1^1$  nach **31.** durch  $\Gamma_e^2$  in sich selbst übergeführt wird, auch identische Ebeneninvolutionen hervor.  $e$  kann nach **31.** jede im Endlichen gelegene Erzeugende des Fokalparaboloides  $C^2$  mit Ausnahme seiner beiden Scheitelstrahlen sein. Jeder von diesen ist aber schon nach **7.** die Rotationsachse eines rotatorischen polaren Raumes, der  $C_1^1$  derart in sich selbst überführt, daß die durch  $C_1^1$  einander zugeordneten Punkte und Ebenen in ihm konjugiert sind. Sonach ist bewiesen:

Jede im Endlichen gelegene Erzeugende  $e$  des Fokalparaboloides  $C^2$  ist die Rotationsachse eines rotatorischen polaren Raumes  $\Gamma_e^2$ , der  $C_1^1$  in sich selbst überführt, und in dem die durch  $C_1^1$  einander zugeordneten Punkte und Ebenen konjugiert sind.

Dieser rotatorische polare Raum artet aus, wenn die Kongruenz  $C_1^1$  elliptisch ist, und  $e$  mit einer der beiden reellen Fokalachsen  $f', f''$  zusammenfällt. Seine Inzidenzfläche ist dann die betreffende Fokalachse selbst, diese ist in ihm zu jedem anderen Strahle von  $C_1^1$  polar.

**34.** Eine hyperbolische lineare Kongruenz hat keine, eine elliptische zwei reelle Strahlen — die beiden Fokalachsen  $f', f''$  —, in denen sie zirkuläre Ebeneninvolutionen hervorruft. Diese enthält also zwei, jene keine Strahlen, die nach **33.** die Rotationsachsen rotatorischer polarer Räume  $\Gamma_e^2$  sind.

Ist eine nicht zu einer linearen Kongruenz  $C_1^1$  gehörige Gerade  $e$  die Rotationsachse eines rotatorischen polaren Raumes  $\Gamma_e^2$ , der  $C_1^1$  derart in sich überführt, daß die durch  $C_1^1$  einander zugeordneten Punkte und Ebenen in ihm konjugiert sind, so ist in  $\Gamma_e^2$  die Polare eines mit  $e$  inzidenten Kongruenzstrahles  $x_r$  ein Kongruenzstrahl  $x_e$ , der normal zur Ebene  $x_r e$  steht. Dem Schnittpunkte von  $x_e$  mit der Ebene  $x_r e$  ist in  $\Gamma_e^2$  der unendlich ferne Punkt von  $x_e$  konjugiert und durch  $C_1^1$  derselbe Punkt zugeordnet, die Ebene  $x_r e$  ist folglich nach **13.** die auf  $x_e$  senkrechte Mittelebene von  $C_1^1$ . Jede durch  $e$  gehende Ebene enthält einen mit  $e$  inzidenten Kongruenzstrahl, demnach ist jede solche Ebene eine Mittelebene von  $C_1^1$ , und folglich  $e$  eine Erzeugende des gleichseitigen Fokalparaboloides  $C^2$  von  $C_1^1$ . Kurz:

Außer den im Endlichen gelegenen Erzeugenden des Fokalparaboloides  $C^2$  einer linearen Kongruenz  $C_1^1$  gibt es keine weiteren Geraden, welche Rotationsachsen rotatorischer polarer Räume  $\Gamma_e^2$  sind, die  $C_1^1$  derart in sich überführen, daß die durch  $C_1^1$  einander zugeordneten Punkte in den polaren Räumen konjugiert sind.

**35.** Der durch die Erzeugende  $e$  von  $C^2$  nach **33.** bestimmte rotatorische polare Raum  $\Gamma_e^2$  ruft auf dem zu  $e$  senkrechten Scheitelstrahle  $c_1$

von  $C^2$  eine Punktinvolution hervor, deren Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt  $ec_\lambda = E$  von  $\Gamma_e^2$  zusammenfällt. Nun sind der zu  $e$  parallele Kongruenzstrahl  $n_r$  und der ihn rechtwinklig kreuzende zur Regelschar  $\mathfrak{C}^2$  gehörige Kongruenzstrahl  $n_e$  nach **31.** reziproke Polaren in  $\Gamma_e^2$ , folglich schneiden  $n_r, n_e$  auf  $c_\lambda$  ein Punktepaar  $N_r, N_e$  dieser Involution aus. Für die Abstände der Punkte  $N_r, N_e$  vom Scheitelpunkte  $C$  von  $C^2$  gilt nach **28.** die Beziehung:

$$(\alpha) \quad CN_r \cdot CN_e = -\left(\frac{d_x^2}{2d}\right)^2.$$

Durch  $N_r$  geht nach **17.** der  $e$  durch  $C_1^1$  zugeordnete Strahl  $e'$ . Je nachdem die Regelschar  $\mathfrak{C}_x^2$  von  $C^2$ , zu der  $e, e'$  gehören, durch  $C_1^1$  elliptisch oder hyperbolisch involutorisch gepaart wird, besteht zwischen den Abständen der Punkte  $N_r$  und  $E$  vom Scheitelpunkte  $C$  wiederum nach **28.** die Gleichung:

$$(\beta_1) \quad CN_r \cdot CE = -d_x^2,$$

bzw.

$$(\beta_2) \quad CN_r \cdot CE = +d_x^2.$$

Bei einer hyperbolischen linearen Kongruenz sind nach **15.** beide Fokalinvolutionen elliptisch, folglich gelten für sie die Gleichungen  $(\alpha)$  und  $(\beta_1)$ . Die Punkte  $N_e$  und  $E$  sind also auf  $c_\lambda$  durch  $C$  vom Punkte  $N_r$  getrennt. Bei einer hyperbolischen linearen Kongruenz ist ferner für beide Fokalinvolutionen nach **27.:**

$$d_x < 2d.$$

Demnach folgt aus dem sich aus  $(\alpha)$  und  $(\beta_1)$  ergebenden Ausdrücke:

$$(\gamma) \quad \frac{CN_e}{CE} = \left(\frac{d_x}{2d}\right)^2,$$

daß bei ihr  $N_e$  die Punkte  $C$  und  $E$  trennt, und  $C$  also innerhalb der endlichen Strecke  $N_r N_e$  liegt. Die in  $\Gamma_e^2$  konjugierten Punkte  $N_r, N_e$  und der Mittelpunkt  $E$  dieses polaren Raumes bestimmen somit auf  $c_\lambda$  eine hyperbolische Punktinvolution, d. h.  $\Gamma_e^2$  hat eine reelle Inzidenzfläche. Für den Fall, daß  $e$  mit einer Nebensymmetrieachse der hyperbolischen linearen Kongruenz zusammenfällt, ist der Beweis hierfür schon in **7.** erbracht worden. Kurz es gilt:

Jede im Endlichen gelegene Erzeugende  $e$  des Fokalparaboloides einer hyperbolischen linearen Kongruenz ist die Rotationsachse eines rotatorischen polaren Raumes  $\Gamma_e^2$  mit reeller Inzidenzfläche.

Bei einer elliptischen linearen Kongruenz ist nach **15.** nur die eine Fokalinvolution — etwa die, welche die Fokalregelschar  $\mathfrak{C}_1^2$  paart —

elliptisch. Gehört demnach  $e$  zu dieser Regelschar, so trennt nach  $(\alpha)$  und  $(\beta_1)$  der Scheitelpunkt  $C$  von  $C^2$  wiederum  $N_r$  von  $N_e$  und  $E$ . Für die elliptische Fokalinvolution der vorliegenden elliptischen Kongruenz ist aber nach 27.:

$$d_2 > 2d.$$

Somit liegt nach  $(\gamma)$  der Punkt  $E$  innerhalb der endlichen Strecke  $N_e C$  und also auch innerhalb der endlichen Strecke  $N_r N_e$ . Der zu  $e$  gehörige rotatorische polare Raum  $\Gamma_e^2$  hat demnach hier eine imaginäre Inzidenzfläche. Eine solche gehört nach 7. ebenfalls zu dem in  $\mathfrak{C}_1^2$  enthaltenen Scheitelstrahl  $c_1$  des Fokalparaboloides  $C^2$ . Folglich ist dargetan:

Die im Endlichen gelegenen Strahlen der elliptisch involutorischen Fokalregelschar einer elliptischen linearen Kongruenz sind die Rotationsachsen rotatorischer polarer Räume  $\Gamma_e^2$  mit imaginären Inzidenzflächen.

Da die Fokalregelschar  $\mathfrak{C}_1^2$  der vorliegenden elliptischen linearen Kongruenz durch letztere elliptisch involutorisch gepaart wird, so muß die involutorische Paarung der zweiten Fokalregelschar  $\mathfrak{C}_2^2$  hyperbolisch sein. Jene elliptische Fokalinvolution kann derart bestimmt werden, daß diese hyperbolische auf dem Scheitelstrahl  $c_2$  des Fokalparaboloides  $C^2$  eine hyperbolische Punktinvolution ausschneidet, deren Potenz  $+d_1^2$  irgend einen vorgeschriebenen positiven Wert annimmt. Für die Beziehungen zwischen den drei Punkten  $N_r$ ,  $N_e$  und  $E$  sind daher nur die Gleichungen  $(\alpha)$  und  $(\beta_2)$  zu berücksichtigen. Nach ihnen liegt  $E$  innerhalb oder außerhalb der endlichen Strecke  $N_e N_r$ , je nachdem  $E$  auf  $c_1$  innerhalb oder außerhalb der Strecke liegt, die den Abstand der reellen Fokalachsen  $f'$ ,  $f''$  der elliptischen linearen Kongruenz mißt. Mit Rücksicht auf 7. ist hier nach bewiesen:

Paart eine elliptische lineare Kongruenz die Regelschar  $\mathfrak{C}_2^2$  ihres Fokalparaboloides  $C^2$  hyperbolisch, so zerfallen die Strahlen  $e$  von  $\mathfrak{C}_2^2$  in solche, welche Rotationsachsen rotatorischer polarer Räume  $\Gamma_e^2$  mit imaginären, und in solche, welche Rotationsachsen rotatorischer polarer Räume  $\Gamma_e^2$  mit reellen Inzidenzflächen sind. Ein Strahl  $e$  von  $\mathfrak{C}_2^2$  ist die Rotationsachse eines polaren Raumes  $\Gamma_e^2$  mit imaginärer Inzidenzfläche, sobald er in den von den Fokalachsen begrenzten Teil von  $\mathfrak{C}_2^2$  fällt, der den Scheitelstrahl  $c_2$  enthält. Ist  $e$  außerhalb dieses Teiles gelegen, so hat der zugehörige polare Raum  $\Gamma_e^2$  eine reelle Inzidenzfläche. Ist  $e$  eine der beiden Fokalachsen, so artet die Inzidenzfläche nach 33. in diese Fokalachse selbst aus.

Bei einer hyperbolischen linearen Kongruenz läßt sich der Nachweis, daß jede im Endlichen gelegene Erzeugende  $e$  ihres Fokalparaboloides  $C^2$  die Rotationsachse eines rotatorischen polaren Raumes  $\Gamma_e^2$  mit reeller

Inzidenzfläche ist, auch auf folgende einfache und anschauliche Weise führen:

Die Punkte der beiden Leitgeraden  $u, v$  einer hyperbolischen linearen Kongruenz  $C_1^1$  sind durch diese sich selbst zugeordnet. Hat also ein polarer Raum die Eigenschaft, daß er  $C_1^1$  in sich selbst überführt, und dabei die durch  $C_1^1$  einander zugeordneten Punkte in ihm konjugiert sind, so muß dieser Raum eine reelle Inzidenzfläche haben, auf der  $u, v$  liegen. Diese Inzidenzfläche ist somit eine Regelfläche II. Grades, deren eine Regelschar aus Strahlen von  $C_1^1$  besteht. Jede im Endlichen gelegene Erzeugende  $e$  des Fokalparaboloides  $C^2$  einer hyperbolischen linearen Kongruenz ist nun nach 33. die Rotationsachse eines rotatorischen polaren Raumes  $\Gamma_e^2$ , der  $C_1^1$  derart in sich selbst überführt, daß die durch  $C_1^1$  einander zugeordneten Punkte in ihm konjugiert sind. Folglich ist die Inzidenzfläche dieses rotatorischen polaren Raumes reell und zwar ein Rotationshyperboloid, dessen eine Regelschar in  $C_1^1$  enthalten ist. Sie wird von den Leitgeraden  $u, v$  von  $C_1^1$  beschrieben, sobald diese um  $e$  rotieren. Das Fokalparaboloid einer hyperbolischen linearen Kongruenz ist somit der Ort aller Punkte, die von ihren Leitgeraden  $u, v$  gleichen Abstand haben.\*)

### Konfokale lineare Strahlenkongruenzen.

36. Eine gleichseitige parabolische Regelschar läßt sich auf  $\infty^1$  Weise derart involutorisch paaren, daß ihr unendlich ferner Strahl und der ihn rechtwinklig kreuzende einander zugeordnet bleiben. Nach 25. kann demnach ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid  $C^2$  als der Träger der Fokalinvolutionen von  $\infty^1$  linearen Strahlenkongruenzen angesehen werden, unter denen zwei parabolische sind. Diese  $\infty^1$  linearen Strahlenkongruenzen sollen konfokal heißen. Die Mittelebenen konfokaler linearer Kongruenzen fallen zusammen, sie sind die Tangentialebenen ihres gemeinsamen Fokalparaboloides  $C^2$ .

Eine im Endlichen gelegene Tangentialebene  $\tau$  von  $C^2$ , die keinen Scheitelstrahl der Fläche enthält, schneidet die zu ihr normalen Tangentialebenen in den Strahlen eines parabolischen Strahlenbüschels  $\tau^2$ . Nun trifft ein Strahl  $s$  von  $\tau^2$ , der nicht auf  $C^2$  liegt, außer dem in  $\tau$  gelegenen Regelstrahle  $r_1$  und Leitstrahle  $l_2$  noch einen Regelstrahl  $r_1'$  und einen Leitstrahl  $l_2'$  von  $C^2$ . Demnach bilden die zur Regel- bzw. Leitschar von  $C^2$  gehörigen Scheitelstrahlen  $c_1, c_2$  und die sie bzw. rechtwinklig kreuzenden Geraden  $c_1'^\infty, c_2'^\infty$  mit den Regelstrahlen  $r_1, r_1'$  und den Leit-

\*) Schröter, Über ein einfaches Hyperboloid von besonderer Art. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 85 (1877), S. 30, N. 3.



strahlen  $l_2, l_2'$  zwei Strahlenpaare  $r_1, r_1' - c_1, c_1'$  der einen und zwei Strahlenpaare  $l_2, l_2' - c_2, c_2'$  der andern Fokalinvolution einer linearen Strahlenkongruenz. Sie wird parabolisch, wenn  $s$  einen der Scheitelstrahlen schneidet. Durchläuft  $s$  den parabolischen Strahlenbüschel  $\tau^2$ , so durchläuft die durch  $s$  gehende lineare Kongruenz alle konfokalen Strahlenkongruenzen, deren Fokalparaboloid  $C^2$  ist.

37. Zwei lineare Strahlenkongruenzen  $G_1^1, H_1^1$  mit demselben Fokalparaboloide  $C^2$  haben zur Hauptsymmetrieachse seine Hauptachse  $e_a$ . Sie ist zugleich die Hauptsymmetrieachse der Hauptachsenzyindroide  $G^3, H^3$  von  $G_1^1, H_1^1$ , folglich laufen die in einer beliebigen Ebene  $\varepsilon$  des Ebenenbüschels  $[c_a]$  gelegenen Regelstrahlen  $e_g, e_h$  beider Zylindroide parallel. Die  $e_g, e_h$  bzw. schneidenden Strahlen von  $G_1^1, H_1^1$  bilden je eine gleichseitige parabolische Regelschar. In jeder dieser beiden Regelscharen gibt es zu einer  $e_g$  und somit auch  $e_h$  rechtwinklig kreuzenden Geraden  $x$  einen zu  $x$  parallelen Regelstrahl  $x_g$  bzw.  $x_h$ . Die auf  $x_g, x_h$  bzw. senkrechten, also zueinander parallelen Mittelebenen  $\xi_g, \xi_h$  der Kongruenzen  $G_1^1, H_1^1$  gehören nach der Voraussetzung zu den Tangentialebenen von  $C^2$ . Zwei eigentliche Tangentialebenen eines Paraboloides können aber nicht parallel laufen, folglich müssen  $\xi_h$  und  $\xi_g$  identisch sein. Die Schnittgerade von  $\xi_g$  mit der gemeinsamen Hauptmittelebene  $\gamma$  der Kongruenzen  $G_1^1, H_1^1$  läuft nun parallel zu  $e_g$ , und alle in ihren Punkten auf  $\xi_g$  errichteten Normalen liegen in einer durch  $e_g$  gehenden Ebene. In dieser Ebene liegt aber auch der Strahl  $e_h$ , und da er zusammen mit  $e_g$  in  $\varepsilon$  liegt, ist er mit  $e_g$  identisch. Zueinander parallele Regelstrahlen  $e_g, e_h$  der Zylindroide  $G^3, H^3$  fallen also zusammen, folglich auch diese selbst. D. h.:

Konfokale lineare Strahlenkongruenzen haben dasselbe Hauptachsenzyindroid  $C^3$ . Jede Schnittgerade zweier zueinander senkrechten Tangentialebenen des gemeinsamen Fokalparaboloides  $C^2$  gehört zu einer der konfokalen linearen Kongruenzen. Werden auf den Tangentialebenen eines gleichseitigen Paraboloides  $C^2$  in ihren Schnittgeraden mit seiner Scheittelebene Normalebenen errichtet, so umhüllen diese Ebenen ein Zylindroid  $C^3$ . Die Scheitelstrahlen von  $C^3$  sind die Nebensymmetrieachsen von  $C^3$  und die Hauptachse jener Fläche ist die Hauptsymmetrieachse dieser. Das Zylindroid  $C^3$  heiße mit dem gleichseitigen Paraboloide  $C^2$  orthogonal verknüpft.

38. Sind umgekehrt  $M_1^1, N_1^1$  zwei lineare Kongruenzen mit demselben Hauptachsenzyindroid  $C^3$ , so wird nach 9. ein beliebiger Regelstrahl  $a$  seiner Regelschar in jedem seiner Punkte nur von je einem Strahle beider Kongruenzen geschnitten. Die mit  $a$  inzidenten Strahlen von  $M_1^1, N_1^1$  sind normal zu  $a$  und bilden je eine gleichseitige parabolische Regelschar,

folglich enthält jede dieser Regelscharen einen Strahl  $l_m$  bzw.  $l_n$ , der zu einem  $a$  senkrecht kreuzenden Strahle  $l$  parallel läuft. Da die Ebene  $l_m l_n a$  die gemeinsame Hauptmittelebene beider Kongruenzen in einer zu  $a$  parallelen, also zu  $l_m$  und  $l_n$  orthogonalen Geraden trifft, so fallen die zu  $l_m$  bzw.  $l_n$  senkrechten Mittelebenen  $\lambda_\mu, \lambda$ , zusammen. Die von den Mittelebenen beider Kongruenzen umhüllten gleichseitigen Paraboloiden haben nun die Hauptsymmetrieachse  $c_d$  des Zylindroides  $C^3$  zur Hauptachse und seine Nebensymmetrieachsen  $c_1, c_2$  zu Scheitelstrahlen, ferner liegen auf ihnen auch die beiden in  $\lambda_\mu$  enthaltenen auf  $c_1$  bzw.  $c_2$  senkrecht stehenden Strahlen. Somit sind die beiden Paraboloiden identisch, und es gilt:

Lineare Strahlenkongruenzen mit demselben Hauptachsenzylindroiden  $C^3$  sind konfokal. Jeder Strahl einer linearen Strahlenkongruenz mit dem Hauptachsenzylindroiden  $C^3$  ist auch eine Schnittgerade zweier zueinander normalen Tangentialebenen des gemeinsamen Fokalparaboloides  $C^2$ . Werden auf den Tangentialebenen eines Zylindroides  $C^3$  in ihren Schnittgeraden mit der Ebene seiner Nebensymmetrieachsen Normalebene errichtet, so umhüllen sie ein gleichseitiges Paraboloid  $C^2$ . Die Nebensymmetrieachsen des Zylindroides sind die Scheitelstrahlen, seine Hauptsymmetrieachse die Hauptachse des Paraboloides. Das gleichseitige Paraboloid  $C^2$  heiÙe mit dem Zylindroiden  $C^3$  orthogonal verknüpft.

Mit Rücksicht auf **37.** folgt:

Das gleichseitige Paraboloid  $C^2$  und das Zylindroid  $C^3$  sind jedes mit dem andern orthogonal verknüpft.

Ist  $H_1^1$  eine zum Hauptachsenzylindroid  $C^3$  gehörige hyperbolische lineare Strahlenkongruenz, so sind nach **10.** ihre beiden Leitgeraden zwei Regelstrahlen  $u, v$  von  $C^3$ , die an den Nebensymmetrieachsen  $c_1, c_2$  dieser Fläche ineinander gespiegelt werden. Die durch  $H_1^1$  hervorgerufenen Fokalinvolutionen sind nun aber nach **15.** elliptisch, somit schneiden  $u, v$  das zugehörige Fokalparaboloid in zwei Paaren konjugiert imaginärer Punkte.

Abgesehen von den beiden Flächen  $C^2$  und  $C^3$  gemeinsamen Regelstrahlen  $c_1, c_2$  trifft also kein Regelstrahl des Zylindroides  $C^3$  das mit ihm orthogonal verknüpfte gleichseitige Paraboloid  $C^2$  in reellen Punkten.

**39.** Konfokale lineare Kongruenzen haben nach **37.** dasselbe Hauptachsenzylindroid  $C^3$  und bilden also nach **11.** einen quadratischen Komplex  $\Gamma^2$ . Dieser Komplex ist, wie aus **37.** hervorgeht, auch der Ort der Schnittgeraden zueinander rechtwinkliger Tangentialebenen des gemeinsamen Fokalparaboloides  $C^2$ . Nach **15.** führt aber jede lineare

Kongruenz ihr Fokalparaboloid in sich selbst über, somit gilt auch umgekehrt\*):

Konfokale lineare Kongruenzen, und also auch der von ihnen gebildete quadratische Komplex  $\Gamma^2$ , sind autopolar für ihr gemeinsames Fokalparaboloid  $C^2$ .

Die Leitgeraden der für  $C^2$  autopolaren hyperbolischen linearen Kongruenzen sind nun für diese Fläche zueinander polar, folglich auch die Leitgeraden der hyperbolischen linearen Kongruenzen mit dem Fokalparaboloide  $C^2$ . Diese Leitgeraden fallen aber nach 10. mit je zwei Regelstrahlen von  $C^3$  zusammen, die bzw. an den Nebensymmetrieachsen von  $C^3$  ineinander gespiegelt werden, somit sind solche Regelstrahlen paarweise reziproke Polaren für  $C^2$ . Kurz:

Das Hauptachsenzyliindroid  $C^3$  konfokaler linearer Kongruenzen wird durch den polaren Raum ihres Fokalparaboloides  $C^2$  derart in sich selbst übergeführt, daß je zwei seiner Regelstrahlen, die an seinen Nebensymmetrieachsen ineinander gespiegelt werden, für  $C^2$  zueinander polar sind.\*\*\*) Reziproke Polaren für  $C^2$  sind auch die Hauptsymmetrieachse  $c_a$  und die einfache Leitgerade  $c_\infty$  von  $C^3$ .

Die in bezug auf  $C^2$  zueinander polaren Regelstrahlen von  $C^3$  schneiden  $c_\infty$  in den Punktepaaren derjenigen Involution, die  $C^2$  auf dieser Geraden hervorruft, somit wird die Regelschar von  $C^3$  selbst durch jene Strahlenpaare involutorisch gepaart. Diese hyperbolische Involution der Regelstrahlen von  $C^3$  ist schon in 10. näher besprochen worden.

Zu den für  $C^2$  zueinander polaren Regelstrahlen von  $C^3$  gehören die beiden Kuspidalstrahlen  $c'$ ,  $c''$  von  $C^3$ . Jeder von ihnen ist inzident mit einer Symmetrieebene von  $C^2$  und nach 11. mit den zu dieser Ebene normalen Strahlen von  $\Gamma^2$ . In den zu einer Symmetrieebene von  $C^2$  normalen Strahlen von  $\Gamma^2$  schneiden sich aber je zwei zueinander normale Tangentialebenen von  $C^2$ , deren Berührungspunkte in dieser Symmetrieebene liegen, folglich ist der mit dieser Symmetrieebene inzidente Kuspidalstrahl die Leitgerade der in ihr enthaltenen Hauptparabel von  $C^2$ . Die Leitgerade der einen Hauptparabel eines gleichseitigen Paraboloides ist aber mit dem Brennpunkte der andern inzident, demnach ist gezeigt:

Die Normalen, welche auf den Symmetrieebenen eines gleichseitigen Paraboloides  $C^2$  in den Brennpunkten ihrer Hauptparabeln

\*) v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage. Erstes Heft, Nürnberg 1856, S. 71, N. 109.

