

## Werk

**Titel:** Mathematische Annalen

**Ort:** Leipzig

**Jahr:** 1907

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN235181684\_0063

**PURL:** [http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684\\_0063](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0063)

**LOG Id:** LOG\_0038

**LOG Titel:** Über das Problem der Bewegung von vier Massenpunkten unter dem Einflusse von inneren Kräften.

**LOG Typ:** article

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN235181684

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

## Über das Problem der Bewegung von vier Massenpunkten unter dem Einflusse von inneren Kräften.

Von

P. WORONETZ in Kiew.

In der dreiundzwanzigsten seiner Vorlesungen über Dynamik hat Jacobi die partielle Differentialgleichung, die seinen und Hamiltons Namen führt, für diejenigen Probleme aufgestellt, in welchen die Sätze von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes gelten. Gelten außerdem die Sätze von der Erhaltung der Flächenräume, so können der erwähnten Differentialgleichung noch drei andere beigefügt werden. Betrachtet man nun das so entstandene System partieller Differentialgleichungen von dem Standpunkte der bekannten Lieschen Integrationsmethode, so ist sofort ersichtlich, daß das Problem der Bewegung eines materiellen Punktsystems von  $n$  Freiheitsgraden für den Fall, daß die Sätze von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes und der Flächenräume in Kraft sind, auf die Integration von nur  $2(n-6)$  gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung und auf Quadraturen reduziert werden kann.

Dem Gesagten zufolge muß das Problem, das den Gegenstand vorliegender Untersuchungen bildet, d. h. das Problem der Bewegung von vier Massenpunkten unter dem Einflusse von inneren Kräften sich auf die Integration von zwölf Differentialgleichungen erster Ordnung und auf Quadraturen zurückführen lassen. Und in der Tat hat auch H. A. Seydler\*), indem er die berühmte, von Lagrange\*\*) auf das Dreikörperproblem angewandte Methode etwas verallgemeinert, Differentialgleichungen solcher Art und von solcher Anzahl für das in Rede stehende Problem hergeleitet.

---

\*) Seydler, Ausdehnung der Lagrangeschen Behandlung des Dreikörperproblems auf das Vierkörperproblem. Abhandlungen der math.-naturw. Klasse der k. böhmischen Gesellschaft der Wissensch. VII. Folge. Bd. I. 1886.

\*\*) Lagrange, Essai sur le problème des trois corps. Oeuvres t. VI.

Sieht man von dem wohlbekannten Falle ab, wenn die Kraft, die zwischen zweien der Massenpunkte wirkt, dem Produkte aus den Massen der Punkte in ihre Entfernung direkt proportional ist, so ist es bis heute nicht gelungen, eine allgemeine Lösung des erwähnten Problems selbst bei spezieller Form der Kräftefunktion aufzufinden.

Was nun die partikulären Lösungen des Problems anbelangt, so sind hier die von H. Sludski und Hoppe\*) gegebenen zwei Fälle, die eine Ausdehnung der bekannten Laplaceschen\*\*) Lösungen des Dreikörperproblems bilden, anzuführen. Eine weitere Verallgemeinerung der Laplaceschen Lösung für das Vierkörperproblem ist von H. Lehmann-Filhés\*\*\*) erzielt worden.

Alle diese speziellen Fälle werden in der vorliegenden Abhandlung als bekannt angesehen, und im Texte soll ihrer nicht weiter Erwähnung getan werden.

Die vorliegende Arbeit zerfällt in drei Teile. In Kap. I werden die zwölf Gleichungen aufgestellt, nach deren Integration die in Rede stehende Aufgabe durch Quadraturen gelöst wird. Eine Anwendung der allgemeinen Formeln wird auf den Fall gemacht, wenn die Massen dreier der Punkte  $M_1, M_2, M_3, M_4$  einander gleich sind:

$$m_1 = m_2 = m_3.$$

Es wird nachgewiesen, daß dann das Punktsystem so in Bewegung gebracht werden kann, daß die Punkte mit gleichen Massen in jedem Momente der Bewegung in den Scheiteln eines gleichseitigen Dreiecks liegen. Der vierte Punkt bewegt sich längs der Senkrechten zur Dreiecksebene, die durch den Schwerpunkt des Dreiecks hindurchgeht. Die Dreiecksebene bleibt der invariablen Ebene parallel, und das Dreieck dreht sich in seiner Ebene um seinen Schwerpunkt mit einer Winkelgeschwindigkeit, die dem Quadrate der augenblicklichen Entfernung des Scheitels des Dreiecks vom Rotationszentrum umgekehrt proportional ist.

Ist die Kraft, die zwischen je zweien der Massenpunkte wirkt, dem Kubus der Entfernung der Punkte umgekehrt proportional, so ist das Problem durch Quadraturen auflösbar.

Es möge hier noch erwähnt werden, obgleich im folgenden nicht weiter darauf eingegangen wird, daß der eben angeführte spezielle Fall

\*) Sludski, Zur Aufgabe über die Bewegung eines Systems freier materieller Punkte. Zeitschr. der Moskauer Math. Gesellschaft. IX. 1878; Hoppe, Erweiterung der bekannten Speziallösung des Dreikörperproblems. Grunerts Archiv der Math. und Phys. 64. 1879.

\*\*) Laplace, Mécanique céleste, I. X, ch. VI.

\*\*\*) Lehmann-Filhés, Über zwei Fälle des Vielkörperproblems. Astron. Nachr. 127. 1891.

leicht auf das  $n$ -Körperproblem ausgedehnt werden kann. Die drei Punkte mit gleichen Massen liegen wieder in den Scheiteln eines gleichseitigen Dreiecks, und die übrigen Punkte des Systems bewegen sich auf der Senkrechten zur Dreiecksebene durch den Schwerpunkt des Dreiecks. Ist  $n = 5$  und außerdem

$$m_4 = m_5,$$

so können die Punkte  $M_4$  und  $M_5$  stets symmetrisch zur Dreiecksebene zu liegen kommen. Bei  $n = 6$  und wieder  $m_4 = m_5$  ist eine solche Bewegung des Punktsystems möglich, bei welcher die Punkte  $M_4$  und  $M_5$  symmetrisch zur Dreiecksebene bleiben, während der Punkt  $M_6$  mit dem Schwerpunkte des Dreiecks zusammenfällt. In allen diesen Fällen reduziert sich das Problem auf Quadraturen, wenn die Kräfte dem Kubus der Entfernung umgekehrt proportional sind.

Die hier angeführten partikulären Lösungen des Vielkörperproblems können zur Illustration des berühmten Jacobischen Satzes über den letzten Multiplikator dienen.

In Kap. II wird der Fall diskutiert, wenn die drei Konstanten der Flächenintegrale gleich Null sind. Das allgemeine Problem zerfällt dann in zwei selbständige, nacheinander zu lösende Probleme. Zuerst wird die Deformation der Pyramide  $M_1 M_2 M_3 M_4$ , in deren Scheiteln die Massenpunkte liegen, gesucht. Zur Lösung dieser Aufgabe müssen fünf Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die fünf Kantenlängen der Pyramide durch die sechste bestimmen, integriert werden. Darnach wird die Bewegung dieser Pyramide im Raume gesucht. Diese Aufgabe führt zu einer Riccatischen Differentialgleichung:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 f_1(x) + y f_2(x) + f_3(x).$$

Die Formeln dieses Kapitels werden auf den Fall angewandt, wenn die Massen der Punkte einander gleich sind. Das Punktsystem kann dann so in Bewegung gebracht werden, daß je zwei gegenüberliegende Kanten der Pyramide  $M_1 M_2 M_3 M_4$  einander gleich bleiben. Sind außerdem die Dreiecke, die die Seiten der Pyramide bilden, gleichschenkelig, so ist das Problem für Kräfte von der oben angeführten speziellen Art durch Quadraturen lösbar.

Endlich in Kap. III wird der Fall untersucht, wenn die vier Massenpunkte in jedem Momente der Bewegung in einer Ebene liegen. Die Aufgabe hängt von der Integration eines Systems von fünf Differentialgleichungen zweiter Ordnung ab. Sind die Massen zweier Punkte einander gleich, so kann das Punktsystem so in Bewegung gebracht werden, daß die Entfernung der Punkte mit gleichen Massen von der Geraden, die die beiden anderen Punkte verbindet, senkrecht geschnitten und halbiert wird. Die Ebene der Punkte dreht sich um die erwähnte Gerade mit

einer Winkelgeschwindigkeit, die dem Quadrate der Entfernung der Punkte mit gleichen Massen umgekehrt proportional ist. Sind die Massen der beiden anderen Punkte auch einander gleich, so läßt sich auch hier eine partikuläre Lösung des Problems für Kräfte, die dem Kubus der Entfernung umgekehrt proportional sind, aufstellen.

Dieser spezielle Fall kann auch auf das  $n$ -Körperproblem ausgedehnt werden. Sind die Massen von  $2p$  Punkten des materiellen Systems einander gleich, so kann das System sich so bewegen, daß die Punkte mit gleichen Massen in jedem Momente der Bewegung in den Scheiteln eines regelmäßigen  $2p$ -Ecks liegen. Die übrigen Punkte des Systems bewegen sich längs der Senkrechten zur Ebene des  $2p$ -Ecks, die durch seinen Schwerpunkt hindurchgeht. Hier sind ähnliche Fälle, wie oben in bezug auf das gleichseitige Dreieck, zu unterscheiden.

