Werk

Titel: Mathematische Annalen
Ort: Leipzig
Jahr: 1907
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN235181684_0063
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0063

LOG Id: LOG_0037
LOG Titel: Die Fokaltheorie der linearen Strahlenkongruenzen
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684

Terms and Conditions

Contact

Die Fokaltheorie der linearen Strahlenkongruenzen.

Von

Stanislaus Jolles in Berlin.

1. Die Fokaltheorie der linearen Strahlenkongruenzen fehlt bisher. Man weiß nur, daß eine elliptische lineare Kongruenz in zwei reellen Geraden — ihren Fokalachsen — zirkulare Ebeneninvolutionen hervorruft, hingegen eine hyperbolische lineare Kongruenz keine reellen Fokalachsen besitzt.*) Ich wurde anfangs durch diese merkwürdige Eigenschaft der sonst so leicht zugänglichen hyperbolischen linearen Kongruenz abgeschreckt, nach allgemeinen Fokaleigenschaften der linearen Kongruenzen zu suchen. Später jedoch führten mich Fragen über die in einer linearen Kongruenz enthaltenen rotatorischen Regelscharen zu einigen allgemein gültigen Fokaleigenschaften und diese endlich zur Fokaltheorie der linearen Kongruenzen.

Eng verknüpft mit der Fokaltheorie der linearen Kongruenzen erweist sich die Theorie des Zylindroides. Synthetisch sind Grundeigenschaften dieser Fläche schon von Herrn Schoenflies**) und Herrn Sturm***) abgeleitet worden, doch erzeugt dieser die Regelschar der Fläche durch zwei ein-zweideutig aufeinander bezogene Punktreihen, während jener von kinematischen Überlegungen ausgeht. Da die Untersuchungen in dieser Arbeit rein synthetisch geführt werden, so war zunächst eine rein synthetische Theorie des Zylindroides aufzustellen. — Ein Zylindroid ist bekanntlich das Hauptachsenzylindroid von ∞^1 linearen Kongruenzen. Ihre drei gemeinschaftlichen Symmetrieachsen sind natürlich Symmetrieachsen ihres Hauptachsenzylindroides und des jene ∞^1 linearen Kongruenzen umfassenden quadratischen Komplexes. Mit Hilfe dieser

*) Reye, Die Geometrie der Lage. 2. Abteilung. 3. Auflage. Leipzig 1892, S. 259, N. 15.

**) Schoenflies, Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung. Leipzig 1886, S. 157, N. 10.

***) Sturm, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. 1. Teil. Leipzig 1892, S. 150.

Symmetrieachsen lassen sich manche Sätze aus der Theorie dieser Gebilde recht einfach und anschaulich beweisen.

Eine Ebene, welcher durch eine lineare Kongruenz C_1^1 eine zu ihr normale Ebene zugeordnet ist, heiße eine Mittelebene der Kongruenz. Die Mittelebenen von C_1^1 umhüllen ein gleichseitiges Paraboloid C^2, das Fokalparaboloid der linearen Kongruenz. Seine Erzeugenden sind durch C_1^1 paarweise einander zugeordnet. Werden die beiden Regelscharen von C^2 die Fokalregelscharen und die sie bzw. paarenden Involutionen die Fokalinvolutionen von C_1^1 genannt, so ist C_1^1 hyperbolisch, wenn beide Fokalinvolutionen elliptisch sind, elliptisch, wenn die eine Fokalinvolution hyperbolisch, die andere elliptisch ist. Die Doppelstrahlen der auf C^2 gelegenen Fokalinvolutionen sind die Fokalachsen von C_1^1. Eine hyperbolische lineare Kongruenz hat also zwei Paare konjugiert imaginärer Fokalachsen, eine elliptische ein Paar reeller und ein Paar konjugiert imaginärer. Bei einer parabolischen linearen Kongruenz ist die eine Fokalinvolution parabolisch, die andere elliptisch. Letztere wird gebildet durch die sich rechtwinklig kreuzenden Strahlen der betreffenden Fokalregelschar. Je zwei einander zugeordnete Geraden e^1, e^2 einer Fokalinvolution sind Leitstrahlen einer in C_1^1 enthaltenen orthogonalen Regelschar II. Ordnung, welche zu C^2 und C_1^1 in sehr merkwürdigen Beziehungen steht. Zu jeder Fokalregelschar gehört ein Büschel solcher orthogonalen Regelscharen. Die in vier Geraden zerfallende Basiskurve jedes solchen Büschels enthält ein Paar Fokalachsen von C_1^1, sie sind zugleich die Leitgeraden einer für die Theorie von C_1^1 besonders wichtigen linearen Kongruenz, welche eine Fokalkongruenz von C_1^1 genannt wird. Zu einer linearen Kongruenz gehören hiernach zwei Fokalkongruenzen. — Eine gleichseitige parabolische Regelschar, deren Strahlen derart involutorisch gepaart werden, daß ihrem unendlich fernen Strahle der ihn rechtwinklig kreuzende Scheitelstrahl zugeordnet wird, ist stets eine Fokalregelschar einer gewissen linearen Kongruenz. Da nun eine elliptische Fokalinvolution sowohl eine hyperbolische als auch eine elliptische lineare Kongruenz bestimmen kann, so ist es von Wichtigkeit, die Kriterien für das eine und das andere zu ermitteln, wobei sich wieder eine Fülle von interessanten Beziehungen ergeben. *Überhaupt scheinen die Fokalinvolutionen einer linearen Kongruenz für sie von derselben Wichtigkeit zu sein, wie die Fokalinvolutionen für das polare Feld und die Fokalfelder für den polaren Raum.*

Mit der Fokaltheorie der linearen Kongruenzen eng verknüpft ist die Frage nach den rotatorischen polaren Räumen Γ_e^2, die eine lineare Kongruenz C_1^1 derart in sich selbst überführen, daß die durch C_1^1 einander zugeordneten Punkte und Ebenen in Γ_e^2 konjugiert sind; insbesondere also die Frage nach den reellen in C_1^1 enthaltenen rotatorischen Regelscharen. Bisher hat man solche polaren Räume wohl für die hyperbolische lineare Kongruenz bestimmt, hingegen die betreffenden Untersuchungen für die elliptische lineare Kongruenz ganz unterlassen, und gerade für diese bieten sie besonders Bemerkenswertes. Die rotatorischen polaren Räume Γ_e^2 haben in diesem Falle sowohl reelle wie auch imaginäre Inzidenzflächen, während sie in jenem nur reelle Inzidenzflächen haben.

Lineare Strahlenkongruenzen mit demselben Fokalparaboloide C^2 sollen konfokal heißen. Konfokale lineare Strahlenkongruenzen sind für C^2 autopolar und haben dasselbe Hauptachsenzylindroid C^3. Diese Fläche ist der Ort der Mittelpunkte aller C^2 umschriebenen Kegel des Hachette und ebenfalls autopolar für C^2. Die zwischen C^2 und C^3 bestehenden Beziehungen gestatten einerseits bekannte Sätze einfacher und schärfer zu beweisen, andererseits neue Sätze abzuleiten. Zu diesen gehört der Satz, daß die Scheitelstrahlen konfokaler hyperbolischer Paraboloide Regelstrahlen eines Zylindroides sind; zu jenen, daß die zueinander polaren Fokalachsen eines gleichseitigen Paraboloids die Regelschar eines Zylindroides bilden.*) Die Theorie des Fokalparaboloides und Hauptachsenzylindroides konfokaler linearer Kongruenzen führt, beiläufig bemerkt, recht anschaulich zu den synthetischen Bedingungen, unter denen zueinander normale Tangentialebenen eines Kegels II. Ordnung sich in den Strahlen eines Kegels II. Ordnung oder zweier Strahlenbüschel I. Ordnung schneiden. — Die ∞^1 konfokalen linearen Kongruenzen mit demselben Fokalparaboloide sollen eine Kette konfokaler linearer Kongruenzen heißen. Eine solche Kette läßt sich auf jedes Gebilde I. Stufe projektiv beziehen, insbesondere bilden die einem beliebigen Raumpunkte durch die Kongruenzen einer Kette zugeordneten Punkte eine zur Kette projektive Parabel. — Erheblich einfacher als im allgemeinen Falle ergeben sich endlich jene oben erwähnten orthogonalen Regelscharen II. Ordnung und rotatorischen polaren Räume Γ_e^2 bei den rotatorischen linearen Kongruenzen.

Wie schon hervorgehoben wurde, ist die Beweismethode durchgängig rein synthetisch. Ihr stellten sich sehr häufig Schwierigkeiten entgegen, wollte man nicht in den leider noch immer so häufigen Fehler verfallen, für reelle Gebilde Bewiesenes ohne weiteres auf imaginäre zu übertragen. Jedes Gebilde, dessen imaginärer Charakter nicht ausdrücklich hervor-

---

*) Schröter, Über ein einfaches Hyperboloid von besonderer Art. Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 85 (1877), S. 39, N. 7b.

Schröter spricht weder diesen noch die ihm in **39**, **40** und **41** außerdem zugeschriebenen Sätze über das Zylindroid aus, da er nicht erkennt, daß die von ihm gefundenen Geraden s, s_1 Regelstrahlen eines Zylindroides sind. Doch ergeben sie sich ohne weiteres aus seinen Untersuchungen, sobald letzteres nachgewiesen wurde.

gehoben oder unmittelbar zu erkennen ist, ist also als reell zu betrachten.

Fördernde Anregung zu einigen Untersuchungen in dieser Arbeit verdanke ich der soeben angeführten Abhandlung Schröters und dem ersten Teile der Liniengeometrie*) des Herrn Sturm. Ich fühle mich verpflichtet, dies außer durch die betreffenden Literaturangaben hier noch besonders hervorzuheben.

Das Zylindroid.

2. Alle in einer linearen Kongruenz C_1^1 sich schneidenden linearen Komplexe bilden bekanntlich einen Büschel linearer Komplexe $[C_1^1]$. Durch die Komplexe dieses Büschels sind im allgemeinen einer unendlich fernen Geraden r_∞ die Strahlen einer zum Büschel projektiven parabolischen Regelschar II. Ordnung $\mathfrak{R}^2$ zugeordnet. (Für eine hyperbolische lineare Kongruenz, deren eine Leitgerade unendlich fern liegt, zerfällt $\mathfrak{R}^2$ stets in zwei Strahlenbüschel I. Ordnung. Dieser Ausnahmefall wird ausgeschlossen.) — Die Strahlen von $\mathfrak{R}^2$ sind Durchmesser der ihnen entsprechenden Komplexe. Werden von einem beliebigen Punkte auf diese Durchmesser senkrechte Ebenen gefällt, so bilden sie einen zur Regelschar $\mathfrak{R}^2$ und zu dem Komplexbüschel $[C_1^1]$ projektiven Ebenenbüschel I. Ordnung. Die durch die Komplexe von $[C_1^1]$ der Achse a dieses Ebenenbüschels zugeordneten Geraden sind wiederum Strahlen einer zum Komplexbüschel $[C_1^1]$ und folglich auch zum Ebenenbüschel $[a]$ projektiven Regelschar II. Ordnung $\mathfrak{R}_1^2$, zu der a selbst gehört. Sie schneiden die ihnen entsprechenden Ebenen des Büschels $[a]$ je in dem Nullpunkte bezüglich desjenigen Komplexes, durch den sie selbst a zugeordnet werden. Diese Nullpunkte bilden also eine zu $\mathfrak{R}_1^2$ perspektive und somit zu $\mathfrak{R}^2$ projektive Kurve II. Ordnung α^2. — Jede Ebene des Büschels $[a]$ steht auf den Durchmessern des ihr entsprechenden Komplexes senkrecht und dieser weist ihr einen Nullpunkt zu. Der durch diesen Nullpunkt gehende Durchmesser des betreffenden Komplexes ist also eine Hauptachse. Da die Hauptachsen der Komplexe des Büschels $[C_1^1]$ den Kegelschnitt α^2 und den unendlich fernen Strahl c_∞ der Trägerkongruenz C_1^1 des Komplexbüschels in projektiven Punktreihen schneiden, so bilden sie, solange die Ebene α von α^2 nicht durch c_∞ geht — und dies werde nunmehr vorausgesetzt — eine Regelschar III. Ordnung $\mathfrak{S}^3$ mit der einfachen Leitgeraden c_∞. Der Träger von $\mathfrak{S}^3$ ist eine Regelfläche III. Grades C^3, das sogenannte Zylindroid. Es ist zunächst als der Ort der Hauptachsen eines Büschels

*) Der lineare Komplex oder das Strahlengewinde und der tetraedale Komplex. Leipzig 1892.

linearer Komplexe definiert. Die Doppelpunktsgerade c_d des Zylindroids ist der zu den Ebenen des Büschels $[c_\infty]$ senkrechte, also zu a parallele Strahl der Trägerkongruenz C_1^1. Jede durch c_d gehende Ebene enthält folglich einen Regelstrahl von $\mathfrak{C}^3$. Zur Regelschar $\mathfrak{C}^3$ gehören beim hyperbolischen Komplexbüschel die Leitgeraden seiner Trägerkongruenz. — Der zur Doppelpunktsgeraden c_d parallele Strahl a schneidet die Regelschar $\mathfrak{C}^3$ in dem unendlich fernen Punkte von c_d und in einem im Endlichen gelegenen Punkt A. Zu der Ebene Ac_d ist ein Regelstrahl von $\mathfrak{C}^3$ normal. Er schneidet c_d in einem Punkte, durch welchen noch derjenige Regelstrahl s von $\mathfrak{C}^3$ geht, der in der Ebene α des zu $\mathfrak{C}^3$ perspektiven Kegelschnittes α^2 liegt. α ist im allgemeinen durch A und s bestimmt. Sei nun ξ^2 ein beliebiger zur Regelschar $\mathfrak{C}^3$ perspektiver Kegelschnitt, x der in seiner Ebene gelegene und x' der mit x inzidente Regelstrahl von $\mathfrak{C}^3$, so folgt demnach: α^2 fällt mit ξ^2 zusammen, sobald der zu c_d parallele Strahl a durch den Schnittpunkt von ξ^2 mit demjenigen Regelstrahle von $\mathfrak{C}^3$ geht, der x' rechtwinklig kreuzt. Der Kegelschnitt α^2 kann somit als ein ganz beliebiger zur Regelschar $\mathfrak{C}^3$ perspektiver Kegelschnitt angesehen werden. — Die Ebenenbüschel $[a]$ und $[c_d]$ sind perspektiv zum Kegelschnitt α^2, also projektiv zueinander und erzeugen, da ihre Achsen parallel laufen und entsprechende Ebenen aufeinander senkrecht stehen, einen zu α^2 perspektiven Rotationszylinder. Aus den vorstehenden Betrachtungen ergeben sich nunmehr die folgenden bekannten Sätze:

> Auf einem Zylindroide C^3 gelegene Kegelschnitte sind Ellipsen, seine beiden mit seiner einfachen Leitgeraden c_∞ inzidenten doppelt berührenden Ebenen (Kuspidalebenen) γ', γ'' sind also reell. Die auf C^3 gelegenen Ellipsen projizieren sich auf γ', γ'' orthogonal als Kreise, und jeder durch die Doppelpunktsgerade c_d von C^3 gehende Rotationszylinder hat mit C^3 eine Ellipse gemein. Werden von einem im Endlichen gelegenen Punkte A, der nicht der Doppelpunktsgeraden c_d des Zylindroides C^3 angehört, auf die Regelstrahlen der Fläche Normalen gefällt, so bilden ihre Fußpunkte eine Ellipse α^2, sie selbst also einen Strahlenkegel II. Ordnung. Dieser Kegel zerfällt, wenn A auf C^3 liegt, in zwei Strahlenbüschel I. Ordnung. Die Fußpunkte der Normalen, welche aus den Punkten einer Parallelen zur Doppelpunktsgeraden c_d von C^3 auf seine Regelstrahlen gefällt werden, liegen auf der nämlichen Ellipse. — Die beiden parallelen Kuspidalebenen γ', γ'' berühren die auf der Fläche gelegenen Ellipsen je in ihren Hauptscheitelpunkten. Die Nebenachsen dieser Ellipsen liegen in der Symmetrieebene γ beider Kuspidalebenen und ihre Exzentrizität ist stets gleich dem halben Abstande dieser Ebenen. Sich schneidende Regelstrahlen eines Zylin-

droides C^3 treffen eine auf ihm gelegene Ellipse α^2 je in den Punktepaaren einer hyperbolischen Involution, deren Zentrum der unendlich ferne Punkt der Nebenachse von α^2 ist. Zu dieser Nebenachse ist der in der Ebene von α^2 gelegene Regelstrahl parallel.

3. Je zwei zueinander senkrechte durch die Doppelpunktsgerade c_d eines Zylindroides C^3 gehende Ebenen projizieren zwei sich rechtwinklig kreuzende Regelstrahlen der Fläche, somit werden die sich rechtwinklig kreuzenden Regelstrahlen von C^3 aus c_d durch Ebenenpaare einer zirkularen Ebeneninvolution projiziert, und diese schneiden folglich eine auf C^3 gelegene Ellipse α^2 in den Punktepaaren einer Involution. Durch die zirkulare Ebeneninvolution mit der Achse c_d werden aber nicht nur die Punkte von α^2, sondern auch die Strahlen des Rotationszylinders involutorisch gepaart, der α^2 nach **2.** aus dem unendlich fernen Punkte von c_d projiziert, und da zugeordnete Strahlen aus c_d durch orthogonale Ebenen projiziert werden, so ist die Involutionsachse für die involutorische Paarung der Zylinderstrahlen die Rotationsachse des Zylinders, das Involutionszentrum für die involutorische Paarung der Punkte von α^2 durch sich rechtwinklig kreuzende Regelstrahlen von C^3 also der Mittelpunkt dieser Ellipse. Ein Punktepaar der Involution auf α^2 bilden die Hauptscheitelpunkte, in ihnen berührt α^2 nach **2.** die Berührungsstrahlen der Kuspidalebenen γ', γ'', d. h. die Kuspidalstrahlen c', c'' von C^3. Die Kuspidalstrahlen kreuzen sich hiernach rechtwinklig, und die sie aus der Doppelpunktsgeraden c_d projizierenden Ebenen sind zueinander orthogonal. Nun sind die beiden c', c'' aus c_d projizierenden Ebenen bekanntlich die Doppelebenen der Ebeneninvolution, deren Ebenenpaare die inzidenten Regelstrahlen der Fläche projizieren, folglich gilt:

Sich rechtwinklig kreuzende Regelstrahlen eines Zylindroides C^3 schneiden eine Ellipse der Fläche in den Punktepaaren einer Involution. Das zugehörige Involutionszentrum ist der Mittelpunkt des Kegelschnittes.

Ferner ergibt sich mit Rücksicht auf **2.** der bekannte Satz:

Sich schneidende Regelstrahlen von C^3 werden aus der Doppelpunktsgeraden c_d durch die Ebenenpaare einer symmetrischen Ebeneninvolution projiziert, deren Doppelebenen die Kuspidalstrahlen c', c'' von C^3 enthalten. Diese Doppelebenen sind Symmetrieebenen von C^3.

4. Der unendlich ferne Punkt der Nebenachse einer Ellipse α^2 des Zylindroides C^3 ist nach **2.** das Involutionszentrum für diejenige Punktinvolution auf α^2, in deren Punktepaaren sich schneidende Regelstrahlen von C^3 den Kegelschnitt treffen. Der Mittelpunkt von α^2 hingegen ist nach **3.** das Involutionszentrum für diejenige Punktinvolution auf α^2, deren Punktepaare auf zueinander rechtwinkligen Strahlen von C^3 liegen. Beide

Punktinvolutionen haben das aus den Nebenscheitelpunkten von α^2 bestehende Punktepaar gemein, demnach erweisen sich die durch diese Punkte gehenden Regelstrahlen c_1, c_2 von C^3 als die einzigen sich rechtwinklig schneidenden Strahlen dieser Fläche. Sie liegen nach **2.** in der Symmetrieebene γ der beiden Kuspidalebenen γ', γ'' von C^3. — Die sich rechtwinklig schneidenden Strahlen c_1, c_2 sind bzw. die Hauptachsen zweier füreinander nullinvarianten Komplexe des Komplexbüschels $[C_1^1]$, folglich sind die Nullpunkte der Ebene $c_d c_1$ bezüglich dieser Komplexe — d. h. der Punkt $c_d\gamma$ und der unendlich ferne Punkt von c_d — durch die Trägerkongruenz C_1^1 des Büschels einander zugeordnet. c_d ist aber nach **2.** der Hauptstrahl von C_1^1, somit fällt γ mit der Fluchtebene von C_1^1 zusammen.

Der Punkt $c_d\gamma$ hat in bezug auf die beiden Komplexe des Büschels $[C_1^1]$, deren Hauptachsen c_1, c_2 sind, bzw. die Nullebenen $c_d c_2$, $c_d c_1$. Diese Ebenen sind sonach durch seine Trägerkongruenz C_1^1 einander zugeordnet und schneiden folglich die unendlich ferne Ebene bzw. in den c_1, c_2 durch C_1^1 bzw. zugeordneten Strahlen c_2^∞, c_1^∞. Bei einer hyperbolischen Trägerkongruenz C_1^1 ist der Punkt $c_d\gamma$ zugleich der Mittelpunkt des kürzesten Abstandes d ihrer beiden Leitgeraden u, v, ferner hälften bei ihr die normalen einander zugeordneten Ebenen $c_d c_1$, $c_d c_2$ die Winkel der sich selbst zugeordneten Ebenen $c_d u$, $c_d v$. Somit ergeben sich bei einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz die Strahlen c_1, c_2 als die Hälftgeraden der Winkel, welche die durch die Mitte von d gehenden Parallelen zu u, v miteinander bilden.