\*\*) Schröter, Ueber ein einfaches Hyperboloid von besonderer Art, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 85 (1877), S. 32, N. 4.

errichtet werden, fallen mit den Kuspidalstrahlen des mit  $C^2$  orthogonal verknüpften Zylindroides  $C^3$  zusammen.\*)

**40.** Ist  $\delta$  eine die Hauptachse des gleichseitigen Paraboloides  $C^2$  enthaltende Ebene, die durch keinen Scheitelstrahl der Fläche geht, so bilden die zu  $\delta$  normalen Tangentialebenen von  $C^2$  einen parabolischen Ebenenzylinder  $\Delta^2$ . Die Schnittgeraden zweier normaler Ebenen von  $\Delta^2$  liegen auf seiner Leitebene  $\lambda$ , und da sie zu dem durch  $C^2$  bestimmten quadratischen Komplex  $\Gamma^2$  gehören, so sind sie nach **11.** mit dem in  $\delta$  gelegenen Regelstrahl  $u_1$  des mit  $C^2$  orthogonal verknüpften Zylindroides  $C^3$  inzident.  $u_1$  ergibt sich folglich als die Schnittgerade  $\delta\lambda$ . Nun haben  $\Delta^2$  und  $C^2$  dieselbe Scheitelebene, somit sendet  $\Delta^2$  seine Symmetrieebene und seine Fokalachse  $f$  durch die Hauptachse  $c_d$  von  $C^2$ . Die Fokalachse  $f$  steht als Parallele zu  $\lambda$  senkrecht zu  $c_d$ . Der Scheitelpunkt von  $C^2$  hälfet aber den Abstand des Strahles  $f$  von der Ebene  $\lambda$ , also auch den Abstand der Strahlen  $u_1, f$ . Der Strahl  $f$  schneidet hiernach die Hauptsymmetrieachse  $c_d$  von  $C^3$  in einem Punkte, durch den nach **5.** der  $u_1$  rechtwinklig kreuzende Regelstrahl  $v_2$  von  $C^3$  geht. Mit diesem Regelstrahl fällt aber  $f$  zusammen, da  $f$  zu  $\delta$  senkrecht ist und folglich den mit  $\delta$  inzidenten Regelstrahl  $u_1$  von  $C^3$  rechtwinklig kreuzt. Somit gilt der Satz:

Die Fokalachsen eines gleichseitigen Paraboloides  $C^2$ , die mit seiner Hauptachse inzident sind, bilden die Regelschar des mit  $C^2$  orthogonal verknüpften Zylindroides  $C^3$ .\*)

Hieraus folgt mit Rücksicht auf **39.**:

Die Leitgeraden aller konfokalen hyperbolischen linearen Kongruenzen sind zueinander polare Fokalachsen ihres Fokalparaboloides.

Zwei zueinander normale Ebenen  $\xi, \eta$  eines Regelstrahles  $u$  von  $C^3$  schneiden demnach den ihm durch  $C^2$  als Polare zugewiesenen Regelstrahl  $v$  von  $C^3$  wechselweise in ihren Polen  $X, Y$  bezüglich  $C^2$ . Die in  $\xi$  gelegenen Strahlen des quadratischen Komplexes  $\Gamma^2$  bilden nun einen Strahlenbüschel mit dem Mittelpunkte  $Y$  und einen Büschel paralleler zu  $u$  normaler Strahlen. Beide Strahlenbüschel werden, da  $\Gamma^2$  nach **39.** für  $C^2$  autopolar ist, durch den polaren Raum von  $C^2$  in die beiden in  $\Gamma^2$  enthaltenen Strahlenbüschel I. Ordnung mit dem Mittelpunkte  $X$  übergeführt. Der eine liegt in  $\eta$ , der andere in der in  $X$  auf  $v$  normalen Ebene.

**41.** Werden die Regelstrahlen  $u_2, v_2$  von  $C^3$  an den Nebensymmetrieachsen der Fläche ineinander gespiegelt, so wird nach **40.** in  $v_2$  durch  $C^2$  eine zirkuläre Ebeneninvolution hervorgerufen. In ihr gibt es ein Ebenenpaar  $\xi, \eta$ , dessen Winkel  $\xi\eta$  durch die Ebene  $u_2 c_d$  d. h. durch

\*) Schröter, Ueber ein einfaches Hyperboloid von besonderer Art. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 85 (1877), S. 39, N. 7b.

die Verbindungsebene des Regelstrahles  $u_2$  mit der Hauptsymmetrieachse  $c_\alpha$  von  $C^3$  gehäuftet wird.  $\xi, \eta$  begrenzen auf dem  $v_2$  rechtwinklig kreuzenden Regelstrahle  $u_1$  von  $C^3$  eine Strecke, die viermal so groß ist wie der Abstand  $a_u$  des Punktes  $u_1 c_\alpha$  vom Schnittpunkte der Nebensymmetrieachsen von  $C^3$ . Auf dem mit  $u_1$  inzidenten Regelstrahle  $u_2$  schneiden demnach  $\xi, \eta$  eine Strecke von der Größe  $\frac{4a_u}{\cos(u_1 u_2)}$  aus. Nun ist aber nach 5.  $a_c \cos(u_1 u_2) = a_u$ , folglich hat diese Strecke den konstanten Wert  $4a_c$ . D. h.:

Auf allen Regelstrahlen eines Zylindroides  $C^3$  ruft das mit ihm orthogonal verknüpfte gleichseitige Paraboloid  $C^2$  kongruente elliptische Punktinvolutionen hervor. Ihre Potenz ist gleich  $-(2a_c)^2$ , also gleich dem negativen Quadrate des Abstandes der Brennpunkte der beiden Hauptparabeln von  $C^2$ .\*)

42. Zueinander normale Tangentialebenen der Strahlenkegel, welche  $C^2$  aus einem beliebigen außerhalb der Fläche gelegenen Punkt  $X$  umschrieben werden können, schneiden sich in den Strahlen des von  $X$  ausgehenden Komplexkegels von  $\Gamma^2$ . Der von  $X$  ausstrahlende Komplexkegel ist also der Leitkegel des  $C^2$  vom Punkte  $X$  aus umschriebenen Kegels. Er zerfällt, wenn  $X$  ein unendlich ferner Punkt außerhalb  $C^2$  ist, nach 11. in einen unendlich fernen Strahlenbüschel und in einen Parallelstrahlenbüschel in der Leitebene des parabolischen Strahlenzylinders, der aus dem betreffenden unendlich fernen Punkte  $C^2$  umschrieben werden kann. Der Leitkegel zerfällt ferner in zwei Leitstrahlenbüschel I. Ordnung für einen im Endlichen gelegenen Punkt  $X$  des mit  $C^2$  orthogonal verknüpften Zylindroides. In anderen Worten:

Die Mittelpunkte aller einem gleichseitigen Paraboloides  $C^2$  umschriebenen Kegel des Hachette liegen auf dem mit  $C^2$  orthogonal verknüpften Zylindroides.

Alle  $C^2$  umschriebenen Kegel des Hachette, deren Mittelpunkte auf einem Regelstrahle  $u_1$  von  $C^3$  liegen, senden je eine Leitebene durch den Regelstrahl  $v_1$  von  $C^3$ , in den  $u_1$  durch die Nebensymmetrieachsen von  $C^3$  gespiegelt wird.  $u_1, v_1$  sind aber nach 40. zueinander polare Fokalachsen von  $C^2$ , folglich liegen die Pole dieser durch  $v_1$  gehenden Leitebenen auf  $u_1$ . Der Regelstrahl  $u_1$  von  $C^3$  ist also eine gemeinsame Fokalachse aller dem Paraboloides  $C^2$  aus den Punkten von  $u_1$  umschriebenen Kegel und zugleich für diese Kegel der Polstrahl ihrer mit  $v_1$  inzidenten Leitebenen. Die zweiten Fokalachsen dieser Kegel bilden nach

\*) Schröter, Ueber ein einfaches Hyperboloid von besonderer Art. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 85 (1877), S. 36, N. 6.

einem bekannten Satze aus der Theorie der Fokalachsen einer Fläche II. Grades eine Regelschar des durch  $u_1$  gehenden mit  $C^2$  konfokalen Paraboloides; ihre je auf der Ebene der beiden Fokalachsen senkrechten Hauptachsen also eine gleichseitige parabolische Regelschar, die in dem Achsenkomplexe von  $C^2$  enthalten ist.  $u_1$  ist der zur Leitschar dieser Regelschar gehörige Scheitelstrahl.  $u_1$  und der mit ihm inzidente Regelstrahl  $v_1$  von  $C^3$  sind ferner die Scheitelstrahlen eines mit  $C^3$  konfokalen Paraboloides. Eine Schar konfokaler Paraboloides enthält nun stets ein gleichseitiges Paraboloid, sein Scheitelpunkt hälftet den Abstand der Brennpunkte der Fokalparabeln. Somit gilt nach 40.:

In einer Schar konfokaler Paraboloides bilden die Scheitelstrahlen der hyperbolischen Paraboloides die Regelschar eines Zylindroides.

Durch Spiegelung an jedem seiner Scheitelstrahlen geht ein gleichseitiges Paraboloid in sich selbst über und jede Fokalparabel in die andere. Kurz:

Die Paraboloides einer Schar konfokaler Paraboloides werden an den Scheitelstrahlen des in der Schar enthaltenen gleichseitigen Paraboloides  $C^2$  paarweise ineinander gespiegelt. Je zwei ineinander gespiegelte hyperbolische Paraboloides haben zu Scheitelstrahlen zwei Paare inzidenter Regelstrahlen des mit  $C^2$  orthogonal verknüpften Zylindroides. Ihre Scheitelebenen liegen zur Scheitelebene von  $C^2$  symmetrisch.

43. Der aus einem beliebigen Punkte  $L$  einem gleichseitigen Paraboloides  $C^2$  umschriebene Ebenenkegel II. Ordnung  $\Lambda^2$  hat nach 39. stets reelle zueinander orthogonale Ebenen. Ihre Schnittgeraden sind die Strahlen eines zum quadratischen Komplexes  $\Gamma^2$  gehörigen Kegels. Er zerfällt, sobald  $L$  auf dem mit  $C^2$  orthogonal verknüpften Zylindroides  $C^3$  liegt, in zwei Strahlenbüschel I. Ordnung.

Sind nun  $\alpha, \beta$  zwei Ebenen eines Ebenenkegels II. Ordnung  $K^2$  und ist  $a$  eine mit  $\alpha$ , aber nicht mit dem Mittelpunkte  $K$  von  $K^2$  inzidente Gerade, so schneiden die Ebenen von  $K^2$  die Gerade  $a$  und die Ebene  $\beta$  bzw. in einer Punktreihe und einem zu ihr projektiven Strahlenbüschel I. Ordnung, wenn je zwei mit einer Ebene von  $K^2$  inzidente Elemente beider Gebilde einander entsprechen. Die durch die Punkte der Punktreihe parallel zu den homologen Elementen des zu ihr projektiven Strahlenbüschels gezogenen Strahlen bilden eine zu  $K^2$  perspektive parabolische Regelschar. Sie geht in eine gleichseitige über, sobald  $\alpha$  und  $a$  normal zu  $\beta$  sind. Sonach ist auf eine einfache Art synthetisch bewiesen:

Einem Kegel II. Grades mit reellen zueinander normalen Tangentialebenen kann stets ein gleichseitiges Paraboloid  $C^2$  eingeschrieben werden. Die Schnittgeraden aller seiner zueinander normalen Tan-

gentialebenen bilden einen Strahlenkegel II. Ordnung oder zwei Strahlenbüschel I. Ordnung, je nachdem der Mittelpunkt des Kegels außerhalb des mit  $C^2$  orthogonal verknüpften Zylindroides  $C^3$  oder auf ihm liegt.

Die auf den Tangentialebenen eines Kegels II. Grades  $G^2$  in seinem Mittelpunkte  $G$  errichteten Normalen bilden bekanntlich einen Kegel II. Ordnung  $G_n^2$ . Beide Kegel haben dieselben Symmetrieebenen. Einer von ihnen schließt entweder den andern im allgemeinen ein oder hat mit ihm vier reelle Erzeugende gemein. Umschließt  $G^2$  den Kegel  $G_n^2$ , so hat  $G^2$  keine reellen zueinander orthogonalen Tangentialebenen; umschließt hingegen  $G_n^2$  den Kegel  $G^2$ , oder haben die beiden Kegel vier reelle Erzeugende gemein, so bilden die Schnittgeraden der reellen zueinander orthogonalen Tangentialebenen von  $G^2$  einen Kegel II. Ordnung mit gleichen Symmetrieebenen wie  $G^2$ . Er umschließt den Kegel  $G^2$  im ersteren Falle, er schließt ihn völlig aus im letzteren. Seine von ihm eingeschlossene Hauptachse fällt mit derjenigen von  $G^2$  ausgeschlossenen Hauptachse dieses Kegels zusammen, die einen Winkel zwischen den Fokalachsen von  $G^2$  hälftet.

#### Projektive Eigenschaften einer Kette konfokaler linearer Strahlenkongruenzen.

44. Jeder Strahl des Kegels II. Ordnung  $X^2$ , den der Komplex  $\Gamma^2$  durch einen beliebigen Punkt  $X$  des Raumes sendet, bestimmt nach 9. zusammen mit dem Hauptachsenzylindroides  $C^3$  der zugehörigen konfokalen Kongruenzen eine von ihnen. Sind  $A_1^1, B_1^1, C_1^1, D_1^1$  vier dieser konfokalen Kongruenzen, welche den Kegel  $X^2$  bzw. in den vier harmonischen Strahlen  $a, b, c, d$  schneiden, und ist  $s$  ein zu ihnen windschiefer Regelstrahl von  $C^3$ , so ist  $s$  nach 11. die Hauptachse von vier bzw. durch  $A_1^1, B_1^1, C_1^1, D_1^1$  gehenden linearen Komplexen  $\Gamma_a, \Gamma_b, \Gamma_c, \Gamma_d$  eines Komplexbüschels. Die von  $X$  auf  $s$  gefällte Normale  $n_x$  ist ein Strahl der Trägerkongruenz dieses Büschels und zugleich ein Strahl von  $X^2$ , folglich bilden die dem Punkte  $X$  bzw. durch die vier Komplexe zugewiesenen Nullebenen  $n_x a, n_x b, n_x c, n_x d$  vier harmonische Ebenen des Ebenenbüschels  $[n_x]$  und die Komplexe selbst also vier harmonische Komplexe des Komplexbüschels. Die vier Kongruenzen  $A_1^1, B_1^1, C_1^1, D_1^1$  schneiden somit nicht nur den Komplexkegel  $X^2$ , sondern auch jeden andern Komplexkegel von  $\Gamma^2$  in vier harmonischen Strahlen. Vier konfokale lineare Kongruenzen sollen nunmehr vier harmonische konfokale lineare Kongruenzen heißen, wenn sie mit einem und demnach mit jedem Kegel des quadratischen Komplexes  $\Gamma^2$ , dem sie angehören, vier harmonische Strahlen gemein haben,

ferner sollen die  $\infty^1$  konfokalen linearen Kongruenzen, welche zu demselben Fokalparaboloid gehören, eine Kette konfokaler linearer Kongruenzen genannt werden. Eine Kette konfokaler linearer Kongruenzen läßt sich hiernach auf jedes Gebilde I. Stufe projektiv beziehen. Heißt endlich der von den Kongruenzen einer solchen Kette gebildete quadratische Komplex der die Kette umfassende Komplex, so gilt insbesondere:

Eine Kette konfokaler linearer Kongruenzen ist zu einem Kegel des sie umfassenden quadratischen Komplexes  $\Gamma^2$  projektiv, wenn jeder Komplex der Kette dem Strahle des Kegels entspricht, den er mit ihm gemein hat.

**45.** Der Komplexkegel  $X^2$  von  $\Gamma^2$  zerfällt nach **11.** im allgemeinen in zwei Strahlenbüschel I. Ordnung, sobald sein Mittelpunkt  $X$  dem Hauptachsenzyllindroide  $C^3$  der Kette konfokaler linearer Kongruenzen oder der unendlich fernen Ebene angehört. Im ersteren Falle steht die Ebene des einen Strahlenbüschels in  $X$  auf dem mit diesem Punkte inzidenten Regelstrahle  $r$  von  $C^3$  senkrecht, und je vier harmonische Kongruenzen der Kette schneiden diesen Strahlenbüschel nach **11.** in je vier harmonischen Strahlen. Im letzteren Falle bilden die durch  $X$  gehenden Strahlen von  $\Gamma^2$  einen unendlich fernen Strahlenbüschel und einen Parallelstrahlenbüschel, dessen Ebene denjenigen Regelstrahl  $r$  von  $C^3$  enthält, der auf der Verbindungsebene von  $X$  mit der Hauptsymmetrieachse  $c_a$  von  $C^3$  senkrecht steht. Wird ein von  $r$  verschiedener Regelstrahl  $s$  von  $C^3$  zur Hauptachse und je ein Strahl  $x$  des Parallelstrahlenbüschels zu einem Strahle eines linearen Komplexes  $\Gamma_x$  gewählt, so ist hierdurch im allgemeinen je ein linearer Komplex  $\Gamma_x$  eines Büschels bestimmt.  $\Gamma_x$  weist dem unendlich fernen Mittelpunkte des Parallelstrahlenbüschels eine mit  $x$  und dem unendlich fernen Punkte von  $s$  inzidente Nullebene zu. Durch vier harmonische Strahlen des Parallelstrahlenbüschels sind somit vier harmonische Komplexe dieses Büschels bestimmt. Durch vier harmonische Strahlen  $x$  des Parallelstrahlenbüschels gehen also wiederum vier harmonische Kongruenzen der Kette. Kurz:

Wird jeder Kongruenz einer Kette konfokaler linearer Kongruenzen der Strahl zugeordnet, in dem sie einen im Endlichen gelegenen Strahlenbüschel I. Ordnung des die Kette umfassenden quadratischen Komplexes  $\Gamma^2$  schneidet, so ist die Kette zu diesem Strahlenbüschel I. Ordnung projektiv.

**46.** Die Kongruenzen  $X_1^1$  einer Kette konfokaler linearer Kongruenzen ordnen einer beliebigen Ebene  $\alpha$  der Hauptsymmetrieachse  $c_a$  je eine Ebene  $\alpha_x$  dieser Achse zu, ferner senden sie nach **45.** durch einen Punkt  $P$  ihres Hauptachsenzyllindroides im allgemeinen die Strahlen  $x$  eines zur Kette projektiven Strahlenbüschels I. Ordnung  $[P]$ . Ist die Ebene



dieses Strahlenbüschels zu  $\alpha$  parallel, so projiziert jedesmal  $\alpha_x$  aus  $c_\alpha$  die Spur von  $x$  mit der Fluchtebene  $\gamma$  der konfokalen Kongruenzen. D. h.:

Einer Ebene  $\alpha$  der Hauptsymmetrieachse  $c_\alpha$  von  $\Gamma^2$  ordnen die Komplexe der zugehörigen Kette konfokaler linearer Kongruenzen die Ebenen eines zur Kette projektiven Ebenenbüschels I. Ordnung  $[c_\alpha]_\alpha$  zu. Den Ebenen  $\alpha, \beta, \dots$  von  $c_\alpha$  sind somit projektive Ebenenbüschel  $[c_\alpha]_\alpha, [c_\alpha]_\beta, \dots$  zugewiesen, welche die  $c_\alpha$  mit den Nebensymmetrieachsen von  $\Gamma^2$  verbindenden Ebenen entsprechend gemein haben.

47. Der Komplexstrahlenkegel  $X^2$ , den der Komplex  $\Gamma^2$  durch einen beliebigen Punkt  $X$  des Raumes sendet, ist nach 44. projektiv zur Kette konfokaler Kongruenzen, wenn jedem Komplexe der Kette sein Schnittstrahl mit dem Kegel zugewiesen wird. Ferner ordnen die Kongruenzen der Kette der Ebene  $Xc_\alpha = \xi$  nach 46. die Ebenen eines zur Kette projektiven Ebenenbüschels I. Ordnung  $[c_\alpha]_\xi$  zu. Die Kette konfokaler Kongruenzen bezieht also den Ebenenbüschel  $[c_\alpha]_\xi$  projektiv auf den Komplexstrahlenkegel  $X^2$ . Nun ist aber der in  $\xi$  gelegene Regelstrahl  $x_i$  des Hauptachsenzylindroides  $C^3$  der konfokalen Kongruenzen zugleich eine von den beiden Leitgeraden einer Kongruenz  $X_1^1$  der Kette.  $\xi$  ist also durch  $X_1^1$  sich selbst zugeordnet und enthält den Schnittstrahl  $x$  von  $X_1^1$  mit dem Komplexstrahlenkegel  $X^2$ . Die Ebene  $\xi$  des Ebenenbüschels  $[c_\alpha]_\xi$  geht somit durch den homologen Strahl  $x$  des zu  $[c_\alpha]_\xi$  projektiven Strahlenkegels  $X^2$ , und jener Ebenenbüschel erzeugt folglich mit dem zu ihm projektiven Strahlenkegel einen Kegelschnitt  $\xi^2$ . Dieser Kegelschnitt ist durch den Komplexstrahlenkegel  $X^2$  projektiv auf die Kette konfokaler linearer Kongruenzen bezogen, und jeder seiner Punkte liegt auf einem Strahle, den die ihm entsprechende Kongruenz mit  $X^2$  gemein hat; er ist durch sie dem Mittelpunkte  $X$  von  $X^2$  zugeordnet. — Der zu  $x_i$  normale Strahl von  $X^2$  insbesondere gehört nach 9. zur ausgearteten Kongruenz der Kette. Sie ordnet  $X$  den unendlich fernen Punkt dieses zu  $x_i$  normalen Strahles zu. Er ist — solange  $X$  nicht in die Fluchtebene  $\gamma$  der konfokalen Kongruenzen fällt — der einzige unendlich ferne Punkt des Kegelschnittes  $\xi^2$ ; in dem ausgeschlossenen Falle liegen alle Punkte von  $\xi^2$  in der unendlich fernen Ebene. Hiernach ergibt sich:

Dem Mittelpunkte  $X$  eines Kegels  $X^2$  des quadratischen Komplexes  $\Gamma^2$  sind durch die zugehörige Kette konfokaler linearer Kongruenzen die Punkte eines zu ihr projektiven und zu  $X^2$  perspektiven Kegelschnittes  $\xi^2$  zugeordnet.  $\xi^2$  ist eine Parabel, die jede der beiden Nebensymmetrieachsen  $c_1, c_2$  von  $\Gamma^2$  schneidet, und deren Achse parallel zur Hauptsymmetrieachse von  $\Gamma^2$  läuft. Nur wenn der Mittelpunkt  $X$  von  $X^2$  der Fluchtebene  $\gamma$  der konfokalen Kongruenzen

angehört, ist  $\xi^2$  ein unendlich ferner Kegelschnitt und enthält die drei unendlich fernen Punkte aller drei Symmetrieachsen von  $\Gamma^2$ .

48. Zerfällt für einen im Endlichen gelegenen Punkt  $X$  des Raumes der von ihm ausstrahlende Komplexstrahlenkegel  $X^2$ , so ist  $X$  nach 11. mit einem Regelstrahle des Hauptachsenzylindroides  $C^3$  der konfokalen linearen Kongruenzen inzident. Einem auf einer Nebensymmetrieachse von  $C^3$  gelegenen Punkte  $X$  sind in diesem Falle die Punkte einer zur Kette projektiven Punktreihe I. Ordnung zugeordnet, ihr Träger liegt in der unendlich fernen Ebene und kreuzt die betreffende Nebensymmetrieachse rechtwinklig. Punkten  $X$  auf den übrigen Regelstrahlen von  $C^3$  entsprechen im allgemeinen, wie sich leicht mit Hilfe von 40. erweisen läßt, ebenfalls zur Kette konfokaler Kongruenzen projektive Parabeln  $\xi^2$ . Sie gehen durch die betreffenden Punkte, und ihre Ebenen sind in ihnen normal zu dem je mit diesen Punkten inzidenten Regelstrahlen von  $C^3$ . Wiederum schneiden sie die Nebensymmetrieachsen der Fläche, und wiederum läuft ihre Achse je zur Hauptsymmetrieachse von  $C^3$  parallel. — Komplexstrahlenkegel  $X^2$  von  $\Gamma^2$  mit einem unendlich fernen Mittelpunkte  $X^\infty$  zerfallen nach 11. in einen unendlich fernen Strahlenbüschel und in einen Parallelstrahlenbüschel derjenigen Tangentialebene von  $C^3$ , die den zur Ebene  $X_{c_a}^\infty$  normalen Regelstrahl der Fläche enthält. Die einem Punkte  $X^\infty$  durch die konfokalen linearen Kongruenzen einer Kette zugeordneten Punkte bilden also eine mit der Fluchtebene  $\gamma$  der Kongruenzen inzidente zur Kette projektive Punktreihe I. Ordnung.

49. Eine Kette konfokaler linearer Kongruenzen ordnet nach 47. dem Schnittpunkte einer beliebigen Geraden  $x$  mit der Fluchtebene  $\gamma$  die Punkte eines unendlich fernen zur Kette projektiven Kegelschnittes zu und dem unendlich fernen Punkte von  $x$  eine zu ihr projektive Punktreihe I. Ordnung von  $\gamma$ . Beide zur Kette projektiven Gebilde sind zueinander projektiv und zum Ebenenbüschel  $[c_a]$  perspektiv und erzeugen eine zur Kette projektive Regelschar III. Ordnung  $\mathfrak{X}^3$  mit der Doppelpunktgeraden  $c_a$ . Sonach folgt:

Eine Kette konfokaler linearer Kongruenzen ordnet einer beliebigen Geraden  $x$  die Strahlen einer zur Kette projektiven Regelschar III. Ordnung  $\mathfrak{X}^3$  zu. Diese geht durch die Nebensymmetrieachsen  $c_1, c_2$  des die Kette umfassenden Komplexes  $\Gamma^2$ , und ihre Doppelpunktgerade ist seine Hauptsymmetrieachse  $c_a$ .

Schneidet  $x$  eine Nebensymmetrieachse  $c_x$  der konfokalen Kongruenzen, so sind dem Schnittpunkte von  $x$  mit  $c_x$  durch die Kongruenzen der Kette nach 48. die Punkte einer zur Kette projektiven unendlich fernen Geraden zugeordnet. Die  $x$  durch die Kongruenzen der Kette zugeordneten Strahlen bilden also in diesem Falle eine durch die zweite Neben-

symmetrieachse  $c_x$  gehende parabolische Regelschar  $\mathfrak{X}^2$ . Sie wird gleichseitig, sobald  $x$  die Nebensymmetrieachse  $c_x$  rechtwinklig schneidet, und  $c_x$  selbst wird dann ein Leitstrahl dieser Regelschar.  $\mathfrak{X}^2$  geht insbesondere in eine Fokalregelschar der konfokalen Kongruenzen über, wenn  $x$  ein Strahl der betreffenden Fokalregelschar ist. — Einer Geraden der Fluchtebene  $\gamma$  sind im allgemeinen die Strahlen eines zur Kette projektiven unendlich fernen Strahlenbüschels I. Ordnung zugeordnet, usw.