Zum Schluß möge noch bemerkt werden, daß im folgenden das Verhältnis der Massen der Punkte zueinander stets endlich angenommen wird. Es werden also die Fälle, die in der Literatur zu so manchen interessanten Untersuchungen geführt haben, wenn die Massen einiger der Punkte als unendlich groß oder unendlich klein im Verhältnis zu den Massen der übrigen angenommen werden, hier nicht in Betracht gezogen.

In der vorliegenden, zumeist recht kurz gefaßten, Arbeit wird bei der Diskussion der partikulären Lösungen nur nachgewiesen, wie die betreffende Aufgabe auf Quadraturen zurückgeführt werden kann. Ausführlicher werden diese speziellen Fälle in einer größeren Arbeit behandelt werden, die wohl noch im Laufe des nächsten Jahres in russischer Sprache in den Kiewer Universitäts-Nachrichten erscheinen wird.

## I.

1. Es mögen  $m_1, m_2, m_3, m_4$  die Massen von vier materiellen Punkten  $M_1, M_2, M_3, M_4$  sein, die nur inneren Kräften unterworfen sind, und  $U$  die Kräftefunktion bedeuten. Wir bezeichnen mit  $x_i, y_i, z_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) die rechtwinkligen Koordinaten der Punkte  $M_1, M_2, M_3$  in bezug auf ein Koordinatensystem, das zum Ursprung den Punkt  $M_4$  hat und dessen Achsen im Raume invariable Richtungen haben.  $U$  ist eine Funktion der Veränderlichen  $x, y, z$ .

Wenn der Schwerpunkt  $O$  des Punktsystems  $M_1, M_2, M_3, M_4$  im Anfangsmoment in Ruhe war\*), so ist, den Integralen von der Erhaltung

\*) Sind die Anfangsbedingungen anders gegeben, so bleiben die weiter unten folgenden Betrachtungen in Kraft, beziehen sich aber nicht auf den Raum, sondern auf ein Koordinatensystem  $O\xi\eta\zeta$ , das zum Ursprung den Schwerpunkt  $O$  hat und dessen Achsen im Raume unveränderliche Richtungen haben. Der Punkt  $O$  bewegt sich, wie bekannt, geradlinig und gleichförmig.

der Bewegung des Schwerpunktes gemäß, die Geschwindigkeit des Punktes  $M_4$  der relativen Geschwindigkeit des Schwerpunktes  $O$  in bezug auf das System  $M_4xyz$  gleich und entgegengesetzt. Bezeichnen wir also mit  $M$  die Masse des Punktsystems:

$$(1) \quad M = m_1 + m_2 + m_3 + m_4,$$

so sind die Projektionen der Geschwindigkeit des Punktes  $M_4$  auf die Koordinatenachsen

$$(2) \quad -\frac{1}{M} \sum_{i=1}^{i=3} m_i x_i'; \quad -\frac{1}{M} \sum_{i=1}^{i=3} m_i y_i'; \quad -\frac{1}{M} \sum_{i=1}^{i=3} m_i z_i'.$$

Die Geschwindigkeit des Punktes  $M_1$  setzt sich aus der relativen Geschwindigkeit dieses Punktes in bezug auf das Koordinatensystem  $M_4xyz$  und der Geschwindigkeit des Koordinatenursprunges zusammen, so daß die Projektionen der Geschwindigkeit des Punktes  $M_1$  gleich

$$(3) \quad x_1' - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{i=3} m_i x_i'; \quad y_1' - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{i=3} m_i y_i'; \quad z_1' - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{i=3} m_i z_i'$$

sind. Die Projektionen der Geschwindigkeiten der Punkte  $M_2$  und  $M_3$  findet man aus den Ausdrücken (3) durch Vertauschung der Indizes 1, 2, 3 ineinander.

Mit Hilfe von (2) und (3) läßt sich leicht die lebendige Kraft  $T$  des Punktsystems berechnen:

$$(4) \quad 2T = m_1 \left(1 - \frac{m_1}{M}\right) (x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2) + m_2 \left(1 - \frac{m_2}{M}\right) (x_2'^2 + y_2'^2 + z_2'^2) \\ + m_3 \left(1 - \frac{m_3}{M}\right) (x_3'^2 + y_3'^2 + z_3'^2) \\ - 2 \frac{m_2 m_3}{M} (x_2' x_3' + y_2' y_3' + z_2' z_3') - 2 \frac{m_3 m_1}{M} (x_3' x_1' + y_3' y_1' + z_3' z_1') \\ - 2 \frac{m_1 m_2}{M} (x_1' x_2' + y_1' y_2' + z_1' z_2').$$

Die Differentialgleichungen der Bewegung des Punktsystems haben, wie bekannt, die Form:

$$(5) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial x_i'} \right) = \frac{\partial U}{\partial x_i}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial y_i'} \right) = \frac{\partial U}{\partial y_i}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial z_i'} \right) = \frac{\partial U}{\partial z_i} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Hat man aus diesen Gleichungen die Koordinaten  $x, y, z$  als Funktionen der Zeit  $t$  gefunden, so bestimmt man die Bewegung des Koordinatensystems  $M_4xyz$  im Raume mit Hilfe der Integrale, die die Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes ausdrücken, wie bekannt, ohne jegliche Integration.

Vier Integrale der Gleichungen (5), das Integral der lebendigen Kraft und drei Flächenintegrale, lassen sich sofort hinschreiben.

Das Integral der lebendigen Kraft gibt

$$(6) \quad T = U + h,$$

wo  $h$  eine Konstante bedeutet.

Um die Flächenintegrale zu erhalten, bemerken wir, daß die Ausdrücke (3) mit Hilfe von (4) sich so darstellen lassen:

$$(7) \quad \frac{1}{m_1} \frac{\partial T}{\partial x_1'}; \quad \frac{1}{m_1} \frac{\partial T}{\partial y_1'}; \quad \frac{1}{m_1} \frac{\partial T}{\partial z_1'}.$$

Das Moment in bezug auf die  $x$ -Achse des Vektors der Bewegungsgröße des Punktes  $M_1$  ist also gleich

$$y_1 \frac{\partial T}{\partial z_1'} - z_1 \frac{\partial T}{\partial y_1'},$$

so daß die Flächenintegrale liefern:

$$(8) \quad \sum_{i=1}^{i=3} \left( y_i \frac{\partial T}{\partial z_i'} - z_i \frac{\partial T}{\partial y_i'} \right) = A; \quad \sum_{i=1}^{i=3} \left( z_i \frac{\partial T}{\partial x_i'} - x_i \frac{\partial T}{\partial z_i'} \right) = B;$$

$$\sum_{i=1}^{i=3} \left( x_i \frac{\partial T}{\partial y_i'} - y_i \frac{\partial T}{\partial x_i'} \right) = C,$$

wo  $A, B, C$  Konstante sind.

Da das gegebene Punktsystem nur inneren Kräften unterworfen ist, so hängt  $U$  nur von den sechs Entfernungen der Punkte voneinander ab. Diese Entfernungen sollen mit  $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, r_1, r_2, r_3$  bezeichnet werden, wobei  $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$  die Entfernungen der Punkte  $M_1, M_2, M_3$  von  $M_4$  und  $r_1, r_2, r_3$  die Entfernungen der Punkte  $M_2$  und  $M_3, M_3$  und  $M_1, M_1$  und  $M_2$  bedeuten:

$$(9) \quad \varrho_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \text{ usw.} \quad r_1^2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 \text{ usw.}$$

Zumeist werden wir voraussetzen, daß die Kraft, die zwischen je zweien der gegebenen Punkte wirkt, dem Produkte der Massen der betreffenden Punkte in irgend eine Potenz ihrer Entfernung proportional ist. Dann ist

$$(10) \quad U = \frac{\varepsilon}{k+1} [m_4(m_1 \varrho_1^{k+1} + m_2 \varrho_2^{k+1} + m_3 \varrho_3^{k+1}) + m_2 m_3 r_1^{k+1} \\ + m_3 m_1 r_2^{k+1} + m_1 m_2 r_3^{k+1}],$$

wo  $k$  eine positive oder negative Zahl und  $\varepsilon$  ein von den Massen der Punkte unabhängiger konstanter Faktor sind.

In den Bewegungsgleichungen (5) ist natürlich

$$(11) \quad \frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{\partial U}{\partial \varrho_1} \frac{x_1}{\varrho_1} + \frac{\partial U}{\partial r_2} \frac{x_1 - x_3}{r_2} + \frac{\partial U}{\partial r_3} \frac{x_1 - x_2}{r_3};$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = \frac{\partial U}{\partial \varrho_2} \frac{x_2}{\varrho_2} + \frac{\partial U}{\partial r_3} \frac{x_2 - x_1}{r_3} + \frac{\partial U}{\partial r_1} \frac{x_2 - x_3}{r_1} \text{ usw.}$$

zu setzen.

