Sur les fonctions dérivées.

Par

D. Pompeiu à Jassy.

Dans un Mémoire *Sur la continuité des fonctions de variables complexes* [inséré dans les Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 2e série, t. VII (1905)] j'ai été amené à me servir d'une fonction dérivée réelle, dépendant d'une variable réelle, bornée et s'annulant dans tout intervalle. J'ai admis, dans mon Mémoire, l'existence d'une pareille fonction que j'ai appelée fonction de M. Köpcke, car c'est M. Köpcke qui le premier (Mathematische Annalen 29, 34 et 35) en a donné un exemple.

Dans cette Note je me propose de montrer comment on peut definir simplement une fonction d'une variable réelle dont la dérivée soit bornée et s'annule dans tout intervalle.

§ 1.

Définition de la fonction $G(t)$.

Je considère la série

$$(1) \qquad F(x) = \sum_{1}^{\infty} A_n (x - a_n)^{\frac{1}{3}}$$

dans laquelle tous les nombres sont réels et je suppose:

1° que la série $\sum A_n$ est convergente, les A_n étant des nombres positifs;

2° les a_n forment, dans un certain intervalle (x', x''), un ensemble dénombrable partout dense.

Il est clair que, dans ces conditions, la série (1) est uniformément convergente, dans l'intervalle (x', x'') et sa somme $F(x)$ est, dans le même intervalle, une fonction continue.

Mais $F(x)$ est, en outre, une fonction *croissante*. Cela résulte de ce que toutes les fonctions

$$A_n (x - a_n)^{\frac{1}{3}}$$

sont croissantes.

Posons, maintenant

$$t = F(x)$$

et

$$t' = F(x'), \quad t'' = F(x'').$$

A chaque point t de l'intervalle (t', t'') correspond un point x, de l'intervalle (x', x''), et un seul. On peut donc considérer x comme une fonction de t, définie dans l'intervalle (t', t''): nous appellerons $G(t)$ cette fonction inverse:

$$x = G(t).$$

§ 2.

Convergence d'une série dérivée.

Considérons la série

$$(2) \qquad f(x) = \frac{1}{3} \sum_{1}^{\infty} \frac{A_n}{(x-a_n)^{\frac{2}{3}}}$$

obtenue en dérivant terme à terme la série (1). Je me propose d'étudier la convergence de cette série pour les points x de l'intervalle (x', x'') qui ne coïncident avec aucun des points a_n. Les a_n forment, d'après nos hypothèses, dans l'intervalle (x', x'') un ensemble dénombrable partout dense.

Nous ferons une hypothèse supplémentaire relative aux A_n, pour pouvoir utiliser un résultat dû à M. Borel. M. Borel a étudié, dans son livre bien connu: *Leçons sur la théorie des fonctions* (pages 62—69) la convergence de la série

$$(3) \qquad \sum_{1}^{\infty} \frac{A_n}{r_n}, \qquad r_n = |x - a_n|$$

les coefficients A_n étant des nombres positifs et les a_n formant dans un certain intervalle (x', x'') un ensemble dénombrable partout dense. Voici le résultat de M. Borel:

Si l'on suppose convergente la série $\sum \sqrt{A_n}$, *la série* (3) *converge pour un ensemble de points**) *dont la longueur est égale à* $|x' - x''|$. Ou encore: *l'ensemble des valeurs de* x *pour lesquelles la série* (3) *n'est pas convergente a pour longueur zéro.*

Je dis maintenant que si l'on admet la convergence de la série

$$\sum \sqrt{A_n}$$

la série (2) converge pour un ensemble de points, pris dans l'intervalle (x', x''), dont la longueur est égale à $|x' - x''|$.

---

*) pris dans l'intervalle $(x' \; x'')$.

En effet, soit x un point, pris dans l'intervalle (x', x''), pour lequel la série (3) est convergente. Je vais montrer que la série (2) converge au même point.