5. Je zwei sich rechtwinklig kreuzende Regelstrahlen von C^3 schneiden eine auf der Fläche gelegene Ellipse α^2 nach **3.** in den Endpunkten je eines Durchmessers dieses Kegelschnittes. Da nach **2.** die Nebenachse von α^2 in der Symmetrieebene γ der Kuspidalebenen des Zylindroides liegt, so hälftet γ den Abstand je zweier sich rechtwinklig kreuzenden Regelstrahlen. — Von zwei sich schneidenden Regelstrahlen u_1, u_2 von C^3 kreuzt u_1 einen Regelstrahl v_2 und u_2 einen Regelstrahl v_1 rechtwinklig; v_1, v_2 schneiden sich, und die Ebenen $u_1 u_2$, $v_1 v_2$ liegen symmetrisch zu γ. — Wird unter dem Winkel φ_w zweier sich schneidenden Regelstrahlen w_1, w_2 von C^3 einer der beiden Winkel verstanden, den die durch den Doppelstrahl c_d und den Kuspidalstrahl c' gehende Ebene $c_d c'$ hälftet, und sind u_1, u_2 und v_1, v_2 zwei Paar sich schneidender Regelstrahlen, deren Ebenen symmetrisch zu γ liegen, so ist:

$$\varphi_u + \varphi_v = \pi.$$

Eine Ellipse α^2 projiziert sich nach **2.** auf γ orthogonal als ein Kreis, dessen Mittelpunkt mit dem von α^2 zusammenfällt. Geht die Ebene von α^2 — was nunmehr vorausgesetzt werden soll — durch einen der beiden sich rechtwinklig schneidenden Regelstrahlen von C^3, und schließt sie mit

γ einen Winkel von 45^0 ein, so ist der Halbmesser jenes Kreises gleich dem Abstande der Kuspidalstrahlen des Zylindroides von der Ebene γ. — Den Abständen aller Punkte des Raumes von γ möge ein positiver oder negativer Wert zuerteilt werden, je nachdem sie mit dem Kuspidalstrahle c' von C^3 auf derselben Seite von γ liegen oder nicht. Ist dann $a_{c'}$ der Abstand des Kuspidalstrahles c' und a_u der zweier sich schneidenden Regelstrahlen u_1, u_2 von γ, so folgt, da sich nunmehr leicht in γ ein gleichschenkliges Dreieck nachweisen läßt, dessen Winkel an der Spitze gleich $2\varphi_u$, dessen von ihr ausgehende Höhe gleich a_u und dessen gleiche Seiten gleich $a_{c'}$ sind:

$$a_{c'} \cos\varphi_u = a_u.$$

Der Winkel φ_u zweier sich schneidenden Regelstrahlen u_1, u_2, deren Ebene bzw. einen positiven oder negativen Abstand von γ hat, ist $<$ bzw. $> \frac{\pi}{2}$. Im folgenden wird unter dem Winkel zweier sich schneidenden Regelstrahlen eines Zylindroides C^3 stets einer der beiden Winkel verstanden, die von der Ebene $c_d c'$ gehälftet werden.

6. Schneidet der zur Doppelpunktsgeraden c_d eines Zylindroides C^3 parallele Strahl a einen Regelstrahl s von C^3 in einem Punkte A, so geht die Ebene des durch ihn bestimmten Kegelschnittes α^2 der Fläche nach **2.** durch A und den Strahl s' von C^3, der den s rechtwinklig kreuzenden Regelstrahl schneidet. Die Ebene von α^2 geht durch s selbst, wenn s einer der beiden sich rechtwinklig schneidenden Regelstrahlen c_1, c_2 von C^3 ist. c_1 und c_2 fallen hierbei bzw. mit der Nebenachse von α^2 zusammen und ergeben sich somit als Symmetrieachsen von C^3. Eine dritte Symmetrieachse von C^3 ist bekanntlich seine Doppelpunktsgerade c_d. Diese möge als Hauptsymmetrieachse, jene als Nebensymmetrieachsen des Zylindroides bezeichnet werden. Während die Hauptsymmetrieachse des Zylindroides längst bekannt ist, hat die Nebensymmetrieachsen wohl zuerst Herr Reye bemerkt.

Alle Strahlen einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1, die einen Strahl x ihres Hauptachsenzylindroides C^3 schneiden, bilden eine gleichseitige parabolische Regelschar. Der zu ihr gehörige Scheitelstrahl ist die Hauptsymmetrieachse c_d von C^3, der zu ihren Strahlen normale Scheitelstrahl der Strahl x selbst und ihre Hauptachse ist die Normale im Punkte xc_d auf der Ebene xc_d. Fällt x bzw. mit einer der beiden Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 von C^3 zusammen, so ist hiernach c_2 bzw. c_1 die Hauptachse der gleichseitigen parabolischen Regelschar $\mathfrak{P}_1^2$ bzw. $\mathfrak{P}_2^2$. Durch Spiegelung an c_2 gehen daher die Regelscharen $\mathfrak{P}_2^2$ und $\mathfrak{P}_1^2$ in sich selbst über. Die in C_1^1 enthaltenen Regelscharen $\mathfrak{P}_1^2, \mathfrak{P}_2^2$ bestimmen nun C_1^1 eindeutig, folglich geht auch diese lineare Kongruenz durch Spiegelung an c_2 in sich selbst über, oder c_2 ist eine Symmetrieachse von C_1^1. Das gleiche gilt von c_1. Bekanntlich ist auch die Hauptsymmetrieachse c_d von C^3 eine Symmetrieachse von C_1^1. Sie heiße mit Rücksicht hierauf die Hauptsymmetrieachse der linearen Kongruenz und ebenso jede der Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 des Zylindroides eine Nebensymmetrieachse der Kongruenz. Beim Hauptachsenzylindroid einer hyperbolischen Strahlenkongruenz C_1^1 werden die mit den Leitgeraden von C_1^1 zusammenfallenden Regelstrahlen von C^3 an jeder der beiden Nebensymmetrieachsen ineinander gespiegelt.

7. Eine Nebensymmetrieachse $c_\varkappa$ von C_1^1 ist ein Scheitelstrahl der gleichseitigen parabolischen Regelschar $\mathfrak{P}_\varkappa^2$, die von allen mit ihr inzidenten Kongruenzstrahlen gebildet wird. Ist nun C_1^1 hyperbolisch, so ist die durch C_1^1 in der Leitschar von $\mathfrak{P}_\varkappa^2$ hervorgerufene Involution ebenfalls hyperbolisch und ihre Doppelstrahlen sind die Leitgeraden u, v von C_1^1. Die Leitgeraden u, v gehen durch Spiegelung von C_1^1 an $c_\varkappa$ ineinander über, $c_\varkappa$ ist also die Rotationsachse einer in C_1^1 enthaltenen rotatorischen Regelschar. In bezug auf diese Regelschar sind die durch C_1^1 einander zugeordneten Punkte und Ebenen einander konjugiert und die Strahlen von C_1^1 paarweise reziproke Polaren. Insbesondere sind polar zueinander je zwei sich rechtwinklig kreuzende Regelstrahlen von $\mathfrak{P}_\varkappa^2$. Diese parabolische Regelschar ist somit für jene rotatorische autopolar.

Ist C_1^1 elliptisch, so ist die durch C_1^1 in der Leitschar von $\mathfrak{P}_\varkappa^2$ hervorgerufene Involution ebenfalls elliptisch, und ihre Potenzstrahlen h, h' gehen durch Spiegelung an $c_\varkappa$ ineinander über. Durch $c_\varkappa$ als Rotationsachse und h, h' als reziproke Polaren ist ein rotatorischer polarer Raum $\Gamma_\varkappa^2$ mit imaginärer Inzidenzfläche bestimmt. Seine Rotationsachse $c_\varkappa$ und ihre Polare sowie h und h' sind durch C_1^1 einander zugeordnet, ferner sind zwei sich rechtwinklig kreuzende Strahlen der in C_1^1 enthaltenen parabolischen Regelschar $\mathfrak{P}_\varkappa^2$ in $\Gamma_\varkappa^2$ reziprok polar. Durch C_1^1 wird hiernach $\Gamma_\varkappa^2$ in sich selbst übergeführt und umgekehrt sind die Strahlen von C_1^1 also paarweise in $\Gamma_\varkappa^2$ zueinander polar. — In den Strahlen von $\mathfrak{P}_\varkappa^2$ rufen $\Gamma_\varkappa^2$ und C_1^1 identische Punkt- und Ebeneninvolutionen hervor. Sind nun α, α' ein Paar sich in einem Strahle z von $\mathfrak{P}_\varkappa^2$ schneidende durch C_1^1 einander zugeordnete und somit auch in $\Gamma_\varkappa^2$ konjugierte Ebenen, so schneiden sie den z rechtwinklig kreuzenden Regelstrahl z_r von $\mathfrak{P}_\varkappa^2$ wechselweise in ihren Polen A, A', und diese Punkte sind durch C_1^1 einander zugeordnet. Einem mit A, α' inzidenten Strahle g' ist durch C_1^1 ein mit A', α inzidenter Strahl g zugeordnet. g, g' treffen den Strahl z bzw. in den durch C_1^1 einander zugeordneten und in $\Gamma_\varkappa^2$ konjugierten Punkten G, G', deren Polarebenen γ, γ' durch z_r und bzw. G', G gehen und folglich g' bzw. g enthalten. In g' schneiden sich somit die Polarebenen α', γ der mit g inzidenten

Punkte A', G, und die durch C_1^1 einander zugeordneten Geraden g, g' sind also in $\Gamma_\varkappa^2$ zueinander polar. Die Strahlen von C_1^1 treffen nun α, α' in Punkten, die durch C_1^1 einander zugeordnet sind. Ein mit g inzidenter Strahl x von C_1^1 ist demnach inzident mit der g durch C_1^1 zugeordneten Geraden g', und da die Geraden g, g' in $\Gamma_\varkappa^2$ polar zueinander sind, so sind die Treffpunkte von x mit α, α' durch C_1^1 einander zugeordnet und in $\Gamma_\varkappa^2$ konjugiert. Was von α, α' gilt, gilt für je zwei andere durch C_1^1 einander zugeordnete Ebenen des Kongruenzstrahles z. Durch C_1^1 einander zugeordnete Punkte sind folglich in $\Gamma_\varkappa^2$ konjugiert und ebenso auch je zwei durch C_1^1 einander zugeordnete Ebenen. — Jede der beiden Nebensymmetrieachsen $c_\varkappa$ einer linearen Kongruenz C_1^1 ist hiernach die Rotationsachse eines rotatorischen polaren Raumes $\Gamma_\varkappa^2$, der C_1^1 in sich selbst derart überführt, daß durch C_1^1 einander zugeordnete Punkte und Ebenen in $\Gamma_\varkappa^2$ konjugiert sind. Diese rotatorischen polaren Räume haben bei einer hyperbolischen linearen Kongruenz reelle, bei einer elliptischen imaginäre Inzidenzflächen.

8. Zwei Zylindroide C^3, D^3, welche eine Nebensymmetrieachse und einen mit keiner Nebensymmetrieachse zusammenfallenden Regelstrahl u_1 gemein haben, haben nach **6.** auch das Spiegelbild v_1 von u_1 an jener Symmetrieachse gemein. C^3, D^3 haben ferner dieselbe Hauptsymmetrieachse und folglich auch dieselbe zweite Nebensymmetrieachse. Die sich schneidenden Regelstrahlen zweier Zylindroide mit der nämlichen Hauptsymmetrieachse c_d und den nämlichen Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 werden aber aus c_d durch die Ebenenpaare der nämlichen symmetrischen Ebeneninvolution projiziert, somit liegen auf C^3, D^3 noch die u_1 bzw. v_1 schneidenden Regelstrahlen u_2, v_2. Beide Zylindroide gehen also durch dieselbe Hauptsymmetrieachse c_d, dieselben Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 und dieselben vier Regelstrahlen u_1, u_2, v_1, v_2. Sie schneiden hiernach die Ebenen des Ebenenbüschels $[u_1]$ im allgemeinen in je zwei Ellipsen, welche fünf Punkte gemein haben und folglich identisch sind. Ein Zylindroid ist somit durch eine Nebensymmetrieachse und einen mit keiner Nebensymmetrieachse zusammenfallenden Regelstrahl u bestimmt oder auch im allgemeinen durch die Hauptsymmetrieachse, eine Nebensymmetrieachse und einen beliebigen Punkt eines solchen Regelstrahles.

9. Ist r ein Regelstrahl eines Zylindroides C^3, der nicht mit einer Nebensymmetrieachse der Fläche zusammenfällt, und n eine zur Hauptsymmetrieachse c_d von C^3 windschiefe Normale zu r, so ist jede der beiden Nebensymmetrieachsen von C^3 die Hauptachse eines durch n gehenden linearen Komplexes. Das Hauptachsenzylindroid D^3 der Schnittkongruenz D_1^1 beider Komplexe hat dieselben Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 und dieselbe Hauptsymmetrieachse c_d wie C^3. Ferner liegt auf ihm der Strahl r

als Träger des kürzesten Abstandes der Strahlen c_d, n von D_1^1, folglich sind nach 8. beide Zylindroide C^3, D^3 identisch.

Schneidet nunmehr die Normale n zum Regelstrahle r die Hauptsymmetrieachse c_d von C^3, so ist wiederum jede Nebensymmetrieachse c_1, c_2 der Fläche die Hauptachse je eines durch n gehenden linearen Komplexes und c_d ist die Hauptsymmetrieachse und c_1, c_2 sind die Nebensymmetrieachsen des Hauptachsenzylindroides D^3 der Schnittkongruenz Sie ist, da die zu ihr gehörigen Strahlen c_d und n inzident sind, hyperbolisch. Ihre Leitgeraden liegen also auf D^3 und gehen bzw. durch den Punkt $c_d n$ und sein Spiegelbild P an der mit c_1, c_2 inzidenten Ebene γ. Die P enthaltende Leitgerade liegt in der Ebene $c_d n$ und ist folglich der mit dieser Ebene inzidente in P zu c_d orthogonale Strahl. Nun steht die Ebene $c_d n$ auf dem Regelstrahle r des gegebenen Zylindroides C^3 senkrecht, sonach enthält sie auch den r rechtwinklig kreuzenden Regelstrahl von C^3. Er geht nach 6. ebenfalls durch das Spiegelbild des Punktes $c_d n$ an γ und fällt folglich mit dem in der Ebene $c_d n$ gelegenen Strahle von D^3 zusammen. Da aber beide Zylindroide außer diesem Regelstrahle noch die Hauptsymmetrieachse und die Nebensymmetrieachsen gemein haben, so sind sie identisch.

Fällt ferner r mit einer der beiden Nebensymmetrieachsen — etwa mit c_1 — zusammen, ist also n eine Normale von c_1, die zu c_d windschief ist, so wird c_2 und ein nicht mit c_1 zusammenfallender Regelstrahl x von C^3 zur Hauptachse je eines durch n gehenden linearen Komplexes gewählt. Die beiden Komplexe und das zu ihrer Schnittkongruenz D_1^1 gehörige Hauptachsenzylindroid D^3 sind hierdurch eindeutig bestimmt. Auf dem Zylindroide D^3 liegen ebenfalls die Regelstrahlen c_2, x, folglich hat es mit C^3 die Hauptsymmetrieachse c_d und, da c_1 der Träger des kürzesten Abstandes der Strahlen c_d, n von D_1^1 ist, auch den Regelstrahl c_1 gemein. Als aufeinander senkrecht stehende Regelstrahlen sind c_1, c_2 sowohl die Nebensymmetrieachsen von C^3, wie von D^3. Die beiden Flächen haben demnach außer dem Regelstrahle x auch ihre Nebensymmetrieachsen gemein, und somit fallen die Zylindroide C^3, D^3 wiederum zusammen.

Ist endlich n eine zur Hauptsymmetrieachse c_d parallele Gerade, so hat n sowie jeder zu n parallele Strahl mit dem Zylindroide zwei unendlich ferne zusammenfallende Punkte gemein, und jeder dieser Strahlen steht in dem im Endlichen gelegenen dritten Schnittpunkte mit C^3 auf dem durch ihn gehenden Regelstrahle der Fläche senkrecht. Alle zu c_d parallelen Geraden bilden zusammen mit den Strahlen der unendlich fernen Ebene eine ausgeartete lineare Kongruenz. Die sich in ihr schneidenden linearen Komplexe sind also ebenfalls speziell. Ihre Inzidenzachsen bilden einen in der unendlich fernen Ebene gelegenen Strahlenbüschel, dessen

Mittelpunkt der unendlich ferne Punkt von c_d ist. Jeder dieser Komplexe hat ∞^2 Hauptachsen, zu ihnen gehören jedesmal die Geraden der unendlich fernen Ebene und je ein Bündel paralleler Strahlen, dessen Mittelpunkt der Pol der Inzidenzachse des betreffenden speziellen Komplexes bezüglich des unendlich fernen imaginären Kugelkreises ist. Er liegt also auf der unendlich fernen einfachen Leitgeraden c_∞ von C^3 und wird aus ihr durch denjenigen Regelstrahl von C^3 ausgeschnitten, der jene Inzidenzachse rechtwinklig kreuzt. Ein Regelstrahl von C^3 gehört demnach je zu den Hauptachsen jedes dieser Komplexe, und C^3 kann somit auch als ein Hauptachsenzylindroid der Schnittkongruenz dieses singulären Komplexbüschels angesehen werden.

Mit Rücksicht auf alle in dieser Nummer durchgeführten Untersuchungen gilt folglich:

Gehört zur Schnittkongruenz zweier linearen Komplexe, deren Hauptachsen zwei Regelstrahlen eines Zylindroides C^3 sind, eine nicht mit seiner Hauptsymmetrieachse c_d zusammenfallende Normale eines Regelstrahles der Fläche, so ist C^3 auch das Hauptachsenzylindroid dieser Schnittkongruenz.

Jede Normale in einem Punkte P eines Regelstrahles von C^3 bestimmt mit diesem Zylindroide, wenn P nicht unendlich fern liegt, eine lineare Kongruenz mit dem Hauptachsenzylindroide C^3. Somit gibt es ∞^1 lineare Kongruenzen mit dem Hauptachsenzylindroide C^3.

10. Je nachdem der auf einem Regelstrahle des Zylindroides C^3 senkrechte Strahl n die Fläche noch in zwei reellen Punkten U, V schneidet oder nicht, ist nach **2.** die durch C^3 und n bestimmte lineare Kongruenz hyperbolisch oder elliptisch, und zwar sind im ersteren Falle die durch U, V gehenden Regelstrahlen u, v die Leitgeraden der hyperbolischen Kongruenz. u, v sind Spiegelbilder voneinander an den Nebensymmetrieachsen c_1, c_2, und U, V haben also gleichen Abstand von der Ebene $c_1 c_2 = \gamma$. Überhaupt sind je zwei Regelstrahlen u_1, v_1 von C^3, die an einer und folglich an jeder der beiden Nebensymmetrieachsen der Fläche ineinander gespiegelt werden, Leitgeraden einer hyperbolischen linearen Kongruenz mit dem Hauptachsenzylindroide C^3. Zwei solche Regelstrahlen sind die Kuspidalstrahlen c', c'' von C^3. Unter den zu C^3 gehörigen hyperbolischen Kongruenzen gibt es also eine mit zueinander orthogonalen Leitgeraden.

Sind u_1, v_1 die Leitgeraden einer zu C^3 gehörigen hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz, so sind es auch die bzw. mit u_1, v_1 je in einer Ebene gelegenen Regelstrahlen u_2, v_2. Der Regelstrahl u_1 kreuzt nach **5.** v_2 rechtwinklig, und ebenso u_2, v_1. Die sich orthogonal kreuzenden Regelstrahlen rufen nach **3.** auf einer Ellipse α^2 von C^3 eine Involution hervor, deren Involutionszentrum der Mittelpunkt von α^2 ist, und ferner liegt nach **2.** die Nebenachse von α^2 in γ. Somit rufen auch die Leitgeraden u_1, v_1 der zu C^3 gehörigen hyperbolischen Kongruenzen auf α^2 eine Involution hervor. Ihr Involutionszentrum ist der unendlich ferne Punkt der Hauptachse von α^2. Sie ist hyperbolisch und ihre Doppelpunkte liegen auf der Nebenachse von α^2. Da die Regelschar von C^3 zu α^2 perspektiv ist, so gilt also:

> Die Leitgeraden der zu einem Zylindroide C^3 gehörigen hyperbolischen Kongruenzen sind Strahlenpaare einer hyperbolischen Involution. Ihre Doppelstrahlen sind die Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 von C^3.*)

Eine durch eine Nebensymmetrieachse — etwa c_1 — des Zylindroides C^3 gehende Ebene ε schneidet im allgemeinen C^3 nach **2.** in einer Ellipse ε^2, deren Nebenscheitelpunkte E, E' auf c_1 liegen, und zwar ist der eine dieser Punkte — etwa E' — zugleich ein Punkt der Doppelpunktsgeraden c_d von C^3. Die Tangente von ε^2 in E ist die Haupttangente von C^3 im Punkte E. Da sie c_1 in E rechtwinklig schneidet, so bestimmt sie nach obigem eine lineare Strahlenkongruenz mit dem Hauptachsenzylindroid C^3 und zwar eine parabolische. Zu ihr gehören auch alle übrigen c_1 schneidenden Haupttangenten von C^3. In jeder Ebene ε von c_1 ruft diese parabolische Strahlenkongruenz also einen Strahlenbüschel I. Ordnung hervor, dessen Mittelpunkt der Berührungspunkt von ε mit C^3 ist. Unter den linearen Strahlenkongruenzen mit demselben Hauptachsenzylindroid C^3 sind demnach zwei parabolische, ihre Leitgeraden sind bzw. die Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 von C^3.

11. Eine zu einem Zylindroide C^3 als Hauptachsenzylindroid gehörige lineare Kongruenz N_1^1 ist nach **9.** bestimmt durch C^3 und einen auf einem Regelstrahle r von C^3 senkrechten im Endlichen gelegenen Strahl n, der nicht mit der Hauptsymmetrieachse c_d der Fläche identisch ist. Beschreibt n in der auf r senkrechten Ebene ν um seinen Schnittpunkt N mit r den Strahlenbüschel $[N]$, so fällt N_1^1 nacheinander mit allen zum Hauptachsenzylindroid C^3 gehörigen linearen Kongruenzen zusammen. n als Komplexstrahl und zwei von r verschiedene Regelstrahlen s, t von C^3 als Hauptachsen bestimmen im allgemeinen zwei sich in N_1^1 schneidende lineare Komplexe Γ_s^n, Γ_t^n. Sie weisen, wenn d_s, d_t bzw. die mit N inzidenten Normalen der Hauptachsen s und t sind, dem Punkte N bzw. die Nullebenen nd_s, nd_t zu. Die linearen Komplexe mit den Hauptachsen s, t bilden die beiden Komplexbüschel $[C_1^1(s)]$, $[C_1^1(t)]$. Durchläuft n den

*) Sturm, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. 1. Teil, Leipzig 1892, S. 169, N. 122.