2. In die Bewegungsgleichungen (5) wollen wir statt der neun Koordinaten  $x, y, z$  neue Variable einführen. Zu diesen wählen wir die sechs Größen  $\varrho$  und  $r$  (9) und drei Veränderliche  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ , die mit den Koordinaten  $x, y, z$  durch die Differentialgleichungen

$$(12) \quad \varphi_1' = x_2 x_3' + y_2 y_3' + z_2 z_3' - x_3 x_2' - y_3 y_2' - z_3 z_2' \text{ usw.}$$

verbunden sein mögen.\*)

Durch Differentiation nach der Zeit  $t$  erhält man aus (9):

$$(13) \quad \varrho_1 \varrho_1' = x_1 x_1' + y_1 y_1' + z_1 z_1' \text{ usw.}$$

$$r_1 r_1' = (x_2 - x_3)(x_2' - x_3') + (y_2 - y_3)(y_2' - y_3') + (z_2 - z_3)(z_2' - z_3') \text{ usw.}$$

Stellt man nun mit Hilfe von (12) und (13) drei Systeme von je drei Gleichungen, wie z. B.

$$\varrho_1 \varrho_1' = x_1 x_1' + y_1 y_1' + z_1 z_1';$$

$$\frac{1}{2} (\varrho_1 \varrho_1' + \varrho_2 \varrho_2' - r_3 r_3' - \varphi_3') = x_2 x_1' + y_2 y_1' + z_2 z_1';$$

$$\frac{1}{2} (\varrho_3 \varrho_3' + \varrho_1 \varrho_1' - r_2 r_2' + \varphi_2') = x_3 x_1' + y_3 y_1' + z_3 z_1',$$

zusammen, so bestimmt man leicht die Derivierten  $x', y', z'$ :

$$(14) \quad \Delta \cdot x_1' = (y_2 z_3 - z_2 y_3) \varrho_1 \varrho_1' + (y_3 z_1 - z_3 y_1) v_3' + (y_1 z_2 - z_1 y_2) u_2' \text{ usw.}$$

$$\Delta \cdot x_2' = (y_2 z_3 - z_2 y_3) u_3' + (y_3 z_1 - z_3 y_1) \varrho_2 \varrho_2' + (y_1 z_2 - z_1 y_2) v_1' \text{ usw.}$$

$$\Delta \cdot x_3' = (y_2 z_3 - z_2 y_3) v_2' + (y_3 z_1 - z_3 y_1) u_1' + (y_1 z_2 - z_1 y_2) \varrho_3 \varrho_3' \text{ usw.}$$

Hier bezeichnet  $\Delta$  das sechsfache Volumen der Pyramide, deren Scheitel in den Punkten  $M_1, M_2, M_3, M_4$  liegen.\*\*) Außerdem sind der Kürze wegen folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$(15) \quad \varrho_2 \varrho_2' + \varrho_3 \varrho_3' - r_1 r_1' + \varphi_1' = 2u_1' \text{ usw.}$$

$$\varrho_2 \varrho_2' + \varrho_3 \varrho_3' - r_1 r_1' - \varphi_1' = 2v_1' \text{ usw.}$$

\*) Die Aufgabe, in die dynamischen Gleichungen neue Variable einzuführen, die mit den ursprünglichen durch Differentialgleichungen verbunden sind, ist in letzter Zeit schon recht häufig behandelt worden. Ausführlicheres über diese Aufgabe, wie auch über die betreffende Literatur findet man in meinem Vortrage „Über eine Transformation der Gleichungen der Dynamik“ (Protokolle der Kiewer physiko-mathematischen Gesellschaft aus dem Jahre 1900) oder auch in der neueren Abhandlung von G. Hamel, Über die virtuellen Verschiebungen in der Mechanik (Math. Annalen Bd. 59. 1904).

\*\*) Wir setzen  $\Delta$  von Null verschieden voraus. Der Fall  $\Delta = 0$  soll weiter unten selbständig behandelt werden.



Setzt man aus den Formeln (14) in den Ausdruck (4) für die lebendige Kraft des Punktsystems ein, so wird  $T$  zu einer homogenen Funktion zweiten Grades  $\Theta$  der Größen  $\varrho'$ ,  $r'$ ,  $\varphi'$ .

Bezeichnen wir ferner:

$$(16) \quad \Delta^2 \cdot k_1 = (y_2 z_3 - z_2 y_3)^2 + (z_2 x_3 - x_2 z_3)^2 + (x_2 y_3 - y_2 x_3)^2 \text{ usw.}$$

$$(17) \quad \Delta^2 \cdot h_1 = (y_3 z_1 - z_3 y_1) (y_1 z_2 - z_1 y_2) + (z_3 x_1 - x_3 z_1) (z_1 x_2 - x_1 z_2) \\ + (x_3 y_1 - y_3 x_1) (x_1 y_2 - y_1 x_2) \text{ usw.},$$

so erhalten wir aus (14):

$$x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2 = k_1 \varrho_1'^2 \varrho_1'^2 + k_2 v_3'^2 + k_3 u_2'^2 + 2h_1 v_3' u_2' + 2h_2 u_2' \varrho_1 \varrho_1' \\ + 2h_3 \varrho_1 \varrho_1' v_3' \text{ usw.}$$

$$x_2' x_3' + y_2' y_3' + z_2' z_3' = k_1 u_3' v_2' + k_2 \varrho_2 \varrho_2' u_1' + k_3 v_1' \varrho_3 \varrho_3' \\ + h_1 (\varrho_2 \varrho_2' \varrho_3 \varrho_3' + v_1' u_1') + h_2 (v_1' v_2' + u_3' \varrho_3 \varrho_3') + h_3 (u_3' u_1' + \varrho_2 \varrho_2' v_2') \text{ usw.},$$

so daß (4) ergibt:

$$(18) \quad 2\Theta = k_1 (m_1 \varrho_1'^2 \varrho_1'^2 + m_2 u_3'^2 + m_3 v_2'^2 - M\Omega_1^2) \\ + k_2 (m_2 \varrho_2'^2 \varrho_2'^2 + m_3 u_1'^2 + m_1 v_3'^2 - M\Omega_2^2) \\ + k_3 (m_3 \varrho_3'^2 \varrho_3'^2 + m_1 u_2'^2 + m_2 v_1'^2 - M\Omega_3^2) \\ + 2h_1 (m_1 u_2' v_3' + m_2 \varrho_2 \varrho_2' v_1' + m_3 \varrho_3 \varrho_3' u_1' - M\Omega_2 \Omega_3) \\ + 2h_2 (m_2 u_3' v_1' + m_3 \varrho_3 \varrho_3' v_2' + m_1 \varrho_1 \varrho_1' u_2' - M\Omega_3 \Omega_1) \\ + 2h_3 (m_3 u_1' v_2' + m_1 \varrho_1 \varrho_1' v_3' + m_2 \varrho_2 \varrho_2' u_3' - M\Omega_1 \Omega_2),$$

wo zeitweilig

$$(19) \quad m_1 \varrho_1 \varrho_1' + m_2 u_3' + m_3 v_2' = M\Omega_1 \text{ usw.}$$

gesetzt ist.

Die Koeffizienten  $k$  und  $h$ , die in (18) eingehen, lassen sich leicht durch die Größen  $\varrho$  und  $r$  (9) ausdrücken. Nach (16), (17) und (9) ist:

$$(20) \quad \Delta^2 \cdot k_1 = \varrho_2^2 \varrho_3^2 - \frac{1}{4} (\varrho_2^2 + \varrho_3^2 - r_1^2)^2 \text{ usw.} \\ \Delta^2 \cdot h_1 = \frac{1}{4} (\varrho_3^2 + \varrho_1^2 - r_2^2) (\varrho_1^2 + \varrho_2^2 - r_3^2) - \frac{1}{2} \varrho_1^2 (\varrho_2^2 + \varrho_3^2 - r_1^2) \text{ usw.},$$

wobei nach einer bekannten Formel für das Volumen einer Pyramide, deren Kanten die Längen  $\varrho_1$ ,  $\varrho_2$ ,  $\varrho_3$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  haben,

$$(21) \quad \Delta^2 = \varrho_1^2 \varrho_2^2 \varrho_3^2 + \frac{1}{4} (\varrho_2^2 + \varrho_3^2 - r_1^2) (\varrho_3^2 + \varrho_1^2 - r_2^2) (\varrho_1^2 + \varrho_2^2 - r_3^2) \\ - \frac{1}{4} \varrho_1^2 (\varrho_2^2 + \varrho_3^2 - r_1^2)^2 - \frac{1}{4} \varrho_2^2 (\varrho_3^2 + \varrho_1^2 - r_2^2)^2 \\ - \frac{1}{4} \varrho_3^2 (\varrho_1^2 + \varrho_2^2 - r_3^2)^2$$

ist.

