Über die Abhängigkeit der Konvergenz einer Potenzreihe von der Konvergenz ihrer reellen oder imaginären Komponente.

Von

EUGEN KÁLMÁN in Göttingen.

In den folgenden Zeilen werden wir feststellen, wie aus den Konvergenzverhältnissen der einen Komponente einer Potenzreihe auf die Konvergenz der Potenzreihe selbst geschlossen werden kann.

Daß überhaupt die Konvergenz einer Potenzreihe aus der Konvergenz der einen ihrer Komponenten folgen kann, das sieht man deutlich aus folgendem Satze:

Es sei AB ein Kurvenstück, das nicht in seinem ganzen Verlaufe auf einer durch den Nullpunkt gehenden geraden Linie liegt, und R der Abstand desjenigen Punktes des Kurvenstücks AB vom Nullpunkte, welcher diesem am nächsten liegt. Ist nun eine der Komponenten einer Potenzreihe auf dem Kurvenstück AB überall konvergent, so konvergiert auch die Potenzreihe selbst innerhalb eines Kreises um den Nullpunkt, dessen Radius mindestens R ist.

Der Beweis des Satzes ist sehr einfach. Ist nämlich z. B. die imaginäre Komponente der Reihe

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + i b_n) r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

d. h. die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n (a_n \sin n\varphi + b_n \cos n\varphi) = f(r, \varphi)$$

in jedem Punkte des Kurvenstücks AB konvergent, und sind $\bar{r}, \bar{\varphi}$ die Polarkoordinaten eines beliebigen Punktes P auf dem Kurvenstücke, so ist speziell auch die Reihe

$$f(\bar{r}, \bar{\varphi}) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{r}^n (a_n \sin n\bar{\varphi} + b_n \cos n\bar{\varphi})$$

konvergent. Diese Reihe ist aber nichts anderes, als der Wert der Potenzreihe $f(r, \bar{\varphi})$ an der Stelle $r = \bar{r}$, so daß also die Potenzreihe $f(r, \bar{\varphi})$ auch an jeder Stelle konvergiert, wo $r < \bar{r}$ ist. D. h. geometrisch: Die Reihe $f(r, \varphi)$ konvergiert in jedem Punkte der Strecke $\overline{OP}$. Auf dieser Strecke ist nämlich $\varphi = \bar{\varphi}$, $r \leqq \bar{r}$. Der Punkt P kann aber, wie gesagt, auf der Kurve beliebig gewählt werden. Verbinden wir also jeden Punkt des Kurvenstückes AB durch gerade Linien mit dem Nullpunkte, so konvergiert $f(r, \varphi)$ in jedem Punkte des so erhaltenen zweidimensionalen Bereiches (der schraffierte Flächenteil in Fig. 1). Daß man tatsächlich mit einem zweidimensionalen Bereiche zu tun hat, dafür bürgt die Voraussetzung, daß AB nicht in seinem ganzen Verlauf auf einer durch den Nullpunkt gehenden geraden Linie liegt.

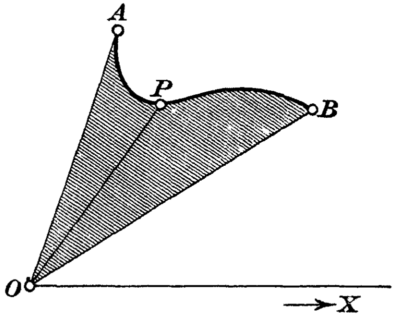

Fig. 1.

Daraus folgt aber, daß auf dem Teile des Kreisbogens mit dem Radius R um den Nullpunkt, der im schraffierten Bereich liegt, zwei Punkte C und D zu finden sind, die eine endliche Entfernung voneinander haben. Bezeichnen wir nun die Winkel der Strahlen CO und DO gegen die positive x-Achse mit α und β, so können wir also folgendes behaupten:

Für jeden φ-Wert zwischen α und β ist

$$\lim_{n=\infty} (R^n a_n \sin n\varphi + R^n b_n \cos n\varphi) = 0.$$

Das folgt offenbar aus der Konvergenz der Reihe $f(r, \varphi)$ auf dem Kreise mit dem Radius R.

Wir können jetzt von einem Satze des Herrn G. Cantor Anwendung machen, den er in Bd. 4 der Math. Annalen auf folgende Weise ausgesprochen hat:

„Ist für jeden x-Wert zwischen α und β

$$\lim_{n=\infty} (a_n \sin n\lambda + b_n \cos n\lambda) = 0,$$

so ist auch

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty} b_n = 0.\text{“}$$

Es ist also in unserem Falle

$$\lim_{n=\infty} R^n a_n = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty} R^n b_n = 0.$$

Somit konvergieren die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ gewiß innerhalb des Kreises mit dem Radius R um den Nullpunkt. Innerhalb dieses Kreises konvergiert also auch die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + i b_n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n,$$

was zu beweisen war.