Décomposons la série

$$\sum \frac{A_n}{r_n^{\frac{2}{3}}}$$

en une somme de deux séries partielles

$$\sum \frac{A_h}{r_h^{\frac{2}{3}}} + \sum \frac{A_k}{r_k^{\frac{2}{3}}} = \sum \frac{A_n}{r_n^{\frac{2}{3}}},$$

la première contenant tous les termes pour lesquels

$$r_h < 1,$$

et la seconde tous les termes pour lesquels

$$r_k \geqq 1$$

La série

$$\sum_1^\infty \frac{A_k}{r_k^{\frac{2}{3}}}$$

est convergente, car ses termes sont respectivement inférieurs à ceux de la série convergente $\sum A_k$, puisque, quel que soit k, on a

$$r_k^{\frac{2}{3}} \geqq 1.$$

Quant à la série

$$\sum_1^\infty \frac{A_h}{r_h^{\frac{2}{3}}}$$

elle est aussi convergente, car ses termes sont respectivement inférieurs aux termes de la série convergente

$$\sum \frac{A_h}{r_h}.$$

En effet, en vertu de l'hypothèse faite sur les r_h, on a, quel que soit h,

$$r_h < r_h^{\frac{2}{3}}$$

d'où l'on conclut

$$\frac{A_h}{r_h} > \frac{A_h}{r_h^{\frac{2}{3}}}$$

ce qui démontre la convergence de la série $\sum \frac{A_h}{r_h^{\frac{2}{3}}}$.

À l'aide de notre hypothèse supplémentaire: que la série $\sum \sqrt{A_n}$ est convergente, nous avons donc démontré que la série

$$(2) \qquad f(x) = \frac{1}{3} \sum \frac{A_n}{(x-a_n)^{\frac{2}{3}}}$$

converge pour un ensemble de points, pris dans (x', x'') dont la longueur est $|x' - x''|$.

§ 3.

Dérivée de la fonction $F(x)$.

Je vais démontrer maintenant qu'en tout point où la série (2) converge, $f(x)$ est égal à la dérivée de $F(x)$ en ce point.

Considérons l'expression

$$\frac{F(x+y) - F(x)}{y} = \sum_1^\infty A_n \cdot \frac{(x+y-a_n)^{\frac{1}{3}} - (x-a_n)^{\frac{1}{3}}}{y}.$$

On peut l'écrire encore

$$(2') \qquad \frac{F(x+y) - F(x)}{y} = \sum_1^\infty \frac{A_n}{(x+y-a_n)^{\frac{2}{3}} + (x+y-a_n)^{\frac{1}{3}}(x-a_n)^{\frac{1}{3}} + (x-a_n)^{\frac{2}{3}}},$$

en vertu d'une identité élémentaire.

Je dis que la série du second membre, où la variable est y, est uniformément convergente dans l'intervalle

$$-\eta, \quad +\eta$$

η étant un nombre positif.

En effet, posons

$$\alpha_n = \left(\frac{x+y-a_n}{x-a_n}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

On aura

$$\frac{F(x+y) - F(x)}{y} = \sum_1^\infty \frac{1}{1+\alpha_n+\alpha_n^2} \cdot \frac{A_n}{(x-a_n)^{\frac{2}{3}}}.$$

Mais le trinôme $1 + \alpha_n + \alpha_n^2$ ne s'annule jamais et son minimum est égal à $\frac{3}{4}$; donc la fraction

$$\frac{1}{1+\alpha_n+\alpha_n^2}$$

admet une limite supérieure égale à $\frac{4}{3}\cdot$ Par suite, quel que soit y, on aura

$$\frac{A_n}{(x+y-a_n)^{\frac{2}{3}} + (x+y-a_n)^{\frac{1}{3}}(x-a_n)^{\frac{1}{3}} + (x-a_n)^{\frac{2}{3}}} \leqq \frac{4}{3} \cdot \frac{A_n}{(x-a_n)^{\frac{2}{3}}}$$

quel que soit l'indice n, ce qui prouve que la série (2′) est uniformément convergente.

Donc $F(x)$ admet $f(x)$ comme dérivée au point x où la série (2) converge.

Considérons maintenant un point ξ où la série (2) diverge. Je vais démontrer que si l'on se donne un nombre positif M, aussi grand que l'on voudra, on peut lui faire correspondre un entier m et un nombre positif ε tels que l'on ait

$$\text{(m)} \qquad \sum_{n=1}^{n=m} \frac{A_n}{(\xi+y-a_n)^{\frac{2}{3}}+(\xi+y-a_n)^{\frac{1}{3}}(\xi-a_n)^{\frac{1}{3}}+(\xi-a_n)^{\frac{2}{3}}} \geqq M$$

dès que

$$|y| \mathrel{\overline{\gtrless}} \varepsilon.$$

En effet, la série à termes positifs

$$\frac{1}{3}\sum_{1}^{\infty} \frac{A_n}{(\xi-a_n)^{\frac{2}{3}}}$$

étant divergente on peut trouver un entier m tel que

$$\frac{1}{3}\sum_{1}^{m} \frac{A_n}{(x-a_n)^{\frac{2}{3}}} > M.$$

D'autre part, la fonction de y

$$\varphi(y) = \sum_{1}^{m} \frac{A_n}{(\xi+y-a_n)^{\frac{2}{3}}+(\xi+y-a_n)^{\frac{1}{3}}(\xi-a_n)^{\frac{1}{3}}+(\xi-a_n)^{\frac{2}{3}}}$$