Die Gleichung (18) gibt also nach (15) und (19):

$$(22) \quad T = \Theta(\varrho_i, r_i, \varrho'_i, r'_i, \varphi'_i).$$

Um die Differentialgleichungen, die die Variablen  $\varrho, r, \varphi$  als Funktionen von  $t$  bestimmen, aufzustellen, führen wir die Variationen der Größen  $\varphi$  (12) ein:

$$(23) \quad \delta\varphi_1 = x_2\delta x_3 + y_2\delta y_3 + z_2\delta z_3 - x_3\delta x_2 - y_3\delta y_2 - z_3\delta z_2 \text{ usw.}$$

und bestimmen\*) die Differenzen

$$\delta\varphi' - \frac{d}{dt} \delta\varphi.$$

Aus (12) und (23) findet man:

$$\delta\varphi'_1 - \frac{d}{dt} \delta\varphi_1 = 2(x'_3\delta x_2 - x'_2\delta x_3 + \dots).$$

Setzt man in diese Gleichung aus (14) und aus den entsprechenden Formeln:

$$\Delta \cdot \delta x_1 = (y_2 z_3 - z_2 y_3) \varrho_1 \delta \varrho_1 + (y_3 z_1 - z_3 y_1) \delta v_3 + (y_1 z_2 - z_1 y_2) \delta u_2 \text{ usw.},$$

wo nach (15)

$$(24) \quad \begin{aligned} \varrho_2 \delta \varrho_2 + \varrho_3 \delta \varrho_3 - r_1 \delta r_1 + \delta \varphi_1 &= 2 \delta u_1 \quad \text{usw.} \\ \varrho_2 \delta \varrho_2 + \varrho_3 \delta \varrho_3 - r_1 \delta r_1 - \delta \varphi_1 &= 2 \delta v_1 \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

ist, ein, so erhält man:

$$(25) \quad \begin{aligned} \delta\varphi'_1 - \frac{d}{dt} \delta\varphi_1 &= 2k_1(v'_2 \delta u_3 - u'_3 \delta v_2) + 2k_2(u'_1 \varrho_2 \delta \varrho_2 - \varrho_2 \varrho'_2 \delta u_1) \\ &\quad + 2k_3(\varrho_3 \varrho'_3 \delta v_1 - v'_3 \varrho_3 \delta \varrho_3) \\ &\quad + 2h_1(\varrho_3 \varrho'_3 \varrho_2 \delta \varrho_2 - \varrho_2 \varrho'_2 \varrho_3 \delta \varrho_3 + u'_1 \delta v_1 - v'_1 \delta u_1) \\ &\quad + 2h_2(v'_2 \delta v_1 - v'_1 \delta v_2 + \varrho_3 \varrho'_3 \delta u_3 - u'_3 \varrho_3 \delta \varrho_3) \\ &\quad + 2h_3(u'_1 \delta u_3 - u'_3 \delta u_1 + v'_2 \varrho_2 \delta \varrho_2 - \varrho_2 \varrho'_2 \delta v_2). \end{aligned}$$

Durch Vertauschung der Indizes 1, 2, 3 bekommt man hieraus die Gleichungen zur Bestimmung der Differenzen

$$\delta\varphi'_2 - \frac{d}{dt} \delta\varphi_2; \quad \delta\varphi'_3 - \frac{d}{dt} \delta\varphi_3.$$

Nun wenden wir die bekannte Formel

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta\Theta + \delta U) dt = 0$$

\*) Vergl. unseren oben erwähnten Vortrag oder auch die Abhandlung von K. Heun, Die Bedeutung des D'Alembertschen Prinzipes für starre Systeme und Gelenkmechanismen (Archiv für Math. und Phys. III. 2. 1902. § 17).

an. Durch partielle Integration läßt sich die Funktion unter dem Integralzeichen so schreiben:

$$\sum_{i=1}^{i=3} \left[ -\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \varrho'_i} \right) \delta \varrho_i - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial r'_i} \right) \delta r_i - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi'_i} \right) \delta \varphi_i + \frac{\partial(\Theta + U)}{\partial \varrho_i} \delta \varrho_i + \frac{\partial(\Theta + U)}{\partial r_i} \delta r_i + \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_i} \left( \delta \varphi_i - \frac{d}{dt} \delta \varphi_i \right) \right].$$

Mit Hilfe von (25) und (24) wird dieser Ausdruck zu einer linearen Funktion der Variationen  $\delta \varrho$ ,  $\delta r$ ,  $\delta \varphi$ . Setzt man nun die Koeffizienten dieser Variationen gleich Null, so erhält man folgende neun Gleichungen:

$$(26) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \varrho'_1} \right) - \frac{\partial(\Theta + U)}{\partial \varrho_1} &= \varrho_1(\beta_1 - \gamma_1) \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi'_1} - \varrho_1(2\beta_1 + \gamma_2 + \alpha_3 - \alpha_1) \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi'_2} \\ &\quad + \varrho_1(2\gamma_1 + \beta_3 + \alpha_2 - \alpha_1) \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi'_3} \text{ usw.} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial r'_1} \right) - \frac{\partial(\Theta + U)}{\partial r_1} &= r_1(\alpha_2 - \alpha_3) \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi'_1} - r_1\beta_2 \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi'_2} + r_1\gamma_3 \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi'_3} \text{ usw.} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi'_1} \right) &= -(\alpha_2 + \alpha_3) \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi'_1} + \beta_2 \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi'_2} + \gamma_3 \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi'_3} \text{ usw.,} \end{aligned}$$

wo die  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  lineare Funktionen der Größen  $\varrho'$ ,  $r'$ ,  $\varphi'$ , deren Koeffizienten von  $\varrho$  und  $r$  abhängen, bezeichnen:

$$(27) \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= k_1 \varrho_1 \varrho'_1 + h_2 u'_2 + h_3 v'_3 \text{ usw.}; & \beta_1 &= k_1 v'_2 + h_2 \varrho_3 \varrho'_3 + h_3 u'_1 \text{ usw.}; \\ \gamma_1 &= k_1 u'_3 + h_2 v'_1 + h_3 \varrho_2 \varrho'_2 \text{ usw.} \end{aligned}$$

Aus diesen Formeln sind die Variablen  $u'$  und  $v'$  mit Hilfe von (15) zu eliminieren.

Die Gleichungen (26) bestimmen die Veränderlichen  $\varrho$ ,  $r$ ,  $\varphi'$  als Funktionen der Zeit. Diese Gleichungen sind in bezug auf die Größen  $\varrho$  und  $r$  von der zweiten, in bezug auf die Variablen  $\varphi'$  von der ersten Ordnung.

Zwei Integrale des Systems (26) lassen sich sofort angeben. Das Integral der lebendigen Kraft gibt:

$$(28) \quad \Theta = U + h,$$

wo  $h$  eine Konstante bezeichnet.

Um das andere Integral zu erhalten, benutzen wir die Flächenintegrale (8). Den Formeln (12) und (13) gemäß ist:

$$(29) \quad \frac{\partial T}{\partial x'_1} = \frac{\partial \Theta}{\partial \varrho'_1} \varrho'_1 + \frac{\partial \Theta}{\partial r'_2} \frac{x_1 - x_2}{r_2} + \frac{\partial \Theta}{\partial r'_3} \frac{x_1 - x_2}{r_3} + \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi'_2} x_3 - \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi'_3} x_2 \text{ usw.,}$$

so daß

$$y_1 \frac{\partial T}{\partial z_1} - z_1 \frac{\partial T}{\partial y_1} = -\frac{1}{r_2} \frac{\partial \Theta}{\partial r_2'} (y_1 z_3 - z_1 y_3) - \frac{1}{r_3} \frac{\partial \Theta}{\partial r_3'} (y_1 z_2 - z_1 y_2) \\ + \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_2'} (y_1 z_3 - z_1 y_3) - \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_3'} (y_1 z_2 - z_1 y_2)$$

wird. Setzt man hieraus in die Flächenintegrale (8) ein, so erhält man:

$$(30) (y_3 z_2 - z_3 y_2) \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_1'} + (y_1 z_3 - z_1 y_3) \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_2'} + (y_2 z_1 - z_2 y_1) \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_3'} = \frac{1}{2} A \text{ usw.,}$$

oder, indem man diese Gleichungen quadriert und sodann addiert, nach (16) und (17):

$$(31) k_1 \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_1'} \right)^2 + k_2 \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_2'} \right)^2 + k_3 \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_3'} \right)^2 + 2h_1 \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_2'} \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_3'} + 2h_2 \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_3'} \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_1'} \\ + 2h_3 \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_1'} \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_2'} = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{4\Delta^2}.$$

Wenn man zwei der Gleichungen (26) durch die Integrale (28) und (31) ersetzt und aus dem neuen System von Differentialgleichungen  $dt$  und, z. B.,  $\varphi_3'$  eliminiert, so bekommt man sieben Differentialgleichungen, die sieben der Variablen  $\varrho$ ,  $r$ ,  $\varphi'$  durch die achte bestimmen. Nur fünf von diesen Gleichungen werden zweiter Ordnung sein. *Wir können also sagen, daß das Problem der Bewegung von vier Massenpunkten, die nur inneren Kräften unterworfen sind, auf die Integration von zwölf simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung reduziert ist.*

Wenn die Kräftefunktion  $U$ , wie z. B. in (10), eine homogene Funktion  $(k+1)^{\text{ten}}$  Grades von den Variablen  $\varrho$  und  $r$  ist, so kann es oft vorteilhaft sein, eine der Gleichungen (26) durch folgende von Jacobi\*) gegebene Gleichung zu ersetzen:

$$(32) \frac{d^2}{dt^2} [m_4(m_1 \varrho_1^2 + m_2 \varrho_2^2 + m_3 \varrho_3^2) + m_2 m_3 r_1^2 + m_3 m_1 r_2^2 + m_1 m_2 r_3^2] \\ = 2M[(3+k)U + 2h].$$

Sind aus (26) die Variablen  $\varrho$ ,  $r$ ,  $\varphi'$  als Funktionen der Zeit bestimmt, so findet man die Koordinaten  $x$ ,  $y$ ,  $z$  der Punkte  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  ohne Schwierigkeit.