**50.** Jede Kongruenz einer Kette konfokaler Kongruenzen wird durch den polaren Raum des gemeinsamen Fokalparaboloides nach **39.** in sich selbst übergeführt, somit gilt nach **44.**:

Vier harmonische Kongruenzen einer Kette schneiden den in einer beliebigen Ebene gelegenen parabolischen Strahlenbüschel des die Kette umfassenden Komplexes  $\Gamma^2$  in vier harmonischen Strahlen. Eine Kette konfokaler linearer Kongruenzen ist zu einem parabolischen \*Strahlenbüschel  $\xi^2$  des sie umfassenden quadratischen Komplexes  $\Gamma^2$  projektiv, wenn jedem Komplex der Kette der Strahl von  $\xi^2$  zugeordnet wird, den er mit diesem parabolischen Strahlenbüschel gemein hat.

Analog ergibt sich aus **47.**:

Der Ebene  $\xi$  eines parabolischen Strahlenbüschels  $\xi^2$  des Komplexes  $\Gamma^2$  sind durch die Kongruenzen der Kette die Ebenen eines zu ihr projektiven und zu  $\xi^2$  perspektiven parabolischen Ebenenzylinders II. Ordnung  $\Xi^2$  zugeordnet. Usw.

### Die rotatorische lineare Strahlenkongruenz.

**51.** In **2.** sind auf dem Kegelschnitte  $\alpha^2$  und dem unendlich fernen Kongruenzstrahle  $c_\infty$  der Schnittkongruenz eines Komplexbüschels, zwei projektive Punktreihen ermittelt worden, deren homologe Punkte durch die Hauptachsen der Komplexe des Büschels verbunden werden. Wird nunmehr angenommen — was dort ausgeschlossen wurde —, daß  $c_\infty$  mit der unendlich fernen Geraden der Ebene  $\alpha$  des Kegelschnittes  $\alpha^2$  zusammenfällt, so liegen in  $\alpha$  alle Hauptachsen der Komplexe des Büschels, und  $\alpha$  ist somit die Fluchtebene der zugehörigen Schnittkongruenz  $rC_1^1$ . Diese Hauptachsen bilden, da sie mit der Hauptsymmetrieachse  $c_a$  von  $rC_1^1$  inzident sind, einen Strahlenbüschel I. Ordnung. Je zwei zueinander orthogonale Strahlen dieses Büschels sind die Hauptachsen je zweier füreinander nullinvarianten Komplexe, sie schneiden  $c_\infty$  in Punkten, die sowohl durch  $rC_1^1$ , wie durch den unendlich fernen imaginären Kugelkreis einander zugeordnet sind. Die lineare Kongruenz  $rC_1^1$  ist also elliptisch, ihre beiden Fokalachsen fallen mit der Hauptsymmetrieachse  $c_a$  zusammen,

und die mit  $c_\infty$  inzidenten Ebenen schneiden die in  $rC_1^1$  enthaltenen hyperbolischen Regelscharen in Kreisen.

Jeder Strahl des von den Hauptachsen gebildeten Strahlenbüschels I. Ordnung ist nach 6. eine Nebensymmetrieachse von  $rC_1^1$ . An jedem spiegelt sich also ein von  $c_a$  und  $c_\infty$  verschiedener Kongruenzstrahl  $x$  in einen Kongruenzstrahl, der mit  $x$  zu einer in  $rC_1^1$  enthaltenen rotatorischen Regelschar mit der Rotationsachse  $c_a$  und der zu ihr senkrechten Symmetrieebene  $\alpha$  gehört.  $c_a, c_\infty$  sind reziproke Polaren in den polaren Räumen der Träger dieser rotatorischen Regelscharen, und in ihnen sind die durch  $rC_1^1$  einander zugeordneten Punkte von  $c_a$  und  $c_\infty$  konjugiert. Die Träger aller dieser in  $rC_1^1$  enthaltenen Regelscharen bilden also einen Büschel rotatorischer Regelflächen mit der gemeinsamen Rotationsachse  $c_a$  und der gemeinsamen Symmetrieebene  $\alpha$ . Die zu den Flächen dieses Büschels gehörigen polaren Räume erweisen sich als die einzigen rotatorischen, die  $rC_1^1$  derart in sich selbst überführen, daß die durch  $rC_1^1$  einander zugeordneten Punkte in ihnen konjugiert sind.

Mit einer Nebensymmetrieachse  $c_x$  inzidente Strahlen von  $rC_1^1$  bilden eine gleichseitige parabolische Regelschar  $\mathfrak{P}_x^2$  mit den Scheitelstrahlen  $c_x, c_a$ . Die lineare Kongruenz  $rC_1^1$  wird somit von den Strahlen einer gleichseitigen parabolischen Regelschar  $\mathfrak{P}_x^2$  beschrieben, sobald  $\mathfrak{P}_x^2$  eine volle Umdrehung um  $c_a$  vollführt. Dieser Eigenschaft halber heißt bekanntlich die vorliegende lineare Kongruenz  $rC_1^1$  eine rotatorische lineare Kongruenz.

52. Der von den Mittelebenen einer allgemeinen linearen Kongruenz nach 14. gebildete gleichseitige parabolische Bündel zerfällt für die rotatorische lineare Kongruenz in zwei Ebenenbündel I. Ordnung. Der eine hat zum Mittelpunkt den Punkt  $c_a \alpha = C$ , der andere den unendlich fernen Punkt  $C'_\infty$  von  $c_a$ . Die beiden zentrischen Bündel  $[C]$  und  $[C'_\infty]$  sind kollinear und haben den Strahl  $c_a$  entsprechend gemein, wenn Ebenen und Strahlen beider Bündel als homologe angesehen werden, die durch  $rC_1^1$  einander zugeordnet sind. Homologe Ebenen schneiden sich also rechtwinklig. Ein Ebenenbüschel  $[e]$  von  $[C]$ , dessen Achse weder mit  $c_a$  noch mit einer Nebensymmetrieachse von  $rC_1^1$  zusammenfällt, erzeugt mit dem homologen Ebenenbüschel  $[e']$  von  $[C'_\infty]$  eine durch  $c_a$  gehende in  $rC_1^1$  enthaltene orthogonale Regelschar  $\mathfrak{R}_e^2$ . Die Kreisschnittebenen von  $\mathfrak{R}_e^2$  sind normal zu den homologen Geraden  $e, e'$  der kollinearen zentrischen Bündel, d. h. auch zu dem zu  $e$  parallelen Kongruenzstrahl und zu  $c_a$ . Durch jeden von  $c_a$  und  $c_\infty$  verschiedenen Strahl  $s$  von  $rC_1^1$  geht also eine orthogonale Regelschar  $\mathfrak{R}_s^2$ , deren eine Schar von Kreisschnitten in Normalebenen zu  $s$  liegen. Sobald die Achse  $e$  des Ebenenbüschels  $[e]$  mit einer Nebensymmetrieachse  $c_x$  von  $rC_1^1$  zusammen-

fällt, geht die orthogonale Regelschar  $\mathfrak{R}_e^2$  in die gleichseitige parabolische Regelschar  $\mathfrak{R}_x^2$  über. Die durch  $c_d$  gehenden in  $rC_1^1$  enthaltenen Regelscharen II. Ordnung sind hiernach teils orthogonal, teils gleichseitig parabolisch.

Rotatorische Kongruenzen, deren Hauptachsen den nämlichen Strahlenbüschel I. Ordnung bilden, bilden selbst einen quadratischen Komplex. Seine Komplexstrahlenkegel sind orthogonal, seine Komplexstrahlenbüschel parabolisch. Die singuläre Fläche des Komplexes besteht aus der Ebene des Hauptachsenbüschels, der unendlich fernen Ebene und zwei Strahlenbündeln, deren Mittelpunkt bzw. der unendlich ferne Punkt der Hauptsymmetrieachse  $c_d$  jener Kongruenzen und der Mittelpunkt ihres Hauptachsenbüschels sind. Durch Spiegelung an  $c_d$  oder einer Hauptachse geht der Komplex in sich selbst über.

Berlin, den 14. Dezember 1905.

---

## Über das Problem der Bewegung von vier Massenpunkten unter dem Einflusse von inneren Kräften.

Von

P. WORONETZ in Kiew.

In der dreiundzwanzigsten seiner Vorlesungen über Dynamik hat Jacobi die partielle Differentialgleichung, die seinen und Hamiltons Namen führt, für diejenigen Probleme aufgestellt, in welchen die Sätze von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes gelten. Gelten außerdem die Sätze von der Erhaltung der Flächenräume, so können der erwähnten Differentialgleichung noch drei andere beigefügt werden. Betrachtet man nun das so entstandene System partieller Differentialgleichungen von dem Standpunkte der bekannten Lieschen Integrationsmethode, so ist sofort ersichtlich, daß das Problem der Bewegung eines materiellen Punktsystems von  $n$  Freiheitsgraden für den Fall, daß die Sätze von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes und der Flächenräume in Kraft sind, auf die Integration von nur  $2(n - 6)$  gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung und auf Quadraturen reduziert werden kann.

Dem Gesagten zufolge muß das Problem, das den Gegenstand vorliegender Untersuchungen bildet, d. h. das Problem der Bewegung von vier Massenpunkten unter dem Einflusse von inneren Kräften sich auf die Integration von zwölf Differentialgleichungen erster Ordnung und auf Quadraturen zurückführen lassen. Und in der Tat hat auch H. A. Seydler\*), indem er die berühmte, von Lagrange\*\*) auf das Dreikörperproblem angewandte Methode etwas verallgemeinert, Differentialgleichungen solcher Art und von solcher Anzahl für das in Rede stehende Problem hergeleitet.

---

\*) Seydler, Ausdehnung der Lagrangeschen Behandlung des Dreikörperproblems auf das Vierkörperproblem. Abhandlungen der math.-naturw. Klasse der k. böhmischen Gesellschaft der Wissensch. VII. Folge. Bd. I. 1886.

\*\*) Lagrange, Essai sur le problème des trois corps. Oeuvres t. VI.

Sieht man von dem wohlbekannten Falle ab, wenn die Kraft, die zwischen zweien der Massenpunkte wirkt, dem Produkte aus den Massen der Punkte in ihre Entfernung direkt proportional ist, so ist es bis heute nicht gelungen, eine allgemeine Lösung des erwähnten Problems selbst bei spezieller Form der Kräftefunktion aufzufinden.

Was nun die partikulären Lösungen des Problems anbelangt, so sind hier die von H. Sludski und Hoppe\*) gegebenen zwei Fälle, die eine Ausdehnung der bekannten Laplaceschen\*\*) Lösungen des Dreikörperproblems bilden, anzuführen. Eine weitere Verallgemeinerung der Laplaceschen Lösung für das Vierkörperproblem ist von H. Lehmann-Filhés\*\*\*) erzielt worden.

Alle diese speziellen Fälle werden in der vorliegenden Abhandlung als bekannt angesehen, und im Texte soll ihrer nicht weiter Erwähnung getan werden.

Die vorliegende Arbeit zerfällt in drei Teile. In Kap. I werden die zwölf Gleichungen aufgestellt, nach deren Integration die in Rede stehende Aufgabe durch Quadraturen gelöst wird. Eine Anwendung der allgemeinen Formeln wird auf den Fall gemacht, wenn die Massen dreier der Punkte  $M_1, M_2, M_3, M_4$  einander gleich sind:

$$m_1 = m_2 = m_3.$$

Es wird nachgewiesen, daß dann das Punktsystem so in Bewegung gebracht werden kann, daß die Punkte mit gleichen Massen in jedem Momente der Bewegung in den Scheiteln eines gleichseitigen Dreiecks liegen. Der vierte Punkt bewegt sich längs der Senkrechten zur Dreiecksebene, die durch den Schwerpunkt des Dreiecks hindurchgeht. Die Dreiecksebene bleibt der invariablen Ebene parallel, und das Dreieck dreht sich in seiner Ebene um seinen Schwerpunkt mit einer Winkelgeschwindigkeit, die dem Quadrate der augenblicklichen Entfernung des Scheitels des Dreiecks vom Rotationszentrum umgekehrt proportional ist.

Ist die Kraft, die zwischen je zweien der Massenpunkte wirkt, dem Kubus der Entfernung der Punkte umgekehrt proportional, so ist das Problem durch Quadraturen auflösbar.

Es möge hier noch erwähnt werden, obgleich im folgenden nicht weiter darauf eingegangen wird, daß der eben angeführte spezielle Fall

\*) Sludski, Zur Aufgabe über die Bewegung eines Systems freier materieller Punkte. Zeitschr. der Moskauer Math. Gesellschaft. IX. 1878; Hoppe, Erweiterung der bekannten Speziallösung des Dreikörperproblems. Grunerts Archiv der Math. und Phys. 64. 1879.

\*\*) Laplace, Mécanique céleste, I. X, ch. VI.

\*\*\*) Lehmann-Filhés, Über zwei Fälle des Vielkörperproblems. Astron. Nachr. 127. 1891.

leicht auf das  $n$ -Körperproblem ausgedehnt werden kann. Die drei Punkte mit gleichen Massen liegen wieder in den Scheiteln eines gleichseitigen Dreiecks, und die übrigen Punkte des Systems bewegen sich auf der Senkrechten zur Dreiecksebene durch den Schwerpunkt des Dreiecks. Ist  $n = 5$  und außerdem

$$m_4 = m_5,$$

so können die Punkte  $M_4$  und  $M_5$  stets symmetrisch zur Dreiecksebene zu liegen kommen. Bei  $n = 6$  und wieder  $m_4 = m_5$  ist eine solche Bewegung des Punktsystems möglich, bei welcher die Punkte  $M_4$  und  $M_5$  symmetrisch zur Dreiecksebene bleiben, während der Punkt  $M_6$  mit dem Schwerpunkte des Dreiecks zusammenfällt. In allen diesen Fällen reduziert sich das Problem auf Quadraturen, wenn die Kräfte dem Kubus der Entfernung umgekehrt proportional sind.

Die hier angeführten partikulären Lösungen des Vielkörperproblems können zur Illustration des berühmten Jacobischen Satzes über den letzten Multiplikator dienen.

In Kap. II wird der Fall diskutiert, wenn die drei Konstanten der Flächenintegrale gleich Null sind. Das allgemeine Problem zerfällt dann in zwei selbständige, nacheinander zu lösende Probleme. Zuerst wird die Deformation der Pyramide  $M_1 M_2 M_3 M_4$ , in deren Scheiteln die Massenpunkte liegen, gesucht. Zur Lösung dieser Aufgabe müssen fünf Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die fünf Kantenlängen der Pyramide durch die sechste bestimmen, integriert werden. Darnach wird die Bewegung dieser Pyramide im Raume gesucht. Diese Aufgabe führt zu einer Riccatischen Differentialgleichung:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 f_1(x) + y f_2(x) + f_3(x).$$

Die Formeln dieses Kapitels werden auf den Fall angewandt, wenn die Massen der Punkte einander gleich sind. Das Punktsystem kann dann so in Bewegung gebracht werden, daß je zwei gegenüberliegende Kanten der Pyramide  $M_1 M_2 M_3 M_4$  einander gleich bleiben. Sind außerdem die Dreiecke, die die Seiten der Pyramide bilden, gleichschenkelig, so ist das Problem für Kräfte von der oben angeführten speziellen Art durch Quadraturen lösbar.

Endlich in Kap. III wird der Fall untersucht, wenn die vier Massenpunkte in jedem Momente der Bewegung in einer Ebene liegen. Die Aufgabe hängt von der Integration eines Systems von fünf Differentialgleichungen zweiter Ordnung ab. Sind die Massen zweier Punkte einander gleich, so kann das Punktsystem so in Bewegung gebracht werden, daß die Entfernung der Punkte mit gleichen Massen von der Geraden, die die beiden anderen Punkte verbindet, senkrecht geschnitten und halbiert wird. Die Ebene der Punkte dreht sich um die erwähnte Gerade mit



einer Winkelgeschwindigkeit, die dem Quadrate der Entfernung der Punkte mit gleichen Massen umgekehrt proportional ist. Sind die Massen der beiden anderen Punkte auch einander gleich, so läßt sich auch hier eine partikuläre Lösung des Problems für Kräfte, die dem Kubus der Entfernung umgekehrt proportional sind, aufstellen.

Dieser spezielle Fall kann auch auf das  $n$ -Körperproblem ausgedehnt werden. Sind die Massen von  $2p$  Punkten des materiellen Systems einander gleich, so kann das System sich so bewegen, daß die Punkte mit gleichen Massen in jedem Momente der Bewegung in den Scheiteln eines regelmäßigen  $2p$ -Ecks liegen. Die übrigen Punkte des Systems bewegen sich längs der Senkrechten zur Ebene des  $2p$ -Ecks, die durch seinen Schwerpunkt hindurchgeht. Hier sind ähnliche Fälle, wie oben in bezug auf das gleichseitige Dreieck, zu unterscheiden.

Zum Schluß möge noch bemerkt werden, daß im folgenden das Verhältnis der Massen der Punkte zueinander stets endlich angenommen wird. Es werden also die Fälle, die in der Literatur zu so manchen interessanten Untersuchungen geführt haben, wenn die Massen einiger der Punkte als unendlich groß oder unendlich klein im Verhältnis zu den Massen der übrigen angenommen werden, hier nicht in Betracht gezogen.

In der vorliegenden, zumeist recht kurz gefaßten, Arbeit wird bei der Diskussion der partikulären Lösungen nur nachgewiesen, wie die betreffende Aufgabe auf Quadraturen zurückgeführt werden kann. Ausführlicher werden diese speziellen Fälle in einer größeren Arbeit behandelt werden, die wohl noch im Laufe des nächsten Jahres in russischer Sprache in den Kiewer Universitäts-Nachrichten erscheinen wird.

## I.

1. Es mögen  $m_1, m_2, m_3, m_4$  die Massen von vier materiellen Punkten  $M_1, M_2, M_3, M_4$  sein, die nur inneren Kräften unterworfen sind, und  $U$  die Kräftefunktion bedeuten. Wir bezeichnen mit  $x_i, y_i, z_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) die rechtwinkligen Koordinaten der Punkte  $M_1, M_2, M_3$  in bezug auf ein Koordinatensystem, das zum Ursprung den Punkt  $M_4$  hat und dessen Achsen im Raume invariable Richtungen haben.  $U$  ist eine Funktion der Veränderlichen  $x, y, z$ .

Wenn der Schwerpunkt  $O$  des Punktsystems  $M_1, M_2, M_3, M_4$  im Anfangsmoment in Ruhe war\*), so ist, den Integralen von der Erhaltung

\*) Sind die Anfangsbedingungen anders gegeben, so bleiben die weiter unten folgenden Betrachtungen in Kraft, beziehen sich aber nicht auf den Raum, sondern auf ein Koordinatensystem  $O\xi\eta\zeta$ , das zum Ursprung den Schwerpunkt  $O$  hat und dessen Achsen im Raume unveränderliche Richtungen haben. Der Punkt  $O$  bewegt sich, wie bekannt, geradlinig und gleichförmig.

der Bewegung des Schwerpunktes gemäß, die Geschwindigkeit des Punktes  $M_4$  der relativen Geschwindigkeit des Schwerpunktes  $O$  in bezug auf das System  $M_4xyz$  gleich und entgegengesetzt. Bezeichnen wir also mit  $M$  die Masse des Punktsystems:

$$(1) \quad M = m_1 + m_2 + m_3 + m_4,$$

so sind die Projektionen der Geschwindigkeit des Punktes  $M_4$  auf die Koordinatenachsen

$$(2) \quad -\frac{1}{M} \sum_{i=1}^{i=3} m_i x_i'; \quad -\frac{1}{M} \sum_{i=1}^{i=3} m_i y_i'; \quad -\frac{1}{M} \sum_{i=1}^{i=3} m_i z_i'.$$

Die Geschwindigkeit des Punktes  $M_1$  setzt sich aus der relativen Geschwindigkeit dieses Punktes in bezug auf das Koordinatensystem  $M_4xyz$  und der Geschwindigkeit des Koordinatenursprunges zusammen, so daß die Projektionen der Geschwindigkeit des Punktes  $M_1$  gleich

$$(3) \quad x_1' - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{i=3} m_i x_i'; \quad y_1' - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{i=3} m_i y_i'; \quad z_1' - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{i=3} m_i z_i'$$

sind. Die Projektionen der Geschwindigkeiten der Punkte  $M_2$  und  $M_3$  findet man aus den Ausdrücken (3) durch Vertauschung der Indizes 1, 2, 3 ineinander.

Mit Hilfe von (2) und (3) läßt sich leicht die lebendige Kraft  $T$  des Punktsystems berechnen:

$$(4) \quad 2T = m_1 \left(1 - \frac{m_1}{M}\right) (x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2) + m_2 \left(1 - \frac{m_2}{M}\right) (x_2'^2 + y_2'^2 + z_2'^2) \\ + m_3 \left(1 - \frac{m_3}{M}\right) (x_3'^2 + y_3'^2 + z_3'^2) \\ - 2 \frac{m_2 m_3}{M} (x_2' x_3' + y_2' y_3' + z_2' z_3') - 2 \frac{m_3 m_1}{M} (x_3' x_1' + y_3' y_1' + z_3' z_1') \\ - 2 \frac{m_1 m_2}{M} (x_1' x_2' + y_1' y_2' + z_1' z_2').$$

Die Differentialgleichungen der Bewegung des Punktsystems haben, wie bekannt, die Form:

$$(5) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial x_i'} \right) = \frac{\partial U}{\partial x_i}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial y_i'} \right) = \frac{\partial U}{\partial y_i}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial z_i'} \right) = \frac{\partial U}{\partial z_i} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Hat man aus diesen Gleichungen die Koordinaten  $x, y, z$  als Funktionen der Zeit  $t$  gefunden, so bestimmt man die Bewegung des Koordinatensystems  $M_4xyz$  im Raume mit Hilfe der Integrale, die die Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes ausdrücken, wie bekannt, ohne jegliche Integration.

Vier Integrale der Gleichungen (5), das Integral der lebendigen Kraft und drei Flächenintegrale, lassen sich sofort hinschreiben.

Das Integral der lebendigen Kraft gibt

$$(6) \quad T = U + h,$$

wo  $h$  eine Konstante bedeutet.

Um die Flächenintegrale zu erhalten, bemerken wir, daß die Ausdrücke (3) mit Hilfe von (4) sich so darstellen lassen:

$$(7) \quad \frac{1}{m_1} \frac{\partial T}{\partial x_1'}; \quad \frac{1}{m_1} \frac{\partial T}{\partial y_1'}; \quad \frac{1}{m_1} \frac{\partial T}{\partial z_1'}.$$

Das Moment in bezug auf die  $x$ -Achse des Vektors der Bewegungsgröße des Punktes  $M_1$  ist also gleich

$$y_1 \frac{\partial T}{\partial z_1'} - z_1 \frac{\partial T}{\partial y_1'},$$

so daß die Flächenintegrale liefern:

$$(8) \quad \sum_{i=1}^{i=3} \left( y_i \frac{\partial T}{\partial z_i'} - z_i \frac{\partial T}{\partial y_i'} \right) = A; \quad \sum_{i=1}^{i=3} \left( z_i \frac{\partial T}{\partial x_i'} - x_i \frac{\partial T}{\partial z_i'} \right) = B;$$

$$\sum_{i=1}^{i=3} \left( x_i \frac{\partial T}{\partial y_i'} - y_i \frac{\partial T}{\partial x_i'} \right) = C,$$

wo  $A, B, C$  Konstante sind.

Da das gegebene Punktsystem nur inneren Kräften unterworfen ist, so hängt  $U$  nur von den sechs Entfernungen der Punkte voneinander ab. Diese Entfernungen sollen mit  $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, r_1, r_2, r_3$  bezeichnet werden, wobei  $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$  die Entfernungen der Punkte  $M_1, M_2, M_3$  von  $M_4$  und  $r_1, r_2, r_3$  die Entfernungen der Punkte  $M_2$  und  $M_3, M_3$  und  $M_1, M_1$  und  $M_2$  bedeuten:

$$(9) \quad \varrho_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \text{ usw.} \quad r_1^2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 \text{ usw.}$$

Zumeist werden wir voraussetzen, daß die Kraft, die zwischen je zweien der gegebenen Punkte wirkt, dem Produkte der Massen der betreffenden Punkte in irgend eine Potenz ihrer Entfernung proportional ist. Dann ist

$$(10) \quad U = \frac{\varepsilon}{k+1} [m_4(m_1 \varrho_1^{k+1} + m_2 \varrho_2^{k+1} + m_3 \varrho_3^{k+1}) + m_2 m_3 r_1^{k+1} \\ + m_3 m_1 r_2^{k+1} + m_1 m_2 r_3^{k+1}],$$

wo  $k$  eine positive oder negative Zahl und  $\varepsilon$  ein von den Massen der Punkte unabhängiger konstanter Faktor sind.

In den Bewegungsgleichungen (5) ist natürlich

$$(11) \quad \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_1} &= \frac{\partial U}{\partial \varrho_1} \frac{x_1}{\varrho_1} + \frac{\partial U}{\partial r_2} \frac{x_1 - x_3}{r_2} + \frac{\partial U}{\partial r_3} \frac{x_1 - x_2}{r_3}; \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} &= \frac{\partial U}{\partial \varrho_2} \frac{x_2}{\varrho_2} + \frac{\partial U}{\partial r_3} \frac{x_2 - x_1}{r_3} + \frac{\partial U}{\partial r_1} \frac{x_2 - x_3}{r_1} \text{ usw.} \end{aligned}$$

zu setzen.