Strahlenbüschel $[N]$, so beschreiben Γ_s^n, Γ_t^n die Büschel $[C_1^1(s)]$ bzw. $[C_1^1(t)]$, und die durch Γ_s^n und Γ_t^n bzw. dem Punkte N zugewiesenen Nullebenen nd_s, nd_t beschreiben bzw. um d_s, d_t zwei zum Strahlenbüschel $[N]$ perspektive, also zueinander projektive Ebenenbüschel $[d_s]$, $[d_t]$. Die beiden Komplexbüschel $[C_1^1(s)]$, $[C_1^1(t)]$ sind folglich projektiv aufeinander bezogen, wenn je zwei Komplexe einander entsprechen, die je durch denselben Strahl n des Strahlenbüschels $[N]$ gehen. Zwei homologe Komplexe Γ_s^n, Γ_t^n beider projektiven Komplexbüschel schneiden sich in je einer zum Hauptachsenzylindroid C^3 gehörigen linearen Kongruenz N_1^1, und durch jede der zu C^3 gehörigen linearen Kongruenzen geht ein Paar homologer Komplexe. Diese linearen Kongruenzen bilden also als Schnitt homologer Komplexe zweier projektiven Büschel linearer Komplexe einen quadratischen Komplex Γ^2 *), und da an die Stelle der Regelstrahlen s, t von C^3 irgend zwei andere Regelstrahlen der Fläche treten können, so sind ∞^2 projektive Komplexbüschel nachgewiesen, welche Γ^2 erzeugen. Γ^2 besteht auch aus allen hyperbolischen linearen Kongruenzen, deren eine Leitgerade je ein Regelstrahl von C^3 und deren andere Leitgerade der ihn rechtwinklig kreuzende Strahl in der unendlich fernen Ebene ist. Die Hauptsymmetrieachse c_d und die einfache Leitgerade c_∞ von C^3 sind Doppelstrahlen von Γ^2. Die singuläre Fläche des Komplexes besteht nach **9.** aus C^3, der unendlich fernen Ebene und dem Strahlenbündel, dessen Mittelpunkt der unendlich ferne Punkt der Hauptsymmetrieachse ist. — Ist P ein im Endlichen außerhalb des Zylindroides C^3 gelegener Punkt, so ist der von ihm ausstrahlende Komplexkegel von Γ^2 der Ort aller Normalen, die von ihm aus auf die Regelstrahlen von C^3 gefällt werden. Daß diese Normalen die Strahlen eines Kegels II. Ordnung sind, ging schon aus der projektiven Erzeugung des Zylindroides in **2.** hervor. Liegt P im Endlichen auf C^3, so steht die Ebene des einen von ihm ausgehenden Komplexstrahlenbüschels I. Ordnung zu dem durch P gehenden Regelstrahle r von C^3 senkrecht, während die Ebene des andern nach **10.** mit demjenigen Regelstrahle von C^3 inzident ist, in den r an den Nebensymmetrieachsen der Fläche gespiegelt wird. Gehört der Punkt P der unendlich fernen Ebene an, ist er aber nicht mit c_d inzident, so ist er der Mittelpunkt eines unendlich fernen und eines Parallelstrahlenbüschels von Γ^2. Die Ebene dieses Büschels enthält denjenigen Regelstrahl von C^3, welcher auf der Ebene Pc_d senkrecht steht. — Alle linearen Kongruenzen mit dem Hauptachsenzylindroide C^3 haben dieselben Symmetrieachsen, folglich sind nach **6.** die Geraden c_d, c_1, c_2 auch Symmetrieachsen von Γ^2. Die Symmetrieachse c_d heiße die Hauptsymmetrieachse, jede der beiden

*) Sturm, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. 1 Teil, Leipzig 1892, S. 171, N. 123.

anderen Symmetrieachsen eine **Nebensymmetrieachse** dieses quadratischen Komplexes.

12. Die Regelstrahlen des Hauptachsenzylindroides C^3 eines Büschels linearer Komplexe und nur diese schneiden bekanntlich die Hauptsymmetrieachse c_d und die bzw. mit ihnen inzidenten Strahlen der Trägerkongruenz C_1^1 jenes Büschels rechtwinklig. Nun ist eine hyperbolische lineare Strahlenkongruenz durch zwei ihrer sich schneidenden Strahlen a, b und durch die nicht mit dem Punkte ab inzidente Hauptsymmetrieachse c_d bestimmt, somit bilden — vorausgesetzt, daß c_d nur einen Strahl des Büschels $[ab]$ und zwar im Endlichen trifft — alle einen Strahl c_d und je einen Strahl eines Strahlenbüschels $[ab]$ rechtwinklig schneidenden Strahlen die Regelschar eines Zylindroides mit der Hauptsymmetrieachse c_d.*)

Die Punkte einer Ellipse ε^2 eines Rotationszylinders R^2 werden aus den auf einer Durchmesserebene der Fläche gelegenen Erzeugenden d, e durch je zwei zueinander normale Ebenen projiziert. Eine d rechtwinklig schneidende Unisekante von ε^2 steht folglich in ihrem Treffpunkte T mit ε^2 auf der Ebene eT senkrecht, sie schneidet also den Strahl TE, der T mit dem Schnittpunkte E von e und ε^2 verbindet, rechtwinklig. Fällt nun T nacheinander mit allen Punkten von ε^2 zusammen, so ergeben sich demnach die von diesen Punkten auf d gefällten Normalen auch als Normalen zu den Strahlen des in der Ebene von ε^2 gelegenen Strahlenbüschels I. Ordnung $[E]$, und somit nach obigem Satze als Regelstrahlen eines Zylindroides mit der Hauptsymmetrieachse d. Kurz:

> Die von den Punkten einer Ellipse ε^2 eines Rotationszylinders auf eine Erzeugende d von ihm gefällten Normalen bilden die Regelschar eines Zylindroides mit der Doppelpunktsgeraden d und jede derart erzeugte Fläche kann als Hauptachsenfläche eines Büschels linearer Komplexe angesehen werden.

Bekanntlich bestimmen vier windschiefe Strahlen, die nicht einer Regelschar II. Ordnung angehören, im allgemeinen eine einzige sie enthaltende lineare Strahlenkongruenz C_1^1. Eine solche ist also auch gegeben, wenn eine in ihr enthaltene parabolische Regelschar II. Ordnung $\mathfrak{P}^2$ bekannt ist und ein zu den Ebenen des unendlichen fernen Strahles von $\mathfrak{P}^2$ normaler Kongruenzstrahl c_d, der mit keinem Leitstrahle dieser Regelschar zusammenfällt. c_d ist die Hauptsymmetrieachse von C_1^1. Da nun der kürzeste Abstand eines zu c_d windschiefen Kongruenzstrahles von c_d auf einem Regelstrahle des Hauptachsenzylindroides C^3 von C_1^1 liegt, so bilden alle c_d und je einen Strahl von $\mathfrak{P}^2$ rechtwinklig schneidenden Geraden Regelstrahlen eines Zylindroides.

---

*) Sir R. S. Ball, A treatise on the theory of screws. Cambridge 1900, S. 150.

Die Fokaleigenschaften der linearen Strahlenkongruenzen.

13. Durch eine lineare Kongruenz C_1^1 ist einer Ebene ε im allgemeinen eine andere Ebene ε' des Raumes zugeordnet. Soll ε auf ε' senkrecht stehen, so muß die Ebene ε im allgemeinen den zu ihr normalen Kongruenzstrahl e in dem Mittelpunkte der Punktinvolution schneiden, die C_1^1 auf e hervorruft. Eine auf der ihr zugeordneten Ebene senkrechte Ebene heiße eine Mittelebene der linearen Kongruenz. Insbesondere heiße die Hauptmittelebene der linearen Kongruenz die auf ihrer Hauptsymmetrieachse c_d senkrechte Mittelebene, sie ist identisch mit der Fluchtebene γ von C_1^1. Durch einen Strahl von C_1^1 gehen im allgemeinen zwei einander zugeordnete Mittelebenen. Die durch den unendlich fernen Kongruenzstrahl gehenden Mittelebenen sind die Hauptmittelebene γ und die unendlich ferne Ebene.

Alle mit einer Nebensymmetrieachse $c_\varkappa$ von C_1^1 inzidenten Kongruenzstrahlen bilden eine gleichseitige parabolische Regelschar $\mathfrak{P}_\varkappa^2$, deren Scheitelstrahlen $c_\varkappa$ und c_d sind. Aus jedem solchen Kongruenzstrahle wird also der unendlich ferne Punkt von c_d und der ihm durch C_1^1 zugeordnete Punkt $c_d\gamma$ durch zwei durch C_1^1 zugeordnete zueinander normale Ebenen projiziert. Die zu einer Nebensymmetrieachse $c_\varkappa$ von C_1^1 normalen und die mit ihr inzidenten Ebenen sind folglich Mittelebenen von C_1^1.

14. Werden zu den Mittelebenen einer linearen Kongruenz C_1^1 durch einen beliebigen Punkt P parallele Ebenen gelegt, so gehören sie zu einem zum Punktfelde $[\gamma]$ der Hauptmittelebene γ korrelativen Ebenenbündel $[P]$, wenn jeder Ebene π von $[P]$ der Schnittpunkt $\mathfrak{P}$ des zu ihr normalen Kongruenzstrahles mit γ zugewiesen wird. Die Ebenen π schneiden die unendlich ferne Ebene in einem zum Ebenenbündel $[P]$ perspektiven, also zum Punktfelde $[\gamma]$ korrelativen Strahlenfelde. Entsprechende Elemente beider Felder werden durch die Mittelebenen von C_1^1 verbunden, und diese bilden somit einen parabolischen Ebenenbündel II. Ordnung. Zu ihm gehören nach **13.** die beiden Ebenenbüschel $[c_1]$, $[c_2]$, deren Achsen c_1, c_2 die Nebensymmetrieachsen von C_1^1 sind, und ferner die beiden Büschel paralleler Ebenen, die von den zu c_1 bzw. c_2 normalen Ebenen gebildet werden. Da c_1, c_2 sich rechtwinklig schneiden, so ergibt sich:

> Die von den Mittelebenen einer linearen Kongruenz C_1^1 umhüllte Regelfläche II. Grades ist ein gleichseitiges Paraboloid C^2. Seine Hauptachse fällt mit der Hauptsymmetrieachse c_d und seine Scheitelstrahlen mit den Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 von C_1^1 zusammen.*)

*) Sturm, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. 1. Teil, Leipzig 1892, S. 167, N. 121.

15. Durch eine beliebige Gerade gehen zwei reelle oder konjugiert imaginäre Mittelebenen von C_1^1, hingegen ist jede durch eine Erzeugende von C^2 gehende Ebene eine Mittelebene. Einer Erzeugenden e^1 von C^2 ist somit durch C_1^1 wiederum eine Erzeugende e^2 von C^2 zugeordnet, die mit ihr zur selben Regelschar gehört. Durch e^1 und e^2 gehende einander zugeordnete Ebenen stehen aufeinander senkrecht. Das gleichseitige Paraboloid C^2 wird also durch C_1^1 in sich selbst übergeführt. Hierbei ruft die Kongruenz C_1^1 in jeder seiner beiden Regelscharen eine Involution hervor. Sind die Strahlen beider Regelscharen von C^2 elliptisch involutorisch gepaart, so ist C_1^1 eine hyperbolische lineare Kongruenz, hingegen ist C_1^1 eine elliptische lineare Kongruenz, wenn die Strahlen der einen Regelschar hyperbolisch involutorisch, die der andern elliptisch involutorisch gepaart sind.*) Bei einer elliptischen linearen Kongruenz C_1^1 sind die Doppelstrahlen der hyperbolisch involutorischen Regelschar zwei Kongruenzstrahlen, in denen C_1^1 zirkulare Ebeneninvolutionen hervorruft. Sie fallen also mit den Fokalachsen der elliptischen linearen Kongruenz zusammen. Werden überhaupt die Doppelstrahlen der in den beiden Regelscharen von C^2 durch eine lineare Kongruenz C_1^1 hervorgerufenen Involutionen die Fokalachsen von C_1^1 genannt, so hat eine hyperbolische lineare Strahlenkongruenz zwei Paar konjugiert imaginärer Fokalachsen, eine elliptische ein Paar reeller f', f'' und ein Paar konjugiert imaginärer. Das von den Mittelebenen von C_1^1 umhüllte gleichseitige Paraboloid C^2 heiße das Fokalparaboloid, jede seiner Regelscharen $\mathfrak{C}_1^1$, $\mathfrak{C}_2^2$ eine Fokalregelschar, endlich die Involution, die C_1^1 in jeder der beiden Fokalregelscharen hervorruft, eine Fokalinvolution von C_1^1. Durch C_1^1 einander zugeordnete normale Ebenen schneiden jede seiner beiden Fokalregelscharen in zwei Strahlen, die durch die betreffenden Fokalinvolutionen einander zugeordnet sind, gleichwie einander zugeordnete normale Strahlen eines polaren Feldes jede seiner Achsen in Punktepaaren schneiden, die zu den auf diesen Achsen gelegenen Brennpunktsinvolutionen gehören. Die Fokalinvolutionen von C_1^1 sind voneinander abhängig. Zwei zueinander normale Ebenen, die bzw. durch zwei zugeordnete Strahlen der einen Fokalregelschar gehen, gehen auch durch zwei zugeordnete Strahlen der andern.

Da die Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 einer linearen Kongruenz C_1^1 mit den Scheitelstrahlen des Fokalparaboloides C^2 zusammenfallen, so ist dieses bei einer elliptischen linearen Kongruenz bekannt, sobald außer c_1, c_2 noch eine reelle Fokalachse — etwa f' — von C_1^1 gegeben ist. Bei

*) v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage. Erstes Heft, Nürnberg 1856, S. 64, N. 102.

einer hyperbolischen linearen Kongruenz genügt es mit Hilfe der beiden Leitgeraden u, v außer c_1, c_2 noch eine beliebige Mittelebene aufzusuchen. Die in ihr gelegenen Normalen zu c_1, c_2 sind nämlich zwei weitere Erzeugende von C^2. Jede von ihnen bestimmt mit der zu ihr windschiefen Nebensymmetrieachse und der zu dieser normalen unendlich fernen Geraden eine Regelschar von C^2 und folglich diese Fläche selbst.

16. Bei einer parabolischen linearen Kongruenz ${}^pC_1^1$ ist jede durch ihre Leitgerade l gehende Ebene ξ eine Mittelebene. Die einer solchen Mittelebene ξ zugeordneten Mittelebenen bilden einen Ebenenbüschel I. Ordnung, dessen Achse x auf der Ebene ξ im Mittelpunkte des in ihr gelegenen Büschels von Kongruenzstrahlen senkrecht steht. Beschreibt ξ den Ebenenbüschel $[l]$, so erzeugt die zu ξ normale Achse x die eine Regelschar $\mathfrak{C}_1^2$ des Fokalparaboloides C^2 von ${}^pC_1^1$. Da l alle Strahlen von $\mathfrak{C}_1^2$ rechtwinklig schneidet, so ist l ein Scheitelstrahl von C^2. — Der x durch ${}^pC_1^1$ zugeordnete Regelstrahl von $\mathfrak{C}_1^2$ liegt in ξ und kreuzt folglich x rechtwinklig. Durch ${}^pC_1^1$ wird also die Fokalregelschar $\mathfrak{C}_1^2$ derartig elliptisch involutorisch gepaart, daß zugeordnete Strahlen zueinander normal sind. Die Strahlen der andern Fokalregelschar $\mathfrak{C}_2^2$ sind alle dem zu ihr gehörigen Leitstrahle l von ${}^pC_1^1$ zugeordnet, die sie paarende Fokalinvolution ist folglich parabolisch. — Die Leitgerade l der parabolischen linearen Kongruenz ${}^pC_1^1$ liegt in ihrer Hauptmittelebene γ und ist eine Nebensymmetrieachse von ${}^pC_1^1$, die andere ist der ebenfalls in γ gelegene zweite Scheitelstrahl von C^2. Endlich ist der zu γ senkrechte Kongruenzstrahl die Hauptsymmetrieachse von ${}^pC_1^1$. Mit l fallen die beiden Fokalachsen der parabolischen linearen Kongruenz zusammen.

17. Einander zugeordnete Strahlen jeder Fokalregelschar einer allgemeinen linearen Kongruenz C_1^1 sind die Achsen zweier projektiven Ebenenbüschel $[e^1]$, $[e^2]$, wenn einander zugeordnete Mittelebenen beider Büschel als entsprechend einander zugewiesen werden. Homologe Ebenen beider projektiven Büschel sind also zueinander senkrecht, und somit ist ihr Erzeugnis eine in C_1^1 enthaltene orthogonale Regelschar II. Ordnung $\mathfrak{R}^2$, deren Kreisschnitte bzw. normal zu e^1 und e^2 sind. e^1, e^2 schneiden die zu ihnen normale Nebensymmetrieachse von C_1^1 in Punkten, durch welche wechselweise zu ihnen parallele Kongruenzstrahlen gehen. Diese Nebensymmetrieachse ist ferner die Schnittgerade zweier Kreisschnittebenen von $\mathfrak{R}^2$, und da sie $\mathfrak{R}^2$ in zwei Punkten schneidet, deren Tangentialebenen zu ihr normal sind, so fällt sie mit einer Hauptachse von $\mathfrak{R}^2$ zusammen. Die sich in ihr schneidenden Kreisschnittebenen von $\mathfrak{R}^2$ enthalten also kongruente Kreise, deren Mittelpunkte mit dem von $\mathfrak{R}^2$ zusammenfallen. Aus der orthogonalen Regelschar $\mathfrak{R}^2$ wird eine gleichseitige parabolische, sowie e^1 mit einer der beiden Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 von $C_1{}^1$ zusammenfällt, und e^2 folglich mit dem c_1 bzw. c_2 rechtwinklig kreuzenden unendlich fernen Strahle. —

In einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz degeneriert $\mathfrak{R}^2$ zweimal in einen Strahl, nämlich in je eine der reellen Fokalachsen f', f''; sie liegen auf allen orthogonalen Regelscharen $\mathfrak{R}^2$ von $C_1{}^1$, zu deren Leitstrahlen zwei einander zugeordnete Strahlen der elliptisch involutorischen Fokalregelschar gehören. Die in einer elliptischen linearen Kongruenz enthaltenen durch f', f'' gehenden Regelscharen II. Ordnung sind demnach orthogonal.

In einer parabolischen linearen Kongruenz ${}^pC_1{}^1$ berühren sich die orthogonalen Regelscharen $\mathfrak{R}^2$ längs der Leitgeraden l, sobald die durch ${}^pC_1{}^1$ einander zugeordneten Geraden e^1, e^2 der parabolisch involutorischen Fokalregelschar angehören, also eine von beiden mit l zusammenfällt. Sind hingegen die beiden Strahlen zugeordnete Elemente der elliptisch involutorischen Fokalregelschar, so zerfallen die orthogonalen Regelscharen $\mathfrak{R}^2$ in je zwei in den zueinander orthogonalen Ebenen des Ebenenbüschels $[l]$ gelegene Strahlenbüschel I. Ordnung.

18. Eine in einer linearen Kongruenz $C_1{}^1$ enthaltene orthogonale Regelschar II. Ordnung, zu deren Leitschar zwei durch $C_1{}^1$ einander zugeordnete Geraden einer Fokalregelschar gehören und jede Fläche auf welcher eine solche Regelschar liegt, heiße mit dieser Fokalregelschar der linearen Kongruenz verbunden.

Zwei orthogonale Regelscharen von $C_1{}^1$, von denen die eine mit der einen, die andere mit der andern Fokalregelschar verbunden ist, haben zwei reelle Kongruenzstrahlen gemein und schneiden sich außerdem noch, je nachdem $C_1{}^1$ hyperbolisch oder elliptisch ist, in den beiden reellen oder konjugiert imaginären Leitgeraden von $C_1{}^1$.

19. Durch einen Strahl s der linearen Kongruenz $C_1{}^1$ gehen die bzw. mit ihren Fokalregelscharen $\mathfrak{C}_1{}^2$, $\mathfrak{C}_2{}^2$ verbundenen orthogonalen Regelscharen $\mathfrak{R}_1{}^2$, $\mathfrak{R}_2{}^2$. Sind die Strahlen $e_1{}^1$, $e_1{}^2$ von $\mathfrak{C}_1{}^2$ und $e_2{}^1$, $e_2{}^2$ von $\mathfrak{C}_2{}^2$ bzw. Leitstrahlen von $\mathfrak{R}_1{}^2$ und $\mathfrak{R}_2{}^2$, so trifft s von diesen vier auf dem Fokalparaboloide C^2 gelegenen Geraden zwei in seinem einen und zwei in seinem andern Schnittpunkte mit C^2. Liegen auf s die Punkte $e_1{}^1e_2{}^1$, $e_1{}^2e_2{}^2$ von C^2, so liegen auf dem zweiten Kongruenzstrahle t, den die Regelscharen $\mathfrak{R}_1{}^2$, $\mathfrak{R}_2{}^2$ außer s noch gemein haben, die Punkte $e_1{}^1e_2{}^2$, $e_1{}^2e_2{}^1$ der Fläche, und folglich sind die Kongruenzstrahlen s, t für C^2 zueinander polar. Als Kongruenzstrahl s kann jeder Strahl von $\mathfrak{R}_1{}^2$ oder $\mathfrak{R}_2{}^2$ angesehen werden, demnach wird jede von beiden Regelscharen durch den polaren Raum des Fokalparaboloides C^2 in sich selbst übergeführt. Das gleiche gilt von jeder mit einer Fokalregelschar von $C_1{}^1$ verbundenen orthogonalen

Regelschar II. Ordnung. — Die Leitstrahlen einer mit einer Fokalregelschar verbundenen orthogonalen Regelschar — etwa von $\mathfrak{R}_1^2$ — sind durch C_1^1 paarweise einander zugeordnet und ein Paar e_1^1, e_1^2 dieser zugeordneten Strahlen gehört jener Fokalregelschar an. Der polare Raum des Fokalparaboloides C^2 ruft demnach in der Leitschar von $\mathfrak{R}_1^2$ eine hyperbolische Involution mit den Doppelstrahlen e_1^1, e_1^2 hervor und somit ist bewiesen:

Jede mit einer Fokalregelschar einer linearen Kongruenz C_1^1 verbundene orthogonale Regelschar wird durch den polaren Raum des Fokalparaboloides C^2 von C_1^1 in sich selbst übergeführt. Hierbei gehen je zwei durch C_1^1 einander zugeordnete Leitstrahlen einer solchen orthogonalen Regelschar wiederum in je zwei einander durch C_1^1 zugeordnete Leitstrahlen derselben Regelschar über.