Durch geeignete Wahl der Richtung der Koordinatenachse  $M_4 z$  kann man es stets erreichen, daß zwei der Konstanten  $A$ ,  $B$ ,  $C$  der Flächenintegrale gleich Null werden. Es mögen

$$A = B = 0$$

sein.  $C$  wollen wir von Null verschieden voraussetzen.\*\*)

\*) Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, Vorl. IV.

\*\*\*) Der Fall  $A = B = C = 0$  wird weiter unten für sich behandelt.

Multipliziert man (30) mit  $x_i, y_i, z_i$ , wo  $i$  1, 2 oder 3 bedeutet, und addiert, so wird

$$(33) \quad -\Delta \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_i} = \frac{1}{2} C z_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Diese Formeln bestimmen die Koordinaten  $z$  der Punkte  $M_1, M_2, M_3$ . Wir führen nun Polarkoordinaten ein:

$$x_i = R_i \cos \vartheta_i; \quad y_i = R_i \sin \vartheta_i.$$

Die Größen  $R_i$  und die Differenzen  $\vartheta_i - \vartheta_j$  findet man ohne Integration aus den Formeln:

$$(34) \quad R_i^2 = \varrho_i^2 - z_i^2; \quad 2R_2 R_3 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_3) = \varrho_2^2 + \varrho_3^2 - r_1^2 - 2z_2 z_3 \quad \text{usw.}$$

Man hat also nur noch irgend eine von den Variablen  $\vartheta_i$  zu bestimmen. Führt man in die Gleichung (12) und (13)

$$2(x_2 x_3' + y_2 y_3' + z_2 z_3') = \varrho_2 \varrho_2' + \varrho_3 \varrho_3' - r_1 r_2' + \varphi_1'$$

Polarkoordinaten ein, so wird

$$\begin{aligned} 2[R_2 R_3' \cos(\vartheta_2 - \vartheta_3) + R_2 R_3 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_3) \vartheta_3' + z_2 z_3'] \\ = \varrho_2 \varrho_2' + \varrho_3 \varrho_3' - r_1 r_1' + \varphi_1', \end{aligned}$$

so daß

$$(35) \quad \vartheta_3 = \int \frac{\varrho_2 \varrho_2' + \varrho_3 \varrho_3' - r_1 r_1' + \varphi_1' - 2z_2 z_3' - 2R_2 R_3' \cos(\vartheta_2 - \vartheta_3)}{2R_2 R_3 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_3)} dt + \text{const.}$$

wird.

Die Integration des Systems (26) führt 15 Konstanten ein. Über zwei Konstanten,  $A$  und  $B$ , haben wir durch die Wahl der Richtung der  $z$ -Achse bestimmte Verfügungen getroffen. Die Quadratur (35) gibt noch eine Konstante. Es werden also, wie auch zu erwarten war, die Funktionen, die die Koordinaten  $x, y, z$  der Punkte  $M_1, M_2, M_3$  durch die Zeit bestimmen, 18 willkürliche Konstanten enthalten.

2. Wir wollen nun den speziellen Fall, wenn drei der Punkte  $M_1, M_2, M_3, M_4$  gleiche Massen haben, ins Auge fassen. Es sei

$$(36) \quad m_1 = m_2 = m_3 = 1; \quad m_4 = m; \quad M = 3 + m.$$

Es fällt nicht schwer nachzuweisen, daß dann die Bewegungsgleichungen (26) das System partikulärer Integrale

$$(37) \quad \varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = \varrho; \quad r_1 = r_2 = r_3 = r; \quad \varphi_1' = \varphi_2' = \varphi_3' = \varphi',$$

wo  $\varrho, r, \varphi'$  noch zu bestimmende Funktionen der Zeit bezeichnen, zulassen.

Aus (20) und (21) findet man:

$$\Delta^2 = \frac{r^4}{4} (3\varrho^2 - r^2); \quad k_1 = k_2 = k_3 = \frac{1}{r^2} \frac{4\varrho^2 - r^2}{3\varrho^2 - r^2}; \quad h_1 = h_2 = h_3 = -\frac{1}{r^2} \frac{2\varrho^2 - r^2}{3\varrho^2 - r^2}.$$

Die Formeln (27) geben nach (15):

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{r^2 \varrho \varrho' + (2\varrho^2 - r^2) r r'}{r^2(3\varrho^2 - r^2)}; \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \frac{r^2 \varrho \varrho' - \varrho^2 r r'}{r^2(3\varrho^2 - r^2)} - \frac{\varphi'}{r^2};$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \frac{r^2 \varrho \varrho' - \varrho^2 r r'}{r^2(3\varrho^2 - r^2)} + \frac{\varphi'}{r^2}.$$

Bezeichnet man mit  $\Theta_1$  das Resultat der Einsetzung aus (37) und (36) in die Formel (18) für  $\Theta$ , so ist augenscheinlich:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \varrho_i} = \frac{1}{3} \frac{\partial \Theta_1}{\partial \varrho_i}; \quad \frac{\partial \Theta}{\partial r_i} = \frac{1}{3} \frac{\partial \Theta_1}{\partial r_i} \quad \text{usw.}$$

Von der Kräftefunktion  $U$  wollen wir auch voraussetzen, daß

$$\frac{\partial U}{\partial \varrho_i} = \frac{1}{3} \frac{\partial U_1}{\partial \varrho_i}; \quad \frac{\partial U}{\partial r_i} = \frac{1}{3} \frac{\partial U_1}{\partial r_i},$$

wo  $U_1$  in bezug auf  $U$  dieselbe Bedeutung hat, wie  $\Theta_1$  in bezug auf  $\Theta$ .

Setzt man aus den gefundenen Formeln in die Bewegungsgleichungen (26) ein, so erhält man nur drei voneinander verschiedene Gleichungen:

$$(38) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Theta_1}{\partial \varrho'} \right) = \frac{\partial(\Theta_1 + U_1)}{\partial \varrho}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Theta_1}{\partial r'} \right) = \frac{\partial(\Theta_1 + U_1)}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Theta_1}{\partial \varphi'} \varphi';$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Theta_1}{\partial \varphi'} \right) = - \frac{2}{r} \frac{\partial \Theta_1}{\partial \varphi'} r',$$

die die drei Variablen  $\varrho$ ,  $r$ ,  $\varphi'$  als Funktionen der Zeit bestimmen.

Die letzte der Gleichungen (38) gibt nach Integration das Integral (31) für den in Rede stehenden speziellen Fall:

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial \varphi'} = \frac{\sqrt{3(A^2 + B^2 + C^2)}}{r^2}.$$

Nun ist aber die Funktion  $\Theta_1$ , die aus (18) leicht zu berechnen ist, gleich:

$$2\Theta_1 = \frac{m}{M} \frac{(3\varrho \varrho' - r r')^2}{3\varrho^2 - r^2} + r'^2 + \frac{3}{r^2} \varphi'^2,$$

so daß dem aufgefundenen Integrale gemäß:

$$\varphi' = \sqrt{\frac{A^2 + B^2 + C^2}{3}} = \text{const.} = \varphi'_0.$$

Bezeichnen wir jetzt

$$\Theta_1 - \frac{3}{2} \frac{\varphi_0'^2}{r^2} = \Theta_2; \quad U_1 - \frac{3}{2} \frac{\varphi_0'^2}{r^2} = U_2,$$

so können die Differentialgleichungen, die  $\varrho$  und  $r$  bestimmen, so geschrieben werden:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Theta_2}{\partial \varrho'} \right) = \frac{\partial(\Theta_2 + U_2)}{\partial \varrho}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Theta_2}{\partial r'} \right) = \frac{\partial(\Theta_2 + U_2)}{\partial r}.$$

Statt der Variablen  $\varrho$  führen wir eine neue  $\xi$  ein:

$$\xi = \sqrt{\frac{m}{M}} \sqrt{3\varrho^2 - r^2}.$$

Dann wird

$$2\Theta_2 = \xi'^2 + r'^2,$$

und die Differentialgleichungen transformieren sich in solche:

$$\xi'' = \frac{\partial U_2}{\partial \xi}; \quad r'' = \frac{\partial U_2}{\partial r},$$

wo  $U_2$  durch  $r$  und  $\xi$  auszudrücken ist.

Diese Formeln fallen mit den Gleichungen der Bewegung eines materiellen Punktes in einer Ebene zusammen, wenn die Masse des Punktes gleich Eins ist, seine rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten mit  $\xi$  und  $r$  bezeichnet sind und  $U_2$  die Kräftefunktion bedeutet.

Ist die Kraft, die zwischen den Punkten  $M_i$  und  $M_j$  wirkt, dem Kubus der Entfernung  $\overline{M_i M_j}$ , umgekehrt proportional, d. h. ist in (10)

$$k = -3,$$

so ist unser Problem leicht in Quadraturen auflösbar.

Die Jacobische Gleichung (32) gibt dann das Integral:

$$M(\xi^2 + r^2) = 2Mht^2 + 2at + b,$$

wo  $a$  und  $b$  willkürliche Konstanten sind, und das Integral der lebendigen Kraft nimmt die Form

$$\xi'^2 + r'^2 = -3\varepsilon \left( \frac{3m^2}{M\xi^2 + mr^2} + \frac{1}{r^2} \right) - 3 \frac{\varphi_0'^2}{r^2} + 2h$$

an. Eliminiert man aus diesen zwei Gleichungen eine der Variablen, so erhält man eine Differentialgleichung erster Ordnung zur Bestimmung der anderen Variablen. Diese Gleichung muß der Jacobischen Theorie des letzten Multiplikators zufolge zu Quadraturen führen.