2. In die Bewegungsgleichungen (5) wollen wir statt der neun Koordinaten  $x, y, z$  neue Variable einführen. Zu diesen wählen wir die sechs Größen  $\varrho$  und  $r$  (9) und drei Veränderliche  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ , die mit den Koordinaten  $x, y, z$  durch die Differentialgleichungen

$$(12) \quad \varphi_1' = x_2 x_3' + y_2 y_3' + z_2 z_3' - x_3 x_2' - y_3 y_2' - z_3 z_2' \text{ usw.}$$

verbunden sein mögen.\*)

Durch Differentiation nach der Zeit  $t$  erhält man aus (9):

$$(13) \quad \begin{aligned} \varrho_1 \varrho_1' &= x_1 x_1' + y_1 y_1' + z_1 z_1' \text{ usw.} \\ r_1 r_1' &= (x_2 - x_3)(x_2' - x_3') + (y_2 - y_3)(y_2' - y_3') + (z_2 - z_3)(z_2' - z_3') \text{ usw.} \end{aligned}$$

Stellt man nun mit Hilfe von (12) und (13) drei Systeme von je drei Gleichungen, wie z. B.

$$\begin{aligned} \varrho_1 \varrho_1' &= x_1 x_1' + y_1 y_1' + z_1 z_1'; \\ \frac{1}{2} (\varrho_1 \varrho_1' + \varrho_2 \varrho_2' - r_3 r_3' - \varphi_3') &= x_2 x_1' + y_2 y_1' + z_2 z_1'; \\ \frac{1}{2} (\varrho_3 \varrho_3' + \varrho_1 \varrho_1' - r_2 r_2' + \varphi_2') &= x_3 x_1' + y_3 y_1' + z_3 z_1', \end{aligned}$$

zusammen, so bestimmt man leicht die Derivierten  $x', y', z'$ :

$$(14) \quad \begin{aligned} \Delta \cdot x_1' &= (y_2 z_3 - z_2 y_3) \varrho_1 \varrho_1' + (y_3 z_1 - z_3 y_1) v_3' + (y_1 z_2 - z_1 y_2) u_2' \text{ usw.} \\ \Delta \cdot x_2' &= (y_2 z_3 - z_2 y_3) u_3' + (y_3 z_1 - z_3 y_1) \varrho_2 \varrho_2' + (y_1 z_2 - z_1 y_2) v_1' \text{ usw.} \\ \Delta \cdot x_3' &= (y_2 z_3 - z_2 y_3) v_2' + (y_3 z_1 - z_3 y_1) u_1' + (y_1 z_2 - z_1 y_2) \varrho_3 \varrho_3' \text{ usw.} \end{aligned}$$

Hier bezeichnet  $\Delta$  das sechsfache Volumen der Pyramide, deren Scheitel in den Punkten  $M_1, M_2, M_3, M_4$  liegen.\*\*) Außerdem sind der Kürze wegen folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$(15) \quad \begin{aligned} \varrho_2 \varrho_2' + \varrho_3 \varrho_3' - r_1 r_1' + \varphi_1' &= 2u_1' \text{ usw.} \\ \varrho_2 \varrho_2' + \varrho_3 \varrho_3' - r_1 r_1' - \varphi_1' &= 2v_1' \text{ usw.} \end{aligned}$$

\*) Die Aufgabe, in die dynamischen Gleichungen neue Variable einzuführen, die mit den ursprünglichen durch Differentialgleichungen verbunden sind, ist in letzter Zeit schon recht häufig behandelt worden. Ausführlicheres über diese Aufgabe, wie auch über die betreffende Literatur findet man in meinem Vortrage „Über eine Transformation der Gleichungen der Dynamik“ (Protokolle der Kiewer physiko-mathematischen Gesellschaft aus dem Jahre 1900) oder auch in der neueren Abhandlung von G. Hamel, Über die virtuellen Verschiebungen in der Mechanik (Math. Annalen Bd. 59. 1904).

\*\*) Wir setzen  $\Delta$  von Null verschieden voraus. Der Fall  $\Delta = 0$  soll weiter unten selbständig behandelt werden.

Setzt man aus den Formeln (14) in den Ausdruck (4) für die lebendige Kraft des Punktsystems ein, so wird  $T$  zu einer homogenen Funktion zweiten Grades  $\Theta$  der Größen  $\rho'$ ,  $r'$ ,  $\varphi'$ .

Bezeichnen wir ferner:

$$(16) \quad \Delta^2 \cdot k_1 = (y_2 z_3 - z_2 y_3)^2 + (z_2 x_3 - x_2 z_3)^2 + (x_2 y_3 - y_2 x_3)^2 \text{ usw.}$$

$$(17) \quad \Delta^2 \cdot h_1 = (y_3 z_1 - z_3 y_1) (y_1 z_2 - z_1 y_2) + (z_3 x_1 - x_3 z_1) (z_1 x_2 - x_1 z_2) \\ + (x_3 y_1 - y_3 x_1) (x_1 y_2 - y_1 x_2) \text{ usw.},$$

so erhalten wir aus (14):

$$x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2 = k_1 \rho_1'^2 \rho_1'^2 + k_2 v_3'^2 + k_3 u_2'^2 + 2h_1 v_3' u_2' + 2h_2 u_2' \rho_1 \rho_1' \\ + 2h_3 \rho_1 \rho_1' v_3' \text{ usw.}$$

$$x_2' x_3' + y_2' y_3' + z_2' z_3' = k_1 u_3' v_2' + k_2 \rho_2 \rho_2' u_1' + k_3 v_1' \rho_3 \rho_3' \\ + h_1 (\rho_2 \rho_2' \rho_3 \rho_3' + v_1' u_1') + h_2 (v_1' v_2' + u_3' \rho_3 \rho_3') + h_3 (u_3' u_1' + \rho_2 \rho_2' v_2') \text{ usw.},$$

so daß (4) ergibt:

$$(18) \quad 2\Theta = k_1 (m_1 \rho_1'^2 \rho_1'^2 + m_2 u_3'^2 + m_3 v_2'^2 - M \Omega_1^2) \\ + k_2 (m_2 \rho_2^2 \rho_2'^2 + m_3 u_1'^2 + m_1 v_3'^2 - M \Omega_2^2) \\ + k_3 (m_3 \rho_3^2 \rho_3'^2 + m_1 u_2'^2 + m_2 v_1'^2 - M \Omega_3^2) \\ + 2h_1 (m_1 u_2' v_3' + m_2 \rho_2 \rho_2' v_1' + m_3 \rho_3 \rho_3' u_1' - M \Omega_2 \Omega_3) \\ + 2h_2 (m_2 u_3' v_1' + m_3 \rho_3 \rho_3' v_2' + m_1 \rho_1 \rho_1' u_2' - M \Omega_3 \Omega_1) \\ + 2h_3 (m_3 u_1' v_2' + m_1 \rho_1 \rho_1' v_3' + m_2 \rho_2 \rho_2' u_3' - M \Omega_1 \Omega_2),$$

wo zeitweilig

$$(19) \quad m_1 \rho_1 \rho_1' + m_2 u_3' + m_3 v_2' = M \Omega_1 \text{ usw.}$$

gesetzt ist.

Die Koeffizienten  $k$  und  $h$ , die in (18) eingehen, lassen sich leicht durch die Größen  $\rho$  und  $r$  (9) ausdrücken. Nach (16), (17) und (9) ist:

$$(20) \quad \Delta^2 \cdot k_1 = \rho_2^2 \rho_3^2 - \frac{1}{4} (\rho_2^2 + \rho_3^2 - r_1^2)^2 \text{ usw.} \\ \Delta^2 \cdot h_1 = \frac{1}{4} (\rho_3^2 + \rho_1^2 - r_2^2) (\rho_1^2 + \rho_2^2 - r_3^2) - \frac{1}{2} \rho_1^2 (\rho_2^2 + \rho_3^2 - r_1^2) \text{ usw.},$$

wobei nach einer bekannten Formel für das Volumen einer Pyramide, deren Kanten die Längen  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $\rho_3$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  haben,

$$(21) \quad \Delta^2 = \rho_1^2 \rho_2^2 \rho_3^2 + \frac{1}{4} (\rho_2^2 + \rho_3^2 - r_1^2) (\rho_3^2 + \rho_1^2 - r_2^2) (\rho_1^2 + \rho_2^2 - r_3^2) \\ - \frac{1}{4} \rho_1^2 (\rho_2^2 + \rho_3^2 - r_1^2)^2 - \frac{1}{4} \rho_2^2 (\rho_3^2 + \rho_1^2 - r_2^2)^2 \\ - \frac{1}{4} \rho_3^2 (\rho_1^2 + \rho_2^2 - r_3^2)^2$$

ist.

Die Gleichung (18) gibt also nach (15) und (19):

$$(22) \quad T = \Theta(\varrho_i, r_i, \varrho'_i, r'_i, \varphi'_i).$$

Um die Differentialgleichungen, die die Variablen  $\varrho$ ,  $r$ ,  $\varphi$  als Funktionen von  $t$  bestimmen, aufzustellen, führen wir die Variationen der Größen  $\varphi$  (12) ein:

$$(23) \quad \delta\varphi_1 = x_2\delta x_3 + y_2\delta y_3 + z_2\delta z_3 - x_3\delta x_2 - y_3\delta y_2 - z_3\delta z_2 \text{ usw.}$$

und bestimmen\*) die Differenzen

$$\delta\varphi' - \frac{d}{dt} \delta\varphi.$$

Aus (12) und (23) findet man:

$$\delta\varphi'_1 - \frac{d}{dt} \delta\varphi_1 = 2(x'_3\delta x_2 - x'_2\delta x_3 + \dots).$$

Setzt man in diese Gleichung aus (14) und aus den entsprechenden Formeln:

$$\Delta \cdot \delta x_1 = (y_2 z_3 - z_2 y_3) \varrho_1 \delta \varrho_1 + (y_3 z_1 - z_3 y_1) \delta v_3 + (y_1 z_2 - z_1 y_2) \delta u_2 \text{ usw.},$$

wo nach (15)

$$(24) \quad \begin{aligned} \varrho_2 \delta \varrho_2 + \varrho_3 \delta \varrho_3 - r_1 \delta r_1 + \delta \varphi_1 &= 2 \delta u_1 \quad \text{usw.} \\ \varrho_2 \delta \varrho_2 + \varrho_3 \delta \varrho_3 - r_1 \delta r_1 - \delta \varphi_1 &= 2 \delta v_1 \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

ist, ein, so erhält man:

$$(25) \quad \begin{aligned} \delta\varphi'_1 - \frac{d}{dt} \delta\varphi_1 &= 2k_1(v'_2 \delta u_3 - u'_3 \delta v_2) + 2k_2(u'_1 \varrho_2 \delta \varrho_2 - \varrho_2 \varrho'_2 \delta u_1) \\ &\quad + 2k_3(\varrho_3 \varrho'_3 \delta v_1 - v'_3 \varrho_3 \delta \varrho_3) \\ &\quad + 2h_1(\varrho_3 \varrho'_3 \varrho_2 \delta \varrho_2 - \varrho_2 \varrho'_2 \varrho_3 \delta \varrho_3 + u'_1 \delta v_1 - v'_1 \delta u_1) \\ &\quad + 2h_2(v'_2 \delta v_1 - v'_1 \delta v_2 + \varrho_3 \varrho'_3 \delta u_3 - u'_3 \varrho_3 \delta \varrho_3) \\ &\quad + 2h_3(u'_1 \delta u_3 - u'_3 \delta u_1 + v'_2 \varrho_2 \delta \varrho_2 - \varrho_2 \varrho'_2 \delta v_2). \end{aligned}$$

Durch Vertauschung der Indizes 1, 2, 3 bekommt man hieraus die Gleichungen zur Bestimmung der Differenzen

$$\delta\varphi'_2 - \frac{d}{dt} \delta\varphi_2; \quad \delta\varphi'_3 - \frac{d}{dt} \delta\varphi_3.$$

Nun wenden wir die bekannte Formel

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta\Theta + \delta U) dt = 0$$

\*) Vergl. unseren oben erwähnten Vortrag oder auch die Abhandlung von K. Heun, Die Bedeutung des D'Alembertschen Prinzipes für starre Systeme und Gelenkmechanismen (Archiv für Math. und Phys. III. 2. 1902. § 17).

an. Durch partielle Integration läßt sich die Funktion unter dem Integralzeichen so schreiben:

$$\sum_{i=1}^{i=3} \left[ -\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \varrho_i'} \right) \delta \varrho_i - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial r_i'} \right) \delta r_i - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_i'} \right) \delta \varphi_i + \frac{\partial(\Theta + U)}{\partial \varrho_i} \delta \varrho_i + \frac{\partial(\Theta + U)}{\partial r_i} \delta r_i + \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_i} \left( \delta \varphi_i' - \frac{d}{dt} \delta \varphi_i \right) \right].$$

Mit Hilfe von (25) und (24) wird dieser Ausdruck zu einer linearen Funktion der Variationen  $\delta \varrho$ ,  $\delta r$ ,  $\delta \varphi$ . Setzt man nun die Koeffizienten dieser Variationen gleich Null, so erhält man folgende neun Gleichungen:

$$(26) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \varrho_i'} \right) - \frac{\partial(\Theta + U)}{\partial \varrho_i} &= \varrho_1(\beta_1 - \gamma_1) \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_1'} - \varrho_1(2\beta_1 + \gamma_2 + \alpha_3 - \alpha_1) \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_2'} \\ &\quad + \varrho_1(2\gamma_1 + \beta_3 + \alpha_2 - \alpha_1) \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_3'} \text{ usw.} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial r_1'} \right) - \frac{\partial(\Theta + U)}{\partial r_1} &= r_1(\alpha_2 - \alpha_3) \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_1'} - r_1\beta_2 \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_2'} + r_1\gamma_3 \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_3'} \text{ usw.} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_1'} \right) &= -(\alpha_2 + \alpha_3) \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_1'} + \beta_2 \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_2'} + \gamma_3 \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_3'} \text{ usw.,} \end{aligned}$$

wo die  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  lineare Funktionen der Größen  $\varrho'$ ,  $r'$ ,  $\varphi'$ , deren Koeffizienten von  $\varrho$  und  $r$  abhängen, bezeichnen:

$$(27) \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= k_1 \varrho_1 \varrho_1' + h_2 u_2' + h_3 v_3' \text{ usw.}; & \beta_1 &= k_1 v_2' + h_2 \varrho_3 \varrho_3' + h_3 u_1' \text{ usw.}; \\ \gamma_1 &= k_1 u_3' + h_2 v_1' + h_3 \varrho_2 \varrho_2' \text{ usw.} \end{aligned}$$

Aus diesen Formeln sind die Variablen  $u'$  und  $v'$  mit Hilfe von (15) zu eliminieren.

Die Gleichungen (26) bestimmen die Veränderlichen  $\varrho$ ,  $r$ ,  $\varphi'$  als Funktionen der Zeit. Diese Gleichungen sind in bezug auf die Größen  $\varrho$  und  $r$  von der zweiten, in bezug auf die Variablen  $\varphi'$  von der ersten Ordnung.

Zwei Integrale des Systems (26) lassen sich sofort angeben. Das Integral der lebendigen Kraft gibt:

$$(28) \quad \Theta = U + h,$$

wo  $h$  eine Konstante bezeichnet.

Um das andere Integral zu erhalten, benutzen wir die Flächenintegrale (8). Den Formeln (12) und (13) gemäß ist:

$$(29) \quad \frac{\partial T}{\partial x_1'} = \frac{\partial \Theta}{\partial \varrho_1'} \varrho_1 + \frac{\partial \Theta}{\partial r_2'} \frac{x_1 - x_2}{r_2} + \frac{\partial \Theta}{\partial r_3'} \frac{x_1 - x_3}{r_3} + \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_2'} x_3 - \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_3'} x_2 \text{ usw.,}$$

so daß

$$y_1 \frac{\partial T}{\partial z_1} - z_1 \frac{\partial T}{\partial y_1} = -\frac{1}{r_2} \frac{\partial \Theta}{\partial r_2'} (y_1 z_3 - z_1 y_3) - \frac{1}{r_3} \frac{\partial \Theta}{\partial r_3'} (y_1 z_2 - z_1 y_2) \\ + \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_2'} (y_1 z_3 - z_1 y_3) - \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_3'} (y_1 z_2 - z_1 y_2)$$

wird. Setzt man hieraus in die Flächenintegrale (8) ein, so erhält man:

$$(30) (y_3 z_2 - z_3 y_2) \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_1'} + (y_1 z_3 - z_1 y_3) \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_2'} + (y_2 z_1 - z_2 y_1) \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_3'} = \frac{1}{2} A \text{ usw.,}$$

oder, indem man diese Gleichungen quadriert und sodann addiert, nach (16) und (17):

$$(31) k_1 \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_1'} \right)^2 + k_2 \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_2'} \right)^2 + k_3 \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_3'} \right)^2 + 2h_1 \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_2'} \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_3'} + 2h_2 \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_3'} \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_1'} \\ + 2h_3 \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_1'} \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_2'} = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{4\Delta^2}.$$

Wenn man zwei der Gleichungen (26) durch die Integrale (28) und (31) ersetzt und aus dem neuen System von Differentialgleichungen  $dt$  und, z. B.,  $\varphi_3'$  eliminiert, so bekommt man sieben Differentialgleichungen, die sieben der Variablen  $\varrho$ ,  $r$ ,  $\varphi'$  durch die achte bestimmen. Nur fünf von diesen Gleichungen werden zweiter Ordnung sein. *Wir können also sagen, daß das Problem der Bewegung von vier Massenpunkten, die nur inneren Kräften unterworfen sind, auf die Integration von zwölf simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung reduziert ist.*

Wenn die Kräftefunktion  $U$ , wie z. B. in (10), eine homogene Funktion  $(k+1)^{\text{ten}}$  Grades von den Variablen  $\varrho$  und  $r$  ist, so kann es oft vorteilhaft sein, eine der Gleichungen (26) durch folgende von Jacobi\*) gegebene Gleichung zu ersetzen:

$$(32) \frac{d^2}{dt^2} [m_4(m_1 \varrho_1^2 + m_2 \varrho_2^2 + m_3 \varrho_3^2) + m_2 m_3 r_1^2 + m_3 m_1 r_2^2 + m_1 m_2 r_3^2] \\ = 2M[(3+k)U + 2h].$$

Sind aus (26) die Variablen  $\varrho$ ,  $r$ ,  $\varphi'$  als Funktionen der Zeit bestimmt, so findet man die Koordinaten  $x$ ,  $y$ ,  $z$  der Punkte  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  ohne Schwierigkeit.

Durch geeignete Wahl der Richtung der Koordinatenachse  $M_4 z$  kann man es stets erreichen, daß zwei der Konstanten  $A$ ,  $B$ ,  $C$  der Flächenintegrale gleich Null werden. Es mögen

$$A = B = 0$$

sein.  $C$  wollen wir von Null verschieden voraussetzen.\*\*)

\*) Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, Vorl. IV.

\*\*) Der Fall  $A = B = C = 0$  wird weiter unten für sich behandelt.



Multipliziert man (30) mit  $x_i, y_i, z_i$ , wo  $i$  1, 2 oder 3 bedeutet, und addiert, so wird

$$(33) \quad -\Delta \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_i} = \frac{1}{2} C z_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Diese Formeln bestimmen die Koordinaten  $z$  der Punkte  $M_1, M_2, M_3$ . Wir führen nun Polarkoordinaten ein:

$$x_i = R_i \cos \vartheta_i; \quad y_i = R_i \sin \vartheta_i.$$

Die Größen  $R_i$  und die Differenzen  $\vartheta_i - \vartheta_j$  findet man ohne Integration aus den Formeln:

$$(34) \quad R_i^2 = \varrho_i^2 - z_i^2; \quad 2R_2 R_3 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_3) = \varrho_2^2 + \varrho_3^2 - r_1^2 - 2z_2 z_3 \quad \text{usw.}$$

Man hat also nur noch irgend eine von den Variablen  $\vartheta_i$  zu bestimmen. Führt man in die Gleichung (12) und (13)

$$2(x_2 x_3' + y_2 y_3' + z_2 z_3') = \varrho_2 \varrho_2' + \varrho_3 \varrho_3' - r_1 r_2' + \varphi_1'$$

Polarkoordinaten ein, so wird

$$\begin{aligned} 2[R_2 R_3' \cos(\vartheta_2 - \vartheta_3) + R_2 R_3 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_3) \vartheta_3' + z_2 z_3'] \\ = \varrho_2 \varrho_2' + \varrho_3 \varrho_3' - r_1 r_1' + \varphi_1', \end{aligned}$$

so daß

$$(35) \quad \vartheta_3 = \int \frac{\varrho_2 \varrho_2' + \varrho_3 \varrho_3' - r_1 r_1' + \varphi_1' - 2z_2 z_3' - 2R_2 R_3' \cos(\vartheta_2 - \vartheta_3)}{2R_2 R_3 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_3)} dt + \text{const.}$$

wird.

Die Integration des Systems (26) führt 15 Konstanten ein. Über zwei Konstanten,  $A$  und  $B$ , haben wir durch die Wahl der Richtung der  $z$ -Achse bestimmte Verfügungen getroffen. Die Quadratur (35) gibt noch eine Konstante. Es werden also, wie auch zu erwarten war, die Funktionen, die die Koordinaten  $x, y, z$  der Punkte  $M_1, M_2, M_3$  durch die Zeit bestimmen, 18 willkürliche Konstanten enthalten.

2. Wir wollen nun den speziellen Fall, wenn drei der Punkte  $M_1, M_2, M_3, M_4$  gleiche Massen haben, ins Auge fassen. Es sei

$$(36) \quad m_1 = m_2 = m_3 = 1; \quad m_4 = m; \quad M = 3 + m.$$

Es fällt nicht schwer nachzuweisen, daß dann die Bewegungsgleichungen (26) das System partikulärer Integrale

$$(37) \quad \varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = \varrho; \quad r_1 = r_2 = r_3 = r; \quad \varphi_1' = \varphi_2' = \varphi_3' = \varphi',$$

wo  $\varrho, r, \varphi'$  noch zu bestimmende Funktionen der Zeit bezeichnen, zulassen.

Aus (20) und (21) findet man:

$$\Delta^2 = \frac{r^4}{4} (3\varrho^2 - r^2); \quad k_1 = k_2 = k_3 = \frac{1}{r^2} \frac{4\varrho^2 - r^2}{3\varrho^2 - r^2}; \quad h_1 = h_2 = h_3 = -\frac{1}{r^2} \frac{2\varrho^2 - r^2}{3\varrho^2 - r^2}.$$

Die Formeln (27) geben nach (15):

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{r^2 \varrho \varrho' + (2\varrho^2 - r^2) r r'}{r^2(3\varrho^2 - r^2)}; \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \frac{r^2 \varrho \varrho' - \varrho^2 r r'}{r^2(3\varrho^2 - r^2)} - \frac{\varphi'}{r^2};$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \frac{r^2 \varrho \varrho' - \varrho^2 r r'}{r^2(3\varrho^2 - r^2)} + \frac{\varphi'}{r^2}.$$

Bezeichnet man mit  $\Theta_1$  das Resultat der Einsetzung aus (37) und (36) in die Formel (18) für  $\Theta$ , so ist augenscheinlich:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \varrho_i} = \frac{1}{3} \frac{\partial \Theta_1}{\partial \varrho_i}; \quad \frac{\partial \Theta}{\partial r_i} = \frac{1}{3} \frac{\partial \Theta_1}{\partial r_i} \quad \text{usw.}$$

Von der Kräftefunktion  $U$  wollen wir auch voraussetzen, daß

$$\frac{\partial U}{\partial \varrho_i} = \frac{1}{3} \frac{\partial U_1}{\partial \varrho_i}; \quad \frac{\partial U}{\partial r_i} = \frac{1}{3} \frac{\partial U_1}{\partial r_i},$$

wo  $U_1$  in bezug auf  $U$  dieselbe Bedeutung hat, wie  $\Theta_1$  in bezug auf  $\Theta$ .

Setzt man aus den gefundenen Formeln in die Bewegungsgleichungen (26) ein, so erhält man nur drei voneinander verschiedene Gleichungen:

$$(38) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Theta_1}{\partial \varrho'} \right) = \frac{\partial(\Theta_1 + U_1)}{\partial \varrho}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Theta_1}{\partial r'} \right) = \frac{\partial(\Theta_1 + U_1)}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Theta_1}{\partial \varphi'} \varphi';$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Theta_1}{\partial \varphi'} \right) = -\frac{2}{r} \frac{\partial \Theta_1}{\partial \varphi'} r',$$

die die drei Variablen  $\varrho$ ,  $r$ ,  $\varphi'$  als Funktionen der Zeit bestimmen.

Die letzte der Gleichungen (38) gibt nach Integration das Integral (31) für den in Rede stehenden speziellen Fall:

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial \varphi'} = \frac{\sqrt{3(A^2 + B^2 + C^2)}}{r^2}.$$

Nun ist aber die Funktion  $\Theta_1$ , die aus (18) leicht zu berechnen ist, gleich:

$$2\Theta_1 = \frac{m}{M} \frac{(3\varrho \varrho' - r r')^2}{3\varrho^2 - r^2} + r'^2 + \frac{3}{r^2} \varphi'^2,$$

so daß dem aufgefundenen Integrale gemäß:

$$\varphi' = \sqrt{\frac{A^2 + B^2 + C^2}{3}} = \text{const.} = \varphi'_0.$$

Bezeichnen wir jetzt

$$\Theta_1 - \frac{3}{2} \frac{\varphi_0'^2}{r^2} = \Theta_2; \quad U_1 - \frac{3}{2} \frac{\varphi_0'^2}{r^2} = U_2,$$

so können die Differentialgleichungen, die  $\varrho$  und  $r$  bestimmen, so geschrieben werden:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Theta_2}{\partial \varrho'} \right) = \frac{\partial(\Theta_2 + U_2)}{\partial \varrho}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Theta_2}{\partial r'} \right) = \frac{\partial(\Theta_2 + U_2)}{\partial r}.$$

Statt der Variablen  $\varrho$  führen wir eine neue  $\xi$  ein:

$$\xi = \sqrt{\frac{m}{M}} \sqrt{3\varrho^2 - r^2}.$$

Dann wird

$$2\Theta_2 = \xi'^2 + r'^2,$$

und die Differentialgleichungen transformieren sich in solche:

$$\xi'' = \frac{\partial U_2}{\partial \xi}; \quad r'' = \frac{\partial U_2}{\partial r},$$

wo  $U_2$  durch  $r$  und  $\xi$  auszudrücken ist.

Diese Formeln fallen mit den Gleichungen der Bewegung eines materiellen Punktes in einer Ebene zusammen, wenn die Masse des Punktes gleich Eins ist, seine rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten mit  $\xi$  und  $r$  bezeichnet sind und  $U_2$  die Kräftefunktion bedeutet.

Ist die Kraft, die zwischen den Punkten  $M_i$  und  $M_j$  wirkt, dem Kubus der Entfernung  $\overline{M_i M_j}$ , umgekehrt proportional, d. h. ist in (10)

$$k = -3,$$

so ist unser Problem leicht in Quadraturen auflösbar.