étant continue au point $y=0$, on peut délimiter autour de ce point un intervalle $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ tel que pour toute valeur de y comprise dans cet intervalle on ait

$$\varphi(y) \geqq M$$

ce qui est justement l'inégalité (m).

Cela étant, puisque les termes de la série (2′) sont tous positifs, on peut écrire

$$\frac{F(\xi+y)-F(\xi)}{y} \geqq M$$

dès que

$$0 < |y| \leqq \varepsilon.$$

Donc le rapport

$$\frac{F(\xi+y)-F(\xi)}{y}$$

augmente indéfiniment lorsque $|y|$ tend vers zéro.

Ce résultat est capital pour notre objet: il nous prouve, en effet, que la courbe (C), définie par l'équation

$$t = F(x)$$

possède une tangente même pour les points (τ, ξ), ξ étant un point où la série (2) diverge: mais cette tangente est perpendiculaire à l'axe des x. La courbe (C) possède évidemment une tangente pour les points (t, x), x étant un point où la série (2) converge.

Donc la courbe $t = F(x)$ possède partout une tangente. Nous avons laissé de côté le cas où x est égal à l'un quelconque des points a_n; mais ce cas rentre, comme on le voit facilement, dans le cas des points ξ: aux points (t_n, a_n) la courbe (C) admet une tangente perpendiculaire à l'axe des x.

Si l'on adopte les définitions posées par M. Baire dans ses *Leçons sur les fonctions discontinues* (page 220) on peut dire, en résumant les résultats de ce paragraphe: *la fonction $F(x)$ admet, dans l'intervalle (x', x''), la fonction $f(x)$ comme dérivée; mais pour un certain ensemble de points la fonction $f(x)$ prend la valeur $+\infty$.*

§ 4.

La fonction $G(t)$ et sa dérivée $g(t)$.

Considérons maintenant la fonction inverse

$$x = G(t).$$

Elle admet, d'après ce qui précède, une dérivée $x' = g(t)$ et, aux points $t_n = F(a_n)$ et $\tau = F(\xi)$ cette dérivée s'annule.

Il importe d'insister sur l'existence des points τ, autres que les t_n. On sait, aujourd'hui, d'après les travaux de M. Baire qu'une fonction dérivée est ponctuellement discontinue; en d'autres termes: elle possède, dans toute intervalle, des points de continuité. D'autre part, on sait que, pour toute fonction ponctuellement discontinue, l'ensemble des points de continuité est de *seconde catégorie**): il n'est pas constitué par la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses; en particulier il n'est pas dénombrable.

Si l'on considère maintenant la fonction dérivée $g(t)$, on voit facilement que l'ensemble des points t_n est partout dense et, dans ces conditions, il est aisé de montrer que $g(t)$ ne peut être continue que pour les points où elle s'annule. Or, l'ensemble des points t_n est dénombrable: donc il existe des points τ, autres que les t_n pour lesquels la fonction $g(t)$ s'annule.

---

*) Baire, Ouvrage cité (page 78).

Et, revenant à la série

$$f(x) = \frac{1}{3} \sum_{1}^{\infty} \frac{A_n}{(x - a_n)^{\frac{2}{3}}}$$

nous pouvons affirmer qu'il existe, certainement, des points (en infinité non dénombrable) autres que les a_n pour lesquels la série diverge. Mais nous savons, grâce à l'hypothèse sur la convergence de la série

$$\sum \sqrt{A_n},$$

que la longueur de l'ensemble des points, pour lesquels la série $f(x)$ diverge, est zéro.

Remarquons enfin, pour terminer, que la fonction positive $f(x)$ admet comme limite inférieure le nombre

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\sum A_n}{|x' - x''|^{\frac{2}{3}}}.$$

Donc la fonction dérivée $g(t)$ est bornée.

Jassy, le 2 février 1906.