Sehr rasch kommt man ans Ziel durch Einführung neuer Veränderlichen:

$$\xi = \chi \cdot \cos \psi; \quad r = \chi \cdot \sin \psi.$$

Dann hat man:

$$M\chi^2 = 2Mht^2 + 2at + b;$$

$$\begin{aligned} \chi^2 \chi'^2 + \chi^4 \psi'^2 &= -3\varepsilon \left( \frac{3m^2}{M \cos^2 \psi + m \sin^2 \psi} + \frac{1}{\sin^2 \psi} \right) - 3 \frac{\varphi_0'^2}{\sin^2 \psi} + 2h\chi^2 \\ &= F(\psi) + 2h\chi^2, \end{aligned}$$

woraus nach Elimination von  $\chi$  die Quadratur

$$\int \frac{d\psi}{\sqrt{\frac{2hb}{M} - \frac{a^2}{M^2} + F(\psi)}} = \int \frac{dt}{2ht^2 + \frac{2a}{M}t + \frac{b}{M}} + \text{const.}$$

erhalten wird.

Sind die Größen  $\varrho$  und  $r$  als Funktionen der Zeit bekannt, so macht die Bestimmung der Bewegung der Pyramide  $M_1 M_2 M_3 M_4$  in bezug auf das Koordinatensystem  $M_4 xyz$  keine Schwierigkeit.

Wir wählen wieder die  $xy$ -Ebene parallel der invariablen Ebene:

$$A = B = 0.$$

Aus den Formeln (33), (34) und (35) bekommen wir dann:

$$z_1 = z_2 = z_3 = \sqrt{\varrho^2 - \frac{1}{3} r^2}; \quad R_1 = R_2 = R_3 = \frac{r}{\sqrt{3}}; \quad \vartheta_2 - \vartheta_3 = \frac{2}{3} \pi;$$

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = \frac{2}{3} \pi; \quad \vartheta_3 = \sqrt{3} \cdot \varphi_0' \int \frac{dt}{r^2} + \text{const.}$$

Die Ebene des Dreiecks  $M_1 M_2 M_3$  bleibt also der invariablen Ebene stets parallel, und die Pyramide  $M_1 M_2 M_3 M_4$  dreht sich um ihre Höhe mit einer Winkelgeschwindigkeit, die dem Quadrate der augenblicklichen Entfernung der Punkte  $M_1$ ,  $M_2$  oder  $M_3$  von der Rotationsachse umgekehrt proportional ist.

## II.

1. Wir gehen jetzt zu dem Falle über, daß alle drei Konstanten der Flächenintegrale gleich Null sind:

$$(39) \quad A = B = C = 0.$$

Hierbei wollen wir an der Voraussetzung, daß das Pyramidenvolumen  $\Delta$  von Null verschieden ist, festhalten. Die Integrale (30) können unter diesen Bedingungen durch folgende ersetzt werden:

$$(40) \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_i'} = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

die natürlich auch direkt aus den Bewegungsgleichungen (26) sich herleiten lassen.

Wenn wir voraussetzen, daß aus (40) die  $\varphi_i'$  bestimmt und in die Funktion  $\Theta$  eingesetzt sind, d. h. wenn

$$\Theta = T_1(\varrho_i, r_i, \varrho_i', r_i'),$$

so ist nach (40):

$$\frac{\partial T_1}{\partial \varrho_i'} = \frac{\partial \Theta}{\partial \varrho_i'}; \quad \frac{\partial T_1}{\partial \varrho_i} = \frac{\partial \Theta}{\partial \varrho_i} \quad \text{usw.}$$

Setzen wir hieraus und aus (40) in die Bewegungsgleichungen (26) ein, so erhalten wir:

$$(41) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_1}{\partial \varrho_i'} \right) = \frac{\partial (T_1 + U)}{\partial \varrho_i}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_1}{\partial r_i'} \right) = \frac{\partial (T_1 + U)}{\partial r_i} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Hat man aus diesen Differentialgleichungen die Variablen  $\varrho$  und  $r$  als Funktionen der Zeit gefunden, so ist damit die Deformation der Pyramide



$M_1, M_2, M_3, M_4$  bestimmt. Es bleibt also noch übrig, die Bewegung der Pyramide in bezug auf das Koordinatensystem  $M_4xyz$  aufzufinden. Zu diesem Zwecke hat man die Koordinaten  $x, y, z$  der Punkte  $M_1, M_2, M_3$  aus den Formeln (9) und (12) oder aus folgenden, ihnen gleichbedeutenden:

$$(42) \quad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \varrho_1^2 \text{ usw.}; \quad 2(x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3) = \varrho_2^2 + \varrho_3^2 - r_1^2 \text{ usw.}; \\ 2(x_2x_3' + y_2y_3' + z_2z_3') = \varrho_2\varrho_2' + \varrho_3\varrho_3' - r_1r_1' + \varphi_1' \text{ usw.}$$

zu berechnen, wo die  $\varphi'$  aus (40) zu bestimmen sind.

Wir wollen nachweisen, daß diese Aufgabe auf die Integration einer Riccatischen Gleichung zurückgeführt werden kann.

Zu diesem Zwecke führen wir statt der neun Größen  $x, y, z$  15 neue Variablen  $a_i, b_i, c_i, \lambda_i, \mu_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) ein, von denen wir verlangen wollen, daß sie folgenden sechs Bedingungen

$$(43) \quad a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1 \text{ usw.}; \quad a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 = 0 \text{ usw.}$$

genügen. Die Beziehungen zwischen den Veränderlichen  $x, y, z$  und  $a, b, c, \lambda, \mu$  wählen wir so:

$$(44) \quad x_1 = \varrho_1(\lambda_1a_2 + \mu_1a_3) \text{ usw.}; \quad x_2 = \varrho_2(\lambda_2a_3 + \mu_2a_1) \text{ usw.}; \\ x_3 = \varrho_3(\lambda_3a_1 + \mu_3a_2) \text{ usw.}$$

Setzt man diese Werte für die  $x, y, z$  in die ersten sechs Gleichungen (42) ein und beachtet die Bedingungen (43), so erhält man:

$$(45) \quad \lambda_1^2 + \mu_1^2 = \frac{1}{\varrho_1^2} \text{ usw.}; \quad \lambda_3\mu_2 = \frac{\varrho_2^2 + \varrho_3^2 - r_1^2}{2\varrho_2\varrho_3} \text{ usw.}$$

Diese leicht zu lösenden Gleichungen bestimmen die Größen  $\lambda$  und  $\mu$ .

Indem man (44) nach der Zeit differenziert, bekommt man z. B.:

$$x_3' = \varrho_3'(\lambda_3a_1 + \mu_3a_2) + \varrho_3(\lambda_3'a_1 + \mu_3'a_2) + \varrho_3(\lambda_3a_1' + \mu_3a_2'),$$

so daß die letzten drei Gleichungen (42) nach (43) ergeben:

$$(46) \quad 2\mu_2\lambda_3\varrho_2\varrho_3' + 2\varrho_2\varrho_3\mu_2\lambda_3' + 2\varrho_2\varrho_3(-\lambda_2\mu_3\omega_1 + \lambda_2\lambda_3\omega_2 + \mu_2\mu_3\omega_3) \\ = \varrho_2\varrho_2' + \varrho_3\varrho_3' - r_1r_1' + \varphi_1' \text{ usw.},$$

wo nach (43)

$$(47) \quad a_2a_3' + b_2b_3' + c_2c_3' = -(a_3a_2' + b_3b_2' + c_3c_2') = \omega_1 \text{ usw.}$$

gesetzt ist.

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} -\lambda_2\mu_3 & \lambda_2\lambda_3 & \mu_2\mu_3 \\ \mu_3\mu_1 - \lambda_3\mu_1 & & \lambda_3\lambda_1 \\ \lambda_1\lambda_2 & \mu_1\mu_2 - \lambda_1\mu_2 & \end{vmatrix}$$

ist nach (45) und (21), wie man sich leicht überzeugen kann,

$$\frac{\Delta^2}{e_1^2 e_2^2 e_3^2},$$

also unserer Voraussetzung gemäß von Null verschieden. Darum lassen sich die  $\omega$  aus (46) bestimmen.

Nachdem man die Differentialgleichungen (41) integriert und die Gleichungen (45) gelöst hat, werden also die  $\omega$  bekannte Funktionen der Zeit sein. Nun ist es aber wohl bekannt\*), daß die Aufgabe der Bestimmung der Größen  $a, b, c$  aus den Bedingungen (43) und (47) auf die Integration einer Riccatischen Gleichung zurückgeführt werden kann.

Wir sehen also, daß das Problem der Bewegung von vier Massenpunkten unter der Wirkung von inneren Kräften für den Fall, daß die Konstanten der Flächenintegrale gleich Null sind, in zwei selbständige, nacheinander zu lösende Probleme zerfällt.

Zuerst wird die Deformation der Pyramide, deren Scheitel in den gegebenen Massenpunkten liegen, gesucht. Dieses Problem löst man durch Integration von sechs Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die die Kantenlängen der Pyramide als Funktionen der Zeit bestimmen. Danach stellt man sich die Aufgabe, die Bewegung der veränderlichen Pyramide im Raume aufzufinden. Die Lösung dieser Aufgabe hängt von der Integration einer Riccatischen Gleichung ab.