Die Jacobische Gleichung (32) gibt dann das Integral:

$$M(\xi^2 + r^2) = 2Mht^2 + 2at + b,$$

wo  $a$  und  $b$  willkürliche Konstanten sind, und das Integral der lebendigen Kraft nimmt die Form

$$\xi'^2 + r'^2 = -3\varepsilon \left( \frac{3m^2}{M\xi^2 + mr^2} + \frac{1}{r^2} \right) - 3 \frac{\varphi_0'^2}{r^2} + 2h$$

an. Eliminiert man aus diesen zwei Gleichungen eine der Variablen, so erhält man eine Differentialgleichung erster Ordnung zur Bestimmung der anderen Variablen. Diese Gleichung muß der Jacobischen Theorie des letzten Multiplikators zufolge zu Quadraturen führen.

Sehr rasch kommt man ans Ziel durch Einführung neuer Veränderlichen:

$$\xi = \chi \cdot \cos \psi; \quad r = \chi \cdot \sin \psi.$$

Dann hat man:

$$M\chi^2 = 2Mht^2 + 2at + b;$$

$$\begin{aligned} \chi^2 \chi'^2 + \chi^4 \psi'^2 &= -3\varepsilon \left( \frac{3m^2}{M \cos^2 \psi + m \sin^2 \psi} + \frac{1}{\sin^2 \psi} \right) - 3 \frac{\varphi_0'^2}{\sin^2 \psi} + 2h\chi^2 \\ &= F(\psi) + 2h\chi^2, \end{aligned}$$

woraus nach Elimination von  $\chi$  die Quadratur

$$\int \frac{d\psi}{\sqrt{\frac{2hb}{M} - \frac{a^2}{M^2} + F(\psi)}} = \int \frac{dt}{2ht^2 + \frac{2a}{M}t + \frac{b}{M}} + \text{const.}$$

erhalten wird.

Sind die Größen  $\varrho$  und  $r$  als Funktionen der Zeit bekannt, so macht die Bestimmung der Bewegung der Pyramide  $M_1 M_2 M_3 M_4$  in bezug auf das Koordinatensystem  $M_4 xyz$  keine Schwierigkeit.

Wir wählen wieder die  $xy$ -Ebene parallel der invariablen Ebene:

$$A = B = 0.$$

Aus den Formeln (33), (34) und (35) bekommen wir dann:

$$z_1 = z_2 = z_3 = \sqrt{\varrho^2 - \frac{1}{3} r^2}; \quad R_1 = R_2 = R_3 = \frac{r}{\sqrt{3}}; \quad \vartheta_2 - \vartheta_3 = \frac{2}{3} \pi;$$

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = \frac{2}{3} \pi; \quad \vartheta_3 = \sqrt{3} \cdot \varphi_0' \int \frac{dt}{r^2} + \text{const.}$$

Die Ebene des Dreiecks  $M_1 M_2 M_3$  bleibt also der invariablen Ebene stets parallel, und die Pyramide  $M_1 M_2 M_3 M_4$  dreht sich um ihre Höhe mit einer Winkelgeschwindigkeit, die dem Quadrate der augenblicklichen Entfernung der Punkte  $M_1$ ,  $M_2$  oder  $M_3$  von der Rotationsachse umgekehrt proportional ist.

## II.

1. Wir gehen jetzt zu dem Falle über, daß alle drei Konstanten der Flächenintegrale gleich Null sind:

$$(39) \quad A = B = C = 0.$$

Hierbei wollen wir an der Voraussetzung, daß das Pyramidenvolumen  $\Delta$  von Null verschieden ist, festhalten. Die Integrale (30) können unter diesen Bedingungen durch folgende ersetzt werden:

$$(40) \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_i'} = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

die natürlich auch direkt aus den Bewegungsgleichungen (26) sich herleiten lassen.

Wenn wir voraussetzen, daß aus (40) die  $\varphi_i'$  bestimmt und in die Funktion  $\Theta$  eingesetzt sind, d. h. wenn

$$\Theta = T_1(\varrho_i, r_i, \varrho_i', r_i'),$$

so ist nach (40):

$$\frac{\partial T_1}{\partial \varrho_i'} = \frac{\partial \Theta}{\partial \varrho_i'}; \quad \frac{\partial T_1}{\partial \varrho_i} = \frac{\partial \Theta}{\partial \varrho_i} \quad \text{usw.}$$

Setzen wir hieraus und aus (40) in die Bewegungsgleichungen (26) ein, so erhalten wir:

$$(41) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_1}{\partial \varrho_i'} \right) = \frac{\partial (T_1 + U)}{\partial \varrho_i}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_1}{\partial r_i'} \right) = \frac{\partial (T_1 + U)}{\partial r_i} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Hat man aus diesen Differentialgleichungen die Variablen  $\varrho$  und  $r$  als Funktionen der Zeit gefunden, so ist damit die Deformation der Pyramide

$M_1, M_2, M_3, M_4$  bestimmt. Es bleibt also noch übrig, die Bewegung der Pyramide in bezug auf das Koordinatensystem  $M_4xyz$  aufzufinden. Zu diesem Zwecke hat man die Koordinaten  $x, y, z$  der Punkte  $M_1, M_2, M_3$  aus den Formeln (9) und (12) oder aus folgenden, ihnen gleichbedeutenden:

$$(42) \quad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \varrho_1^2 \text{ usw.}; \quad 2(x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3) = \varrho_2^2 + \varrho_3^2 - r_1^2 \text{ usw.}; \\ 2(x_2x_3' + y_2y_3' + z_2z_3') = \varrho_2\varrho_2' + \varrho_3\varrho_3' - r_1r_1' + \varphi_1' \text{ usw.}$$

zu berechnen, wo die  $\varphi'$  aus (40) zu bestimmen sind.

Wir wollen nachweisen, daß diese Aufgabe auf die Integration einer Riccatischen Gleichung zurückgeführt werden kann.

Zu diesem Zwecke führen wir statt der neun Größen  $x, y, z$  15 neue Variablen  $a_i, b_i, c_i, \lambda_i, \mu_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) ein, von denen wir verlangen wollen, daß sie folgenden sechs Bedingungen

$$(43) \quad a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1 \text{ usw.}; \quad a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 = 0 \text{ usw.}$$

genügen. Die Beziehungen zwischen den Veränderlichen  $x, y, z$  und  $a, b, c, \lambda, \mu$  wählen wir so:

$$(44) \quad x_1 = \varrho_1(\lambda_1a_2 + \mu_1a_3) \text{ usw.}; \quad x_2 = \varrho_2(\lambda_2a_3 + \mu_2a_1) \text{ usw.}; \\ x_3 = \varrho_3(\lambda_3a_1 + \mu_3a_2) \text{ usw.}$$

Setzt man diese Werte für die  $x, y, z$  in die ersten sechs Gleichungen (42) ein und beachtet die Bedingungen (43), so erhält man:

$$(45) \quad \lambda_1^2 + \mu_1^2 = \frac{1}{2} \text{ usw.}; \quad \lambda_3\mu_2 = \frac{\varrho_2^2 + \varrho_3^2 - r_1^2}{2\varrho_2\varrho_3} \text{ usw.}$$

Diese leicht zu lösenden Gleichungen bestimmen die Größen  $\lambda$  und  $\mu$ .

Indem man (44) nach der Zeit differenziert, bekommt man z. B.:

$$x_3' = \varrho_3'(\lambda_3a_1 + \mu_3a_2) + \varrho_3(\lambda_3'a_1 + \mu_3'a_2) + \varrho_3(\lambda_3a_1' + \mu_3a_2'),$$

so daß die letzten drei Gleichungen (42) nach (43) ergeben:

$$(46) \quad 2\mu_2\lambda_3\varrho_2\varrho_3' + 2\varrho_2\varrho_3\mu_2\lambda_3' + 2\varrho_2\varrho_3(-\lambda_2\mu_3\omega_1 + \lambda_2\lambda_3\omega_2 + \mu_2\mu_3\omega_3) \\ = \varrho_2\varrho_2' + \varrho_3\varrho_3' - r_1r_1' + \varphi_1' \text{ usw.},$$

wo nach (43)

$$(47) \quad a_2a_3' + b_2b_3' + c_2c_3' = -(a_3a_2' + b_3b_2' + c_3c_2') = \omega_1 \text{ usw.}$$

gesetzt ist.

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} -\lambda_2\mu_3 & \lambda_2\lambda_3 & \mu_2\mu_3 \\ \mu_3\mu_1 - \lambda_3\mu_1 & \lambda_3\lambda_1 & \\ \lambda_1\lambda_2 & \mu_1\mu_2 - \lambda_1\mu_2 & \end{vmatrix}$$

ist nach (45) und (21), wie man sich leicht überzeugen kann,

$$\frac{\Delta^2}{e_1^2 e_2^2 e_3^2},$$

also unserer Voraussetzung gemäß von Null verschieden. Darum lassen sich die  $\omega$  aus (46) bestimmen.

Nachdem man die Differentialgleichungen (41) integriert und die Gleichungen (45) gelöst hat, werden also die  $\omega$  bekannte Funktionen der Zeit sein. Nun ist es aber wohl bekannt\*), daß die Aufgabe der Bestimmung der Größen  $a, b, c$  aus den Bedingungen (43) und (47) auf die Integration einer Riccatischen Gleichung zurückgeführt werden kann.

Wir sehen also, daß das Problem der Bewegung von vier Massenpunkten unter der Wirkung von inneren Kräften für den Fall, daß die Konstanten der Flächenintegrale gleich Null sind, in zwei selbständige, nacheinander zu lösende Probleme zerfällt.

Zuerst wird die Deformation der Pyramide, deren Scheitel in den gegebenen Massenpunkten liegen, gesucht. Dieses Problem löst man durch Integration von sechs Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die die Kantenlängen der Pyramide als Funktionen der Zeit bestimmen. Danach stellt man sich die Aufgabe, die Bewegung der veränderlichen Pyramide im Raume aufzufinden. Die Lösung dieser Aufgabe hängt von der Integration einer Riccatischen Gleichung ab.

Aus den Gleichungen (41) läßt sich noch mit Hilfe des Integrals der lebendigen Kraft die Zeit eliminieren. Das neue System von fünf Differentialgleichungen zweiter Ordnung bestimmt fünf der Kantenlängen der Pyramide  $M_1 M_2 M_3 M_4$  durch die sechste.

2. Die sechs Differentialgleichungen zweiter Ordnung (41) wollen wir nun durch zwölf Gleichungen erster Ordnung in der kanonischen Form ersetzen.

Wir bezeichnen nach (40)

$$(48) \quad \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{q}_i'} = \frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{q}_i} = \pi_i; \quad \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{r}_i'} = \frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{r}_i} = p_i \quad (i = 1, 2, 3);$$

dann genügen die Größen  $\pi, p, q, r$ , wie bekannt, den Gleichungen:

$$(49) \quad \begin{aligned} \frac{d\pi_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}_i}; & \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \pi_i}; \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i}; & \frac{dr_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}; \end{aligned} \\ (i = 1, 2, 3),$$

\*) Vergl. z. B. Darboux, Théorie des surfaces, t. I. ch. II.

wo

$$H = \sum_{i=1}^{i=3} (\pi_i \varrho_i' + p_i r_i') - T_1 - U = T - U$$

ist, so daß  $T$  die lebendige Kraft des gegebenen Punktsystems bedeutet, die mit Hilfe von (40) und (48) als homogene Funktion zweiten Grades von den Größen  $\pi$  und  $p$  dargestellt ist.

Diese Funktion  $T$  wollen wir jetzt berechnen.

Aus den Formeln (29) findet man nach (4), (40) und (48):

$$\frac{\partial T}{\partial x_1'} = m_1 \left( x_1' - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{i=3} m_i x_i' \right) = \frac{\pi_1}{\varrho_1} x_1 + \frac{p_2}{r_2} (x_1 - x_3) + \frac{p_3}{r_3} (x_1 - x_2) \text{ usw.}$$

und hieraus nach (1):

$$\sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial T}{\partial x_i'} = \frac{m_4}{M} \sum_{i=1}^{i=3} m_i x_i' = \frac{\pi_1}{\varrho_1} x_1 + \frac{\pi_2}{\varrho_2} x_2 + \frac{\pi_3}{\varrho_3} x_3,$$

so daß

$$x_1' = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_4} \right) \frac{\pi_1}{\varrho_1} x_1 + \frac{1}{m_4} \frac{\pi_2}{\varrho_2} x_2 + \frac{1}{m_4} \frac{\pi_3}{\varrho_3} x_3 + \frac{1}{m_1} \frac{p_2}{r_2} (x_1 - x_3) \\ + \frac{1}{m_1} \frac{p_3}{r_3} (x_1 - x_2) \text{ usw.}$$

Setzt man nun diese Werte für  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  und  $\frac{\partial T}{\partial x'}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial y'}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial z'}$  in die evidente Formel:

$$2T = \sum_{i=1}^{i=3} \left( \frac{\partial T}{\partial x_i'} x_i' + \frac{\partial T}{\partial y_i'} y_i' + \frac{\partial T}{\partial z_i'} z_i' \right)$$

ein, so erhält man nach kurzer Rechnung mit Hilfe von (9):

$$(50) \quad 2T = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_4} \right) \pi_1^2 + \left( \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_4} \right) \pi_2^2 + \left( \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4} \right) \pi_3^2 + \left( \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} \right) p_1^2 \\ + \left( \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_1} \right) p_2^2 + \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) p_3^2 \\ + \frac{1}{m_4} \left[ (\varrho_2^2 + \varrho_3^2 - r_1^2) \frac{\pi_2 \pi_3}{\varrho_2 \varrho_3} + (\varrho_3^2 + \varrho_1^2 - r_2^2) \frac{\pi_3 \pi_1}{\varrho_3 \varrho_1} + (\varrho_1^2 + \varrho_2^2 - r_3^2) \frac{\pi_1 \pi_2}{\varrho_1 \varrho_2} \right] \\ + \frac{1}{m_1} (r_2^2 + r_3^2 - r_1^2) \frac{p_2 p_3}{r_2 r_3} + \frac{1}{m_2} (r_3^2 + r_1^2 - r_2^2) \frac{p_3 p_1}{r_3 r_1} + \frac{1}{m_3} (r_1^2 + r_2^2 - r_3^2) \frac{p_1 p_2}{r_1 r_2} \\ + \frac{1}{m_1} \left[ \varrho_1^2 + r_2^2 - \varrho_3^2 \right] \frac{p_2}{r_2} + \left[ \varrho_1^2 + r_3^2 - \varrho_2^2 \right] \frac{p_3}{r_3} \left] \frac{\pi_1}{\varrho_1} \\ + \frac{1}{m_2} \left[ \varrho_2^2 + r_3^2 - \varrho_1^2 \right] \frac{p_3}{r_3} + \left[ \varrho_2^2 + r_1^2 - \varrho_3^2 \right] \frac{p_1}{r_1} \left] \frac{\pi_2}{\varrho_2} \\ + \frac{1}{m_3} \left[ \varrho_3^2 + r_1^2 - \varrho_2^2 \right] \frac{p_1}{r_1} + \left[ \varrho_3^2 + r_2^2 - \varrho_1^2 \right] \frac{p_2}{r_2} \left] \frac{\pi_3}{\varrho_3}.$$

3. Um die in den letzten zwei Paragraphen aufgestellten Formeln auf

einen speziellen Fall anzuwenden, wollen wir voraussetzen, daß die Massen der Punkte  $M_1, M_2, M_3, M_4$  einander gleich sind:

$$(51) \quad m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1; \quad M = 4,$$

und daß die Kräftefunktion  $U$  in der Form (10) gegeben ist. Die Funktion  $H$  (50) ändert sich dann nicht, wenn man die Variablen  $q$  und  $\pi$  durch die Variablen  $r$  und  $p$  mit den entsprechenden Indizes ersetzt, und umgekehrt. Daraus ziehen wir den Schluß, daß die Bewegungsgleichungen (49) das System partikulärer Integrale

$$(52) \quad q_i = r_i; \quad \pi_i = p_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

zulassen.

Es ist also eine solche Bewegung des gegebenen Punktsystems  $M_1, M_2, M_3, M_4$  möglich, bei welcher je zwei gegenüberliegende Kanten der Pyramide  $M_1 M_2 M_3 M_4$  gleiche Länge haben.

Die Variablen  $r$  und  $p$  genügen im Falle (51) und (52) den Gleichungen:

$$\frac{dr_i}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial p_i}; \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial r_i} \quad (i = 1, 2, 3),$$

wo (50)

$$(53) \quad H_1 = \frac{1}{2} H = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \frac{r_2^2 + r_3^2 - r_1^2}{r_2 r_3} p_2 p_3 + \frac{r_3^2 + r_1^2 - r_2^2}{r_3 r_1} p_3 p_1 \\ + \frac{r_1^2 + r_2^2 - r_3^2}{r_1 r_2} p_1 p_2 - \frac{\varepsilon}{\kappa + 1} (r_1^{\kappa+1} + r_2^{\kappa+1} + r_3^{\kappa+1})$$

ist. Diese Gleichungen haben nun die partikulären Integrale

$$(54) \quad r_3 = r_2; \quad p_3 = p_2,$$

und die Variablen  $r_1, r_2, p_1, p_2$  sind aus den Formeln:

$$(55) \quad \frac{dr_1}{dt} = 2p_1 + 2\frac{r_1}{r_2} p_2; \quad \frac{dp_1}{dt} = -2\frac{p_2}{r_2} \left( p_1 - \frac{r_1}{r_2} p_2 \right) + \varepsilon r_1^{\kappa}; \\ \frac{dr_2}{dt} = \frac{r_1}{r_2} p_1 + \left( 4 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) p_2; \quad \frac{dp_2}{dt} = \frac{r_1}{r_2^2} p_2 \left( p_1 - \frac{r_1}{r_2} p_2 \right) + \varepsilon r_2^{\kappa}$$

zu bestimmen.

Die erhaltenen Gleichungen können in dem Falle, daß die wirkenden Kräfte dem Kubus der Entfernung umgekehrt proportional sind, leicht integriert werden. Doch wollen wir erst nachweisen, wie unter der Voraussetzung, daß die Gleichungen (55) gelöst sind, die Bewegung der Pyramide  $M_1 M_2 M_3 M_4$  in bezug auf das Koordinatensystem  $M_4 xy z$  bestimmt werden kann. Das in § 1 auseinandergesetzte Verfahren gestaltet sich im Falle (51), (52), (54) besonders einfach.

Wir beginnen mit der Bestimmung der Größen  $\varphi'$  aus den Integralen (40) oder, was nach (15) dasselbe ist, aus den Formeln:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial u_i'} = \frac{\partial \Theta}{\partial v_i'} \text{ usw.}$$



Dem Ausdrucke (18) für  $\Theta$  gemäß bekommt man hieraus nach (19):

$$m_3[k_2 u_1' + h_3 v_2' + h_1 \varrho_3 \varrho_3' - (k_2 \Omega_2 + h_3 \Omega_1 + h_1 \Omega_3)] \\ = m_2[k_3 v_1' + h_1 \varrho_2 \varrho_2' + h_2 u_3' - (h_3 \Omega_3 + h_1 \Omega_2 + h_2 \Omega_1)] \text{ usw.},$$

oder, wenn man wieder die Bezeichnungen (27) einführt:

$$m_3 \left[ \gamma_2 - \frac{1}{M} (m_2 \alpha_2 + m_1 \beta_2 + m_3 \gamma_2) \right] = m_2 \left[ \beta_3 - \frac{1}{M} (m_3 \alpha_3 + m_2 \beta_3 + m_1 \gamma_3) \right] \\ \text{usw.}$$

Nun ist aber in unserem Falle (51), (52) und (54) nach (16), (17) und (15)

$$k_1 = k_2 = k_3 = -h_1 - 2h_2; \quad h_3 = h_2; \\ 2u_1' = 2r_2 r_2' - r_1 r_1' + \varphi_1'; \quad 2u_2' = r_1 r_1' + \varphi_2'; \quad 2u_3' = r_1 r_1' + \varphi_3'; \\ 2v_1' = 2r_2 r_2' - r_1 r_1' - \varphi_1'; \quad 2v_2' = r_1 r_1' - \varphi_2'; \quad 2v_3' = r_1 r_1' - \varphi_3'.$$

Bestimmt man mit Hilfe dieser Formeln aus (27) die Größen  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  und setzt dann in die gefundenen Integrale ein, so überzeugt man sich leicht, daß nach (51)

$$\varphi_1' = \varphi_2' = \varphi_3' = 0$$

sein müssen.

Ferner findet man aus (45)

$$(56) \quad \lambda_1 = \mu_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \lambda_2 = \mu_3 = \frac{r_1}{r_2} \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \lambda_3 = \mu_2 = \sqrt{1 - \frac{1}{2} \frac{r_1^2}{r_2^2}}$$

und dann aus (46)

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0,$$

so daß die neun Größen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  alle Konstante sind, von denen nach (43) drei willkürlich angenommen werden können.

Der Punkt  $M_1$  bewegt sich zufolge (44) längs einer Geraden und die Punkte  $M_2$  und  $M_3$  beschreiben ebene Kurven, die in den Ebenen

$$x_2 a_2 + y_2 b_2 + z_2 c_2 = 0; \quad x_3 a_3 + y_3 b_3 + z_3 c_3 = 0$$

liegen.

Bezeichnet man

$$x_2 a_3 + y_2 b_3 + z_2 c_3 = \xi_2; \quad x_2 a_1 + y_2 b_1 + z_2 c_1 = \eta_2;$$

so ist nach (44) und (56)

$$\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} r_1 = \varphi(t); \quad \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2r_2^2 - r_1^2} = \psi(t).$$

Nach Elimination von  $t$  aus diesen Formeln erhält man die Gleichung der Kurve des Punktes  $M_2$ .

Auf ähnliche Weise kann auch die Kurve des Punktes  $M_3$  bestimmt werden.

Ist die Kraft, die an den Punkten  $M_i$  und  $M_j$  angreift, dem Kubus der Entfernung  $\overline{M_i M_j}$  umgekehrt proportional, d. h. ist in (55)

$$k = -3,$$

so lassen die Gleichungen (55) außer dem Integrale der lebendigen Kraft

$$p_1^2 + \left(4 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) p_2^2 + 2 \frac{r_1}{r_2} p_1 p_2 + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{2}{r_2^2}\right) = \frac{h}{2},$$

noch die beiden folgenden:

$$r_1^2 + 2r_2^2 = 4(ht^2 + 2at + b); \quad r_1 p_1 + 2r_2 p_2 = ht + a$$

zu. Hier bezeichnen  $a$  und  $b$  willkürliche Konstanten.

Das vierte und letzte Integral muß der Jacobischen Theorie des letzten Multiplikators zufolge durch Quadraturen sich bestimmen lassen.

Aus den Formeln (55) leiten wir die Gleichung

$$r_1 \frac{dr_2}{dt} - r_2 \frac{dr_1}{dt} = \frac{r_1^2 - 2r_2^2}{r_2} \left(p_1 - \frac{r_1}{r_2} p_2\right)$$

her und führen in den Integralen und in dieser Gleichung die Substitution

$$\begin{aligned} r_1 &= R \cos \varphi; & p_1 &= \omega \cos \varphi - \frac{\psi}{R} \sin \varphi; \\ r_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} R \sin \varphi; & p_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\omega \sin \varphi + \frac{\psi}{R} \cos \varphi\right) \end{aligned}$$

aus. Wir erhalten dann:

$$2 \left(\omega^2 + \frac{\psi^2}{R^2}\right) - \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\psi^2}{R^2} + \frac{\varepsilon}{2R^2} \left(\frac{1}{\cos^2 \varphi} + \frac{4}{\sin^2 \varphi}\right) = \frac{h}{2}; \quad R^2 = 4(ht^2 + 2at + b);$$

$$R\omega = ht + a; \quad R^2 \frac{d\varphi}{dt} = 2\psi(1 - \operatorname{ctg}^2 \varphi).$$

Indem man hieraus die Variabeln  $\psi$ ,  $\omega$  und  $R$  eliminiert, kommt man in der Tat zur Quadratur

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{F(\varphi)}} = \int \frac{dt}{2(ht^2 + 2at + b)} + \text{const.},$$

wo

$$F(\varphi) = (1 - \operatorname{ctg}^2 \varphi) \left[2(bh - a^2) - \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{1}{\cos^2 \varphi} + \frac{4}{\sin^2 \varphi}\right)\right]$$

gesetzt ist.

### III.

1. Die meisten der in Kap. I und II benutzten Formeln sind unter der Voraussetzung, daß das Pyramidenvolumen  $\Delta$  von Null verschieden ist, hergeleitet worden. Darum muß der Fall, daß die Punkte  $M_1, M_2, M_3, M_4$  in jedem Momente der Bewegung in einer Ebene liegen, getrennt behandelt werden.

Wir führen wieder ein Koordinatensystem  $M_4xyz$  ein, das zum Ursprung den Punkt  $M_4$  hat und dessen Achsen im Raume feste Richtungen haben.

Indem wir einer Idee von Sylvester\*), welche Radau\*\*) mit vielem Erfolg für das Dreikörperproblem verwertet hat, folgen, betrachten wir neben dem Systeme  $M_4xyz$  ein zweites Koordinatensystem  $M_4\xi\eta\zeta$ , das denselben Ursprung hat und dessen  $\xi\eta$ -Ebene mit der Ebene der Punkte  $M_1, M_2, M_3, M_4$  zusammenfällt. Die Schnittlinie der  $\xi\eta$ - und  $xy$ -Ebenen wählen wir zur  $\eta$ -Achse und bezeichnen mit  $\varphi$  und  $\psi$  die Winkel zwischen den Ebenen  $xy$  und  $\xi\eta$  und den Ebenen  $zx$  und  $\zeta\xi$ .