Die Regelscharen $\mathfrak{R}_1^2$, $\mathfrak{R}_2^2$ liegen bzw. auf den orthogonalen Hyperboloiden R_1^2, R_2^2. Als Diagonalen des auf R_1^2 gelegenen einfachen Vierseits mit den Gegenseiten s, t und e_1^1, e_1^2 sind e_2^1, e_2^2 reziproke Polaren für dieses orthogonale Hyperboloid, ebenso sind e_1^1, e_1^2 reziproke Polaren für R_2^2. Die zugeordneten Geraden einer Fokalregelschar einer linearen Kongruenz sind folglich reziproke Polaren für alle mit der andern Fokalregelschar verbundenen orthogonalen Regelflächen. Zwei zugeordnete Strahlen der einen Fokalregelschar sind Leitstrahlen von $\mathfrak{R}_1^2$, zwei der andern Leitstrahlen von $\mathfrak{R}_2^2$. Sonach gilt:

Der polare Raum jeder mit einer Fokalregelschar einer linearen Kongruenz verbundenen orthogonalen Regelfläche führt auch umgekehrt das Fokalparaboloid C^2 der linearen Kongruenz in sich selbst über. Hierbei gehen zugeordnete Strahlen der mit ihr verbundenen Fokalregelschar wieder in zugeordnete Strahlen dieser Fokalregelschar über, während zugeordnete Strahlen der nicht mit ihr verbundenen Fokalregelschar in bezug auf die orthogonale Regelfläche zueinander polar sind.

Auf die Modifikationen, welche diese und die folgenden Sätze und Beweise bei der parabolischen linearen Kongruenz erleiden, kann hier nicht näher eingegangen werden.

20. Sind wiederum $\mathfrak{R}_1^2$, $\mathfrak{R}_2^2$ zwei bzw. mit den Fokalregelscharen $\mathfrak{C}_1^2$, $\mathfrak{C}_2^2$ einer linearen Kongruenz C_1^1 verbundene orthogonale Regelscharen, e_1^1, e_1^2 und e_2^1, e_2^2 bzw. die Leitstrahlen, die den betreffenden Fokalregelscharen angehören, so sind e_2^1, e_2^2 nach **19.** zueinander polar in bezug auf die $\mathfrak{R}_1^2$ enthaltende Fläche R_1^2. Sie rufen folglich, wenn sie zu Involutionsachsen dieser Regelschar erwählt werden, eine involutorische Paarung ihrer Strahlen hervor, und zwar ist jedes Paar zugeordneter Regelstrahlen x, y durch e_2^1, e_2^2 harmonisch getrennt. Einem Strahle x von

$\mathfrak{R}_1^2$ ist nun durch die $\mathfrak{R}_2^2$ enthaltende Regelfläche R_2^2 wiederum ein Strahl von C_1^1 als Polare zugeordnet*); es ist derjenige Strahl, welcher von x durch irgend zwei durch C_1^1 einander zugeordnete Leitgeraden von $\mathfrak{R}_2^2$ harmonisch getrennt ist. Solche zwei einander zugeordneten Leitgeraden sind aber e_2^1, e_2^2, folglich fällt die gesuchte Polare von x in bezug auf R_2^2 mit dem Strahle y von $\mathfrak{R}_1^2$ zusammen. Die Regelschar $\mathfrak{R}_1^2$ wird also durch den polaren Raum von R_2^2 in sich selbst übergeführt und, wie auf gleiche Weise folgt, führt auch der polare Raum von R_1^2 die Regelschar $\mathfrak{R}_2^2$ in sich selbst über. Zwei von e_2^1, e_2^2 verschiedene durch C_1^1 einander zugeordnete Leitgeraden g_1, g_2 von $\mathfrak{R}_2^2$ sind nun durch je zwei in bezug auf R_2^2 polare Regelstrahlen von $\mathfrak{R}_1^2$ harmonisch getrennt, und sonach reziproke Polaren in bezug auf R_1^2. Kurz, es ist bewiesen:

Der polare Raum jeder mit der einen Fokalregelschar einer linearen Kongruenz verbundenen orthogonalen Regelfläche transformiert jede mit der andern Fokalregelschar verbundene in sich selbst. Die durch die lineare Kongruenz einander zugeordneten Leitstrahlen einer mit einer Fokalregelschar verbundenen orthogonalen Regelschar sind reziproke Polaren für alle mit der andern Fokalregelschar verbundenen orthogonalen Regelflächen.

21. Alle Flächen II. Ordnung, die ∞^2 gemeinsame reziproke Polaren haben, bilden einen speziellen F^2 Büschel.**) Nun sind nach **20.** die ∞^2 durch C_1^1 einander zugeordneten Leitstrahlen der orthogonalen Regelscharen, die mit der einen Fokalregelschar von C_1^1 verbunden sind, reziproke Polaren für die mit der andern Fokalregelschar verbundenen orthogonalen Regelflächen, folglich liegen die mit einer bestimmten Fokalregelschar von C_1^1 verbundenen orthogonalen Regelscharen auf je einer Fläche eines F^2 Büschels.

Durch die reellen Fokalachsen f', f'' einer elliptischen linearen

*) v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage. Erstes Heft, Nürnberg 1856, S. 71, N. 109.

**) Diese ∞^2 reziproken Polaren bilden bekanntlich eine lineare Kongruenz. Daß alle Flächen II. Ordnung, deren gemeinsame reziproke Polaren eine lineare Strahlenkongruenz bilden, die Elemente eines speziellen F^2 Büschels sind, scheint nicht bekannt zu sein. Man begnügt sich vielmehr im allgemeinen, diesen speziellen F^2 Büschel als einen F^2 Büschel zu definieren, dessen Flächen in zwei gemeinsamen (reellen) reziproken Polaren dieselben Punkt- und Ebeneninvolutionen hervorrufen. Letztere Definition ist aber zu eng; sie umfaßt nur diejenigen F^2 Büschel, bei denen beide Paar Gegenseiten des allen F^2 gemeinsamen einfachen Vierseits reell oder konjugiert imaginär sind, nicht aber den F^2 Büschel, bei dem das eine Paar Gegenseiten reell, das andere konjugiert imaginär ist. Obige Definition hingegen umfaßt alle Einzelfälle. Weitere Beziehungen zwischen diesem F^2 Büschel und der linearen Kongruenz gedenke ich demnächst zu veröffentlichen.

Kongruenz gehen nach **17.** alle orthogonalen Regelscharen, die mit ihrer elliptisch involutorischen Fokalregelschar verbunden sind, durch jeden andern Strahl einer linearen Kongruenz sendet hingegen jede Fokalregelschar nur eine mit ihr verbundene orthogonale Regelschar. Somit besteht der reelle Teil der Grundkurven der beiden F^2 Büschel, welche zu den Fokalregelscharen einer hyperbolischen linearen Kongruenz C_1^1 gehören, aus den beiden Leitgeraden von C_1^1. Der reelle Teil der Grundkurve des F^2 Büschels, welcher zu der elliptisch involutorischen Fokalregelschar einer elliptischen linearen Kongruenz C_1^1 gehört, setzt sich aus den beiden Fokalachsen f', f'' zusammen, während die Grundkurve des mit der hyperbolisch involutorischen Fokalregelschar verknüpften F^2 Büschels keinen reellen Punkt enthält.

Der zur hyperbolisch involutorischen Fokalregelschar einer elliptischen linearen Kongruenz gehörige F^2 Büschel enthält außer den ∞^1 orthogonalen Regelflächen ∞^1 polare Räume mit imaginären Inzidenzflächen. In ihnen sind ebenfalls die durch C_1^1 einander zugeordneten Leitstrahlen der orthogonalen Regelscharen, welche mit der elliptisch involutorischen Fokalregelschar verbunden sind, reziprok polar, und die durch C_1^1 einander zugeordneten Punkte und Ebenen konjugiert. Aus diesem Grunde mögen auch sie mit der hyperbolisch involutorischen Fokalregelschar verbunden heißen. Überhaupt heiße von nun an jede reelle oder imaginäre Regelfläche, auf welcher eine mit einer Fokalregelschar von C_1^1 verbundene orthogonale Regelschar liegt, und ebenso der F^2 Büschel, dem sie angehört, mit dieser Fokalregelschar verbunden.

22. Die Leitstrahlen aller mit der einen Fokalregelschar $\mathfrak{C}_1^2$ einer linearen Kongruenz C_1^1 verbundenen orthogonalen Regelscharen $\mathfrak{R}_1^2$ gehören nach **21.** einer linearen Kongruenz ${}^1F_1^1$ an. Da die mit $\mathfrak{C}_1^2$ verbundenen Regelflächen selbst einen F^2 Büschel bilden, so geht durch einen Punkt, der nicht auf einem gemeinsamen Strahle der Regelscharen $\mathfrak{R}_1^2$ liegt, eine Gerade, die zu den Leitstrahlen dieser Regelscharen gehört. Jeder Strahl der linearen Kongruenz ${}^1F_1^1$ ist somit ein Leitstrahl einer mit der Fokalregelschar $\mathfrak{C}_1^2$ verbundenen Regelschar, ${}^1F_1^1$ enthält die Fokalregelschar $\mathfrak{C}_1^2$. —Ebenso bilden die Leitstrahlen der mit der andern Fokalregelschar $\mathfrak{C}_2^2$ verbundenen Regelscharen $\mathfrak{R}_2^2$ eine zweite lineare Kongruenz ${}^2F_1^2$, die durch $\mathfrak{C}_2^2$ geht. Die lineare Kongruenz ${}^1F_1^1$ heiße mit der Fokalregelschar $\mathfrak{C}_1^2$, die lineare Kongruenz ${}^2F_1^1$ mit der Fokalregelschar $\mathfrak{C}_2^2$ der linearen Kongruenz C_1^1 verbunden.

Ist C_1^1 hyperbolisch, so enthalten die je mit ihren beiden Fokalregelscharen $\mathfrak{C}_1^2$, $\mathfrak{C}_2^2$ verbundenen orthogonalen Regelscharen keine reellen gemeinsamen Regelstrahlen, und die mit $\mathfrak{C}_1^2$, $\mathfrak{C}_2^2$ bzw. verbundenen linearen

Kongruenzen ${}^1F_1{}^1$, ${}^2F_1{}^1$ sind elliptisch. Ist $C_1{}^1$ elliptisch, so ist die mit ihrer hyperbolisch involutorischen Fokalregelschar verbundene Kongruenz elliptisch, hingegen die mit ihrer elliptisch involutorischen Fokalregelschar verbundene Kongruenz hyperbolisch. Die Leitgeraden der letzteren linearen Kongruenz sind die reellen Fokalachsen f', f'' von $C_1{}^1$.

23. Die mit der einen Fokalregelschar $\mathfrak{C}_1{}^2$ einer linearen Kongruenz $C_1{}^1$ verbundene lineare Kongruenz ${}^1F_1{}^1$ geht nach **22.** durch diese Regelschar, sie paart folglich die Strahlen der anderen Fokalregelschar $\mathfrak{C}_2{}^2$ involutorisch. ${}^1F_1{}^1$ enthält nun die Leitschar jeder mit $\mathfrak{C}_1{}^2$ verbundenen Regelschar $\mathfrak{R}_1{}^2$, folglich wird durch den polaren Raum jeder mit der Fokalregelschar $\mathfrak{C}_1{}^2$ verbundenen Regelfläche $R_1{}^2$ die Kongruenz ${}^1F_1{}^1$ und die Fokalregelschar $\mathfrak{C}_2{}^2$ derart in sich selbst übergeführt, daß irgend zwei durch ${}^1F_1{}^1$ einander zugeordnete Strahlen von $\mathfrak{C}_2{}^2$ wieder in zugeordnete Strahlen dieser Regelschar übergehen. Nach **19.** sind die für $R_1{}^2$ paarweise zueinander polaren Strahlen von $\mathfrak{C}_2{}^2$ auch durch $C_1{}^1$ einander zugeordnet. Demnach verwandelt die durch $C_1{}^1$ in der Regelschar $\mathfrak{C}_2{}^2$ hervorgerufene Involution die durch ${}^1F_1{}^1$ hervorgerufene in sich selbst. — Bei einer hyperbolischen linearen Kongruenz $C_1{}^1$ sind nach **22.** die Fokalregelscharen elliptisch involutorisch und die bzw. mit ihnen verbundenen Kongruenzen ${}^1F_1{}^1$, ${}^2F_1{}^1$ elliptisch. Die elliptische lineare Kongruenz ${}^1F_1{}^1$ paart die Regelschar $\mathfrak{C}_2{}^2$, deren Leitschar $\mathfrak{C}_1{}^2$ ihr angehört, ebenfalls elliptisch involutorisch. Von diesen beiden durch $C_1{}^1$ und ${}^1F_1{}^1$ in $\mathfrak{C}_2{}^2$ hervorgerufenen elliptischen Strahleninvolutionen führt jede die andere nur dann in sich selbst über, wenn beide Involutionen identisch sind. Bei einer hyperbolischen linearen Kongruenz bedingen also ${}^1F_1{}^1$ in $\mathfrak{C}_2{}^2$ und ${}^2F_1{}^1$ in $\mathfrak{C}_1{}^2$ dieselbe elliptische Involution, wie $C_1{}^1$. — Bei einer elliptischen linearen Kongruenz $C_1{}^1$ ist nach **15.** die eine Fokalregelschar — etwa $\mathfrak{C}_1{}^2$ — hyperbolisch, die andere $\mathfrak{C}_2{}^2$ elliptisch involutorisch. Die mit $\mathfrak{C}_1{}^2$ verbundene lineare Kongruenz ${}^1F_1{}^1$ ist nach **22.** wiederum elliptisch, dagegen die mit $\mathfrak{C}_2{}^2$ verbundene ${}^2F_1{}^1$ hyperbolisch. Daß die elliptische lineare Kongruenz ${}^1F_1{}^1$ in $\mathfrak{C}_2{}^2$ dieselbe elliptische Involution, wie $C_1{}^1$, festlegt, ergibt sich auf gleiche Weise, wie bei der hyperbolischen linearen Kongruenz, und daß $C_1{}^1$ und die hyperbolische lineare Kongruenz ${}^2F_1{}^1$ in $\mathfrak{C}_1{}^2$ auch dieselbe hyperbolische Involution bestimmen, ist ohne weiteres zu erkennen. Die Doppelstrahlen der durch $C_1{}^1$ in $\mathfrak{C}_1{}^2$ hervorgerufenen hyperbolischen Involution sind ja die reellen Fokalachsen f', f'' der elliptischen Kongruenz $C_1{}^1$, und folglich nach **22.** die Leitgeraden der hyperbolischen Kongruenz ${}^2F_1{}^1$. Werden die linearen Kongruenzen ${}^1F_1{}^1$, ${}^2F_1{}^1$ die F o k a l k o n g r u e n z e n der linearen Kongruenz $C_1{}^1$ genannt, so ist somit nach **15.** dargetan:

Die Leitgeraden der Fokalkongruenzen ${}^1F_1{}^1$, ${}^2F_1{}^1$ einer linearen Kongruenz $C_1{}^1$ sind die Fokalachsen dieser Kongruenz. Durch die zu $\mathfrak{C}_2{}^2$ bzw. $\mathfrak{C}_1{}^2$ gehörigen Fokalinvolutionen sind die Leitgeraden von ${}^1F_1{}^1$ bzw. ${}^2F_1{}^1$ bestimmt.

Der geschart involutorische Raum Γ, dessen Doppelstrahlen die lineare Kongruenz $C_1{}^1$ bilden, und folglich diese selbst, sind eindeutig gegeben, sobald außer einer in $C_1{}^1$ enthaltenen Regelschar II. Ordnung die Involution bekannt ist, die Γ in ihrer Leitschar hervorruft. Eine Regelschar des Fokalparaboloides einer linearen Kongruenz bestimmt also zusammen mit der ihrer Leitschar zugehörigen Fokalinvolution die mit jener Regelschar verbundene Fokalkongruenz.

24. Einer reellen Fokalachse f' einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz $C_1{}^1$ ist durch jede orthogonale Regelschar $\mathfrak{R}^2$, welche mit ihrer hyperbolisch involutorischen Fokalregelschar $\mathfrak{C}_1{}^2$ verbunden ist, ein Strahl s von $C_1{}^1$ als Polare bezüglich der $\mathfrak{R}^2$ enthaltenden Fläche II. Grades R^2 zugewiesen. Nun ist f' von s durch je zwei durch $C_1{}^1$ einander zugeordnete Leitstrahlen von $\mathfrak{R}^2$ harmonisch getrennt, also auch durch die beiden einander zugeordneten Strahlen e_1, e_2, die die Leitschar von $\mathfrak{R}^2$ mit $\mathfrak{C}_1{}^2$ gemein hat. Diese aber trennen auch harmonisch f' von f'', folglich ist f'' mit s identisch. Die reellen Fokalachsen f', f'' sind somit reziproke Polaren für alle mit $\mathfrak{C}_1{}^2$ verbundenen orthogonalen Regelflächen II. Ordnung. Zwei reziproke Polaren für zwei Flächen eines F^2 Büschels sind es für alle seine Flächen, gleichgültig ob diese alle reell sind oder nicht. f', f'' erweisen sich hiernach auch als reziproke Polaren in den polaren Räumen mit imaginären Inzidenzflächen, die nach **21.** in dem mit $\mathfrak{C}_1{}^2$ verbundenen F^2 Büschel vorkommen. Da nun sowohl $C_1{}^1$ wie auch alle Flächen II. Grades, auf denen in $C_1{}^1$ enthaltene Regelscharen II. Ordnung liegen, in f' und f'' zirkulare Ebeneninvolutionen hervorrufen, so gilt letzteres auch von allen polaren Räumen dieses F^2 Büschels, und es kann somit der Satz ausgesprochen werden:

Die reellen Fokalachsen f', f'' einer elliptischen linearen Kongruenz $C_1{}^1$ sind zueinander polare Fokalachsen in allen polaren Räumen, welche zu dem mit der hyperbolisch involutorischen Fokalregelschar von $C_1{}^1$ verbundenen Büschel orthogonaler Regelflächen gehören.

25. Eine Involution unter den Strahlen einer gleichseitigen parabolischen Regelschar $\mathfrak{P}_1{}^2$ ist unter anderm bestimmt, sobald dem unendlich fernen Regelstrahle $c_1{}^2$ der ihn rechtwinklig kreuzende $c_1{}^1$ zugeordnet wird, und sich zwei beliebige Regelstrahlen $x_1{}^1$, $x_1{}^2$ entsprechen. Sind — was nunmehr vorausgesetzt werden soll — die zugeordneten Strahlen $x_1{}^1, x_1{}^2$ die Achsen zweier projektiven Ebenenbüschel $[x_1{}^1]$, $[x_1{}^2]$, bei denen entsprechende Ebenen zueinander senkrecht stehen, so projizieren je zwei homologe Ebenen dieser projektiven Büschel zwei zugeordnete Strahlen einer Involution unter den Strahlen der Leitschar $\mathfrak{P}_2{}^2$ von $\mathfrak{P}_1{}^2$. Bei ihr entspricht wiederum dem unendlich fernen Leitstrahle c_2^1 der ihn rechtwinklig kreuzende c_2^2. — Beide auf dem gleichseitigen Paraboloide P^2 gelegene Regelscharen $\mathfrak{P}_1^2$, $\mathfrak{P}_2^2$ sind somit jetzt involutorisch gepaart. Sie bestimmen folglich eine lineare Strahlenkongruenz P_1^1, für welche je zwei zugeordnete Strahlen dieser involutorischen Regelscharen einander zugeordnet sind. Da je zwei aufeinander senkrechte durch zwei zugeordnete Strahlen von P^2 gehende Ebenen zugeordnete Mittelebenen von P_1^1 sind, so ist P^2 das Fokalparaboloid der linearen Kongruenz P_1^1. Seine Scheitelebene $c_1^2\,c_2^2$ ist die Hauptmittelebene, seine Hauptachse die Hauptsymmetrieachse und seine Scheitelstrahlen c_1^2, c_2^2 die Nebensymmetrieachsen von P_1^1. Kurz:

Eine gleichseitige parabolische Regelschar, deren Strahlen derart involutorisch gepaart werden, daß ihrem unendlich fernen Strahle der ihn rechtwinklig kreuzende Regelstrahl zugeordnet wird, ist stets eine Fokalregelschar einer gewissen linearen Kongruenz. Eine elliptische lineare Kongruenz ist durch ihre Hauptsymmetrieachse und ihre beiden reellen Fokalachsen bestimmt.

Eine parabolische Involution der Strahlen einer gleichseitigen parabolischen Regelschar $\mathfrak{P}_1^2$, bei der alle Strahlen demjenigen Strahle zugeordnet sind, der den unendlich fernen Strahl von $\mathfrak{P}_1^2$ rechtwinklig kreuzt, ist die eine Fokalinvolution einer parabolischen linearen Kongruenz ${}^pP_1^1$. Die andere Fokalinvolution dieser linearen Kongruenz paart die Leitschar $\mathfrak{P}_2^2$ von $\mathfrak{P}_1^2$ derart, daß zueinander normale Strahlen von $\mathfrak{P}_2^2$ einander zugeordnet werden.