Es ist auch leicht zu sehen, daß der Radius des Konvergenzkreises unserer Potenzreihe, wenn nur das Kurvenstück AB kein Kreisbogen ist, oder allgemeiner keine Figur, die aus lauter Kurvenstücken mit den Gleichungen $r = \text{const.}$ oder $\varphi = \text{const.}$ zusammengesetzt ist, immer größer ist als R.

Ist $\bar{R}$ der Abstand desjenigen Punktes einer Kurve von der genannten Eigenschaft — von der also kein Teil eine der Gleichungen $r = \text{const.}$, $\varphi = \text{const.}$ hat — vom Nullpunkte, welcher von diesem am weitesten liegt, so ist leicht zu sehen, daß die Potenzreihe in jedem Kreis konvergiert, dessen Radius kleiner als $\bar{R}$ ist.

Es liegt nun die Frage nahe, ob die Konvergenz der Potenzreihe nicht schon dann bewiesen werden kann, wenn über die Komponente weniger vorausgesetzt wird, als in unserem Satze, also wenn etwa nur vorausgesetzt wird, daß $f(r, \varphi)$ in einer überalldichten Punktmenge auf dem Kurvenstücke konvergiert; oder wenn sie auf dem Kurvenstücke zwar nirgends konvergiert, aber in jedem Punkte derselben die Bedingung

$$\lim_{n=\infty} r^n (a_n \sin n\varphi + b_n \cos \varphi) = 0$$

erfüllt ist.

Wie wir gesehen, konvergiert die Potenzreihe innerhalb des Kreises mit dem Radius R um den Nullpunkt, wenn ein Kurvenstück, mag es auch noch so klein sein, existiert, auf welchem die imaginäre Komponente überall konvergiert. Ist aber nur bekannt, daß die imaginäre Komponente in überalldicht liegenden Punkten eines Kurvenstückes konvergiert, so braucht die Potenzreihe im Kreise mit dem Radius R nicht zu konvergieren. Auf diese Tatsache hat mich Herr L. Fejér aufmerksam gemacht und zwar durch das folgende Beispiel:

Die imaginäre Komponente der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$, d. h. die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n!} \sin n!\,\varphi$ konvergiert auf jedem beliebigen Kurvenstück in den Punkten, für welche $n = \frac{\mu}{\nu}\pi$ ist (μ und ν ganze Zahlen), die also auf dem Kurvenstücke überalldicht liegen.

Die Potenzreihe selbst konvergiert aber keinesfalls im Kreise mit dem Radius R, wenn dieser Radius > 1 ist, weil der Einheitskreis für die Potenzreihe eine natürliche Grenze ist.

Was nun die Voraussetzung anbelangt, daß in jedem Punkte eines Kurvenstückes wenn auch nicht die Konvergenz der imaginären Komponente, so doch die Bedingung

$$\lim_{n=\infty} r^n(a_n \sin n\varphi + b_n \cos n\varphi) = 0$$

stattfindet, so unterscheidet sich diese Voraussetzung von der, daß die Reihe $f(r, \varphi)$ in jedem Punkte des Kurvenstückes tatsächlich konvergiert, bloß formal.

Hier stehen wir nämlich einer merkwürdigen Eigenschaft der Reihe $f(r, \varphi)$ gegenüber.

Im allgemeinen folgt aus dem Verschwinden des Grenzwertes des allgemeinen Gliedes einer Reihe noch gar nicht die Konvergenz der Reihe, und zwar weder in einem einzelnen Punkte noch auf einem Kurvenstücke.

Ist aber für die Reihe $f(r, \varphi)$ in jedem Punkte eines Kurvenstückes der Grenzwert ihres allgemeinen Gliedes, d. h. von

$$r^n a_n \sin n\varphi + r^n b_n \cos n\varphi$$

gleich Null, so folgt daraus, daß die Reihe $f(r, \varphi)$ auf dem Kurvenstücke konvergiert.

Aus der Voraussetzung, daß auf dem Kurvenstück AB überall

$$\lim_{n=\infty} r^n(a_n \sin n\varphi + b_n \cos n\varphi) = 0$$

ist, folgt nämlich schon die Konvergenz der Reihe $f(r, \varphi)$ in einem Kreise, dessen Radius ϱ sich von $\bar{R}$ beliebig wenig unterscheidet, wenn er nur kleiner ist als $\bar{R}$.

Wenn wir also ϱ groß genug wählen, so liegen so viele Punkte des Kurvenstückes AB im Konvergenzkreise, wie wir wollen.

Somit konvergiert $f(r, \varphi)$ in jedem Punkte des Kurvenstückes, höchstens mit Ausnahme desjenigen, der vom Nullpunkte am weitesten liegt.

Keszthely in Ungarn.