Dann hat die Winkelgeschwindigkeit des Systems  $M_4\xi\eta\zeta$  in bezug auf das System  $M_4xyz$ , wie bekannt, die Projektionen

$$-\psi' \sin \varphi, \quad \varphi', \quad \psi' \cos \varphi.$$

Wir bezeichnen ferner mit  $\xi_i, \eta_i$  die Koordinaten des Punktes  $M_i$  in der  $\xi\eta$ -Ebene und mit  $u_i, v_i, w_i$  die Projektionen auf die  $\xi, \eta, \zeta$ -Achsen der Geschwindigkeit dieses Punktes in bezug auf das System  $M_4xyz$ . Es ist dann:

$$(57) \quad u_i = \xi_i' - \eta_i \psi' \cos \varphi; \quad v_i = \eta_i' + \xi_i \psi' \cos \varphi; \quad w_i = -\eta_i \psi' \sin \varphi - \xi_i \varphi'.$$

Die lebendige Kraft des Punktsystems läßt sich nach (4) leicht durch die Größen  $u, v, w$  ausdrücken:

$$(58) \quad \begin{aligned} 2T &= m_1 \left(1 - \frac{m_1}{M}\right) (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) + m_2 \left(1 - \frac{m_2}{M}\right) (u_2^2 + v_2^2 + w_2^2) \\ &+ m_3 \left(1 - \frac{m_3}{M}\right) (u_3^2 + v_3^2 + w_3^2) \\ &- 2 \frac{m_2 m_3}{M} (u_2 u_3 + v_2 v_3 + w_2 w_3) - 2 \frac{m_2 m_1}{M} (u_3 u_1 + v_3 v_1 + w_3 w_1) \\ &- 2 \frac{m_3 m_1}{M} (u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2). \end{aligned}$$

Setzt man hier aus (57) ein, so wird

$$T = \Theta(\xi_i, \eta_i, \xi_i', \eta_i', \psi', \varphi, \varphi').$$

Die Kräftefunktion  $U$  hängt nur von den Variablen  $\xi_i$  und  $\eta_i$  ab, so daß die Bewegungsgleichungen so geschrieben werden können:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \xi_i'} \right) &= \frac{\partial(\Theta + U)}{\partial \xi_i}; & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \eta_i'} \right) &= \frac{\partial(\Theta + U)}{\partial \eta_i} \quad (i = 1, 2, 3); \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \psi'} \right) &= 0; & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi'} \right) &= \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

\*) Sylvester, On the Motion of a Rigid Body acted on by no external Forces. Philosoph. Transact. of the Royal Society of London, vol. 156, 1866, p. 778.

\*\*) Radau, Sur une propriété des systèmes qui ont un plan invariable. Liouville Journ. de Mathém. s. 2. t. XIV, 1869.

Wendet man die Flächensätze auf die  $xy$ - und  $\xi\xi$ -Ebenen an und bemerkt, daß

$$\cos(x, \eta) = -\sin \psi; \quad \cos(y, \eta) = \cos \psi; \quad \cos(z, \eta) = 0$$

ist, so bekommt man zwei Flächenintegrale der Form

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \psi'} = C; \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi'} = -A \sin \psi + B \cos \psi,$$

wo  $A, B, C$  dieselbe Bedeutung haben, wie in (8).

Die letzte der Bewegungsgleichungen gibt das dritte Integral

$$(59) \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} = -(A \cos \psi + B \sin \psi) \psi'.$$

Nun ist aber nach (57)

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \psi'} = \sum_{i=1}^{i=3} \left( \xi_i \frac{\partial T}{\partial v_i} - \eta_i \frac{\partial T}{\partial u_i} \right) \cos \varphi - \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial T}{\partial w_i} \eta_i \sin \varphi; \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi'} = - \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial T}{\partial w_i} \xi_i;$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} = - \sum_{i=1}^{i=3} \left( \xi_i \frac{\partial T}{\partial v_i} - \eta_i \frac{\partial T}{\partial u_i} \right) \psi' \sin \varphi - \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial T}{\partial w_i} \eta_i \psi' \cos \varphi$$

und nach (58) und (57)

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial w_i} &= m_i w_i - \frac{m_i}{M} \sum_{j=1}^{j=3} m_j w_j = \left( -m_i \eta_i + \frac{m_i}{M} \sum_{j=1}^{j=3} m_j \eta_j \right) \psi' \sin \varphi \\ &+ \left( -m_i \xi_i + \frac{m_i}{M} \sum_{j=1}^{j=3} m_j \xi_j \right) \varphi'; \end{aligned}$$

folglich erhält man aus den Integralen:

$$(60) \quad \sum_{i=1}^{i=3} \left( \xi_i \frac{\partial T}{\partial v_i} - \eta_i \frac{\partial T}{\partial u_i} \right) \cos \varphi - R \psi' \sin^2 \varphi - Q \varphi' \sin \varphi = C;$$

$$Q \psi' \sin \varphi + P \varphi' = A \sin \psi - B \cos \psi;$$

$$\sum_{i=1}^{i=3} \left( \xi_i \frac{\partial T}{\partial v_i} - \eta_i \frac{\partial T}{\partial u_i} \right) \psi' \sin \varphi + R \psi'^2 \sin \varphi \cos \varphi + Q \psi' \varphi' \cos \varphi = (A \cos \psi + B \sin \psi) \psi',$$

wo

$$(61) \quad P = \frac{1}{M} \left( \sum_{i=1}^{i=3} m_i \xi_i \right)^2 - \sum_{i=1}^{i=3} m_i \xi_i^2; \quad Q = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{i=3} m_i \eta_i \sum_{j=1}^{j=3} m_j \xi_j - \sum_{i=1}^{i=3} m_i \xi_i \eta_i;$$

$$R = \frac{1}{M} \left( \sum_{i=1}^{i=3} m_i \eta_i \right)^2 - \sum_{i=1}^{i=3} m_i \eta_i^2$$

gesetzt ist.

Jetzt unterscheiden wir drei Fälle.

Den aufgestellten drei Gleichungen genügt man, erstens wenn man voraussetzt, daß

$$\psi' = 0; \quad \varphi' = 0; \quad A = B = 0; \quad \sum_{i=1}^{i=3} \left( \xi_i \frac{\partial T}{\partial v_i} - \eta_i \frac{\partial T}{\partial u_i} \right) = \text{const.}$$

ist. Die Ebene der Punkte  $M_1, M_2, M_3, M_4$  hat eine im Raume feste Richtung und in dieser Ebene gilt der Satz von der Erhaltung der Flächenräume.

Zweitens möge

$$\psi = 0$$

und  $\varphi'$  von Null verschieden sein. Man hat dann

$$(62) \quad \sum_{i=1}^{i=3} \left( \xi_i \frac{\partial T}{\partial v_i} - \eta_i \frac{\partial T}{\partial u_i} \right) \cos \varphi - Q \varphi' \sin \varphi = C; \quad P \varphi' = -B.$$

Die Ebene der Punkte  $M_1, M_2, M_3, M_4$  rotiert um die  $y$ -Achse mit einer Winkelgeschwindigkeit, die der Größe  $P$  (61) umgekehrt proportional ist.

Eliminiert man aus den Bewegungsgleichungen mit Hilfe des zweiten Integrals (62) die Derivierte  $\varphi'$ , so sind die neuen Bewegungsgleichungen

$$(63) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Theta_i}{\partial \xi_i} \right) = \frac{\partial(\Theta_i + U)}{\partial \xi_i}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Theta_i}{\partial \eta_i} \right) = \frac{\partial(\Theta_i + U)}{\partial \eta_i} \quad (i = 1, 2, 3),$$

wo nach Routh\*)

$$\Theta_1 = \Theta - B \varphi' = \Theta + \frac{B^2}{P}$$

ist. Da nach (59)

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial \varphi} = \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} = 0$$

ist, so ändern diese Gleichungen ihre Form nicht, wenn man aus ihnen mit Hilfe des ersten Integrals (62) den Winkel  $\varphi$  eliminiert. Außerdem kann noch aus den erwähnten Gleichungen mit Hilfe des Integrals der lebendigen Kraft

$$\Theta_1 = U + h - B \varphi'$$

die Zeit eliminiert werden. Das Problem reduziert sich also in diesem Falle auf die Integration von fünf Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Sind, drittens, die  $\varphi'$  und  $\psi'$  beide von Null verschieden, so wählen wir die  $xy$ -Ebene parallel der invariablen Ebene:

$$A = B = 0.$$

\*) Routh, A treatise on the stability of a given state of motion, ch. IV, art. 20. London 1877.

Aus den Formeln (60) finden wir:

$$Q\psi' \sin \varphi + P\varphi' = 0; \quad R\psi' \sin \varphi + Q\varphi' = -C \sin \varphi;$$

$$\sum_{i=1}^{i=3} \left( \xi_i \frac{\partial T}{\partial v_i} - \eta_i \frac{\partial T}{\partial u_i} \right) = C \cos \varphi,$$

so daß

$$(Q^2 - PR)\psi' = CP; \quad (PR - Q^2)\varphi' = CQ \sin \varphi$$

wird.

Auch in diesem Falle lassen sich die Größen  $\psi'$ ,  $\varphi'$ ,  $\varphi$  aus den Bewegungsgleichungen eliminieren. Bezeichnet man

$$\Theta_2 = \Theta - C\psi' = \Theta - \frac{C^2 P}{Q^2 - PR} = \text{Funkt. } (\xi_i, \eta_i, \xi'_i, \eta'_i),$$

so sind die neuen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Theta_2}{\partial \xi'_i} \right) = \frac{\partial (\Theta_2 + U)}{\partial \xi_i}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Theta_2}{\partial \eta'_i} \right) = \frac{\partial (\Theta_2 + U)}{\partial \eta_i} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Indem man aus diesen Formeln mit Hilfe des Integrals der lebendigen Kraft

$$\Theta_2 = U + h - C\psi'$$

die Zeit eliminiert, bekommt man auch hier fünf Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

2. Um eine Anwendung der Formeln des vorhergehenden Paragraphen zu erhalten, wollen wir etwas ausführlicher auf den zweiten Fall eingehen.

Die Formeln (57) geben in diesem Falle

$$u_i = \xi'_i; \quad v_i = \eta'_i; \quad w_i = -\xi_i \varphi',$$

so daß nach (58) und (62)

$$\begin{aligned} 2\Theta_1 = 2\Theta - 2B\varphi' &= m_1 \left( 1 - \frac{m_1}{M} \right) (\xi_1'^2 + \eta_1'^2) + m_2 \left( 1 - \frac{m_2}{M} \right) (\xi_2'^2 + \eta_2'^2) \\ &+ m_3 \left( 1 - \frac{m_3}{M} \right) (\xi_3'^2 + \eta_3'^2) - 2 \frac{m_2 m_3}{M} (\xi_2' \xi_3' + \eta_2' \eta_3') \\ &- 2 \frac{m_3 m_1}{M} (\xi_3' \xi_1' + \eta_3' \eta_1') - 2 \frac{m_1 m_2}{M} (\xi_1' \xi_2' + \eta_1' \eta_2') + \frac{B^2}{P} \end{aligned}$$

wird, wo nach (61)

$$P = \frac{1}{M} (m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2 + m_3 \xi_3)^2 - (m_1 \xi_1^2 + m_2 \xi_2^2 + m_3 \xi_3^2)$$

ist.

Die Kräftefunktion nehmen wir in der Form (10) an.

Nun machen wir die Voraussetzung, daß die Massen zweier der Punkte  $M_1, M_2, M_3, M_4$  einander gleich sind:

$$m_3 = m_1.$$

Man überzeugt sich leicht, daß unter dieser Bedingung die Bewegungsgleichungen (63) das System partikulärer Integrale

$$\xi_1 + \xi_3 = 0; \quad \eta_3 = \eta_1; \quad \xi_2 = 0$$

zulassen.

Die Integrale (62) geben nach (61)

$$C = 0; \quad 2m_1 \xi_1^2 \varphi' = B.$$

Wir sehen also, daß für das gegebene Punktsystem eine solche Bewegung möglich ist, bei welcher die Entfernung zwischen den Punkten  $M_1$  und  $M_3$  mit gleichen Massen von der Geraden, die die beiden anderen Massenpunkte  $M_2$  und  $M_4$  verbindet, senkrecht geschnitten und halbiert wird. Die Ebene, in der die Massenpunkte liegen, rotiert um die Gerade  $M_2 M_4$  mit einer Winkelgeschwindigkeit, die dem Quadrate der Entfernung  $\overline{M_1 M_3}$  umgekehrt proportional ist. Die Rotationsachse hat eine im Raume feste Richtung (senkrecht zur invariablen Ebene).

Sind die Massen der Punkte  $M_2$  und  $M_4$  auch einander gleich:

$$m_2 = m_4 = 1,$$

so lassen die Bewegungsgleichungen (63) das partikuläre Integral

$$\eta_2 = 2\eta_1$$

zu, so daß die Punkte  $M_2$  und  $M_4$  in jedem Momente der Bewegung symmetrisch zur Geraden  $M_1 M_3$  liegen.

Wenn die Kraft, die an die Punkte  $M_i$  und  $M_j$  angreift, dem Kubus der Entfernung  $\overline{M_i M_j}$  umgekehrt proportional ist, so kann unser Problem durch Quadraturen gelöst werden.

Das Integral der lebendigen Kraft und die Jacobische Formel (32) geben dann:

$$m_1 \xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \frac{B^2}{4m_1 \xi_1^2} = -\frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{4m_1}{\xi_1^2 + \eta_1^2} + \frac{1}{4\eta_1^2} + \frac{m_1^2}{4\xi_1^2} \right) + h;$$

$$m_1 \xi_1^2 + \eta_1^2 = ht^2 + 2at + b,$$

wo  $a, b, h$  willkürliche Konstanten sind. Substituieren wir nun

$$\sqrt{m_1} \xi_1 = R \cos \omega; \quad \eta_1 = R \sin \omega,$$

so wird

$$R^2 = ht^2 + 2at + b;$$

$$R^2 R'^2 + R^4 \omega'^2 = hR^2 - \frac{B^2}{4\cos^2 \omega} - \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{4m_1^2}{\cos^2 \omega + m_1 \sin^2 \omega} + \frac{1}{4\sin^2 \omega} + \frac{m_1^3}{4\cos^2 \omega} \right)$$

$$= hR^2 - F(\omega).$$

Nach Elimination von  $R$  erhält man die Quadratur

$$\int \frac{d\omega}{\sqrt{bh - a^2 - F(\omega)}} = \int \frac{dt}{ht^2 + 2at + b} + \text{const.}$$

## Über meine Modifikationen des Ostwaldschen Prinzips und über den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie.

Von

MORITZ RÉTHY in Budapest.

---

I. Das Ostwaldsche Prinzip wird in der Mechanik von zwei Standpunkten aus betrachtet. Bei dem einen handelt es sich darum, welche Konsequenzen aus ihm fließen, wenn man es dem Wortlaute nach auffaßt. Bei dem anderen geht man davon aus, daß das Prinzip bei wortgetreuer Auffassung schon in sehr einfachen Fällen — z. B. beim horizontalen Wurf eines schweren freien materiellen Punktes im leeren Raum — den Tatsachen widerspricht, und stellt Modifikationen fest, durch welche der Widerspruch wegfällt.

Herr Fejér vertritt in einer in diesen Annalen, Bd. 61, p. 422—436, erschienenen schönen Arbeit den ersten, ich in einem Bd. 59, p. 554—572 erschienenen Aufsatz den zweiten Standpunkt.

Im ersten Teil seiner Arbeit beschreibt Herr Fejér die Bewegung eines materiellen Punktes in der Ebene, wenn für sie das Ostwaldsche Prinzip, laut welchem „von allen möglichen Energieumwandlungen diejenige erfolgt, welche in gegebener Zeit den größtmöglichen Umsatz ergibt“, für eine *fest* gegebene Zeit bestehen soll. Er zeigt, daß eine solche Bewegung bei beliebig gegebenen Anfangsgeschwindigkeiten und fester Zeit nicht möglich ist, und daß die *Bewegung*, die bei passend gegebenen Daten in Übereinstimmung mit dem Prinzip erfolgt, *eine brachistochronale*, also nur ausnahmsweise die natürliche ist (pag. 430).

Im zweiten Teil beantwortet Herr Fejér die speziellere Frage nach den Bedingungen, die erforderlich sind und auch genügen, wenn die Ostwaldsche Maximumeigenschaft der Potentialdifferenz in der Bahn eines in der Ebene bewegten materiellen Punktes *zu jeder Zeit* erfüllt sein soll: *Die durch die Anfangslage gehende Kraftlinie muß eine Gerade und die Anfangsgeschwindigkeit gleich Null sein oder in die Gerade fallen. Die*



*Bewegung erfolgt eben dieser Kraftlinie entlang und befriedigt die Gleichungen der Mechanik (p. 433).*

Im ersten Teil meiner oben zitierten Arbeit zeige ich, daß das in Rede stehende Prinzip dadurch, daß man an Stelle der Energieen ihre mittleren Werte in fest gegebener Zeit setzt, in ein dem Hamiltonschen äquivalentes Prinzip übergeht.

Im zweiten Teil hingegen wird eine Modifikation des Ostwaldschen Prinzips gegeben, bei welcher die Energieen selbst, nicht ihre mittleren Werte, eine Rolle spielen, bei welcher aber an Stelle der Maximumeigenschaft nur das Verschwinden der Variation der Potentialdifferenz in einem engeren Variationsgebiet, wie es das Ostwaldsche ist, gefordert wird. Diese Modifikation führt zu einer Verallgemeinerung der Mechanik.

Von diesem zweiten Teile meiner Arbeit, und hauptsächlich auch vom zweiten Teil der von Fejér, soll hier die Rede sein; ich stecke mir nämlich die folgenden Ziele:

1. Der Übergang zur eben genannten Modifikation des Variationsgebietes ist in meiner Arbeit (p. 562, letztes Al.), wie mich mehrere Fachgenossen, in erster Linie Herr Fejér, aufmerksam zu machen die Güte hatten, eben nur analytisch angedeutet. Die ihm zugrunde liegende Voraussetzung soll in § 1 an der Hand einer nach meiner Methode geführten Ableitung der Fejérschen speziellen Sätze klargestellt, und der Übergang genau beschrieben werden.

Im Anschluß daran stelle ich ein diesem modifizierten Ostwaldschen äquivalentes Prinzip auf, das eine Verallgemeinerung des Hamiltonschen ist.

2. Ich will in § 2 zeigen, daß der so verallgemeinerten Mechanik neue Analogien zum zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie entspringen.\*)

---

### § 1.

II. Das Ostwaldsche Maximum-Problem für einen freien Punkt, wenn die Maximumeigenschaft in jedem Punkte der Bahn erfüllt sein soll.

Die Koordinaten eines freien materiellen Punktes von der Masse 1 seien mit  $x, y, z$ , kürzer mit  $q_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) bezeichnet, die lebendige Kraft sei  $T$ , die potentielle Energie  $-U$ , und die Gesamtenergie  $E$ , demnach

---

\*) Dieser Aufsatz unterscheidet sich in § 2 wenig von meiner in *Mathematikai Értésítő* 1906 erschienenen Abhandlung; § 1 hingegen ist anders geordnet, ausführlicher und infolge der Darstellung meiner Bewegungsgleichungen mittels einer Verallgemeinerung des Hamiltonschen Prinzips wesentlich vereinfacht.

$$(1') \quad T \equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 q_i'^2 = \frac{1}{2} (x'^2 + y'^2 + z'^2),$$

$$(1'') \quad E \equiv T - U.$$

Ich stelle mir die Aufgabe, die p. 431 und p. 435 gestellten Fragen der Fejérschen Arbeit nach den in meinem Aufsätze angewandten Methoden für einen in der Ebene oder im Raume frei beweglichen Punkt zu behandeln. Das Ostwaldsche Prinzip lautet bei diesen Fragen wie folgt:

Von allen möglichen Energieumwandlungen wird diejenige eintreten, die in gegebener Zeit vom Beginn der Bewegung an fortwährend den größtmöglichen Umsatz ergibt.

Das Ostwaldsche Problem ist daher wie folgt zu formulieren:

Der materielle Punkt  $M$ , dessen Lage  $M_0$  und Geschwindigkeit  $v_0$  zur Zeit  $t=0$  gegeben ist, bewege sich unter Einhaltung der Gleichung der lebendigen Kraft

$$(2) \quad T - T_0 = U - U_0$$

und beschreibe die Bahn  $P$ ; man vergleiche seine Bewegung mit der eines anderen zu derselben Zeit von derselben Anfangslage und mit derselben Anfangsgeschwindigkeit (wenn  $v_0 = 0$  sein sollte, in derselben Richtung) ausgehenden Punktes  $\bar{M}$ , der ebenfalls an die Einhaltung der Gleichung (2) gebunden ist. Die Werte des Potentials  $U$  seien zur beliebigen gewählten Zeit  $t_1$  im Falle der Bewegung von  $M$

$$U(x_1, y_1, z_1),$$

im Falle der Bewegung von  $\bar{M}$

$$U(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1).$$

Wie muß die Bewegung des Punktes  $M$  beschaffen sein, wenn die Ungleichung

$$U(x_1, y_1, z_1) > U(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$$

bei willkürlich gewählter Zeit  $t_1$  stattfinden soll?

Ich denke mir die Bahn  $P$  des Punktes  $M$  bestimmt, und vergleiche sie, von  $t=0$  angefangen, immer zu einer und derselben Zeit  $t$  mit einer und derselben (im übrigen beliebig herausgegriffenen) zulässigen Bahn  $\bar{P}$  des Punktes  $\bar{M}$ ; dann muß, da  $t_1$  bei einer und derselben Bahn  $P$  von willkürlicher Größe sein soll, die Ungleichung

$$U(x, y, z) > U(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$$

von  $t=0$  an immerfort stattfinden, wenn  $x, y, z$  die Koordinaten von  $M$  und  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  die von  $\bar{M}$  zur Zeit  $t$  sind.

Die Forderungen des Problems ziehen also notwendigerweise die Gültigkeit der Variationsgleichungen

$$(3) \quad \delta t = 0, \quad \delta(T - U) = 0, \quad \delta U = 0$$

nach sich, die während der Bewegung zu jeder Zeit  $t$  einzuhalten sind. Ich schreibe an Stelle der Gleichungen (3) das mit ihnen äquivalente Gleichungssystem

$$(3') \quad \delta t = 0, \quad \delta T = 0, \quad \delta U = 0.$$

a) Im Fall des ebenen Problems genüge ich der Gleichung

$$\delta U \equiv \frac{\partial U}{\partial x} \delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \delta y \equiv X \delta x + Y \delta y = 0$$

mittels des Ansatzes

$$(4) \quad \delta x = \frac{Y}{R} \delta s, \quad \delta y = -\frac{X}{R} \delta s, \quad R^2 = X^2 + Y^2.$$

Daraus ergibt sich

$$x' \delta x + y' \delta y = \frac{x' Y - y' X}{R} \delta s, \quad x'' \delta x + y'' \delta y = \frac{x'' Y - y'' X}{R} \delta s$$

und daher

$$(3') \quad \begin{aligned} \delta T &\equiv \frac{d}{dt} (x' \delta x + y' \delta y) - x'' \delta x - y'' \delta y \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{x' Y - y' X}{R} \delta s \right) - \frac{x'' Y - y'' X}{R} \delta s. \end{aligned}$$

Da  $\delta T = 0$  sein muß für alle Bahnen, die von der gegebenen Anfangslage auf verlangte Weise ausgehen und der gesuchten wirklichen Bahn unendlich nahe gelegen sind, also auch für eine Bahn, bei der  $\delta s$  in einem beliebigen Intervall konstant ist, so muß vor allem

$$\frac{d}{dt} \frac{x' Y - y' X}{R} - \frac{x'' Y - y'' X}{R} = 0,$$

daher für beliebige Bahnen

$$\frac{x' Y - y' X}{R} \frac{d \delta s}{dt} = 0$$

erfüllt sein. Mithin muß zu jeder Zeit  $t > 0$  die Doppelgleichung

$$(5) \quad \frac{x' Y - y' X}{R} = \frac{x'' Y - y'' X}{R} = 0$$

stattfinden.

Wenn also das Problem überhaupt eine Lösung hat, so kann die Bahn nur eine geradlinige sein und die Richtung der Kraft muß kontinuierlich mit der dieser geraden Bahn zusammenfallen. Da den Voraussetzungen gemäß den Kräften ein Potential zukommt, und die Bewegung dem Prinzip (2) der lebendigen Kraft unterworfen ist, so befriedigt

diese der geraden Kraftlinie entlang erfolgende Bewegung die Gesetze der Mechanik.

Daß aber diese Bewegung, falls die Anfangsgeschwindigkeit = 0 ist oder im allgemeineren Fall der Richtung nach mit der geraden Kraftlinie zusammenfällt, dem gestellten Maximumproblem auch entspricht, das folgt daraus, daß sie bei dauernd wachsendem Potential eine Brachistochrone ist.

Ist die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit von der der Kraftlinie verschieden, so hat das Problem keine Lösung.

Die für diese Spezialfälle gefundenen Sätze von Fejér sind hiermit auch auf diesem Wege abgeleitet.

b) Im Falle eines im Raume frei beweglichen materiellen Punktes geschieht der Gleichung  $\delta U = 0$  durch einen jeden der beiden Ansätze

$$(4'') \quad \begin{aligned} \delta x &= \frac{Z'}{R_1} \delta s, & \delta y &= 0, & \delta z &= -\frac{X}{R_1} \delta s, & R_1^2 &= X^2 + Z^2, \\ \delta x &= 0, & \delta y &= \frac{Z}{R_2} \delta s, & \delta z &= -\frac{Y}{R_2} \delta s, & R_2^2 &= Y^2 + Z^2 \end{aligned}$$

Genüge; im Sinne des Gleichungssystems (3') hat daher (bei  $\delta t = 0$ )  $\delta T$  zu verschwinden, sobald man an Stelle von  $\delta x, \delta y, \delta z$  das eine oder das andere System substituiert. Daher gelten die in a) bewiesenen Gesetze auch für einen im Raume frei beweglichen Punkt.

III. Modifikation des Ostwaldschen Problems im Falle eines im Raume frei beweglichen Punktes.

Da das Ostwaldsche Maximumproblem zu Resultaten führt, die mit der Erfahrung nur in ganz speziellen Fällen übereinstimmen, so kann man aus ihm ein den Erfahrungen nicht widersprechendes Problem nur mittels Einschränkung des Variationsgebietes gewinnen. Ich will den Versuch machen, das Problem derart umzuformen, daß ich die Forderung, daß die Variationsgleichungen

$$\delta t = 0, \quad \delta T = 0, \quad \delta U = 0$$

von  $t = 0$  an fortwährend gelten sollen, nur in gewissem sogleich näher zu beschreibendem Sinne aufrecht erhalte.