26. Die Strahleninvolutionen $[x_1^1, x_1^2 - \cdots]$, $[x_2^1, x_2^2 - \cdots]$, welche eine lineare Kongruenz C_1^1 bzw. in ihren Fokalregelscharen $\mathfrak{C}_1^2$, $\mathfrak{C}_2^2$ hervorruft, rufen auf jedem Kegelschnitte des Fokalparaboloides C^2 von C_1^1 und somit auch auf einer Hauptparabel π^2 der Fläche zwei Punktinvolutionen hervor. In jeder der beiden involutorischen Fokalregelscharen ist nun dem zugehörigen Scheitelstrahle von C^2 der ihn rechtwinklig kreuzende unendlich ferne Strahl zugeordnet, demnach liegen die Involutionszentren J_1, J_2 der Punktinvolutionen $[X_1^1, X_1^2 - \cdots]$, $[X_2^1, X_2^2 - \cdots]$, in denen bzw. die beiden involutorischen Fokalregelscharen $[x_1^1, x_1^2 - \cdots]$, $[x_2^1, x_2^2 - \cdots]$ die Hauptparabel π^2 schneiden, auf der mit der Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 zusammenfallenden Achse von π^2. Zwei zueinander normale Ebenen ξ_1, ξ_2, welche bzw. zwei zugeordnete Strahlen x_1^1, x_1^2 der involutorischen Fokalregelschar $[x_1^1, x_1^2 - \cdots]$ projizieren, projizieren nach **15.** bzw. zugleich zwei zugeordnete Strahlen y_2^1, y_2^2 der andern involutorischen Fokalregelschar. Nun sind durch C_1^1 die Ebenen $x_1^1 y_2^1$, $x_1^2 y_2^2$ einander zugeordnet, ebenso die Ebenen $x_1^1 y_2^2$, $x_1^2 y_2^1$; sie gehen bzw. durch die Gegenseiten $X_1^1 Y_2^1$, $X_1^2 Y_2^2$ und $X_1^1 Y_2^2$, $X_1^2 Y_2^1$ des vollständigen Vierecks $X_1^1 X_1^2 Y_2^1 Y_2^2$, und somit schneiden zwei Paar Gegenseiten dieses Vierecks und folglich auch das dritte Paar $X_1^1 X_1^2$, $Y_2^1 Y_2^2$ den Kongruenzstrahl c_d in Punktepaaren der durch C_1^1 auf ihm hervorgerufenen Involution. Die Schnittpunkte von $X_1^1 X_1^2$ und $Y_2^1 Y_2^2$ mit c_d sind aber die Involutionszentren J_1, J_2, diese sind also durch C_1^1 einander zugeordnet.

Geht insbesondere ξ_1 durch die Tangente x_1 von π^2 im Punkte X_1^1, so schneidet ξ_2 die Ebene π von π^2 in der durch den Punkt X_1^2 gehenden Normalen n_1^x zu x_1. Dem Punkte X_1^1 entspricht also als Punkt U_2^1 der Involution $[X_2^1, X_2^2 - \cdots]$ der Punkt U_2^2, in dem die aus X_1^2 auf die Tangente x_1 gefällte Senkrechte n_1^x die Parabel noch einmal schneidet. Ebenso entspricht dem Punkte X_1^2 als Punkt V_2^1 dieser Involution der Schnittpunkt V_2^2 von π^2 mit demjenigen Strahle n_2^x von X_1^1, der zur Tangente x_2 von π^2 im Punkte X_1^2 normal ist. Nun liegt der Schnittpunkt J_2 der Gegenseiten $X_1^1 U_2^2$, $X_1^2 V_2^2$ und der Schnittpunkt der Gegenseiten $X_1^2 U_2^2$, $X_1^1 V_2^2$ des π^2 eingeschriebenen einfachen Vierecks $X_1^1 U_2^2 X_1^2 V_2^2$ mit dem Schnittpunkte X der Tangenten x_1, x_2 in seinen Gegenpunkten X_1^1, X_1^2 auf einer Geraden. Sie ist, da $X_1^2 U_2^2$, $X_1^1 V_2^2$ bzw. mit den Höhenstrahlen n_1^x, n_2^x des Dreiecks $J_2 X_1^2 X_1^1$ zusammenfallen, identisch mit dem dritten zur Seite $X_1^1 X_1^2$ senkrechten Höhenstrahle n_3^x dieses Dreiecks. X ist aber der Pol dieser Seite bezüglich π^2, folglich sind $X_1^1 X_1^2$ und n_3^x konjugierte zueinander normale Strahlen bezüglich dieser Parabel und die bzw. auf ihnen gelegenen Involutionszentren J_1, J_2 zugeordnete Punkte der Brennpunktsinvolution von π^2. Kurz:

> Die involutorischen Fokalregelscharen einer linearen Kongruenz C_1^1 rufen auf einer Hauptparabel π^2 ihres Fokalparaboloides C^2 zu ihnen perspektive Punktinvolutionen hervor, deren Involutionszentren durch C_1^1 einander zugeordnet sind und ein Punktepaar der Fokalinvolution jener Hauptparabel bilden.

Der Brennpunkt der Hauptparabel π^2 hälftet den Abstand zweier zugeordneten Punkte ihrer Fokalinvolution, folglich auch die Strecke $J_1 J_2$. Bezeichnet d den Abstand dieses Brennpunktes vom Scheitelpunkte von π^2, so liegen bei einer hyperbolischen linearen Kongruenz die beiden durch ihre Fokalinvolutionen bestimmten Involutionszentren J_1, J_2 innerhalb π^2 auf der Achse dieser Parabel symmetrisch zum Brennpunkte und ihr Abstand $J_1 J_2$ ist $< 2d$. Ist der Abstand $J_1 J_2 = 2d$, so ist die vorliegende lineare Kongruenz parabolisch, ist er $> 2d$, elliptisch.

27. Eine elliptisch involutorische Fokalregelschar $[x_\varkappa^1, x_\varkappa^2 - \cdots]$ einer linearen Kongruenz C_1^1 schneidet eine Hauptparabel π^2 und den nicht zur Fokalregelschar gehörigen Scheitelstrahl c_λ ihres Fokalparaboloides C^2 bzw. in den zu ihr perspektiven elliptischen Punktinvolutionen $[X_\varkappa^1, X_\varkappa^2 - \cdots]$ und $[\mathfrak{X}_\varkappa^1, \mathfrak{X}_\varkappa^2 - \cdots]$. Das durch die Punktinvolution $[X_\varkappa^1, X_\varkappa^2 - \cdots]$ bestimmte Involutionszentrum $J_\varkappa$ liegt nach **26.** auf der

Achse c_d der Parabel π^2 im Inneren dieser Kurve, und die in $J_\varkappa$ auf der Achse errichtete Normale schneidet π^2 in zwei zugeordneten Punkten $P_\varkappa^1, P_\varkappa^2$ der Involution $[X_\varkappa^1, X_\varkappa^2 - \cdots]$, welche durch die beiden bzw. durch sie hindurchgehenden zugeordneten Strahlen $p_\varkappa^1, p_\varkappa^2$ der Fokalinvolution $[x_\varkappa^1, x_\varkappa^2 - \cdots]$ orthogonal in die Potenzpunkte $\mathfrak{P}_\varkappa^1, \mathfrak{P}_\varkappa^2$ der elliptischen Punktinvolution $[\mathfrak{X}_\varkappa^1, \mathfrak{X}_\varkappa^2 - \cdots]$ auf c_λ projiziert werden. Die Sehne $P_\varkappa^1 P_\varkappa^2$ von π^2 hat, wenn der Brennpunkt dieser Parabel und das Involutionszentrum $J_\varkappa$ vom Scheitelpunkte von π^2 bzw. um d und $i_\varkappa$ abstehen, die Länge $2\sqrt{4di_\varkappa}$, folglich hat die Potenz der elliptischen Punktinvolution $[\mathfrak{X}_\varkappa^1, \mathfrak{X}_\varkappa^2 - \cdots]$ den Wert $-2di_\varkappa$. Bei einer hyperbolischen linearen Kongruenz ist nun $i_\varkappa$ nach **26.** stets $< 2d$ und auch die zweite Fokalinvolution $[x_\lambda^1, x_\lambda^2 - \cdots]$ elliptisch, sie schneidet den Scheitelstrahl $c_\varkappa$ von C^2 in einer zu ihr perspektiven elliptischen Punktinvolution $[\mathfrak{X}_\lambda^1, \mathfrak{X}_\lambda^2 - \cdots]$, deren Potenz den Wert $-2d(2d - i_\varkappa)$ hat. — Alle elliptischen Fokalinvolutionen $[x_\varkappa^1, x_\varkappa^2 - \cdots]$, deren Potenzstrahlen auf dem Scheitelstrahle c_λ eine Strecke $< 4d$ begrenzen, bestimmen hyperbolische lineare Kongruenzen mit dem Fokalparaboloide C^2. Eine elliptische Fokalinvolution $[x_\varkappa^1, x_\varkappa^2 - \cdots]$, deren Potenzstrahlen auf c_λ eine Strecke $= 4d$ begrenzen, legt eine parabolische lineare Kongruenz mit diesem Fokalparaboloide fest, endlich eine elliptische Fokalinvolution, deren Potenzstrahlen auf c_λ eine Strecke $> 4d$ ausschneiden, eine zum gleichen Fokalparaboloide gehörige elliptische lineare Kongruenz. Die elliptische Fokalinvolution $[x_\varkappa^1, x_\varkappa^2 - \cdots]$ einer parabolischen linearen Kongruenz wird nach **16.** von den zueinander normalen Strahlen der Regelschar $\mathfrak{C}_\varkappa^2$ des Fokalparaboloides C^2 gebildet. Diese schneiden also den Scheitelstrahl c_λ von C^2 — wie ja auch sonst bekannt ist — in den Punktepaaren einer elliptischen Punktinvolution von der Potenz $-(2d)^2$. Schneidet die elliptische Fokalinvolution einer elliptischen linearen Kongruenz C_1^1 auf dem Scheitelstrahle c_λ des zugehörigen Fokalparaboloides C^2 eine zu ihr perspektive elliptische Punktinvolution mit der Potenz $-2di_\varkappa$ aus, so schneidet ihre hyperbolische Fokalinvolution den anderen Scheitelstrahl $c_\varkappa$ von C^2 in einer zu ihr perspektiven hyperbolischen Punktinvolution mit der Potenz $2d(i_\varkappa - 2d)$.

28. Ist $[\mathfrak{X}_\varkappa^1, \mathfrak{X}_\varkappa^2 - \cdots]$ die durch die Fokalinvolution $[x_\varkappa^1, x_\varkappa^2 - \cdots]$ von C_1^1 auf dem Scheitelstrahle c_λ von C^2 ausgeschnittene Punktinvolution, so gehen nach **17.** durch die zugeordneten Punkte $\mathfrak{X}_\varkappa^1, \mathfrak{X}_\varkappa^2$ die bzw. zu $x_\varkappa^2, x_\varkappa^1$ parallelen Kongruenzstrahlen x_1, x_2. Sie beschreiben die gleichseitige parabolische Regelschar $\mathfrak{P}_\lambda^2$, welche alle mit c_λ inzidenten Kongruenzstrahlen bilden, wenn $x_\varkappa^1, x_\varkappa^2$ die Fokalinvolution in der Fokalregelschar $\mathfrak{C}_\varkappa^2$ durchlaufen. In $\mathfrak{P}_\lambda^2$ kreuzt x_1 einen Regelstrahl n_2 rechtwinklig. n_2 wird gefunden, indem man zunächst in der Regelschar $\mathfrak{C}_\varkappa^2$

von C^2 den $x_\varkappa{}^2$ rechtwinklig kreuzenden Regelstrahl $n_\varkappa{}^1$ aufsucht und seinen Schnittpunkt $\mathfrak{N}_\varkappa{}^1$ mit c_λ bestimmt, n_2 ist dann inzident mit dem $\mathfrak{N}_\varkappa{}^1$ durch die Punktinvolution $[\mathfrak{X}_\varkappa{}^1, \mathfrak{X}_\varkappa{}^2 - \cdots]$ zugeordneten Punkt $\mathfrak{N}_\varkappa{}^2$. Die Potenz der elliptischen Involution, die alle sich rechtwinklig kreuzenden Regelstrahlen von $\mathfrak{C}_\varkappa{}^2$ auf c_λ ausschneiden, ist nach **27.** $-(2d)^2$, ferner sei $+d_\varkappa{}^2$ oder $-d_\varkappa{}^2$ die Potenz der Punktinvolution $[\mathfrak{X}_\varkappa{}^1, \mathfrak{X}_\varkappa{}^2 - \cdots]$, je nachdem die zu ihr perspektive Fokalinvolution $[x_\varkappa{}^1, x_\varkappa{}^2 - \cdots]$ hyperbolisch oder elliptisch ist, endlich sei $-d_x{}^2$ die gesuchte Potenz der Punktinvolution, in der alle sich rechtwinklig kreuzenden Regelstrahlen von $\mathfrak{P}_\lambda{}^2$ den Scheitelstrahl c_λ treffen. Dann gelten, wenn C wiederum der Scheitelpunkt des Fokalparaboloides C^2 ist, gemäß der soeben durchgeführten Konstruktion des x_1 rechtwinklig kreuzenden Strahles n_2 die Beziehungen:

$$C\mathfrak{X}_\varkappa{}^2 \cdot C\mathfrak{N}_\varkappa{}^1 = -(2d)^2,$$
$$C\mathfrak{N}_\varkappa{}^1 \cdot C\mathfrak{N}_\varkappa{}^2 = \pm d_\varkappa{}^2,$$
$$C\mathfrak{X}_\varkappa{}^1 \cdot C\mathfrak{N}_\varkappa{}^2 = -d_x{}^2.$$

Geht insbesondere x_1 durch einen Doppelpunkt bzw. einen Potenzpunkt der Punktinvolution $[\mathfrak{X}_\varkappa{}^1, \mathfrak{X}_\varkappa{}^2 - \cdots]$ — etwa durch den, der von C den Abstand $+d_\varkappa$ hat, so ist $C\mathfrak{X}_\varkappa{}^1 = d_\varkappa$ und $C\mathfrak{X}_\varkappa{}^2 = \pm d_\varkappa$, und es folgt:

$$\pm d_\varkappa \cdot C\mathfrak{N}_\varkappa{}^1 = -(2d)^2,$$
$$C\mathfrak{N}_\varkappa{}^1 \cdot C\mathfrak{N}_\varkappa{}^2 = \pm d_\varkappa{}^2,$$
$$d_\varkappa \cdot C\mathfrak{N}_\varkappa{}^2 = -d_x{}^2,$$

oder:

$$-\left(\frac{d_\varkappa{}^2}{2d}\right)^2 = -d_x{}^2.$$

$\frac{d^2{}_\varkappa}{2d}$ ist aber gleich dem absoluten Werte des Abstandes des Involutionszentrums $J_\varkappa$ vom Scheitelpunkte C von C^2. Wird dieser absolute Wert durch $[J_\varkappa C]$ bezeichnet und ferner der absolute Wert des Abstandes der Potenzpunkte der elliptischen Punktinvolution, welche die sich rechtwinklig kreuzenden Strahlen von $\mathfrak{P}_\lambda{}^2$ auf der Nebensymmetrieachse c_λ bestimmen, durch $[2d_x]$, so ergibt sich die merkwürdige Beziehung:

$$[J_\varkappa C] = [d_x].$$

Die Strecke $[J_\varkappa C]$ auf c_λ von C aus nach beiden Seiten abgetragen, liefert also die Potenzpunkte der Involution, in der die mit c_λ inzidenten sich rechtwinklig kreuzenden Kongruenzstrahlen diese Nebensymmetrieachse von $C_1{}^1$ treffen.

29. Die Abstände der in **26.** bestimmten Involutionszentren J_1, J_2 vom Scheitelpunkte C der Hauptparabel π^2 sollen positiven Wert haben, wenn das betreffende Involutionszentrum innerhalb π^2, negativen, wenn es außerhalb π^2 liegt. Somit wird die Potenz der von einer linearen Kongruenz $C_1{}^1$ auf ihrer Hauptsymmetrieachse c_d hervorgerufenen Involution, da J_1, J_2 nach **26.** durch $C_1{}^1$ einander zugeordnet sind, dargestellt durch das Produkt $CJ_1 \cdot CJ_2$. Die Involutionszentren J_1, J_2 sind aber, wie ebenfalls daselbst bewiesen wurde, auch symmetrisch zum Brennpunkte von π^2. Ist demnach J_1 das zu einer elliptischen Fokalinvolution einer linearen Kongruenz gehörige Involutionszentrum, $2d_1$ die Strecke, die ihre Potenzstrahlen auf dem Scheitelstrahle c_2 des Fokalparaboloides C^2 begrenzen, und d wiederum der Abstand des Brennpunktes vom Scheitelpunkte C von π^2, so läßt sich jenes Produkt auch in der Form:

$$\frac{d_1{}^2(4d^2 - d_1{}^2)}{4d^2}$$

oder nach **28.** in der Form:

$$d_1{}^2 - d_x{}^2 \quad \text{bzw.} \quad d_1{}^2 - CJ_1{}^2$$

darstellen.

Bei einer elliptischen linearen Kongruenz $C_1{}^1$ ist $2\sqrt{d_1{}^2 - d_x{}^2}$ gleich dem Abstande der beiden zur Hauptmittelebene γ parallelen und durch $C_1{}^1$ einander zugeordneten Ebenen, in denen die Potenzpunkte der durch die lineare Kongruenz auf ihren Strahlen hervorgerufenen elliptischen Punktinvolutionen liegen.

Die in einer linearen Strahlenkongruenz enthaltenen rotatorischen Regelscharen.

30. Nach **14.** ist das in der Hauptmittelebene γ einer linearen Kongruenz $C_1{}^1$ gelegene Punktfeld korrelativ zu dem unendlich fernen Strahlenfelde, wenn der Spur $\mathfrak{X}$ jedes Kongruenzstrahles x mit γ die Schnittgerade x_∞ der zu ihm senkrechten Mittelebene $\mathfrak{x}$ mit der unendlich fernen Ebene zugewiesen wird. Alle durch eine Erzeugende e des Fokalparaboloides C^2 von $C_1{}^1$ gehenden Ebenen sind nun Mittelebenen von $C_1{}^1$. Dem Strahlenbüschel, in dem die unendlich ferne Ebene den Ebenenbüschel I. Ordnung $[e]$ schneidet, entspricht in γ eine zum Ebenenbüschel $[e]$ perspektive Punktreihe I. Ordnung $[\mathfrak{e}]$. Die durch die Punkte dieser Punktreihe gehenden Strahlen von $C_1{}^1$ sind normal zu den durch diese Punkte gehenden Ebenen des Büschels $[e]$, sie bilden folglich eine parabolische Regelschar $\mathfrak{E}^2$ II. Ordnung, deren unendlich ferne Leitgerade der $\mathfrak{e}$ durch $C_1{}^1$ zugeordnete Strahl $\mathfrak{e}_\infty$ ist. $\mathfrak{e}_\infty$ kreuzt e rechtwinklig. Zur Regelschar $\mathfrak{E}^2$ gehört der mit der unendlich fernen Geraden von γ zusammenfallende Kongruenzstrahl c_∞, ferner, wenn c_λ der e schneidende Scheitelstrahl von C^2 ist, der zur Ebene ec_λ normale Kongruenzstrahl n_e, somit ist $\mathfrak{e}$ die in der Ebene γ gelegene im Punkte $c_\lambda n_e$ auf c_λ errichtete Senkrechte. Die Ebene

$n_e c_\lambda$ enthält den unendlich fernen Leitstrahl, die Ebene γ den unendlich fernen Regelstrahl c_∞ der Regelschar $\mathfrak{G}^2$. Die Geraden $\mathfrak{e}$, n_e sind also, da sie auf der Schnittgeraden c_λ dieser beiden Ebenen normal sind, die Scheitelstrahlen und c_λ die Hauptachse des Paraboloides E^2, auf dem $\mathfrak{G}^2$ liegt. — Die Regelschar $\mathfrak{G}^2$ ist projektiv zum Ebenenbüschel $[e]$, wenn jedem ihrer Strahlen $a_e, b_e, c_e, n_e, \cdots$ die zu ihm senkrechte Ebene dieses Büschels zugewiesen wird, folglich ist $\mathfrak{G}^2$ auch projektiv zu der zum Ebenenbüschel $[e]$ perspektiven orthogonalen Regelschar $\mathfrak{R}_e^2$, welche alle mit e inzidenten Kongruenzstrahlen $a_r, b_r, c_r, \cdots$ bilden, sobald — was nunmehr vorausgesetzt wird — e mit keiner Fokalachse von C_1^1 zusammenfällt. Entsprechende Strahlen $a_e, a_r - b_e, b_r - c_e, c_r - \cdots$ der beiden projektiven Regelscharen kreuzen sich rechtwinklig.

Aus ihrem unendlich fernen Leitstrahle $\mathfrak{e}_\infty$ wird die Regelschar $\mathfrak{G}^2$ durch einen zu ihr perspektiven Ebenenbüschel $[\mathfrak{e}_\infty]$ projiziert, dessen Ebenen auf e senkrecht stehen. Dieser Ebenenbüschel ist durch die Regelschar $\mathfrak{G}^2$ projektiv auf die Regelschar $\mathfrak{R}_e^2$ bezogen und schneidet folglich e in einer zu $\mathfrak{R}_e^2$ projektiveu Punktreihe. Es entspricht dabei der durch den Regelstrahl n_e von $\mathfrak{G}^2$, also auch zugleich durch c_λ gehenden Ebene der zu e parallele Kongruenzstrahl, und der unendlich fernen Ebene der im Punkte ec_λ auf c_λ normale, somit schneiden entsprechende Elemente der beiden projektiven Gebilde $[\mathfrak{e}_\infty]$ und $\mathfrak{R}_e^2$ die Erzeugende e in einer Punktinvolution. Sind also die Kongruenzstrahlen $a_r, b_r, c_r, \cdots$ mit einer Erzeugenden e des Fokalparaboloides C^2 inzident, und sind $a_e, b_e, c_e, \cdots$ die bzw. zu den Ebenen $a_r e, b_r e, c_r e, \cdots$ normalen Kongruenzstrahlen, so schneiden a_r und die durch a_e gehende Normalebene α von e, b_r und die durch b_e gehende Normalebene β von e usf. die Gerade e je in den Punktepaaren $A, A_\alpha - B, B_\beta - C, C_\gamma - \cdots$ einer Involution. Ihr Mittelpunkt ist der Schnittpunkt E der Erzeugenden e mit dem Scheitelstrahle c_λ von C^2. — Die Regelscharen $\mathfrak{G}^2$ und $\mathfrak{R}_e^2$ fallen zusammen, sobald die Erzeugende e von C^2 zu einem Scheitelstrahle dieser Fläche wird. Die bzw. auf den Ebenen $a_r e, b_r e, c_r e, \cdots$ normalen Kongruenzstrahlen $a_e, b_e, c_e, \cdots$ sind nämlich dann die $a_r, b_r, c_r, \cdots$ bzw. rechtwinklig kreuzenden Strahlen der gleichseitigen parabolischen Regelschar, welche alle mit jenem Scheitelstrahle inzidenten Kongruenzstrahlen bilden.