Aus den Gleichungen (41) läßt sich noch mit Hilfe des Integrals der lebendigen Kraft die Zeit eliminieren. Das neue System von fünf Differentialgleichungen zweiter Ordnung bestimmt fünf der Kantenlängen der Pyramide  $M_1 M_2 M_3 M_4$  durch die sechste.

2. Die sechs Differentialgleichungen zweiter Ordnung (41) wollen wir nun durch zwölf Gleichungen erster Ordnung in der kanonischen Form ersetzen.

Wir bezeichnen nach (40)

$$(48) \quad \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{q}_i'} = \frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{q}_i} = \pi_i; \quad \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{r}_i'} = \frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{r}_i} = p_i \quad (i = 1, 2, 3);$$

dann genügen die Größen  $\pi, p, q, r$ , wie bekannt, den Gleichungen:

$$(49) \quad \begin{aligned} \frac{d\pi_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}_i}; & \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \pi_i}; \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i}; & \frac{dr_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}; \end{aligned}$$

( $i = 1, 2, 3$ ),

\*) Vergl. z. B. Darboux, Théorie des surfaces, t. I. ch. II.

wo

$$H = \sum_{i=1}^{i=3} (\pi_i \varrho_i' + p_i r_i') - T_1 - U = T - U$$

ist, so daß  $T$  die lebendige Kraft des gegebenen Punktsystems bedeutet, die mit Hilfe von (40) und (48) als homogene Funktion zweiten Grades von den Größen  $\pi$  und  $p$  dargestellt ist.

Diese Funktion  $T$  wollen wir jetzt berechnen.

Aus den Formeln (29) findet man nach (4), (40) und (48):

$$\frac{\partial T}{\partial x_1'} = m_1 \left( x_1' - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{i=3} m_i x_i' \right) = \frac{\pi_1}{\varrho_1} x_1 + \frac{p_2}{r_2} (x_1 - x_3) + \frac{p_3}{r_3} (x_1 - x_2) \text{ usw.}$$

und hieraus nach (1):

$$\sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial T}{\partial x_i'} = \frac{m_4}{M} \sum_{i=1}^{i=3} m_i x_i' = \frac{\pi_1}{\varrho_1} x_1 + \frac{\pi_2}{\varrho_2} x_2 + \frac{\pi_3}{\varrho_3} x_3,$$

so daß

$$x_1' = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_4} \right) \frac{\pi_1}{\varrho_1} x_1 + \frac{1}{m_4} \frac{\pi_2}{\varrho_2} x_2 + \frac{1}{m_4} \frac{\pi_3}{\varrho_3} x_3 + \frac{1}{m_1} \frac{p_2}{r_2} (x_1 - x_3) \\ + \frac{1}{m_1} \frac{p_3}{r_3} (x_1 - x_2) \text{ usw.}$$

Setzt man nun diese Werte für  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  und  $\frac{\partial T}{\partial x'}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial y'}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial z'}$  in die evidente Formel:

$$2T = \sum_{i=1}^{i=3} \left( \frac{\partial T}{\partial x_i'} x_i' + \frac{\partial T}{\partial y_i'} y_i' + \frac{\partial T}{\partial z_i'} z_i' \right)$$

ein, so erhält man nach kurzer Rechnung mit Hilfe von (9):

$$(50) \quad 2T = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_4} \right) \pi_1^2 + \left( \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_4} \right) \pi_2^2 + \left( \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4} \right) \pi_3^2 + \left( \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} \right) p_1^2 \\ + \left( \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_1} \right) p_2^2 + \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) p_3^2 \\ + \frac{1}{m_4} \left[ (\varrho_2^2 + \varrho_3^2 - r_1^2) \frac{\pi_2 \pi_3}{\varrho_2 \varrho_3} + (\varrho_3^2 + \varrho_1^2 - r_2^2) \frac{\pi_3 \pi_1}{\varrho_3 \varrho_1} + (\varrho_1^2 + \varrho_2^2 - r_3^2) \frac{\pi_1 \pi_2}{\varrho_1 \varrho_2} \right] \\ + \frac{1}{m_1} (r_2^2 + r_3^2 - r_1^2) \frac{p_2 p_3}{r_2 r_3} + \frac{1}{m_2} (r_3^2 + r_1^2 - r_2^2) \frac{p_3 p_1}{r_3 r_1} + \frac{1}{m_3} (r_1^2 + r_2^2 - r_3^2) \frac{p_1 p_2}{r_1 r_2} \\ + \frac{1}{m_1} \left[ \varrho_1^2 + r_2^2 - \varrho_3^2 \right] \frac{p_2}{r_2} + (\varrho_1^2 + r_3^2 - \varrho_2^2) \frac{p_3}{r_3} \left] \frac{\pi_1}{\varrho_1} \\ + \frac{1}{m_2} \left[ \varrho_2^2 + r_3^2 - \varrho_1^2 \right] \frac{p_3}{r_3} + (\varrho_2^2 + r_1^2 - \varrho_3^2) \frac{p_1}{r_1} \left] \frac{\pi_2}{\varrho_2} \\ + \frac{1}{m_3} \left[ (\varrho_3^2 + r_1^2 - \varrho_2^2) \frac{p_1}{r_1} + (\varrho_3^2 + r_2^2 - \varrho_1^2) \frac{p_2}{r_2} \right] \frac{\pi_3}{\varrho_3}.$$

3. Um die in den letzten zwei Paragraphen aufgestellten Formeln auf

einen speziellen Fall anzuwenden, wollen wir voraussetzen, daß die Massen der Punkte  $M_1, M_2, M_3, M_4$  einander gleich sind:

$$(51) \quad m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1; \quad M = 4,$$

und daß die Kräftefunktion  $U$  in der Form (10) gegeben ist. Die Funktion  $H$  (50) ändert sich dann nicht, wenn man die Variablen  $q$  und  $\pi$  durch die Variablen  $r$  und  $p$  mit den entsprechenden Indizes ersetzt, und umgekehrt. Daraus ziehen wir den Schluß, daß die Bewegungsgleichungen (49) das System partikulärer Integrale

$$(52) \quad q_i = r_i; \quad \pi_i = p_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

zulassen.

Es ist also eine solche Bewegung des gegebenen Punktsystems  $M_1, M_2, M_3, M_4$  möglich, bei welcher je zwei gegenüberliegende Kanten der Pyramide  $M_1 M_2 M_3 M_4$  gleiche Länge haben.

Die Variablen  $r$  und  $p$  genügen im Falle (51) und (52) den Gleichungen:

$$\frac{dr_i}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial p_i}; \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial r_i} \quad (i = 1, 2, 3),$$

wo (50)

$$(53) \quad H_1 = \frac{1}{2} H = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \frac{r_2^2 + r_3^2 - r_1^2}{r_2 r_3} p_2 p_3 + \frac{r_3^2 + r_1^2 - r_2^2}{r_3 r_1} p_3 p_1 \\ + \frac{r_1^2 + r_2^2 - r_3^2}{r_1 r_2} p_1 p_2 - \frac{\varepsilon}{\kappa + 1} (r_1^{\kappa+1} + r_2^{\kappa+1} + r_3^{\kappa+1})$$

ist. Diese Gleichungen haben nun die partikulären Integrale

$$(54) \quad r_3 = r_2; \quad p_3 = p_2,$$

und die Variablen  $r_1, r_2, p_1, p_2$  sind aus den Formeln:

$$(55) \quad \frac{dr_1}{dt} = 2p_1 + 2\frac{r_1}{r_2} p_2; \quad \frac{dp_1}{dt} = -2\frac{p_2}{r_2} \left( p_1 - \frac{r_1}{r_2} p_2 \right) + \varepsilon r_1^{\kappa}; \\ \frac{dr_2}{dt} = \frac{r_1}{r_2} p_1 + \left( 4 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) p_2; \quad \frac{dp_2}{dt} = \frac{r_1}{r_2^2} p_2 \left( p_1 - \frac{r_1}{r_2} p_2 \right) + \varepsilon r_2^{\kappa}$$

zu bestimmen.

Die erhaltenen Gleichungen können in dem Falle, daß die wirkenden Kräfte dem Kubus der Entfernung umgekehrt proportional sind, leicht integriert werden. Doch wollen wir erst nachweisen, wie unter der Voraussetzung, daß die Gleichungen (55) gelöst sind, die Bewegung der Pyramide  $M_1 M_2 M_3 M_4$  in bezug auf das Koordinatensystem  $M_4 x y z$  bestimmt werden kann. Das in § 1 auseinandergesetzte Verfahren gestaltet sich im Falle (51), (52), (54) besonders einfach.