Substituiert man (bei  $Z \neq 0$ ) die Lösung von  $\delta U = 0$  nach  $\delta z$ , nämlich

$$\delta z = -\frac{X}{Z} \delta x - \frac{Y}{Z} \delta y$$

in  $\delta T = 0$ , so hat man wegen

$$(6') \quad x' \delta x + y' \delta y + z' \delta z = \frac{x' Z - z' X}{Z} \delta x + \frac{y' Z - z' Y}{Z} \delta y \equiv P_1 \delta x + Q_1 \delta y,$$

$$(6'') \quad x'' \delta x + y'' \delta y + z'' \delta z = \frac{x'' Z - z'' X}{Z} \delta x + \frac{y'' Z - z'' Y}{Z} \delta y \equiv P_2 \delta x + Q_2 \delta y$$

die Variationsgleichung

$$(7) \quad \frac{d}{dt} (P_1 \delta x + Q_1 \delta y) - P_2 \delta x - Q_2 \delta y = 0.$$

Fordert man, wie beim Maximumproblem, daß diese Gleichung sowohl bei  $\delta y = 0$  als auch bei  $\delta x = 0$  erfüllt sei, so ist sie bei beliebigen  $\delta x, \delta y$  erfüllt, und man kommt auf die in II. beschriebenen Bahnen und sonstigen einschränkenden Bedingungen.

Fordert man, daß diese Gleichung zwischen  $\delta x$  und  $\delta y$  ohne weiteres bestehe, so zeichnet man damit gar keine Bewegung vor einer anderen aus, sondern definiert nur zu einer jeden beliebigen Bewegung zugehörige Scharen von variierten Bewegungen.

Man hat daher nur einen Weg: dieser ist, zu fordern, daß die Gleichung (7) nur dann erfüllt sei, wenn zwischen  $\delta x$  und  $\delta y$  irgend eine, am einfachsten lineare Gleichung

$$(7') \quad \alpha \delta x + \beta \delta y = 0$$

von  $t = 0$  an fortwährend besteht, wo  $\alpha$  und  $\beta$  durch Lage und Geschwindigkeit bestimmte, einstweilen unbekannte Koeffizienten sind. Die Forderung, daß  $\delta U = 0$  sei, bleibt dabei natürlich aufrecht, steht aber der Forderung des Maximums für  $U$  fern.

Es sei dieser Weg gewählt. Dann folgt hier ebenso wie in IIa, daß zu jeder Zeit die Gleichungen gelten müssen

$$(7'') \quad \frac{P_1 \beta - Q_1 \alpha}{(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}} = 0, \quad \frac{P_2 \beta - Q_2 \alpha}{(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}} = 0,$$

d. i.

$$(8') \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2}.$$

Da  $P_1$  und  $Q_1$  durch Lage und Geschwindigkeit ausgedrückt sind, so ist hiermit das Verhältnis der Koeffizienten  $\alpha$  und  $\beta$  bestimmt, andererseits sagt die Gleichung

$$P_1 : Q_1 = P_2 : Q_2,$$

daß die Bewegung der Differentialgleichung

$$(8'') \quad \begin{vmatrix} x'' & y'' & z'' \\ x' & y' & z' \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0$$

gemäß vor sich geht. Diese Gleichung spricht aus, daß die Kraft zu jeder Zeit in der Oszillationsebene der Bahn wirkt.

Man erhält dasselbe Resultat auf symmetrischem Wege, wenn man bedenkt, daß infolge der Gleichungen (7'), (7'') sowohl  $P_1 \delta x + Q_1 \delta y$

als auch  $P_2 \delta x + Q_2 \delta y$  verschwinden, mithin den Gleichungen (6'), (6'') gemäß

$$(9') \quad x' \delta x + y' \delta y + z' \delta z = 0,$$

$$(9'') \quad x'' \delta x + y'' \delta y + z'' \delta z = 0$$

stattfinden. Nimmt man noch hinzu, daß

$$(9''') \quad \delta U \equiv X \delta x + Y \delta y + Z \delta z = 0$$

gefordert wird, so folgt aus diesen Gleichungen einerseits das Bestehen jener Determinantengleichung, andererseits das Verhältnis der Variationen  $\delta x : \delta y : \delta z$ . Man hat so den Satz, daß durch die aufgestellten Forderungen die Richtung der Verschiebungen  $\delta x, \delta y, \delta z$  in jedem Punkte im allgemeinen eindeutig bestimmt ist, daß sie nämlich mit der Binormale der Bahn zusammenfällt.

IV. Fortsetzung. Aus dem Satze, daß die Bewegung eines freien materiellen Punktes so vor sich geht, daß die Kraft immer in der Oskulationsebene der Bahn liegt, folgt, daß, sobald nur die Verschiebungen  $\delta x, \delta y, \delta z$  in allen Punkten der Bahn in die Binormale fallen, für eine jede der betrachteten variierten Bewegungen die Gleichungen

$$\delta T = 0, \quad \delta U = 0 \quad (\text{bei } \delta t = 0)$$

bestehen. Dieser Satz läßt sich in der folgenden Form umkehren:

Wenn für alle betrachteten variierten Bewegungen die Gleichungen  $\delta T = 0, \delta U = 0$  (bei  $\delta t = 0$ ) bestehen sollen, sobald nur die Verschiebungen  $\delta s$  auf den Erzeugenden einer Regelfläche liegen, deren Leitlinie die wirkliche Bahn des materiellen Punktes ist, so liegt die Kraft in der Oskulationsebene der Bahn, und die Erzeugenden der Regelfläche sind die Binormalen der Bahn.

Man bezeichne nämlich die Winkel zwischen der Verschiebung  $\delta s$  und der Geschwindigkeit  $v$  resp. der Beschleunigung  $p$  mit  $\varphi$  resp.  $\psi$ , so daß man hat

$$(10) \quad \sum_{i=1}^3 q_i' \delta q_i = v \cos \varphi \delta s, \quad \sum_{i=1}^3 q_i'' \delta q_i = p \cos \psi \delta s.$$

Die Gleichung  $\delta T = 0$  schreibt sich dann in der Form

$$(10') \quad \frac{d}{dt} (v \cos \varphi \delta s) - p \cos \psi \delta s = 0;$$

diese soll von  $t = 0$  an fortwährend gelten, wenn nur die variierte Bewegung die wirkliche zur Zeit  $t = 0$  berührt usw., hingegen  $\frac{d \delta s}{dt}$  eine beliebige kontinuierliche Funktion der Zeit ist. Nimmt man daher eine solche variierte Bahn an, in der  $\delta s$  auf einer beliebigen gewählten Strecke konstant ist, so folgt aus der Gleichung (10'), daß hier

$$\frac{d}{dt}(v \cos \varphi) - p \cos \psi = 0$$

ist; daher fällt aus der Gleichung (10') das mit  $\delta s$  multiplizierte Glied ganz allgemein fort, und wir folgern aus ihr, daß

$$v \cos \varphi = 0$$

sein muß. Da mithin infolge der voranstehenden Gleichung auch  $p \cos \psi = 0$  ist, so zieht man aus (10) den Schluß, daß die beiden Gleichungen

$$\sum_{i=1}^3 q_i' \delta q_i = 0, \quad \sum_{i=1}^3 q_i'' \delta q_i = 0$$

immer erfüllt sein müssen.

Da außerdem auch

$$\delta U \equiv \sum_{i=1}^3 Q_i \delta q_i = 0$$

gefordert wird; so ist die Umkehrbarkeit des Satzes bewiesen.

Die Gleichungen (9'), (9''), die die Grundlage meiner Formulierung des Ostwaldschen Problems (l. c. p. 563) bilden, sind hiermit für den Fall eines im Raume frei beweglichen Punktes auf zwei Wegen verifiziert; und ich bemerke hier, daß in meiner (l. c. p. 562) gegebenen weniger genauen Ableitung dieselbe Auffassung bezüglich der Verschiebungen zugrunde liegt wie hier in IV, und daß bei der Folgerung, daß die Gleichungen (14'), (14'') stattfinden müßten, die Gleichungen (13') und (13'') als linear heterogen (in  $\frac{\delta x}{\delta s}$ ,  $\frac{\delta y}{\delta s}$ ,  $\frac{\delta z}{\delta s}$ ) betrachtet wurden.

V. Modifikation des Ostwaldschen Problems im Falle eines freien Punktsystems. Die Ausdehnung des Beweises IIIa) auf ein freies Punktsystem liegt auf der Hand. Ich löse die Gleichung

$$(11') \quad \delta U \equiv \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i \equiv \sum_{i=1}^{3n} Q_i \delta q_i = 0$$

nach  $\delta q_{3n}$  auf und substituiere in  $\delta T = 0$ . Da

$$(11'') \quad \sum_{i=1}^{3n} q_i' \delta q_i = \sum_{i=1}^{3n-1} \frac{q_i' Q_{3n-1} - q_{3n-1}' Q_i}{Q_{3n}} \equiv \sum_{i=1}^{3n-1} \bar{Q}_i \delta q_i,$$

$$(11''') \quad \sum_{i=1}^{2n} q_i'' \delta q_i = \sum_{i=1}^{3n-1} \frac{q_i'' Q_{3n-1} - q_{3n-1}'' Q_i}{Q_{3n}} \equiv \sum_{i=1}^{3n-1} \bar{Q}_i \delta q_i$$

ist, so hat man, wenn  $T$  die lebendige Kraft des materiellen Systems ist, die Gleichung

$$(12) \quad \delta T' = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{3n-1} \bar{Q}_i \delta q_i - \sum_{i=1}^{3n-1} \bar{Q}_i \delta q_i = 0$$

zu erfüllen, vorausgesetzt, daß zwischen den  $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_{3n-1}$  die lineare Gleichung

$$(12') \quad \alpha_1 \delta q_1 + \alpha_2 \delta q_2 + \dots + \alpha_{3n-1} \delta q_{3n-1} = 0$$

besteht, wo die Koeffizienten  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3n-1}$  aus der Forderung zu bestimmen sind, daß die Gleichung  $\delta T = 0$  eben mittels dieser linearen Gleichung (für alle zulässigen variierten Kurven) in demselben Sinne wie in IIIa) zu einer identischen wird.

Mittels Elimination von  $\delta q_{3n-1}$  hat man

$$(13') \quad \sum_{i=1}^{3n-1} \bar{Q}_i \delta q_i = \sum_{i=1}^{3n-2} \frac{\bar{Q}_i \alpha_{3n-1} - \bar{Q}_{3n-1} \alpha_i}{\alpha_{3n-1}} \equiv \sum_{i=1}^{3n-2} \bar{R}_i \delta q_i,$$

$$(13'') \quad \sum_{i=1}^{3n-1} \bar{Q}_i \delta q_i - \sum_{i=1}^{3n-2} \frac{\bar{Q}_i \alpha_{3n-1} - \bar{Q}_{3n-1} \alpha_i}{\alpha_{3n-1}} \equiv \sum_{i=1}^{3n-2} \bar{R}_i \delta q_i,$$

und aus der Forderung, daß

$$\delta T = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{3n-2} \bar{R}_i \delta q_i - \sum_{i=1}^{3n-2} \bar{R}_i \delta q_i \equiv 0$$

sein soll, folgert man, wie früher,

$$\bar{R}_i = \bar{R}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 3n-2).$$

Mittels der Gleichungen (11''), (11'''), (13'), (13'') erhält man nun, daß die Gleichungen

$$(11''') \quad \sum_{i=1}^{3n} q_i' \delta q_i = 0,$$

$$(11^{IV}) \quad \sum_{i=1}^{3n} q_i'' \delta q_i = 0$$

erfüllt sein müssen, wenn gleichzeitig

$$\delta U \equiv \sum_{i=1}^{3n} Q_i \delta q_i = 0$$

ist; und zwar haben diese drei Gleichungen zu bestehen, wenn man, beliebige drei ausgenommen, alle übrigen  $\delta q_i = 0$  setzt. Auf diese Weise ergeben sich  $3n - 2$  voneinander unabhängige Bewegungsgleichungen



$$(14) \quad \begin{vmatrix} q_1'' & q_2'' & q_i'' \\ q_1' & q_2' & q_i' \\ Q_1 & Q_2 & Q_i \end{vmatrix} = 0 \quad (i = 3, 4, \dots, 3n)$$

und die Verhältnisse  $\delta q_1 : \delta q_2 : \delta q^i$  ( $i = 3, 4, \dots, 3n$ ). Zu den Bewegungsgleichungen gesellt sich noch die vorgeschriebene Gleichung

$$T - T_0 = U - U_0.$$

VI. Hamiltonsche Form des modifizierten Ostwaldschen Prinzips. Man kommt zu denselben Gleichungen sowohl in diesem Fall wie auch in den allgemeinsten Fällen, jedoch weit einfacher, wenn man das auf dieser Grundlage beruhende, in meiner Arbeit ausführlich dargestellte modifizierte Ostwaldsche Prinzip nach dem Hamiltonschen Vorbilde formuliert. Für den Fall eines nur holonomen Bedingungsgleichungen unterworfenen materiellen Systems lautet es wie folgt:

Es seien  $q_1, q_2, \dots, q_{n_1}$  die unabhängigen Koordinaten des materiellen Systems, und  $\tau, \nu$  Funktionen (von  $t, T, \dots$ ), die wir einstweilen als irgendwie gegeben betrachten. Man drücke die lebendige Kraft  $T$  in den  $q_i, q_i'$  und das Potential  $U$  in den  $q_i$  aus.

Die Bewegungsgleichungen des materiellen Systems werden durch die Forderung geliefert, daß bei einer beliebigen Überführung aus der Anfangslage in die Endlage die symbolische Gleichung

$$(15) \quad \int_0^1 (\tau \delta T + \nu \delta U) dt = 0 \quad (\delta t = 0)$$

erfüllt sein soll.

Man hat nämlich bei der üblichen Bezeichnung

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i'},$$

die identische Gleichung

$$\tau \delta T \equiv \sum_{i=1}^{n_2} \left[ \left( \tau \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d(\tau p_i)}{dt} \right) \delta q + \frac{d}{dt} (\tau p_i \delta q_i) \right];$$

daher folgt aus der symbolischen Gleichung (15) auf bekanntem Wege, daß die Bewegungsgleichungen des Systems die folgenden sind:

$$\tau \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d(\tau p_i)}{dt} + \nu \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0,$$

d. i.

$$(16) \quad \frac{\partial U}{\partial q_i} = (1 + \lambda) \left( \frac{dp_i}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) + \mu p_i,$$

$$(i = 1, 2, \dots, n_1),$$

wo gesetzt ist

$$(16') \quad 1 + \lambda = \frac{\tau}{v}, \quad \mu = \frac{1}{v} \frac{d\tau}{dt}.$$

Ist  $\tau = v = 1$ , so ist die symbolische Gleichung die Hamiltonsche und die Bewegung die zum Potential  $U$  gehörige natürliche.

Ist  $\tau = -v = \frac{1}{T}$ , so ist die symbolische Gleichung die zum Potential  $U$  gehörige brachistochronale; sie drückt demnach in diesem Falle den wesentlichen Teil der im Ostwaldschen Prinzip (bei fest gegebener Zeit) enthaltenen Forderung aus, — das von ihr nicht ausgedrückte bezieht sich nämlich bloß auf die Konstantenbestimmung.

Sind die Kräfte und Bedingungsgleichungen explizit unabhängig von  $t$ , und

$$\mu = -\frac{\lambda}{2T} \frac{dT}{dt},$$

so ist in der Bewegung das Prinzip (2) der lebendigen Kraft erfüllt. Ist  $\lambda = 0$ , so ist die Bewegung die natürliche; ist  $\lambda = -2$ , so ist die Bewegung die brachistochronale. Ist  $\lambda$  beliebig, so hat man

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{dp_i}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \lambda A_i,$$

wo

$$A_i \equiv \frac{dp_i}{dt} - \frac{p_i}{2T} \frac{dT}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_i}.$$

Ist daher die Anfangsgeschwindigkeit des materiellen Systems  $= 0$ , so verschwindet  $A_i$  beim Beginn der Bewegung, und die Beschleunigungen sind in diesem Zeitpunkt, falls  $\lambda$  endlich bleibt, dieselben wie bei der natürlichen Bewegung.\*) Da nämlich  $T$  eine homogene quadratische Funktion von den  $q_i'$  ist, so verschwinden alle  $\frac{\partial T}{\partial q_i}$ ; man hat ferner zu Beginn der Bewegung von unendlich Kleinen höherer Ordnung abgesehen

$$p_i = p_i' \Delta t, \quad q_i' = q_i'' \Delta t,$$

daher

$$\frac{p_i}{2T} \frac{dT}{dt} = \frac{p_i \sum (x_j' q_j' + p_j' q_j')}{2 \sum p_j' q_j'} = p_i'.$$

VII. Verallgemeinerte Hamiltonsche Form des Prinzips für den Fall von Ungleichungen. Im Hinblick auf die im § 2 folgende Anwendung mögen hier die Bewegungsgleichungen eines materiellen Punktsystems abgeleitet werden, zwischen dessen Koordinaten  $q_1, q_2, \dots, q_m$  durch Gleichungen oder Ungleichungen

$$(17) \quad F_j(q_1, q_2, \dots, q_m, t) \leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, \nu)$$

\*) Vergl. meine Arbeit p. 564, die Fejérsche Arbeit p. 434.

ausgedrückte Beziehungen stattfinden. An Stelle der symbolischen Gleichung (15) hat man dann

$$(15') \quad \int_0^{t_1} (\tau \delta U + \nu \delta U) dt \geq 0 \quad (\nu > 0, \delta t = 0)$$

zu setzen, wo zwischen den  $\delta q_i$  lineare Gleichungen bestehen, vorgeschrieben durch diejenigen Beziehungen  $F_j$ , die eben zur gegebenen Zeit erfüllt sein müssen.

Die Bewegungsgleichungen des materiellen Systems sind daher zur Zeit  $t$

$$(18') \quad \frac{\partial U}{\partial q_i} = (1 + \lambda) \left( \frac{dp_i}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) + \mu p_i + \sum_{j=1}^{\nu} \bar{\lambda}_j \frac{\partial F_j}{\partial q_i},$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n_1),$$

wo  $\lambda$  und  $\mu$  dieselbe Bedeutung haben wie in IV.,  $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_\nu$  hingegen Lagrangesche Multiplikatoren sind.

Das Prinzip der lebendigen Kraft soll nicht vorausgesetzt werden.

## § 2.

### Analogien zum zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie.

VIII. Ich werde in den folgenden Betrachtungen ein materielles Punktsystem von der in VII. beschriebenen Art voraussetzen, jedoch einen Punkt von der Masse  $m_i = m_{i+1} = m_{i+2}$  durch Cartesische Koordinaten  $q_i, q_{i+1}, q_{i+2}$  festlegen, die mit  $x_i$  bezeichnet werden sollen. Die Bewegungsgleichungen des Systems sind dann im Sinne von (18')

$$(18) \quad X_i = (1 + \lambda) m_i x_i'' + \mu m_i x_i' + \sum_{j=1}^{\nu} \bar{\lambda}_j \frac{\partial F_j}{\partial x_i},$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, 3n).$$

Ich will mir die Bewegung fürs erste so vorstellen, daß das materielle Punktsystem sich in einem Mittel bewegt, das an seiner Bewegung auf folgende Weise teilnimmt: ein Teil des Mittels von der veränderlichen Masse  $\lambda m_i$  um den Punkt  $m_i$  herum bewegt sich mit derselben Geschwindigkeit  $v_i$  wie  $m_i$  selbst; der übrige Teil des Mittels ruht und übt auf  $m_i$  eine Reibungskraft im entgegengesetzten Sinne der Geschwindigkeit  $v_i$  aus, deren Größe  $= \mu m_i v_i$  ist, wo  $\mu$  nicht negativ sei. Die beiden Größen  $\lambda$  und  $\mu$  sollen für  $t_0 \leq t \leq t_1$  eindeutig gegebene Funktionen von  $t$  sein, und der Anfangswert von  $\lambda$  sei gleich seinem Wert zur Zeit  $t_1$ .

Bezeichnet man die lebendige Kraft des materiellen Punktsystems mit  $T$ , so ist bei Zugrundelegung dieser Vorstellung die lebendige Kraft des mitbewegten Mittels  $= \lambda T$ , während

$$- \sum_{i=1}^{3n} \mu m_i x_i' x_i' dt = -2\mu T dt$$

die Arbeit der Reibungskräfte im Zeitelement  $dt$  darstellt.

Die Verbindungen zwischen den materiellen Punkten seien zweierlei: von der Zeit explizit unabhängige und solche, die von der Zeit abhängen. Im Falle der Verbindungen erster Art ist

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} x_i' = 0;$$

im Falle der Verbindungen zweiter Art ist

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} x_i' = - \frac{\partial F_j}{\partial t}.$$

Nun setze ich voraus, daß die Verbindungen dieser Art davon herühren, daß das Punktsystem mit äußeren, nach gegebenem Gesetz sich bewegenden Massen zusammenhängt oder durch solche in der Bewegung beschränkt wird, so daß

$$\frac{\partial F_j}{\partial t} = \frac{\partial F_j}{\partial a_j} a_j' + \frac{\partial F_j}{\partial b_j} b_j' + \frac{\partial F_j}{\partial c_j} c_j'$$

ist, wo die  $a_j$ ,  $b_j$ ,  $c_j$  die Koordinaten eines Punktes  $A_j$  bezeichnen, durch dessen Bewegung die jener äußern Masse  $M_j$  bestimmt wird, die die Verbindung  $F_j$  beeinflußt. Dann stellen aber die Ausdrücke

$$- \bar{\lambda}_j \frac{\partial F_j}{\partial a_j}, \quad - \bar{\lambda}_j \frac{\partial F_j}{\partial b_j}, \quad - \bar{\lambda}_j \frac{\partial F_j}{\partial c_j}$$

die auf die äußere Masse  $M_j$  infolge der Verbindung  $F_j$  ausgeübte Kraft dar, und daher ist

$$- \bar{\lambda}_j \left( \frac{\partial F_j}{\partial a_j} a_j' + \frac{\partial F_j}{\partial b_j} b_j' + \frac{\partial F_j}{\partial c_j} c_j' \right) dt = - \bar{\lambda}_j \frac{\partial F_j}{\partial t} dt$$

die infolge von  $F_j$  während der Zeit  $dt$  auf die Bewegung der äußern Masse durch unser materielles System geleistete Arbeit. Daher ist

$$- \sum_{j=1}^v \bar{\lambda}_j \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} x_i' dt$$

die während des Zeitelementes  $dt$  unserem Punktsystem von außen zu-

geführte Arbeit. Es gibt selbstverständlich viel allgemeinere Arten von Verbindungen, bei denen dasselbe zutrifft.

Setzen wir noch voraus, daß den Kräften  $X_i$  ein von der Zeit explizite unabhängiges Potential  $U$  zukommt, so ist die Summe

$$(19) \quad d[(1+\lambda)T - U] + \sum_{j=1}^{\nu} \bar{\lambda}_j \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} x_i' dt \equiv dQ$$

d. i. der Zuwachs an totaler Energie (des durch das Mittel ergänzten materiellen Systems) minus der von außen dem System zugeführten Arbeit, wie aus dem Gleichungssystem (18) folgt,

$$(19') \quad = Td\lambda - 2\mu Tdt.$$

Die Bewegung des durch das Mittel ergänzten materiellen Punktsystems befolgt demnach ein dem zweiten Hauptsatz der Wärmetheorie formal analoges Gesetz, und es ist von Interesse, daß im Falle eines reibungslosen Systems

$$dQ = Td\lambda,$$

also für einen Kreisprozeß im Verlauf der Zeit  $t_0 \leq t \leq t_1$ , da  $\lambda$  zu Ende desselben zu seinem Anfangswert zurückkehrt,

$$\int \frac{dQ}{T} = 0$$

sich ergibt, hingegen im Falle des Vorhandenseins einer Reibung an Stelle dieser Gleichung die Beziehung

$$\int \frac{dQ}{T} = -2 \int \mu dt < 0$$

gültig ist. Selbstverständlich gilt für einen vollen Kreisprozeß ebenso auch der Ausspruch

$$\int \frac{dQ}{Tf(\lambda)} \geq 0,$$

wenn nur  $f(\lambda)$  eine reelle positive Funktion von  $\lambda$  bezeichnet.

IX. Eine zweite Interpretation der Gleichungen (18) ist die folgende: Es sei speziell

$$\dot{\mu} = \frac{d\lambda}{dt},$$

so daß die Gleichungen (18) zu schreiben sind

$$(18') \quad X_i = \frac{d}{dt}((1+\lambda)m_i x_i') + \sum_{j=1}^{\nu} \bar{\lambda}_j \frac{\partial F_j}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, 3n).$$

Aus diesen folgt im Falle von Kräften, denen ein von der Zeit explizite unabhängiges Potential zukommt, die Gleichung:

$$(19) \quad d((1 + \lambda)T - U) + \sum_{j=1}^v \bar{\lambda}_j \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} x_i' dt = - T d\lambda.$$

Bei derselben Vorstellung von der Bewegung des Mittels, die wir in Nr. VIII. beschrieben, mit dem Unterschiede, daß jetzt Reibung ausgeschlossen ist, wird durch diese Gleichung ausgesprochen, daß die dem ergänzten Punktsystem zugeführte Energie

$$(19'') \quad dQ = - T d\lambda$$

ist.