31. Unter der Voraussetzung, daß e weder mit einem Scheitelstrahle noch mit einer unendlich fernen Erzeugenden von C^2 zusammenfällt, ist die orthogonale Projektion der Regelschar $\mathfrak{G}^2$ des Paraboloides E^2 auf die durch c_λ gehende Normalebene ν von e ein parabolischer Strahlenbüschel ε^2. In ν liegt der zur Ebene ec_λ senkrechte Scheitelstrahl n_e von $\mathfrak{G}^2$ und die Scheitelebene $n_e\mathfrak{e}$ von E^2 ist zu c_λ normal, somit fällt c_λ mit der Achse und n_e mit dem Scheitelstrahle des parabolischen Büschels ε^2 zusammen. Sein Brennpunkt ist, da seine Strahlen bzw. auf den Ebenen des Büschels $[e]$ senkrecht stehen, der Punkt $ec_\lambda = E$. — Sind auf ν die Geraden z_r^ν, z_e^ν die Orthogonalprojektionen der sich rechtwinklig kreuzenden Regelstrahlen z_r, z_e von $\mathfrak{R}_e^2$ und $\mathfrak{E}^2$, so geht z_r^ν durch den Brennpunkt E von ε^2 und steht in seinem Schnittpunkte Z_e mit dem Scheitelstrahle n_e von ε^2 auf z_e^ν senkrecht. z_r durchbohrt nun ν in einem Punkte Z_r' der Schnittkurve von $\mathfrak{R}_e^2$ und ν. Da diese nach **17.** ein Kreis ist, dessen Mittelpunkt auf der Achse des parabolischen Büschels ε^2 liegt, so besteht zwischen den Strecken $Z_r'E$ und Z_eE die Beziehung:

$$Z_r'E \cdot Z_eE = \text{Const.}$$

Der Durchstoßungspunkt Z_r' eines Strahles z_r von $\mathfrak{R}_e^2$ mit der Ebene ν und die Orthogonalprojektion des z_r rechtwinklig kreuzenden Strahles z_e von $\mathfrak{E}^2$ auf ν sind folglich Pol und Polare in einem zirkular polaren Felde γ_ν^2 mit dem Mittelpunkte E. Nun schneiden aber nach **30.** die Strahlen $a_r, b_r, \cdots, z_r, \cdots$ von $\mathfrak{R}_e^2$ und die durch die Strahlen $a_e, b_e, \cdots, z_e, \cdots$ von $\mathfrak{E}^2$ gehenden zu e normalen Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \cdots, \zeta, \cdots$ die Gerade e je in den Punktepaaren $A, A_\alpha - B, B_\beta - \cdots - Z, Z_\zeta - \cdots$ einer Involution mit dem Mittelpunkte E, demnach folgt:

Die bzw. sich rechtwinklig kreuzenden Strahlen

$$a_r, a_e - b_r, b_e - \cdots - z_r, z_e - \cdots$$

der in der linearen Kongruenz enthaltenen Regelscharen $\mathfrak{R}_e^2$, $\mathfrak{E}^2$ sind reziproke Polaren in einem rotatorischen polaren Raume Γ_e^2. Seine Rotationsachse ist e, seine zu e senkrechte Symmetrieebene ist ν. Dieser polare Raum ruft in ν das zirkular polare Feld γ_ν^2 und auf e die Punktinvolution $A, A_\alpha - B, B_\beta - \cdots - Z, Z_\zeta - \cdots$ hervor, und er führt, da die in ihm enthaltenen reziproken Polaren

$$a_r, a_e - b_r, b_e - \cdots - z_r, z_e - \cdots$$

nicht einer und derselben Regelschar von C_1^1 angehören, die lineare Kongruenz C_1^1 in sich selbst über.

32. Dem unendlich fernen Punkte Z_r^∞ eines Regelstrahles z_r von $\mathfrak{R}_e^2$ ist durch C_1^1 der Treffpunkt Z_r' mit der Hauptmittelebene γ der Kongruenz zugeordnet, ferner im rotatorischen polaren Raum Γ_e^2 die mit dem Mittelpunkte E von Γ_e^2 und der Polare z_e von z_r inzidente Durchmesserebene z_eE. Nun durchbohrt z_e als der zur Mittelebene z_re von C_1^1 normale Kongruenzstrahl die Hauptmittelebene γ in einem Punkte der Schnittgeraden $Z_r'E$ dieser beiden Ebenen, folglich enthält die Durchmesserebene z_eE die Gerade $Z_r'E$ selbst, und Z_r' ist also auch dem unendlich fernen Punkte Z_r^∞ von z_r im rotatorischen polaren Raume Γ_e^2 konjugiert.

Dem unendlich fernen Punkte Z_e^∞ eines Regelstrahles z_e von $\mathfrak{E}^2$ ist ferner durch C_1^1 der Schnittpunkt Z_e' von z_e mit der zu ihm normalen Ebene $e z_r$ zugeordnet. Die Punkte Z_e', Z_e^∞ sind konjugiert für jede Regelfläche II. Grades, auf welcher eine in C_1^1 enthaltene Regelschar II. Ordnung liegt, insbesondere also auch für die durch die orthogonale Regelschar $\mathfrak{R}_e^2$ gehende Fläche R_e^2 und den Kreis z^2, den die mit z_e inzidente zu e normale Ebene ζ mit R_e^2 gemein hat. Der Mittelpunkt von z^2 liegt auf der mit ζ inzidenten in Z_e' auf z_e errichteten Normalen, sie schneidet die beiden Leitstrahlen e, e' von $\mathfrak{R}_e^2$, aus denen die Strahlen dieser Regelschar durch je zwei zueinander normale Ebenen projiziert werden, bzw. in den Punkten Z_ζ, Z'. Da die Ebene eZ' somit den z_e rechtwinklig kreuzenden Strahl z_r von $\mathfrak{R}_e^2$ enthält, so geht z_r durch Z'. Dieser Punkt liegt aber auf e', und e, e' sind nach **17.** durch C_1^1 einander zugeordnet, folglich schneidet z_r diese Strahlen in den durch C_1^1 einander zugeordneten Punkten $Z = z_r e$ und Z'. Ersterer Punkt ist nach **31.** der Pol der Ebene ζ im rotatorischen polaren Raume Γ_e^2, folglich sind Z, Z' nicht nur durch C_1^1 einander zugeordnet, sondern auch in Γ_e^2 einander konjugiert.

Die auf z_r durch C_1^1 und Γ_e^2 hervorgerufenen Punktinvolutionen haben also die beiden Punktepaare Z_r', Z_r^∞ und Z, Z' gemein und sind folglich identisch. Nur wenn z_r zu dem zu e bzw. e' parallelen Regelstrahle n_r bzw. n_r^1 von $\mathfrak{R}_e^2$ wird, gilt dieser Schluß nicht. Die Strahlen n_r, n_r^1 nehmen jedoch keine Ausnahmestellung ein, wie die folgende Untersuchung zeigt.

Auf einem weder mit n_r noch n_r^1 zusammenfallenden Strahle z_r von $\mathfrak{R}_e^2$ sei dem Punkte $z_r e = Z$ durch C_1^1 der Punkt Z' zugeordnet. Beide Punkte sind in Γ_e^2 konjugiert. Die Punkte Z, Z' liegen mit dem n_r rechtwinklig kreuzenden Regelstrahle n_e von $\mathfrak{E}^2$ in zwei durch C_1^1 einander zugeordneten Ebenen $n_e Z = \zeta_n$, $n_e Z' = \zeta_n'$. Nach **31.** ist nun Z in Γ_e^2 der Pol der durch z_e und Z' gehenden Normalebene ζ von e, und n_e die Polare von n_r, folglich fällt der Pol von ζ_n in den Punkt $n_r\zeta$. Die Ebenen ζ, ζ_n' schneiden sich nun in der durch Z' laufenden Parallelen zu n_e. Sie fällt, da Z' ein Punkt der e durch C_1^1 zugeordneten Geraden e' ist, in die e' enthaltende Normalebene von c_λ. In ihr liegt n_r, folglich ist der Pol $n_r\zeta$ von ζ_n ein Punkt von ζ_n', und demnach sind die durch C_1^1 einander zugeordneten Ebenen ζ_n, ζ_n' im rotatorischen polaren Raume Γ_e^2 konjugiert. Jede trifft n_r im Pole der anderen. Die beiden durch C_1^1 und Γ_e^2 einander zugeordneten Ebenen ζ_n, ζ_n' schneiden also den Kongruenzstrahl n_r in zwei durch C_1^1 einander zugeordneten und in Γ_e^2 konjugierten Punkten. Außer dem Mittelpunkte N_r' haben hiernach die beiden auf n_r durch C_1^1 und Γ_e^2 hervorgerufenen Involutionen noch ein Punktepaar gemein, sie sind folglich identisch.

n_r^1 ist der zu e' parallele Strahl von $\mathfrak{R}_e^2$, folglich ist die Ebene $e n_r^1$

normal zu c_λ, also auch zur Hauptmittelebene γ. In γ liegt der unendlich ferne Kongruenzstrahl c_∞, er ist der n_r^1 rechtwinklig kreuzende Strahl von $\mathfrak{S}^2$. Die von c_∞ nach den Punkten Z, Z' gesandten Ebenen ζ_c, ζ_c' sind wiederum durch C_1^1 einander zugeordnet, und n_r^1 trifft als Polare von c_∞ in Γ_e^2 die Polarebene ζ von Z in dem ζ_c durch Γ_e^2 zugewiesenen Pole. Nun gehen die Hauptmittelebene γ und die zu e normale Symmetrieebene ν von Γ_e^2 durch c_λ. Zu γ bzw. ν ist die Ebene ζ_c' bzw. ζ parallel, sonach schneiden sich ζ_c' und ζ in einer zu c_λ parallelen Geraden. Sie enthält den auf e' gelegenen Punkt Z', und da die parallelen Geraden n_r^1 und e' mit c_λ inzident sind, so ist sie selbst mit n_r^1 inzident. Als Pol $n_r^1\zeta$ von ζ_c ergibt sich also ein Punkt von ζ_c'. Die durch C_1^1 einander zugeordneten Ebenen ζ_c, ζ_c' sind demnach zugleich in Γ_e^2 konjugiert. Jede schneidet n_r^1 im Pole der anderen, und diese Pole sind durch C_1^1 einander zugeordnet. Die beiden durch C_1^1 und Γ_e^2 auf n_r^1 hervorgerufenen Involutionen haben denselben Mittelpunkt E und, wie soeben gezeigt wurde, noch ein Punktepaar gemein, folglich fallen auch auf n_r^1 alle ihre Punktepaare zusammen. Das Ergebnis der Untersuchungen in dieser Nummer ist also:

In allen Strahlen der orthogonalen Regelschar $\mathfrak{R}_e^2$ rufen C_1^1 und Γ_e^2 die nämlichen Punktinvolutionen, in allen Strahlen der zu $\mathfrak{R}_e^2$ in Γ_e^2 polaren parabolischen Regelschar $\mathfrak{S}^2$ die nämlichen Ebeneninvolutionen hervor.

33. Nach **32.** sind zwei mit einem Strahle z_e der Regelschar $\mathfrak{S}^2$ inzidente durch C_1^1 einander zugeordnete Ebenen α, α' auch in Γ_e^2 konjugiert und schneiden die Regelschar $\mathfrak{R}_e^2$ bzw. in den Kegelschnitten α^2, α'^2, deren Punkte ebenfalls paarweise durch C_1^1 einander zugeordnet und in Γ_e^2 konjugiert sind. Ein solches Punktepaar bilden die Pole $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ der Ebenen α, α', sie werden aus α' bzw. α nach **31.** durch den z_e rechtwinklig kreuzenden Regelstrahl z_r von $\mathfrak{R}_e^2$ ausgeschnitten. Die Polare einer mit $\mathfrak{A}$ und α' inzidenten Geraden $\mathfrak{g}'$ sei in Γ_e^2 die mit $\mathfrak{A}'$ und α inzidente Gerade $\mathfrak{g}$. Auf $\mathfrak{g}'$ liegt außer $\mathfrak{A}$ noch ein Punkt $\mathfrak{G}'$ von α'^2, auf $\mathfrak{g}$ außer $\mathfrak{A}'$ der $\mathfrak{G}'$ in Γ_e^2 konjugierte und folglich auch durch C_1^1 zugeordnete Punkt $\mathfrak{G}$ von α^2. Die reziproken Polaren $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ in Γ_e^2 sind demnach durch C_1^1 einander zugeordnet. — Die Strahlen von C_1^1 treffen die durch C_1^1 einander zugeordneten Ebenen α, α' in einander zugeordneten Punkten. Ein von z_e verschiedener Kongruenzstrahl x trifft also die Ebenen α, α' bzw. in den einander zugeordneten Punkten X, X' der bzw. durch $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}$ gehenden einander zugeordneten Geraden $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$. Diese sind aber auch reziproke Polaren in Γ_e^2, folglich sind die Treffpunkte von x mit α, α' durch C_1^1 einander zugeordnet und in Γ_e^2 konjugiert. Was von α, α' gilt, gilt für jedes andere Paar der sich in z_e schneidenden, durch C_1^1 einander zugeordneten und folglich auch in Γ_e^2 konjugierten Ebenen, somit rufen Γ_e^2 und C_1^1 in jedem Strahle von C_1^1 identische Punktinvolutionen, und da C_1^1 nach **31.** durch Γ_e^2 in sich selbst übergeführt wird, auch identische Ebeneninvolutionen hervor. e kann nach **31.** jede im Endlichen gelegene Erzeugende des Fokalparaboloides C^2 mit Ausnahme seiner beiden Scheitelstrahlen sein. Jeder von diesen ist aber schon nach **7.** die Rotationsachse eines rotatorischen polaren Raumes, der C_1^1 derart in sich selbst überführt, daß die durch C_1^1 einander zugeordneten Punkte und Ebenen in ihm konjugiert sind. Sonach ist bewiesen:

Jede im Endlichen gelegene Erzeugende e des Fokalparaboloides C^2 ist die Rotationsachse eines rotatorischen polaren Raumes Γ_e^2, der C_1^1 in sich selbst überführt, und in dem die durch C_1^1 einander zugeordneten Punkte und Ebenen konjugiert sind.

Dieser rotatorische polare Raum artet aus, wenn die Kongruenz C_1^1 elliptisch ist, und e mit einer der beiden reellen Fokalachsen f', f'' zusammenfällt. Seine Inzidenzfläche ist dann die betreffende Fokalachse selbst, diese ist in ihm zu jedem anderen Strahle von C_1^1 polar.

34. Eine hyperbolische lineare Kongruenz hat keine, eine elliptische zwei reelle Strahlen — die beiden Fokalachsen f', f'' —, in denen sie zirkulare Ebeneninvolutionen hervorruft. Diese enthält also zwei, jene keine Strahlen, die nach **33.** die Rotationsachsen rotatorischer polarer Räume Γ_e^2 sind.

Ist eine nicht zu einer linearen Kongruenz C_1^1 gehörige Gerade e die Rotationsachse eines rotatorischen polaren Raumes Γ_e^2, der C_1^1 derart in sich überführt, daß die durch C_1^1 einander zugeordneten Punkte und Ebenen in ihm konjugiert sind, so ist in Γ_e^2 die Polare eines mit e inzidenten Kongruenzstrahles x_r ein Kongruenzstrahl x_e, der normal zur Ebene $x_r e$ steht. Dem Schnittpunkte von x_e mit der Ebene $x_r e$ ist in Γ_e^2 der unendlich ferne Punkt von x_e konjugiert und durch C_1^1 derselbe Punkt zugeordnet, die Ebene $x_r e$ ist folglich nach **13.** die auf x_e senkrechte Mittelebene von C_1^1. Jede durch e gehende Ebene enthält einen mit e inzidenten Kongruenzstrahl, demnach ist jede solche Ebene eine Mittelebene von C_1^1, und folglich e eine Erzeugende des gleichseitigen Fokalparaboloides C^2 von C_1^1. Kurz:

Außer den im Endlichen gelegenen Erzeugenden des Fokalparaboloides C^2 einer linearen Kongruenz C_1^1 gibt es keine weiteren Geraden, welche Rotationsachsen rotatorischer polarer Räume Γ_e^2 sind, die C_1^1 derart in sich überführen, daß die durch C_1^1 einander zugeordneten Punkte in den polaren Räumen konjugiert sind.

35. Der durch die Erzeugende e von C^2 nach **33.** bestimmte rotatorische polare Raum Γ_e^2 ruft auf dem zu e senkrechten Scheitelstrahle c_1

von C^2 eine Punktinvolution hervor, deren Mittelpunkt mit dem Mittelpunkte $ec_\lambda = E$ von Γ_e^2 zusammenfällt. Nun sind der zu e parallele Kongruenzstrahl n_r und der ihn rechtwinklig kreuzende zur Regelschar $\mathfrak{E}^2$ gehörige Kongruenzstrahl n_e nach **31.** reziproke Polaren in Γ_e^2, folglich schneiden n_r, n_e auf c_λ ein Punktepaar N_r, N_e dieser Involution aus. Für die Abstände der Punkte N_r, N_e vom Scheitelpunkte C von C^2 gilt nach **28.** die Beziehung:

$$(\alpha) \qquad CN_r \cdot CN_e = -\left(\frac{d_\varkappa^{\,2}}{2d}\right)^2.$$

Durch N_r geht nach **17.** der e durch C_1^1 zugeordnete Strahl e'. Je nachdem die Regelschar $\mathfrak{C}_\varkappa^2$ von C^2, zu der e, e' gehören, durch C_1^1 elliptisch oder hyperbolisch involutorisch gepaart wird, besteht zwischen den Abständen der Punkte N_r und E vom Scheitelpunkte C wiederum nach **28.** die Gleichung:

$$(\beta_1) \qquad CN_r \cdot CE = -d_\varkappa^2,$$

bzw.

$$(\beta_2) \qquad CN_r \cdot CE = +d_\varkappa^2.$$

Bei einer hyperbolischen linearen Kongruenz sind nach **15.** beide Fokalinvolutionen elliptisch, folglich gelten für sie die Gleichungen (α) und (β_1). Die Punkte N_e und E sind also auf c_λ durch C vom Punkte N_r getrennt. Bei einer hyperbolischen linearen Kongruenz ist ferner für beide Fokalinvolutionen nach **27.**:

$$d_\varkappa < 2d.$$

Demnach folgt aus dem sich aus (α) und (β_1) ergebenden Ausdrucke:

$$(\gamma) \qquad \frac{CN_e}{CE} = \left(\frac{d_\varkappa}{2d}\right)^2,$$

daß bei ihr N_e die Punkte C und E trennt, und C also innerhalb der endlichen Strecke N_rN_e liegt. Die in Γ_e^2 konjugierten Punkte N_r, N_e und der Mittelpunkt E dieses polaren Raumes bestimmen somit auf c_λ eine hyperbolische Punktinvolution, d. h. Γ_e^2 hat eine reelle Inzidenzfläche. Für den Fall, daß e mit einer Nebensymmetrieachse der hyperbolischen linearen Kongruenz zusammenfällt, ist der Beweis hierfür schon in **7.** erbracht worden. Kurz es gilt:

> Jede im Endlichen gelegene Erzeugende e des Fokalparaboloides einer hyperbolischen linearen Kongruenz ist die Rotationsachse eines rotatorischen polaren Raumes Γ_e^2 mit reeller Inzidenzfläche.

Bei einer elliptischen linearen Kongruenz ist nach **15.** nur die eine Fokalinvolution — etwa die, welche die Fokalregelschar $\mathfrak{C}_1^2$ paart —

elliptisch. Gehört demnach e zu dieser Regelschar, so trennt nach (α) und (β_1) der Scheitelpunkt C von C^2 wiederum N_r von N_e und E. **Für** die elliptische Fokalinvolution der vorliegenden elliptischen Kongruenz ist aber nach **27.**:

$$d_2 > 2d.$$

Somit liegt nach (γ) der Punkt E innerhalb der endlichen Strecke $N_e C$ und also auch innerhalb der endlichen Strecke $N_r N_e$. Der zu e gehörige rotatorische polare Raum Γ_e^2 hat demnach hier eine imaginäre Inzidenzfläche. Eine solche gehört nach **7.** ebenfalls zu dem in $\mathfrak{C}_1^2$ enthaltenen Scheitelstrahle c_1 des Fokalparaboloides C^2. Folglich ist dargetan:

Die im Endlichen gelegenen Strahlen der elliptisch involutorischen Fokalregelschar einer elliptischen linearen Kongruenz sind die Rotationsachsen rotatorischer polarer Räume Γ_e^2 mit imaginären Inzidenzflächen.

Da die Fokalregelschar $\mathfrak{C}_1^2$ der vorliegenden elliptischen linearen Kongruenz durch letztere elliptisch involutorisch gepaart wird, so muß die involutorische Paarung der zweiten Fokalregelschar $\mathfrak{C}_2^2$ hyperbolisch sein. Jene elliptische Fokalinvolution kann derart bestimmt werden, daß diese hyperbolische auf dem Scheitelstrahle c_2 des Fokalparaboloides C^2 eine hyperbolische Punktinvolution ausschneidet, deren Potenz $+d_1^2$ irgend einen vorgeschriebenen positiven Wert annimmt. Für die Beziehungen zwischen den drei Punkten N_r, N_e und E sind daher nur die Gleichungen (α) und (β_2) zu berücksichtigen. Nach ihnen liegt E innerhalb oder außerhalb der endlichen Strecke $N_e N_r$, je nachdem E auf c_1 innerhalb oder außerhalb der Strecke liegt, die den Abstand der reellen Fokalachsen f', f'' der elliptischen linearen Kongruenz mißt. Mit Rücksicht auf **7.** ist hiernach bewiesen:

Paart eine elliptische lineare Kongruenz die Regelschar $\mathfrak{C}_2^2$ ihres Fokalparaboloides C^2 hyperbolisch, so zerfallen die Strahlen e von $\mathfrak{C}_2^2$ in solche, welche Rotationsachsen rotatorischer polarer Räume Γ_e^2 mit imaginären, und in solche, welche Rotationsachsen rotatorischer polarer Räume Γ_e^2 mit reellen Inzidenzflächen sind. Ein Strahl e von $\mathfrak{C}_2^2$ ist die Rotationsachse eines polaren Raumes Γ_e^2 mit imaginärer Inzidenzfläche, sobald er in den von den Fokalachsen begrenzten Teil von $\mathfrak{C}_2^2$ fällt, der den Scheitelstrahl c_2 enthält. Ist e außerhalb dieses Teiles gelegen, so hat der zugehörige polare Raum Γ_e^2 eine reelle Inzidenzfläche. Ist e eine der beiden Fokalachsen, so artet die Inzidenzfläche nach **33.** in diese Fokalachse selbst aus.