In den beiden Spezialfällen führt demnach die Vorstellung von dem Mitbewegtsein der umgebenden Materie zu ganz verschiedenen Resultaten; denn im ersten Fall war eine zugeführte positive Energie mit einer Zunahme, in diesem zweiten Fall hingegen mit einer Abnahme der mitbewegten Materie verbunden. Der Unterschied zwischen beiden wird durch das folgende mechanische Modell im weitern Sinn klargemacht: Man verbinde einmal zwei mit gleicher Geschwindigkeit  $v$  bewegte, keiner äußern Wirkung unterworfenen Massen  $M$  und  $Md\lambda$  starr miteinander, ein andres Mal die mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegte Masse  $M$  mit der ruhenden Masse von der Größe  $Md\lambda$ ; im ersten Fall ist die lebendige Kraft von  $M + Md\lambda$  um  $\frac{Mv^2}{2} d\lambda$  größer, im zweiten Fall (von unendlich Kleinen höherer Ordnung abgesehen) um  $\frac{Mv^2}{2} d\lambda$  kleiner als die von  $M$ . Die Zunahme an Masse ist also im ersten Fall mit einer Zunahme, im zweiten Fall mit einer Abnahme der lebendigen Kraft verbunden. Wird umgekehrt die Masse  $Md\lambda$  von der festen Verbindung mit  $M$  befreit und auf die Weise weggeführt, daß dabei kein Stoß erfolgt, so wird die lebendige Kraft von  $M$  um  $\frac{Mv^2}{2} d\lambda$  kleiner sein, als die der vereinten Massen war. Es ist jedoch unmöglich, die Masse  $Md\lambda$  auf eine Weise zu entfernen, daß dabei die lebendige Kraft der zurückgebliebenen Masse  $M$  sich vergrößere. Bei Voraussetzung negativer Massen  $Md\lambda$ , bei deren fester Verknüpfung mit  $M$  der Satz von der Erhaltung der Bewegungsgröße gültig bleiben soll, wird die Schwierigkeit gehoben. Im Fall von negativen Massen ist das Modell ein mechanisches im weitern Sinn. Denkt man sich demgemäß allgemeiner die Massen  $m_i d\lambda$  mit den Anfangsgeschwindigkeiten  $v_i$  resp. 0 den Systempunkten  $m_i$  kontinuierlich (von  $t_0$  bis zur Zeit  $t_1$ ) zugeführt und mit denselben starr verknüpft, und sind die  $m_i$  dabei den freien Kräften  $X_i$ , den Widerstandskräften  $\mu m_i x_i'$  und

den Verbindungen  $F$  kontinuierlich unterworfen, so bestehen für die Bewegung die Gleichungssysteme (18) resp. (18'), also auch die Analogien (19'), (19'').

X. Ich vereinige die in VIII. und IX. beschriebenen Spezialfälle, indem ich setze

$$(18'') \quad X_i = \lambda_1 m_i x_i' + \frac{d}{dt} ((1 + \lambda_2) m_i x_i') + r m_i x_i' + \sum_{j=1}^{\nu} \bar{\lambda}_j \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

$$(i = 1, 2, \dots, 3n);$$

dabei bestehen zwischen den früheren  $\lambda, \mu$  und diesen  $\lambda_1, \lambda_2, r$ , (wo  $r \geq 0$  vorausgesetzt sei) die Gleichungen

$$(18''') \quad \begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= \lambda, \\ r + \frac{d\lambda_2}{dt} &= \mu. \end{aligned}$$

Bei der soeben beschriebenen Vorstellung von der mitbewegten Materie des Mittels und bei denselben Annahmen bezüglich der Kräfte und der Verbindungen wie früher, folgt jetzt, daß die dem ergänzten materiellen System im Zeitelement zugeführte Energie

$$(19^{IV}) \quad dQ = Td(\lambda_1 - \lambda_2) - 2rTdt$$

ist, wo  $dQ$  auch hier die linke Seite der Gleichung (19'') zum Ausdruck hat. Ist keine Reibung vorhanden, so hat man

$$(19^V) \quad dQ = Td(\lambda_1 - \lambda_2).$$

Werden die Massen  $m_i d\lambda$  in den Zeitelementen  $dt$  dem System kontinuierlich zugeführt, so eignet sich das, am Ende von Nr. X., beschriebene Modell selbstredend auch zur Darstellung der durch (18'') bestimmten Bewegung.

XI. Man kann an Stelle der in VIII. und IX. gegebenen Interpretationen auch die folgende setzen: Ich stelle mir die Größen  $-\lambda_1 m_i x_i''$  und  $-\lambda_2 m_i x_i''$  als von dem Mittel herrührende Kräfte vor; die diesen Kräften zukommende potentielle Energie ist bei konstanten Werten von  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  gewiß

$$(\lambda_1 + \lambda_2)T;$$

derselbe Ausdruck soll für den allgemeineren Fall veränderlicher  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  zur Definition der potentiellen Energie der Kräfte dienen. Für die im Zeitelement dem materiellen System zugeführte Energie  $dQ$  ergibt sich dann derselbe Ausdruck wie früher.

Die Vorstellung der mitbewegten Materie des Mittels ist gewiß anschaulicher; dafür ist die Vorstellung von Kräften, die das Mittel auf das in ihm bewegte materielle System ausübt, allgemeinerer Natur.

XII. Bei einem Versuche, das beschriebene mechanische Modell auf die Wärmebewegungen anzuwenden, ist vor allem die Frage zu beantworten,

welche Beziehungen zwischen der absoluten Temperatur  $\vartheta$  und der Entropie  $S$  einerseits, und den Größen  $\lambda_1, \lambda_2$  und  $T$  andererseits dann bestehen müssen? Eine Gleichung zwischen diesen Größen wird am einfachsten durch die Betrachtung idealer Gase erhalten. Die innere Energie eines idealen Gases von der Masse  $m$  ist nämlich

$$= m C_v \vartheta,$$

wo  $C_v$  die spezifische Wärme des Gases bei konstantem Volumen in dynamischem Maß bezeichnet und als vollständig konstant zu betrachten ist, da doch hier nur von einem idealen Zustande die Rede ist. Da die Anziehungskräfte zwischen den Molekülen eines idealen Gases zu vernachlässigen sind, so ist die innere Energie der Bewegung bei Zugrundelegung unserer Darstellung

$$= (1 + \lambda_1 + \lambda_2) T;$$

daraus ergibt sich die Beziehung

$$(20') \quad m C_v \vartheta = (1 + \lambda_1 + \lambda_2) T.$$

Diese Gleichung soll im Falle eines beliebigen Körpers die absolute Temperatur *definieren*, wenn  $C_v$  eine dem Körper eigentümliche Konstante ist.

Es ist andererseits bei reversiblen Kreisprozessen ganz allgemein

$$dQ = m \vartheta dS;$$

da die Reibung bei umkehrbaren Vorgängen  $= 0$  zu setzen ist, so haben wir bei Zugrundelegung unserer Darstellung im Sinne der Gleichung (19<sup>v</sup>)

$$dQ = T d(\lambda_1 - \lambda_2)$$

zu setzen. Wir haben also die weitere Beziehung

$$(20'') \quad m \vartheta dS = T d(\lambda_1 - \lambda_2).$$

Aus den Gleichungen (20') und (20'') folgt daher

$$(20''') \quad (1 + \lambda_1 + \lambda_2) dS = C_v d(\lambda_1 - \lambda_2).$$

Außer dieser ergibt sich keine weitere Beziehung zwischen  $\lambda_1, \lambda_2$  und  $S$ ; ich kann daher zwischen diesen Größen eine weitere Beziehung beliebig annehmen, wodurch ich eine unendliche Mannigfaltigkeit der möglichen Darstellungen erreiche.

Diese weitere Beziehung sei

$$(21') \quad \lambda_1 - \lambda_2 = f(S),$$

wo  $f(S)$  eine eindeutige, endliche, differentiiertbare Funktion von  $S$  bedeutet; dann folgt aus (20''')

$$(21'') \quad 1 + \lambda_1 + \lambda_2 = C_v f'(S),$$

wo  $f'(S)$  die Derivierte von  $f(S)$  nach  $S$  bedeutet und im Sinne von (20')



$= \frac{m\vartheta}{T}$ , also gewiß nicht negativ ist. Wählt man  $f(S)$  diesen Bestimmungen gemäß, so ist dadurch die Darstellung festgelegt, und einer jeden kontinuierlichen in sich zurückkehrenden Wertreihe des realen Parameters  $S$  entspricht ein geschlossener Kreisprozeß.

Die einfachsten Annahmen für  $f(S)$  ergeben sich wie folgt:

*Annahme  $\alpha$* :

$$\lambda_2 = 0;$$

dann hat man (wenn  $C$  eine positive Konstante bezeichnet)

$$f(S) = Ce^{\frac{S}{C_v}} - 1 = \lambda_1.$$

*Annahme  $\beta$* :

$$\lambda_1 = 0;$$

dann hat man

$$f(S) = -Ce^{-\frac{S}{C_v}} + 1 = -\lambda_2.$$

*Annahme  $\gamma$* :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0;$$

dann hat man (wenn  $S_0$  eine Konstante bezeichnet)

$$f(S) = \frac{S - S_0}{C_v} = 2\lambda_1 = -2\lambda_2.$$

Bei dieser Annahme hat man ferner im Sinne der Beziehung (20')

$$T = mC_v\vartheta.$$

Diese Gleichung spricht im wesentlichen das bekannte Clausiussche Gesetz aus.\*)

*Annahme  $\delta$* :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = A \cos \frac{S - S_0}{c} \quad (|A| < 1),$$

wo  $A$  und  $c$  Konstanten bedeuten. Die frühere Annahme ergibt sich hieraus für  $\lim A = 0$ .

*Annahme  $\varepsilon$* :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = A_1 e^{\frac{S}{c}} + A_2 e^{-\frac{S}{c}},$$

wo  $A_1$ ,  $A_2$  und  $c$  Konstanten bedeuten. Ich erwähne diese Annahme als allgemeineres Beispiel für eine reelle Darstellung unseres Modells, da man bei gehöriger Wahl der genannten Konstanten erreichen kann, daß sowohl  $\lambda_1 + \lambda_2$  als auch  $\lambda_2$  für beliebige Werte des reellen Parameters  $S$  nicht negativ sind.

\*) Pogg. Ann. 100, S. 370. 1857.

Für die zugehörigen Werte von  $\tau$  und  $v$  im verallgemeinerten Hamiltonschen Integral (in VII., (15')) findet man mittels (16'), (18''), (21'), (21'') leicht

$$\tau = e^{-\frac{s}{2C_v}} (Cf'(S))^{\frac{1}{2}},$$

$$v = e^{-\frac{s}{2C_v}} (Cf'(S))^{-\frac{1}{2}},$$

also im einfachsten Fall  $\gamma$ )

$$\tau = v = e^{-\frac{s}{2C_v}};$$

Zur Festlegung der Bewegungsgleichungen muß nur noch  $S$  als Funktion von  $T, U, \dots$  gegeben sein.


Ich erlaube mir zum Schluß das dieser Annahme  $\gamma$ ) entsprechende Modell näher zu beschreiben: die Ähnlichkeit mit dem altbekannten, zur Versinnlichung der elektrodynamischen Erscheinungen dienenden Modell verleiht ihm, wie ich glaube, besonderes Interesse.

Ich gehe von der Annahme aus, daß die Körper ein Aggregat von in lebhafter Bewegung begriffenen Molekülen sind; ein jedes Molekül bestehe aus einem ponderablen, von Atomen gebildeten Kern und einer imponderablen Hülle, deren Stoff auch den Kern durchdringt und in getrennte Massen von gleicher Größe und von entgegengesetztem Vorzeichen zerlegt ist; die Summe aus den absoluten Werten dieser getrennten Massen verhalte sich zur Masse des Kerns wie die Entropie zu der mit  $C_v$  bezeichneten eigentümlichen Konstanten des Körpers. Der intermolekulare Raum sei durch zweierlei Imponderabilien, deren Teile wir „Elektronen“ nennen wollen, erfüllt: die Elektronen von der Art I seien in Bewegung begriffen mit Geschwindigkeiten, die in die der benachbarten Moleküle stetig übergehen, — die von der Art II ruhen; und beiderlei Arten befinden sich in polarisiertem Zustand, indem ein jedes Elektron in zwei gleiche „Ionen“ von entgegengesetztem Vorzeichen zerfällt. In ein jedes Molekül des Körpers dringen im Fall einer Wärmeaufnahme Ionen von beiderlei Arten in gleichen Massen ein, und zwar + Ionen von der Art I in die positiven, und — Ionen von der Art II in die negativen Teile der Hülle, wo alle die Geschwindigkeiten des Moleküls annehmen. Im Falle einer Wärmeabgabe hingegen treten — Ionen der Art I in die positiven, und + Ionen der Art II in die negativen Teile der Hülle.

Ist die Temperatur eines Körpers  $A$  kleiner als die eines angrenzenden Körpers  $B$  und der Unterschied unendlich klein, so strömen + Ionen von der Art I in die positiven, — Ionen von der Art II in die negativen

Teile der Hüllen der  $A$  Moleküle, und zu gleicher Zeit strömen — Ionen von der Art I in die positiven und + Ionen von der Art II in die negativen Massenteile der  $B$  Molekülhüllen in gleicher Menge ein, wo alle Ionen die Geschwindigkeiten der betreffenden Moleküle annehmen. Infolge der Gleichheit der entgegengesetzten Ströme und der unendlich kleinen Temperaturdifferenz von  $A$  und  $B$  ist die Wärmeabgabe von  $B$  gleich der Wärmeaufnahme von  $A$ .

Budapest, Februar 1906.



# Elektrizitäts-Durchgang in Gasen.

Von **J. J. Thomson,**

D. Sc. Litt. Ph. D. Er. S. Fellow etc.

Deutsche autorisierte Ausgabe unter Mitwirkung des Autors besorgt und ergänzt

von **Dr. Erich Marx,**

Privatdozent an der Universität Leipzig

Mit 187 Figuren im Text. [VII u. 587 S.] gr. 8. 1906. geh. n. M. 18.—,

in Leinwand geb. n. M. 19.—

Mit der Entdeckung und dem Studium der Kathodenstrahlen, der Röntgenstrahlen, der photoelektrischen Erscheinungen und der Radioaktivität hat eine neue Epoche in der Physik begonnen. Das neu erforschte Gebiet, das je länger je mehr in die Interessensphären der gesamten Naturwissenschaft eingreift, hat durch J. J. Thomsons, des bahnbrechenden Erforschers, Hand seine Darstellung gefunden. Die 19 Kapitel des Werkes bilden in sich abgerundete Monographien der Spezialgebiete der Gasentladung, der Radioaktivität und der Röntgenstrahlung. In der deutschen Ausgabe ist den Fortschritten, die die Wissenschaft seit Erscheinen des englischen Werkes zu verzeichnen hat, Rechnung getragen. Die schnelle Aufklärung des Gebietes ist ein glänzender Beweis der Fruchtbarkeit gaskinetischer Vorstellungen: die stets auf den Mechanismus des physikalischen Vorgangs gerichtete Fragestellung zeitigte im Cavendish Laboratorium die ersten Messungen der Wanderungsgeschwindigkeiten der Ionen im Gase, führte J. J. Thomson zuerst zu der fruchtbaren, die Erscheinungen der Funkenentladung voll beherrschenden Idee, der Ionisation durch Ionenstoß, hat in der Kathodenstrahlung die Elektronen erkennen gelehrt und hat neuerdings zu einer die Erscheinungen der Radioaktivität umfassenden, für die Vorstellung vom Aufbau der Materie tiefbedeutenden Hypothese geführt. Die vom Bilde ausgehende, vor Einsetzen der mathematischen Analyse die dem Vorgange zugrunde liegende Mechanik der Erscheinungen klar explizierende Darstellung wird es auch dem der analytischen Methode ferner Stehenden ermöglichen, einen Einblick in das neue Gebiet zu gewinnen. Um hier dem Leser das Studium zu erleichtern, ist die deutsche Ausgabe mit Marginalien versehen, die den Inhalt der einzelnen Abschnitte sofort beim Durchblättern erkenntlich machen.

**Grünbaum's**

## Lehrbuch der Differential-Rechnung

für technische Lehranstalten, sowie zum Selbststudium

findet die beste Aufnahme in wissenschaftlichen Kreisen.

Soeben ist 2. Auflage wesentlich verbessert herausgegeben worden.

**Preis geheftet Mk. 2. — . gebunden Mk. 2.25.**

Zu beziehen durch alle Buchhandlungen oder direkt von **J. Frank's Verlagsbuchhandlung,**  
Ludwig Lazarus in **Würzburg.**

Verlag von B. G. TEUBNER in LEIPZIG.

# Serret-Scheffers Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung.

Nach Axel Harnacks Übersetzung. In 3 Bänden. 3. Auflage,  
neu bearbeitet von

**Dr. Georg Scheffers,**

Professor an der Technischen Hochschule zu Darmstadt

I. Band. **Differentialrechnung.** Mit 70 Figuren im Text. [XVI u. 624 S.] gr. 8.  
1906. geh. n. *M.* 12.—, in Leinwand geb. n. *M.* 13.—

Diese neue Auflage ist durchaus neu bearbeitet. Vor allem war es nötig, die an manchen Stellen bisher wenig scharfen Beweisführungen exakter zu gestalten. Deshalb wurde auch am Anfang eine knappe Darstellung der Entwicklung des Zahlbegriffes gegeben. Von den sonstigen inneren Änderungen im Gefüge des Werkes seien hier nur folgende erwähnt: Die Betrachtungen, die sich auf implizite gegebene Funktionen beziehen, wurden für sich in einem gesonderten Kapitel zusammengefaßt, da sie ja auf viel weiter gehenden Voraussetzungen beruhen als die über entwickelte Funktionen. Der Begriff der Unabhängigkeit von Funktionen und Gleichungen und die Funktionaldeterminante wurden dabei ausführlich erörtert. Die Theorie der Maxima und Minima erfuhr eine schärfere Beleuchtung. Bei den Anwendungen der Differentialrechnung auf Kurven und Flächen ließ die bisherige Bearbeitung fast durchaus die unumgänglich nötige exakte Bestimmung der Vorzeichen der auftretenden Quadratwurzeln vermessen. Hierin wurde gründlich Wandel geschafft.

Kaum etwas bezeugt die hohen Vorzüge des Serretschen Werkes so deutlich wie der Umstand, daß man bisher anstandslos die vielen sprachlichen Unbeholfenheiten des Buches hingenommen hat; das ganze Buch mußte in stilistischer Beziehung gründlich durchkorrigiert werden. Ferner wurden die Lehrsätze besonders formuliert. Das Figurenmateriale wurde vollständig neu hergestellt.

Verlag von B. G. TEUBNER in LEIPZIG.

# Lehrbuch der analytischen Geometrie.

Von

**Dr. L. Heffter,**

und

**Dr. C. Koehler,**

Professor an der Universität Kiel

Professor an der Universität Heidelberg.

I. Band. **Geometrie in den Grundgebilden erster Stufe und in der Ebene.** Mit 136 Figuren  
im Text. [XVI u. 526 S.] gr. 8. 1905. In Leinwand geb. n. *M.* 14.—

Obwohl dieses Lehrbuch völlig elementar einsetzt und über quadratische Gleichungen nicht hinausgeht, hofft es den Leser dennoch in kurzer Zeit auf einen höheren wissenschaftlichen Standpunkt zu heben. Hierzu erwies es sich als zweckmäßig, mit der projektiven Geometrie zu beginnen, diese durch Auszeichnung der uneigentlichen Ebene zunächst nur zur „affinen“ Geometrie und diese erst durch Auszeichnung des imaginären Kugelkreises innerhalb der uneigentlichen Ebene zur „äquiformen“ Geometrie, d. h. zu dem Gesamtbereich der geometrischen Eigenschaften zu erweitern. — Auch die äußere Einteilung: Geometrie in den Gebilden I. Stufe (Punktreihe, Strahlbüschel, Ebenenbüschel), II. Stufe (Ebene, Bündel), III. Stufe (Raum) rechtfertigt sich pädagogisch, indem sie jede Frage schon in dem Gebilde möglichst niedriger Stufe zu erledigen gestattet und so zu einer naturgemäßen Entlastung der Geometrie in den Gebilden höherer Stufe beiträgt. — Geeignete Aufgaben wollen zur Anwendung und Ergänzung der Theorie anregen. — Ein besonderer Anhang am Schluß des vorliegenden Bandes gibt das Notwendigste aus der Determinantentheorie. — Band I ist der Geometrie in den Gebilden I. Stufe und in der (eigentlichen) Ebene gewidmet; Band II wird die Geometrie im Bündel und im Raum behandeln.

Verlag von B. G. TEUBNER in LEIPZIG.

# Lehrbuch der Elastizität.

Von **A. E. H. Love,**

M. A., D. Sc., F. R. S., Professor an der Universität Oxford,

Autorisierte deutsche Ausgabe. Unter Mitwirkung des Verfassers besorgt von

**Dr. Aloys Timpe,**

Assistent an der Technischen Hochschule zu Danzig

Mit 75 Abbildungen im Text. [XVI u. 664 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. n. M. 16.—

Der Love'sche „Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity“ hat sich der präzisen und klaren Darstellungsweise und des erschöpfenden Inhalts wegen auch in deutschen Mathematiker-, Physiker- und Ingenieurkreisen wohl eingebürgert. Eine deutsche Übersetzung der eben jetzt erscheinenden zweiten Auflage des englischen Werkes dürfte daher von vornherein auf die Sympathien vieler rechnen, um so mehr als wir, von den inzwischen veralteten klassischen Darstellungen der Elastizitätstheorie abgesehen, bisher kein umfassendes Lehrbuch der Elastizität in Deutschland besitzen. Der Charakter des Buches ist derselbe geblieben, wie ihn der Verfasser in dem Vorwort zur 1. Auflage gekennzeichnet hat: ein vollständiger Abriß des gegenwärtigen Standes der Elastizitätstheorie, der in gleicher Weise auf die Behandlung der auftretenden mathematischen Probleme wie auf die unmittelbar für die praktischen Anwendungen fruchtbaren Untersuchungen eingeht. Dabei sind weitschweifige analytische Entwicklungen und Ausführungen von ausschließlich abstrakt-mathematischem Interesse, in denen sich die Elastiker der italienischen Schule zuweilen verlieren, ebenso sehr vermieden wie technische Einzelheiten. Was die Anlage des Buches anbetrifft, so sind durch den im letzten Dezennium gewaltig angeschwollenen Stoff einschneidende Änderungen gegenüber der ersten Auflage nötig geworden. Überall sind, soweit irgend möglich, noch die neuesten einschlägigen Arbeiten mit berücksichtigt, wie auch aus der Fülle von Literaturnachweisen hervorgeht. — Die deutsche Ausgabe erstrebt in der Ausdrucksweise und speziell in der Terminologie eine möglichst getreue Wiedergabe der Eigenart des Originals.

## Wahrscheinlichkeitsrechnung

u. ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik u. Lebensversicherung.

Von **Dr. Emanuel Czuber,**

Professor an der Technischen Hochschule zu Wien.

[XV u. 594 S.] gr. 8. 1903. In Leinwand geb. n. M. 24.—

(Auch in 2 Hälften geh. je n. M. 12.—)

Der Verfasser bietet in dem vorliegenden Buche eine Darstellung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer hauptsächlichsten Anwendungsgebiete: Fehlerausgleichung, mathematische Statistik und Lebensversicherungsrechnung.

In dem grundlegenden ersten Teile wird auf die fundamentalen Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung eingegangen; eine große Auswahl von Problemen, darunter selbstverständlich die klassischen, ist dazu bestimmt, in den Geist der Wahrscheinlichkeitssätze und ihren richtigen Gebrauch einzuführen.

Der zweite Teil begründet die Fehlertheorie und die aus ihr entspringende Methode der kleinsten Quadrate; Beispiele aus verschiedenen Wissenszweigen geben eine zureichende Vorstellung von der Verwendung dieses wichtigen Instruments zur Bearbeitung von Beobachtungsergebnissen.

Im dritten Teile werden die modernen Hilfsmittel der wissenschaftlichen Beurteilung und Ausnützung von Erfahrungstatsachen auf statistischem Gebiete erörtert; die Probleme der Sterblichkeits- und Invaliditätsmessung stehen im Vordergrund der Betrachtung.

Der vierte Teil erklärt das Wesen und behandelt alle belangreichen Probleme der Lebensversicherungsrechnung; um auch einen Einblick in die Auswertung der hier maßgebenden Formeln und die auftretenden Zahlwerte zu gewähren, sind Tabellen und Rechnungsbeispiele in größerer Zahl eingefügt.

# Mathematische Annalen.

Herausgegeben von F. Klein, W. v. Dyck, D. Hilbert, O. Blumenthal.

## Neudruck der vergriffenen Bände.

Durch anastatischen Neudruck der seither vergriffenen Bände 3, 4, 5, 6, 7, 31, 32, 33, 50, 51, 52, 53, bin ich wieder in der Lage komplette Serien liefern zu können. Der Einzelpreis für diese Bände beträgt je 28 Mark.

Leipzig.

B. G. Teubner.

### INHALT.

	Seite
Bemerkung zu dem Kontinuitätsbeweise für die Lösbarkeit des Riemannschen Problems. Von Ludwig Schlesinger in Klausenburg . . . . .	273
Über asymptotische Darstellungen der Lösungen linearer Differentialsysteme als Funktionen eines Parameters. Von Ludwig Schlesinger in Klausenburg . . . . .	277
Über lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit drei im Endlichen gelegenen wesentlich singulären Stellen. Von Richard Fuchs in Halensee bei Berlin . . . . .	301
Über die Abhängigkeit der Konvergenz einer Potenzreihe von der Konvergenz ihrer reellen oder imaginären Komponente. Von Eugen Kálmán in Göttingen. (Mit 1 Figur im Text) . . . . .	322
Sur les fonctions dérivées. Par D. Pompeiu à Jassy . . . . .	326
Bericht über den Stand der Herausgabe von Gauß' Werken. VII. Von Felix Klein in Göttingen . . . . .	333
Die Fokaltheorie der linearen Strahlenkongruenzen. Von Stanislaus Jolles in Berlin . . . . .	337
Über das Problem der Bewegung von vier Massenpunkten unter dem Einflusse von inneren Kräften. Von P. Woronetz in Kiew . . . . .	387
Über meine Modifikationen des Ostwaldschen Prinzips und über den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie. Von Moritz Réthy in Budapest . . . . .	413

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exakten Ausführung stets auf besonderen Blättern, wenn möglich in der gewünschten Größe und in möglichst präziser Zeichnung dem Manuskripte belegen zu wollen. Außerdem wird um möglichst genaue Angabe der Adresse gebeten.

Die Redaktion.

Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heften und umfaßt ca. 36 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.

Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 20 Mark; jährlich erscheinen etwa 4—6 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Verantwortl. Redaktion: F. Klein, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 3, W. v. Dyck, München, Hildegardstr. 1 $\frac{1}{2}$ , David Hilbert, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 29, Otto Blumenthal, Aachen, Rütischerstraße 37.

Zusendungen sind zu richten an die Mitglieder der auf der Titelseite genannten Gesamtedaktion.

Hierzu Beilagen von B. G. Teubner in Leipzig, welche wir der Beachtung unserer Leser bestens empfehlen.