Bei einer hyperbolischen linearen Kongruenz läßt sich der Nachweis, daß jede im Endlichen gelegene Erzeugende e ihres Fokalparaboloides C^2 die Rotationsachse eines rotatorischen polaren Raumes Γ_e^2 mit reeller

Inzidenzfläche ist, auch auf folgende einfache und anschauliche Weise führen:

Die Punkte der beiden Leitgeraden u, v einer hyperbolischen linearen Kongruenz $C_1{}^1$ sind durch diese sich selbst zugeordnet. Hat also ein polarer Raum die Eigenschaft, daß er $C_1{}^1$ in sich selbst überführt, und dabei die durch $C_1{}^1$ einander zugeordneten Punkte in ihm konjugiert sind, so muß dieser Raum eine reelle Inzidenzfläche haben, auf der u, v liegen. Diese Inzidenzfläche ist somit eine Regelfläche II. Grades, deren eine Regelschar aus Strahlen von $C_1{}^1$ besteht. Jede im Endlichen gelegene Erzeugende e des Fokalparaboloides C^2 einer hyperbolischen linearen Kongruenz ist nun nach **33.** die Rotationsachse eines rotatorischen polaren Raumes $\Gamma_e{}^2$, der $C_1{}^1$ derart in sich selbst überführt, daß die durch $C_1{}^1$ einander zugeordneten Punkte in ihm konjugiert sind. Folglich ist die Inzidenzfläche dieses rotatorischen polaren Raumes reell und zwar ein Rotationshyperboloid, dessen eine Regelschar in $C_1{}^1$ enthalten ist. Sie wird von den Leitgeraden u, v von $C_1{}^1$ beschrieben, sobald diese um e rotieren. Das Fokalparaboloid einer hyperbolischen linearen Kongruenz ist somit der Ort aller Punkte, die von ihren Leitgeraden u, v gleichen Abstand haben.*)

Konfokale lineare Strahlenkongruenzen.

36. Eine gleichseitige parabolische Regelschar läßt sich auf ∞^1 Weise derart involutorisch paaren, daß ihr unendlich ferner Strahl und der ihn rechtwinklig kreuzende einander zugeordnet bleiben. Nach **25.** kann demnach ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid C^2 als der Träger der Fokalinvolutionen von ∞^1 linearen Strahlenkongruenzen angesehen werden, unter denen zwei parabolische sind. Diese ∞^1 linearen Strahlenkongruenzen sollen konfokal heißen. Die Mittelebenen konfokaler linearer Kongruenzen fallen zusammen, sie sind die Tangentialebenen ihres gemeinsamen Fokalparaboloides C^2.

Eine im Endlichen gelegene Tangentialebene τ von C^2, die keinen Scheitelstrahl der Fläche enthält, schneidet die zu ihr normalen Tangentialebenen in den Strahlen eines parabolischen Strahlenbüschels τ^2. Nun trifft ein Strahl s von τ^2, der nicht auf C^2 liegt, außer dem in τ gelegenen Regelstrahle r_1 und Leitstrahle l_2 noch einen Regelstrahl r_1' und einen Leitstrahl l_2' von C^2. Demnach bilden die zur Regel- bzw. Leitschar von C^2 gehörigen Scheitelstrahlen c_1, c_2 und die sie bzw. rechtwinklig kreuzenden Geraden $c_1'^\infty$, $c_2'^\infty$ mit den Regelstrahlen r_1, r_1' und den Leit-

*) Schröter, Über ein einfaches Hyperboloid von besonderer Art. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 85 (1877), S. 30, N. 3.

strahlen l_2, l_2' zwei Strahlenpaare $r_1, r_1' - c_1, c_1'^{\infty}$ der einen und zwei Strahlenpaare $l_2, l_2' - c_2, c_2'^{\infty}$ der andern Fokalinvolution einer linearen Strahlenkongruenz. Sie wird parabolisch, wenn s einen der Scheitelstrahlen schneidet. Durchläuft s den parabolischen Strahlenbüschel τ^2, so durchläuft die durch s gehende lineare Kongruenz alle konfokalen Strahlenkongruenzen, deren Fokalparaboloid C^2 ist.

37. Zwei lineare Strahlenkongruenzen G_1^1, H_1^1 mit demselben Fokalparaboloide C^2 haben zur Hauptsymmetrieachse seine Hauptachse c_d. Sie ist zugleich die Hauptsymmetrieachse der Hauptachsenzylindroide G^3, H^3 von G_1^1, H_1^1, folglich laufen die in einer beliebigen Ebene ε des Ebenenbüschels $[c_d]$ gelegenen Regelstrahlen e_g, e_h beider Zylindroide parallel. Die e_g, e_h bzw. schneidenden Strahlen von G_1^1, H_1^1 bilden je eine gleichseitige parabolische Regelschar. In jeder dieser beiden Regelscharen gibt es zu einer e_g und somit auch e_h rechtwinklig kreuzenden Geraden x einen zu x parallelen Regelstrahl x_g bzw. x_h. Die auf x_g, x_h bzw. senkrechten, also zueinander parallelen Mittelebenen ξ_g, ξ_h der Kongruenzen G_1^1, H_1^1 gehören nach der Voraussetzung zu den Tangentialebenen von C^2. Zwei eigentliche Tangentialebenen eines Paraboloides können aber nicht parallel laufen, folglich müssen ξ_h und ξ_g identisch sein. Die Schnittgerade von ξ_g mit der gemeinsamen Hauptmittelebene γ der Kongruenzen G_1^1, H_1^1 läuft nun parallel zu e_g, und alle in ihren Punkten auf ξ_g errichteten Normalen liegen in einer durch e_g gehenden Ebene. In dieser Ebene liegt aber auch der Strahl e_h, und da er zusammen mit e_g in ε liegt, ist er mit e_g identisch. Zueinander parallele Regelstrahlen e_g, e_h der Zylindroide G^3, H^3 fallen also zusammen, folglich auch diese selbst. D. h.:

> Konfokale lineare Strahlenkongruenzen haben dasselbe Hauptachsenzylindroid C^3. Jede Schnittgerade zweier zueinander senkrechten Tangentialebenen des gemeinsamen Fokalparaboloides C^2 gehört zu einer der konfokalen linearen Kongruenzen. Werden auf den Tangentialebenen eines gleichseitigen Paraboloides C^2 in ihren Schnittgeraden mit seiner Scheitelebene Normalebenen errichtet, so umhüllen diese Ebenen ein Zylindroid C^3. Die Scheitelstrahlen von C^2 sind die Nebensymmetrieachsen von C^3 und die Hauptachse jener Fläche ist die Hauptsymmetrieachse dieser. Das Zylindroid C^3 heiße mit dem gleichseitigen Paraboloide C^2 orthogonal verknüpft.

38. Sind umgekehrt M_1^1, N_1^1 zwei lineare Kongruenzen mit demselben Hauptachsenzylindroide C^3, so wird nach **9.** ein beliebiger Regelstrahl a seiner Regelschar in jedem seiner Punkte nur von je einem Strahle beider Kongruenzen geschnitten. Die mit a inzidenten Strahlen von M_1^1, N_1^1 sind normal zu a und bilden je eine gleichseitige parabolische Regelschar, folglich enthält jede dieser Regelscharen einen Strahl l_m bzw. l_n, der zu einem a senkrecht kreuzenden Strahle l parallel läuft. Da die Ebene $l_m l_n a$ die gemeinsame Hauptmittelebene beider Kongruenzen in einer zu a parallelen, also zu l_m und l_n orthogonalen Geraden trifft, so fallen die zu l_m bzw. l_n senkrechten Mittelebenen λ_μ, λ_ν zusammen. Die von den Mittelebenen beider Kongruenzen umhüllten gleichseitigen Paraboloide haben nun die Hauptsymmetrieachse c_d des Zylindroides C^3 zur Hauptachse und seine Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 zu Scheitelstrahlen, ferner liegen auf ihnen auch die beiden in λ_μ enthaltenen auf c_1 bzw. c_2 senkrecht stehenden Strahlen. Somit sind die beiden Paraboloide identisch, und es gilt:

Lineare Strahlenkongruenzen mit demselben Hauptachsenzylindroide C^3 sind konfokal. Jeder Strahl einer linearen Strahlenkongruenz mit dem Hauptachsenzylindroide C^3 ist auch eine Schnittgerade zweier zueinander normalen Tangentialebenen des gemeinsamen Fokalparaboloides C^2. Werden auf den Tangentialebenen eines Zylindroides C^3 in ihren Schnittgeraden mit der Ebene seiner Nebensymmetrieachsen Normalebenen errichtet, so umhüllen sie ein gleichseitiges Paraboloid C^2. Die Nebensymmetrieachsen des Zylindroides sind die Scheitelstrahlen, seine Hauptsymmetrieachse die Hauptachse des Paraboloides. Das gleichseitige Paraboloid C^2 heiße mit dem Zylindroide C^3 orthogonal verknüpft.

Mit Rücksicht auf **37.** folgt:

Das gleichseitige Paraboloid C^2 und das Zylindroid C^3 sind jedes mit dem andern orthogonal verknüpft.

Ist H_1^1 eine zum Hauptachsenzylindroid C^3 gehörige hyperbolische lineare Strahlenkongruenz, so sind nach **10.** ihre beiden Leitgeraden zwei Regelstrahlen u, v von C^3, die an den Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 dieser Fläche ineinander gespiegelt werden. Die durch H_1^1 hervorgerufenen Fokalinvolutionen sind nun aber nach **15.** elliptisch, somit schneiden u, v das zugehörige Fokalparaboloid in zwei Paaren konjugiert imaginärer Punkte.

Abgesehen von den beiden Flächen C^2 und C^3 gemeinsamen Regelstrahlen c_1, c_2 trifft also kein Regelstrahl des Zylindroides C^3 das mit ihm orthogonal verknüpfte gleichseitige Paraboloid C^2 in reellen Punkten.

39. Konfokale lineare Kongruenzen haben nach **37.** dasselbe Hauptachsenzylindroid C^3 und bilden also nach **11.** einen quadratischen Komplex Γ^2. Dieser Komplex ist, wie aus **37.** hervorgeht, auch der Ort der Schnittgeraden zueinander rechtwinkliger Tangentialebenen des gemeinsamen Fokalparaboloides C^2. Nach **15.** führt aber jede lineare

Kongruenz ihr Fokalparaboloid in sich selbst über, somit gilt auch umgekehrt*):

> Konfokale lineare Kongruenzen, und also auch der von ihnen gebildete quadratische Komplex Γ^2, sind autopolar für ihr gemeinsames Fokalparaboloid C^2.

Die Leitgeraden der für C^2 autopolaren hyperbolischen linearen Kongruenzen sind nun für diese Fläche zueinander polar, folglich auch die Leitgeraden der hyperbolischen linearen Kongruenzen mit dem Fokalparaboloide C^2. Diese Leitgeraden fallen aber nach **10.** mit je zwei Regelstrahlen von C^3 zusammen, die bzw. an den Nebensymmetrieachsen von C^3 ineinander gespiegelt werden, somit sind solche Regelstrahlen paarweise reziproke Polaren für C^2. Kurz:

> Das Hauptachsenzylindroid C^3 konfokaler linearer Kongruenzen wird durch den polaren Raum ihres Fokalparaboloides C^2 derart in sich selbst übergeführt, daß je zwei seiner Regelstrahlen, die an seinen Nebensymmetrieachsen ineinander gespiegelt werden, für C^2 zueinander polar sind.**) Reziproke Polaren für C^2 sind auch die Hauptsymmetrieachse c_d und die einfache Leitgerade c_∞ von C^3.

Die in bezug auf C^2 zueinander polaren Regelstrahlen von C^3 schneiden c_∞ in den Punktepaaren derjenigen Involution, die C^2 auf dieser Geraden hervorruft, somit wird die Regelschar von C^3 selbst durch jene Strahlenpaare involutorisch gepaart. Diese hyperbolische Involution der Regelstrahlen von C^3 ist schon in **10.** näher besprochen worden.

Zu den für C^2 zueinander polaren Regelstrahlen von C^3 gehören die beiden Kuspidalstrahlen c', c'' von C^3. Jeder von ihnen ist inzident mit einer Symmetrieebene von C^2 und nach **11.** mit den zu dieser Ebene normalen Strahlen von Γ^2. In den zu einer Symmetrieebene von C^2 normalen Strahlen von Γ^2 schneiden sich aber je zwei zueinander normale Tangentialebenen von C^2, deren Berührungspunkte in dieser Symmetrieebene liegen, folglich ist der mit dieser Symmetrieebene inzidente Kuspidalstrahl die Leitgerade der in ihr enthaltenen Hauptparabel von C^2. Die Leitgerade der einen Hauptparabel eines gleichseitigen Paraboloides ist aber mit dem Brennpunkte der andern inzident, demnach ist gezeigt:

> Die Normalen, welche auf den Symmetrieebenen eines gleichseitigen Paraboloides C^2 in den Brennpunkten ihrer Hauptparabeln

---

*) v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage. Erstes Heft, Nürnberg 1856, S. 71, N. 109.

**) Schröter, Ueber ein einfaches Hyperboloid von besonderer Art, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 85 (1877), S. 32, N. 4.

errichtet werden, fallen mit den Kuspidalstrahlen des mit C^2 orthogonal verknüpften Zylindroides C^3 zusammen.*)

40. Ist δ eine die Hauptachse des gleichseitigen Paraboloides C^2 enthaltende Ebene, die durch keinen Scheitelstrahl der Fläche geht, so bilden die zu δ normalen Tangentialebenen von C^2 einen parabolischen Ebenenzylinder Δ^2. Die Schnittgeraden zueinander normaler Ebenen von Δ^2 liegen auf seiner Leitebene λ, und da sie zu dem durch C^2 bestimmten quadratischen Komplexe Γ^2 gehören, so sind sie nach **11.** mit dem in δ gelegenen Regelstrahle u_1 des mit C^2 orthogonal verknüpften Zylindroides C^3 inzident. u_1 ergibt sich folglich als die Schnittgerade $\delta\lambda$. Nun haben Δ^2 und C^2 dieselbe Scheitelebene, somit sendet Δ^2 seine Symmetrieebene und seine Fokalachse f durch die Hauptachse c_d von C^2. Die Fokalachse f steht als Parallele zu λ senkrecht zu c_d. Der Scheitelpunkt von C^2 hälftet aber den Abstand des Strahles f von der Ebene λ, also auch den Abstand der Strahlen u_1, f. Der Strahl f schneidet hiernach die Hauptsymmetrieachse c_d von C^3 in einem Punkte, durch den nach **5.** der u_1 rechtwinklig kreuzende Regelstrahl v_2 von C^3 geht. Mit diesem Regelstrahle fällt aber f zusammen, da f zu δ senkrecht ist und folglich den mit δ inzidenten Regelstrahl u_1 von C^3 rechtwinklig kreuzt. Somit gilt der Satz:

Die Fokalachsen eines gleichseitigen Paraboloides C^2, die mit seiner Hauptachse inzident sind, bilden die Regelschar des mit C^2 orthogonal verknüpften Zylindroides C^3.*)

Hieraus folgt mit Rücksicht auf **39.**:

Die Leitgeraden aller konfokalen hyperbolischen linearen Kongruenzen sind zueinander polare Fokalachsen ihres Fokalparaboloides.

Zwei zueinander normale Ebenen ξ, η eines Regelstrahles u von C^3 schneiden demnach den ihm durch C^2 als Polare zugewiesenen Regelstrahl v von C^3 wechselweise in ihren Polen X, Y bezüglich C^2. Die in ξ gelegenen Strahlen des quadratischen Komplexes Γ^2 bilden nun einen Strahlenbüschel mit dem Mittelpunkte Y und einen Büschel paralleler zu u normaler Strahlen. Beide Strahlenbüschel werden, da Γ^2 nach **39.** für C^2 autopolar ist, durch den polaren Raum von C^2 in die beiden in Γ^2 enthaltenen Strahlenbüschel I. Ordnung mit dem Mittelpunkte X übergeführt. Der eine liegt in η, der andere in der in X auf v normalen Ebene.

41. Werden die Regelstrahlen u_2, v_2 von C^3 an den Nebensymmetrieachsen der Fläche ineinander gespiegelt, so wird nach **40.** in v_2 durch C^2 eine zirkulare Ebeneninvolution hervorgerufen. In ihr gibt es ein Ebenenpaar ξ, η, dessen Winkel $\xi\eta$ durch die Ebene $u_2 c_d$ d. h. durch

*) Schröter, Ueber ein einfaches Hyperboloid von besonderer Art. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 85 (1877), S. 39, N. 7b.

die Verbindungsebene des Regelstrahles u_2 mit der Hauptsymmetrieachse c_d von C^3 gehälftet wird. ξ, η begrenzen auf dem v_2 rechtwinklig kreuzenden Regelstrahle u_1 von C^3 eine Strecke, die viermal so groß ist wie der Abstand a_u des Punktes $u_1 c_d$ vom Schnittpunkte der Nebensymmetrieachsen von C^3. Auf dem mit u_1 inzidenten Regelstrahle u_2 schneiden demnach ξ, η eine Strecke von der Größe $\frac{4 a_u}{\cos (u_1 u_2)}$ aus. Nun ist aber nach **5.** $a_{c'} \cos (u_1 u_2) = a_u$, folglich hat diese Strecke den konstanten Wert $4 a_{c'}$. D. h.:

Auf allen Regelstrahlen eines Zylindroides C^3 ruft das mit ihm orthogonal verknüpfte gleichseitige Paraboloid C^2 kongruente elliptische Punktinvolutionen hervor. Ihre Potenz ist gleich $-(2 a_{c'})^2$, also gleich dem negativen Quadrate des Abstandes der Brennpunkte der beiden Hauptparabeln von C^2.*)

42. Zueinander normale Tangentialebenen der Strahlenkegel, welche C^2 aus einem beliebigen außerhalb der Fläche gelegenen Punkt X umschrieben werden können, schneiden sich in den Strahlen des von X ausgehenden Komplexkegels von Γ^2. Der von X ausstrahlende Komplexkegel ist also der Leitkegel des C^2 vom Punkte X aus umschriebenen Kegels. Er zerfällt, wenn X ein unendlich ferner Punkt außerhalb C^2 ist, nach **11.** in einen unendlich fernen Strahlenbüschel und in einen Parallelstrahlenbüschel in der Leitebene des parabolischen Strahlenzylinders, der aus dem betreffenden unendlich fernen Punkte C^2 umschrieben werden kann. Der Leitkegel zerfällt ferner in zwei Leitstrahlenbüschel I. Ordnung für einen im Endlichen gelegenen Punkt X des mit C^2 orthogonal verknüpften Zylindroides. In anderen Worten:

Die Mittelpunkte aller einem gleichseitigen Paraboloide C^2 umschriebenen Kegel des Hachette liegen auf dem mit C^2 orthogonal verknüpften Zylindroide.

Alle C^2 umschriebenen Kegel des Hachette, deren Mittelpunkte auf einem Regelstrahle u_1 von C^3 liegen, senden je eine Leitebene durch den Regelstrahl v_1 von C^3, in den u_1 durch die Nebensymmetrieachsen von C^3 gespiegelt wird. u_1, v_1 sind aber nach **40.** zueinander polare Fokalachsen von C^2, folglich liegen die Pole dieser durch v_1 gehenden Leitebenen auf u_1. Der Regelstrahl u_1 von C^3 ist also eine gemeinsame Fokalachse aller dem Paraboloide C^2 aus den Punkten von u_1 umschriebenen Kegel und zugleich für diese Kegel der Polstrahl ihrer mit v_1 inzidenten Leitebenen. Die zweiten Fokalachsen dieser Kegel bilden nach

*) Schröter, Ueber ein einfaches Hyperboloid von besonderer Art. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 85 (1877), S. 36, N. 6.

einem bekannten Satze aus der Theorie der Fokalachsen einer Fläche II. Grades eine Regelschar des durch u_1 gehenden mit C^2 konfokalen Paraboloides; ihre je auf der Ebene der beiden Fokalachsen senkrechten Hauptachsen also eine gleichseitige parabolische Regelschar, die in dem Achsenkomplexe von C^2 enthalten ist. u_1 ist der zur Leitschar dieser Regelschar gehörige Scheitelstrahl. u_1 und der mit ihm inzidente Regelstrahl v_1 von C^3 sind ferner die Scheitelstrahlen eines mit C^2 konfokalen Paraboloides. Eine Schar konfokaler Paraboloide enthält nun stets ein gleichseitiges Paraboloid, sein Scheitelpunkt hälftet den Abstand der Brennpunkte der Fokalparabeln. Somit gilt nach **40.**:

In einer Schar konfokaler Paraboloide bilden die Scheitelstrahlen der hyperbolischen Paraboloide die Regelschar eines Zylindroides.

Durch Spiegelung an jedem seiner Scheitelstrahlen geht ein gleichseitiges Paraboloid in sich selbst über und jede Fokalparabel in die andere. Kurz:

Die Paraboloide einer Schar konfokaler Paraboloide werden an den Scheitelstrahlen des in der Schar enthaltenen gleichseitigen Paraboloides C^2 paarweise ineinander gespiegelt. Je zwei ineinander gespiegelte hyperbolische Paraboloide haben zu Scheitelstrahlen zwei Paare inzidenter Regelstrahlen des mit C^2 orthogonal verknüpften Zylindroides. Ihre Scheitelebenen liegen zur Scheitelebene von C^2 symmetrisch.

43. Der aus einem beliebigen Punkte L einem gleichseitigen Paraboloide C^2 umschriebene Ebenenkegel II. Ordnung Λ^2 hat nach **39.** stets reelle zueinander orthogonale Ebenen. Ihre Schnittgeraden sind die Strahlen eines zum quadratischen Komplexe Γ^2 gehörigen Kegels. Er zerfällt, sobald L auf dem mit C^2 orthogonal verknüpften Zylindroide C^3 liegt, in zwei Strahlenbüschel I. Ordnung.

Sind nun α, β zwei Ebenen eines Ebenenkegels II. Ordnung K^2 und ist a eine mit α, aber nicht mit dem Mittelpunkte K von K^2 inzidente Gerade, so schneiden die Ebenen von K^2 die Gerade a und die Ebene β bzw. in einer Punktreihe und einem zu ihr projektiven Strahlenbüschel I. Ordnung, wenn je zwei mit einer Ebene von K^2 inzidente Elemente beider Gebilde einander entsprechen. Die durch die Punkte der Punktreihe parallel zu den homologen Elementen des zu ihr projektiven Strahlenbüschels gezogenen Strahlen bilden eine zu K^2 perspektive parabolische Regelschar. Sie geht in eine gleichseitige über, sobald α und a normal zu β sind. Sonach ist auf eine einfache Art synthetisch bewiesen:

Einem Kegel II. Grades mit reellen zueinander normalen Tangentialebenen kann stets ein gleichseitiges Paraboloid C^2 eingeschrieben werden. Die Schnittgeraden aller seiner zueinander normalen Tangentialebenen bilden einen Strahlenkegel II. Ordnung oder zwei Strahlenbüschel I. Ordnung, je nachdem der Mittelpunkt des Kegels außerhalb des mit C^2 orthogonal verknüpften Zylindroides C^3 oder auf ihm liegt.

Die auf den Tangentialebenen eines Kegels II. Grades G^2 in seinem Mittelpunkte G errichteten Normalen bilden bekanntlich einen Kegel II. Ordnung G_n^2. Beide Kegel haben dieselben Symmetrieebenen. Einer von ihnen schließt entweder den andern im allgemeinen ein oder hat mit ihm vier reelle Erzeugende gemein. Umschließt G^2 den Kegel G_n^2, so hat G^2 keine reellen zueinander orthogonalen Tangentialebenen; umschließt hingegen G_n^2 den Kegel G^2, oder haben die beiden Kegel vier reelle Erzeugende gemein, so bilden die Schnittgeraden der reellen zueinander orthogonalen Tangentialebenen von G^2 einen Kegel II. Ordnung mit gleichen Symmetrieebenen wie G^2. Er umschließt den Kegel G^2 im ersteren Falle, er schließt ihn völlig aus im letzteren. Seine von ihm eingeschlossene Hauptachse fällt mit derjenigen von G^2 ausgeschlossenen Hauptachse dieses Kegels zusammen, die einen Winkel zwischen den Fokalachsen von G^2 hälftet.

Projektive Eigenschaften einer Kette konfokaler linearer Strahlenkongruenzen.

44. Jeder Strahl des Kegels II. Ordnung X^2, den der Komplex Γ^2 durch einen beliebigen Punkt X des Raumes sendet, bestimmt nach **9.** zusammen mit dem Hauptachsenzylindroide C^3 der zugehörigen konfokalen Kongruenzen eine von ihnen. Sind $A_1{}^1$, $B_1{}^1$, $C_1{}^1$, $D_1{}^1$ vier dieser konfokalen Kongruenzen, welche den Kegel X^2 bzw. in den vier harmonischen Strahlen a, b, c, d schneiden, und ist s ein zu ihnen windschiefer Regelstrahl von C^3, so ist s nach **11.** die Hauptachse von vier bzw. durch $A_1{}^1$, $B_1{}^1$, $C_1{}^1$, $D_1{}^1$ gehenden linearen Komplexen Γ_a, Γ_b, Γ_c, Γ_d eines Komplexbüschels. Die von X auf s gefällte Normale n_x ist ein Strahl der Trägerkongruenz dieses Büschels und zugleich ein Strahl von X^2, folglich bilden die dem Punkte X bzw. durch die vier Komplexe zugewiesenen Nullebenen $n_x a$, $n_x b$, $n_x c$, $n_x d$ vier harmonische Ebenen des Ebenenbüschels $[n_x]$ und die Komplexe selbst also vier harmonische Komplexe des Komplexbüschels. Die vier Kongruenzen $A_1{}^1$, $B_1{}^1$, $C_1{}^1$, $D_1{}^1$ schneiden somit nicht nur den Komplexkegel X^2, sondern auch jeden andern Komplexkegel von Γ^2 in vier harmonischen Strahlen. Vier konfokale lineare Kongruenzen sollen nunmehr vier harmonische konfokale lineare Kongruenzen heißen, wenn sie mit einem und demnach mit jedem Kegel des quadratischen Komplexes Γ^2, dem sie angehören, vier harmonische Strahlen gemein haben, ferner sollen die ∞^1 konfokalen linearen Kongruenzen, welche zu demselben Fokalparaboloid gehören, eine Kette konfokaler linearer Kongruenzen genannt werden. Eine Kette konfokaler linearer Kongruenzen läßt sich hiernach auf jedes Gebilde I. Stufe projektiv beziehen. Heißt endlich der von den Kongruenzen einer solchen Kette gebildete quadratische Komplex der die Kette umfassende Komplex, so gilt insbesondere:

Eine Kette konfokaler linearer Kongruenzen ist zu einem Kegel des sie umfassenden quadratischen Komplexes Γ^2 projektiv, wenn jeder Komplex der Kette dem Strahle des Kegels entspricht, den er mit ihm gemein hat.

45. Der Komplexkegel X^2 von Γ^2 zerfällt nach **11.** im allgemeinen in zwei Strahlenbüschel I. Ordnung, sobald sein Mittelpunkt X dem Hauptachsenzylindroide C^3 der Kette konfokaler linearer Kongruenzen oder der unendlich fernen Ebene angehört. Im ersteren Falle steht die Ebene des einen Strahlenbüschels in X auf dem mit diesem Punkte inzidenten Regelstrahle r von C^3 senkrecht, und je vier harmonische Kongruenzen der Kette schneiden diesen Strahlenbüschel nach **11.** in je vier harmonischen Strahlen. Im letzteren Falle bilden die durch X gehenden Strahlen von Γ^2 einen unendlich fernen Strahlenbüschel und einen Parallelstrahlenbüschel, dessen Ebene denjenigen Regelstrahl r von C^3 enthält, der auf der Verbindungsebene von X mit der Hauptsymmetrieachse c_d von C^3 senkrecht steht. Wird ein von r verschiedener Regelstrahl s von C^3 zur Hauptachse und je ein Strahl x des Parallelstrahlenbüschels zu einem Strahle eines linearen Komplexes Γ_x gewählt, so ist hierdurch im allgemeinen je ein linearer Komplex Γ_x eines Büschels bestimmt. Γ_x weist dem unendlich fernen Mittelpunkte des Parallelstrahlenbüschels eine mit x und dem unendlich fernen Punkte von s inzidente Nullebene zu. Durch vier harmonische Strahlen des Parallelstrahlenbüschels sind somit vier harmonische Komplexe dieses Büschels bestimmt. Durch vier harmonische Strahlen x des Parallelstrahlenbüschels gehen also wiederum vier harmonische Kongruenzen der Kette. Kurz:

Wird jeder Kongruenz einer Kette konfokaler linearer Kongruenzen der Strahl zugeordnet, in dem sie einen im Endlichen gelegenen Strahlenbüschel I. Ordnung des die Kette umfassenden quadratischen Komplexes Γ^2 schneidet, so ist die Kette zu diesem Strahlenbüschel I. Ordnung projektiv.

46. Die Kongruenzen X_1^1 einer Kette konfokaler linearer Kongruenzen ordnen einer beliebigen Ebene α der Hauptsymmetrieachse c_d je eine Ebene α_x dieser Achse zu, ferner senden sie nach **45.** durch einen Punkt P ihres Hauptachsenzylindroides im allgemeinen die Strahlen x eines zur Kette projektiven Strahlenbüschels I. Ordnung $[P]$. Ist die Ebene dieses Strahlenbüschels zu α parallel, so projiziert jedesmal α_x aus c_d die Spur von x mit der Fluchtebene γ der konfokalen Kongruenzen. D. h.:

Einer Ebene α der Hauptsymmetrieachse c_d von Γ^2 ordnen die Komplexe der zugehörigen Kette konfokaler linearer Kongruenzen die Ebenen eines zur Kette projektiven Ebenenbüschels I. Ordnung $[c_d]_\alpha$ zu. Den Ebenen $\alpha, \beta, \cdots$ von c_d sind somit projektive Ebenenbüschel $[c_d]_\alpha$, $[c_d]_\beta, \cdots$ zugewiesen, welche die c_d mit den Nebensymmetrieachsen von Γ^2 verbindenden Ebenen entsprechend gemein haben.

47. Der Komplexstrahlenkegel X^2, den der Komplex Γ^2 durch einen beliebigen Punkt X des Raumes sendet, ist nach **44.** projektiv zur Kette konfokaler Kongruenzen, wenn jedem Komplexe der Kette sein Schnittstrahl mit dem Kegel zugewiesen wird. Ferner ordnen die Kongruenzen der Kette der Ebene $Xc_d = \xi$ nach **46.** die Ebenen eines zur Kette projektiven Ebenenbüschels I. Ordnung $[c_d]_\xi$ zu. Die Kette konfokaler Kongruenzen bezieht also den Ebenenbüschel $[c_d]_\xi$ projektiv auf den Komplexstrahlenkegel X^2. Nun ist aber der in ξ gelegene Regelstrahl x_l des Hauptachsenzylindroides C^3 der konfokalen Kongruenzen zugleich eine von den beiden Leitgeraden einer Kongruenz $X_1{}^1$ der Kette. ξ ist also durch $X_1{}^1$ sich selbst zugeordnet und enthält den Schnittstrahl x von $X_1{}^1$ mit dem Komplexstrahlenkegel X^2. Die Ebene ξ des Ebenenbüschels $[c_d]_\xi$ geht somit durch den homologen Strahl x des zu $[c_d]_\xi$ projektiven Strahlenkegels X^2, und jener Ebenenbüschel erzeugt folglich mit dem zu ihm projektiven Strahlenkegel einen Kegelschnitt ξ^2. Dieser Kegelschnitt ist durch den Komplexstrahlenkegel X^2 projektiv auf die Kette konfokaler linearer Kongruenzen bezogen, und jeder seiner Punkte liegt auf einem Strahle, den die ihm entsprechende Kongruenz mit X^2 gemein hat; er ist durch sie dem Mittelpunkte X von X^2 zugeordnet. — Der zu x_l normale Strahl von X^2 insbesondere gehört nach **9.** zur ausgearteten Kongruenz der Kette. Sie ordnet X den unendlich fernen Punkt dieses zu x_l normalen Strahles zu. Er ist — solange X nicht in die Fluchtebene γ der konfokalen Kongruenzen fällt — der einzige unendlich ferne Punkt des Kegelschnittes ξ^2; in dem ausgeschlossenen Falle liegen alle Punkte von ξ^2 in der unendlich fernen Ebene. Hiernach ergibt sich:

Dem Mittelpunkte X eines Kegels X^2 des quadratischen Komplexes Γ^2 sind durch die zugehörige Kette konfokaler linearer Kongruenzen die Punkte eines zu ihr projektiven und zu X^2 perspektiven Kegelschnittes ξ^2 zugeordnet. ξ^2 ist eine Parabel, die jede der beiden Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 von Γ^2 schneidet, und deren Achse parallel zur Hauptsymmetrieachse von Γ^2 läuft. Nur wenn der Mittelpunkt X von X^2 der Fluchtebene γ der konfokalen Kongruenzen angehört, ist ξ^2 ein unendlich ferner Kegelschnitt und enthält die drei unendlich fernen Punkte aller drei Symmetrieachsen von Γ^2.

48. Zerfällt für einen im Endlichen gelegenen Punkt X des Raumes der von ihm ausstrahlende Komplexstrahlenkegel X^2, so ist X nach **11.** mit einem Regelstrahle des Hauptachsenzylindroides C^3 der konfokalen linearen Kongruenzen inzident. Einem auf einer Nebensymmetrieachse von C^3 gelegenen Punkte X sind in diesem Falle die Punkte einer zur Kette projektiven Punktreihe I. Ordnung zugeordnet, ihr Träger liegt in der unendlich fernen Ebene und kreuzt die betreffende Nebensymmetrieachse rechtwinklig. Punkten X auf den übrigen Regelstrahlen von C^3 entsprechen im allgemeinen, wie sich leicht mit Hilfe von **40.** erweisen läßt, ebenfalls zur Kette konfokaler Kongruenzen projektive Parabeln ξ^2. Sie gehen durch die betreffenden Punkte, und ihre Ebenen sind in ihnen normal zu dem je mit diesen Punkten inzidenten Regelstrahlen von C^3. Wiederum schneiden sie die Nebensymmetrieachsen der Fläche, und wiederum läuft ihre Achse je zur Hauptsymmetrieachse von C^3 parallel. — Komplexstrahlenkegel X^2 von Γ^2 mit einem unendlich fernen Mittelpunkte X^∞ zerfallen nach **11.** in einen unendlich fernen Strahlenbüschel und in einen Parallelstrahlenbüschel derjenigen Tangentialebene von C^3, die den zur Ebene $X^\infty_{c_d}$ normalen Regelstrahl der Fläche enthält. Die einem Punkte X^∞ durch die konfokalen linearen Kongruenzen einer Kette zugeordneten Punkte bilden also eine mit der Fluchtebene γ der Kongruenzen inzidente zur Kette projektive Punktreihe I. Ordnung.

49. Eine Kette konfokaler linearer Kongruenzen ordnet nach **47.** dem Schnittpunkte einer beliebigen Geraden x mit der Fluchtebene γ die Punkte eines unendlich fernen zur Kette projektiven Kegelschnittes zu und dem unendlich fernen Punkte von x eine zu ihr projektive Punktreihe I. Ordnung von γ. Beide zur Kette projektiven Gebilde sind zueinander projektiv und zum Ebenenbüschel $[c_d]$ perspektiv und erzeugen eine zur Kette projektive Regelschar III. Ordnung $\mathfrak{X}^3$ mit der Doppelpunktsgeraden c_d. Sonach folgt:

> Eine Kette konfokaler linearer Kongruenzen ordnet einer beliebigen Geraden x die Strahlen einer zur Kette projektiven Regelschar III. Ordnung $\mathfrak{X}^3$ zu. Diese geht durch die Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 des die Kette umfassenden Komplexes Γ^2, und ihre Doppelpunktsgerade ist seine Hauptsymmetrieachse c_d.

Schneidet x eine Nebensymmetrieachse $c_\varkappa$ der konfokalen Kongruenzen, so sind dem Schnittpunkte von x mit $c_\varkappa$ durch die Kongruenzen der Kette nach **48.** die Punkte einer zur Kette projektiven unendlich fernen Geraden zugeordnet. Die x durch die Kongruenzen der Kette zugeordneten Strahlen bilden also in diesem Falle eine durch die zweite Nebensymmetrieachse c_λ gehende parabolische Regelschar $\mathfrak{X}^2$. Sie wird gleichseitig, sobald x die Nebensymmetrieachse $c_\varkappa$ rechtwinklig schneidet, und $c_\varkappa$ selbst wird dann ein Leitstrahl dieser Regelschar. $\mathfrak{X}^2$ geht insbesondere in eine Fokalregelschar der konfokalen Kongruenzen über, wenn x ein Strahl der betreffenden Fokalregelschar ist. — Einer Geraden der Fluchtebene γ sind im allgemeinen die Strahlen eines zur Kette projektiven unendlich fernen Strahlenbüschels I. Ordnung zugeordnet, usw.

50. Jede Kongruenz einer Kette konfokaler Kongruenzen wird durch den polaren Raum des gemeinsamen Fokalparaboloides nach **39.** in sich selbst übergeführt, somit gilt nach **44.**:

Vier harmonische Kongruenzen einer Kette schneiden den in einer beliebigen Ebene gelegenen parabolischen Strahlenbüschel des die Kette umfassenden Komplexes Γ^2 in vier harmonischen Strahlen. Eine Kette konfokaler linearer Kongruenzen ist zu einem parabolischen Strahlenbüschel ξ^2 des sie umfassenden quadratischen Komplexes Γ^2 projektiv, wenn jedem Komplexe der Kette der Strahl von ξ^2 zugeordnet wird, den er mit diesem parabolischen Strahlenbüschel gemein hat.

Analog ergibt sich aus **47.**:

Der Ebene ξ eines parabolischen Strahlenbüschels ξ^2 des Komplexes Γ^2 sind durch die Kongruenzen der Kette die Ebenen eines zu ihr projektiven und zu ξ^2 perspektiven parabolischen Ebenenzylinders II. Ordnung Ξ^2 zugeordnet. Usw.

Die rotatorische lineare Strahlenkongruenz.

51. In **2.** sind auf dem Kegelschnitte α^2 und dem unendlich fernen Kongruenzstrahle c_∞ der Schnittkongruenz eines Komplexbüschels, zwei projektive Punktreihen ermittelt worden, deren homologe Punkte durch die Hauptachsen der Komplexe des Büschels verbunden werden. Wird nunmehr angenommen — was dort ausgeschlossen wurde —, daß c_∞ mit der unendlich fernen Geraden der Ebene α des Kegelschnittes α^2 zusammenfällt, so liegen in α alle Hauptachsen der Komplexe des Büschels, und α ist somit die Fluchtebene der zugehörigen Schnittkongruenz ${}_rC_1^1$. Diese Hauptachsen bilden, da sie mit der Hauptsymmetrieachse c_d von ${}_rC_1^1$ inzident sind, einen Strahlenbüschel I. Ordnung. Je zwei zueinander orthogonale Strahlen dieses Büschels sind die Hauptachsen je zweier füreinander nullinvarianten Komplexe, sie schneiden c_∞ in Punkten, die sowohl durch ${}_rC_1^1$, wie durch den unendlich fernen imginären Kugelkreis einander zugeordnet sind. Die lineare Kongruenz ${}_rC_1^1$ ist also elliptisch, ihre beiden Fokalachsen fallen mit der Hauptsymmetrieachse c_d zusammen, und die mit c_∞ inzidenten Ebenen schneiden die in ${}_rC_1^1$ enthaltenen hyperbolischen Regelscharen in Kreisen.

Jeder Strahl des von den Hauptachsen gebildeten Strahlenbüschels I. Ordnung ist nach **6.** eine Nebensymmetrieachse von ${}_rC_1^1$. An jedem spiegelt sich also ein von c_d und c_∞ verschiedener Kongruenzstrahl x in einen Kongruenzstrahl, der mit x zu einer in ${}_rC_1^1$ enthaltenen rotatorischen Regelschar mit der Rotationsachse c_d und der zu ihr senkrechten Symmetrieebene α gehört. c_d, c_∞ sind reziproke Polaren in den polaren Räumen der Träger dieser rotatorischen Regelscharen, und in ihnen sind die durch ${}_rC_1^1$ einander zugeordneten Punkte von c_d und c_∞ konjugiert. Die Träger aller dieser in ${}_rC_1^1$ enthaltenen Regelscharen bilden also einen Büschel rotatorischer Regelflächen mit der gemeinsamen Rotationsachse c_d und der gemeinsamen Symmetrieebene α. Die zu den Flächen dieses Büschels gehörigen polaren Räume erweisen sich als die einzigen rotatorischen, die ${}_rC_1^1$ derart in sich selbst überführen, daß die durch ${}_rC_1^1$ einander zugeordneten Punkte in ihnen konjugiert sind.

Mit einer Nebensymmetrieachse $c_\varkappa$ inzidente Strahlen von ${}_rC_1^1$ bilden eine gleichseitige parabolische Regelschar $\mathfrak{P}_\varkappa^2$ mit den Scheitelstrahlen $c_\varkappa$, c_d. Die lineare Kongruenz ${}_rC_1^1$ wird somit von den Strahlen einer gleichseitigen parabolischen Regelschar $\mathfrak{P}_\varkappa^2$ beschrieben, sobald $\mathfrak{P}_\varkappa^2$ eine volle Umdrehung um c_d vollführt. Dieser Eigenschaft halber heißt bekanntlich die vorliegende lineare Kongruenz ${}_rC_1^1$ eine rotatorische lineare Kongruenz.

52. Der von den Mittelebenen einer allgemeinen linearen Kongruenz nach **14.** gebildete gleichseitige parabolische Bündel zerfällt für die rotatorische lineare Kongruenz in zwei Ebenenbündel I. Ordnung. Der eine hat zum Mittelpunkt den Punkt $c_d\alpha = C$, der andere den unendlich fernen Punkt C'_∞ von c_d. Die beiden zentrischen Bündel $[C]$ und $[C'_\infty]$ sind kollinear und haben den Strahl c_d entsprechend gemein, wenn Ebenen und Strahlen beider Bündel als homologe angesehen werden, die durch ${}_rC_1^1$ einander zugeordnet sind. Homologe Ebenen schneiden sich also rechtwinklig. Ein Ebenenbüschel $[e]$ von $[C]$, dessen Achse weder mit c_d noch mit einer Nebensymmetrieachse von ${}_rC_1^1$ zusammenfällt, erzeugt mit dem homologen Ebenenbüschel $[e']$ von $[C'_\infty]$ eine durch c_d gehende in ${}_rC_1^1$ enthaltene orthogonale Regelschar $\mathfrak{R}_e^2$. Die Kreisschnittebenen von $\mathfrak{R}_e^2$ sind normal zu den homologen Geraden e, e' der kollinearen zentrischen Bündel, d. h. auch zu dem zu e parallelen Kongruenzstrahle und zu c_d. Durch jeden von c_d und c_∞ verschiedenen Strahl s von ${}_rC_1^1$ geht also eine orthogonale Regelschar $\mathfrak{R}_e^2$, deren eine Schar von Kreisschnitten in Normalebenen zu s liegen. Sobald die Achse e des Ebenenbüschels $[e]$ mit einer Nebensymmetrieachse $c_\varkappa$ von ${}_rC_1^1$ zusammenfällt, geht die orthogonale Regelschar $\mathfrak{R}_e^2$ in die gleichseitige parabolische Regelschar $\mathfrak{P}_\varkappa^2$ über. Die durch c_d gehenden in $_rC_1^1$ enthaltenen Regelscharen II. Ordnung sind hiernach teils orthogonal, teils gleichseitig parabolisch.

Rotatorische Kongruenzen, deren Hauptachsen den nämlichen Strahlenbüschel I. Ordnung bilden, bilden selbst einen quadratischen Komplex. Seine Komplexstrahlenkegel sind orthogonal, seine Komplexstrahlenbüschel parabolisch. Die singuläre Fläche des Komplexes besteht aus der Ebene des Hauptachsenbüschels, der unendlich fernen Ebene und zwei Strahlenbündeln, deren Mittelpunkt bzw. der unendlich ferne Punkt der Hauptsymmetrieachse c_d jener Kongruenzen und der Mittelpunkt ihres Hauptachsenbüschels sind. Durch Spiegelung an c_d oder einer Hauptachse geht der Komplex in sich selbst über.

Berlin, den 14. Dezember 1905.