Wir beginnen mit der Bestimmung der Größen  $\varphi'$  aus den Integralen (40) oder, was nach (15) dasselbe ist, aus den Formeln:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial u_i'} = \frac{\partial \Theta}{\partial v_i'} \text{ usw.}$$

Dem Ausdrucke (18) für  $\Theta$  gemäß bekommt man hieraus nach (19):

$$m_3[k_2 u_1' + h_3 v_2' + h_1 \varrho_3 \varrho_3' - (k_2 \Omega_2 + h_3 \Omega_1 + h_1 \Omega_3)] \\ = m_2[k_3 v_1' + h_1 \varrho_2 \varrho_2' + h_2 u_3' - (h_3 \Omega_3 + h_1 \Omega_2 + h_2 \Omega_1)] \text{ usw.},$$

oder, wenn man wieder die Bezeichnungen (27) einführt:

$$m_3 \left[ \gamma_2 - \frac{1}{M} (m_2 \alpha_2 + m_1 \beta_2 + m_3 \gamma_2) \right] = m_2 \left[ \beta_3 - \frac{1}{M} (m_3 \alpha_3 + m_2 \beta_3 + m_1 \gamma_3) \right] \\ \text{usw.}$$

Nun ist aber in unserem Falle (51), (52) und (54) nach (16), (17) und (15)

$$k_1 = k_2 = k_3 = -h_1 - 2h_2; \quad h_3 = h_2; \\ 2u_1' = 2r_2 r_2' - r_1 r_1' + \varphi_1'; \quad 2u_2' = r_1 r_1' + \varphi_2'; \quad 2u_3' = r_1 r_1' + \varphi_3'; \\ 2v_1' = 2r_2 r_2' - r_1 r_1' - \varphi_1'; \quad 2v_2' = r_1 r_1' - \varphi_2'; \quad 2v_3' = r_1 r_1' - \varphi_3'.$$

Bestimmt man mit Hilfe dieser Formeln aus (27) die Größen  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  und setzt dann in die gefundenen Integrale ein, so überzeugt man sich leicht, daß nach (51)

$$\varphi_1' = \varphi_2' = \varphi_3' = 0$$

sein müssen.

Ferner findet man aus (45)

$$(56) \quad \lambda_1 = \mu_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \lambda_2 = \mu_3 = \frac{r_1}{r_2} \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \lambda_3 = \mu_2 = \sqrt{1 - \frac{1}{2} \frac{r_1^2}{r_2^2}}$$

und dann aus (46)

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0,$$

so daß die neun Größen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  alle Konstante sind, von denen nach (43) drei willkürlich angenommen werden können.

Der Punkt  $M_1$  bewegt sich zufolge (44) längs einer Geraden und die Punkte  $M_2$  und  $M_3$  beschreiben ebene Kurven, die in den Ebenen

$$x_2 a_2 + y_2 b_2 + z_2 c_2 = 0; \quad x_3 a_3 + y_3 b_3 + z_3 c_3 = 0$$

liegen.

Bezeichnet man

$$x_2 a_3 + y_2 b_3 + z_2 c_3 = \xi_2; \quad x_2 a_1 + y_2 b_1 + z_2 c_1 = \eta_2;$$

so ist nach (44) und (56)

$$\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} r_1 = \varphi(t); \quad \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2r_2^2 - r_1^2} = \psi(t).$$

Nach Elimination von  $t$  aus diesen Formeln erhält man die Gleichung der Kurve des Punktes  $M_2$ .

Auf ähnliche Weise kann auch die Kurve des Punktes  $M_3$  bestimmt werden.

Ist die Kraft, die an den Punkten  $M_i$  und  $M_j$  angreift, dem Kubus der Entfernung  $\overline{M_i M_j}$  umgekehrt proportional, d. h. ist in (55)

$$k = -3,$$

so lassen die Gleichungen (55) außer dem Integrale der lebendigen Kraft

$$p_1^2 + \left(4 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) p_2^2 + 2 \frac{r_1}{r_2} p_1 p_2 + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{2}{r_2^2}\right) = \frac{h}{2},$$

noch die beiden folgenden:

$$r_1^2 + 2r_2^2 = 4(ht^2 + 2at + b); \quad r_1 p_1 + 2r_2 p_2 = ht + a$$

zu. Hier bezeichnen  $a$  und  $b$  willkürliche Konstanten.

Das vierte und letzte Integral muß der Jacobischen Theorie des letzten Multiplikators zufolge durch Quadraturen sich bestimmen lassen.

Aus den Formeln (55) leiten wir die Gleichung

$$r_1 \frac{dr_2}{dt} - r_2 \frac{dr_1}{dt} = \frac{r_1^2 - 2r_2^2}{r_2} \left(p_1 - \frac{r_1}{r_2} p_2\right)$$

her und führen in den Integralen und in dieser Gleichung die Substitution

$$\begin{aligned} r_1 &= R \cos \varphi; & p_1 &= \omega \cos \varphi - \frac{\psi}{R} \sin \varphi; \\ r_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} R \sin \varphi; & p_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\omega \sin \varphi + \frac{\psi}{R} \cos \varphi\right) \end{aligned}$$

aus. Wir erhalten dann:

$$2 \left(\omega^2 + \frac{\psi^2}{R^2}\right) - \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\psi^2}{R^2} + \frac{\varepsilon}{2R^2} \left(\frac{1}{\cos^2 \varphi} + \frac{4}{\sin^2 \varphi}\right) = \frac{h}{2}; \quad R^2 = 4(ht^2 + 2at + b);$$

$$R\omega = ht + a; \quad R^2 \frac{d\varphi}{dt} = 2\psi(1 - \operatorname{ctg}^2 \varphi).$$

Indem man hieraus die Variabeln  $\psi$ ,  $\omega$  und  $R$  eliminiert, kommt man in der Tat zur Quadratur

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{F(\varphi)}} = \int \frac{dt}{2(ht^2 + 2at + b)} + \text{const.},$$

wo

$$F(\varphi) = (1 - \operatorname{ctg}^2 \varphi) \left[2(bh - a^2) - \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{1}{\cos^2 \varphi} + \frac{4}{\sin^2 \varphi}\right)\right]$$

gesetzt ist.

### III.

1. Die meisten der in Kap. I und II benutzten Formeln sind unter der Voraussetzung, daß das Pyramidenvolumen  $\Delta$  von Null verschieden ist, hergeleitet worden. Darum muß der Fall, daß die Punkte  $M_1, M_2, M_3, M_4$  in jedem Momente der Bewegung in einer Ebene liegen, getrennt behandelt werden.

Wir führen wieder ein Koordinatensystem  $M_4xyz$  ein, das zum Ursprung den Punkt  $M_4$  hat und dessen Achsen im Raume feste Richtungen haben.

Indem wir einer Idee von Sylvester\*), welche Radau\*\*) mit vielem Erfolg für das Dreikörperproblem verwertet hat, folgen, betrachten wir neben dem Systeme  $M_4xyz$  ein zweites Koordinatensystem  $M_4\xi\eta\zeta$ , das denselben Ursprung hat und dessen  $\xi\eta$ -Ebene mit der Ebene der Punkte  $M_1, M_2, M_3, M_4$  zusammenfällt. Die Schnittlinie der  $\xi\eta$ - und  $xy$ -Ebenen wählen wir zur  $\eta$ -Achse und bezeichnen mit  $\varphi$  und  $\psi$  die Winkel zwischen den Ebenen  $xy$  und  $\xi\eta$  und den Ebenen  $zx$  und  $\zeta\xi$ .

Dann hat die Winkelgeschwindigkeit des Systems  $M_4\xi\eta\zeta$  in bezug auf das System  $M_4xyz$ , wie bekannt, die Projektionen

$$-\psi' \sin \varphi, \quad \varphi', \quad \psi' \cos \varphi.$$

Wir bezeichnen ferner mit  $\xi_i, \eta_i$  die Koordinaten des Punktes  $M_i$  in der  $\xi\eta$ -Ebene und mit  $u_i, v_i, w_i$  die Projektionen auf die  $\xi, \eta, \zeta$ -Achsen der Geschwindigkeit dieses Punktes in bezug auf das System  $M_4xyz$ . Es ist dann:

$$(57) \quad u_i = \xi_i' - \eta_i \psi' \cos \varphi; \quad v_i = \eta_i' + \xi_i \psi' \cos \varphi; \quad w_i = -\eta_i \psi' \sin \varphi - \xi_i \varphi'.$$

Die lebendige Kraft des Punktsystems läßt sich nach (4) leicht durch die Größen  $u, v, w$  ausdrücken:

$$(58) \quad \begin{aligned} 2T &= m_1 \left(1 - \frac{m_1}{M}\right) (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) + m_2 \left(1 - \frac{m_2}{M}\right) (u_2^2 + v_2^2 + w_2^2) \\ &+ m_3 \left(1 - \frac{m_3}{M}\right) (u_3^2 + v_3^2 + w_3^2) \\ &- 2 \frac{m_2 m_3}{M} (u_2 u_3 + v_2 v_3 + w_2 w_3) - 2 \frac{m_2 m_1}{M} (u_3 u_1 + v_3 v_1 + w_3 w_1) \\ &- 2 \frac{m_1 m_3}{M} (u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2). \end{aligned}$$

Setzt man hier aus (57) ein, so wird

$$T = \Theta(\xi_i, \eta_i, \xi_i', \eta_i', \psi', \varphi, \varphi').$$

Die Kräftefunktion  $U$  hängt nur von den Variablen  $\xi_i$  und  $\eta_i$  ab, so daß die Bewegungsgleichungen so geschrieben werden können:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \xi_i'} \right) &= \frac{\partial(\Theta + U)}{\partial \xi_i}; & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \eta_i'} \right) &= \frac{\partial(\Theta + U)}{\partial \eta_i} \quad (i = 1, 2, 3); \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \psi'} \right) &= 0; & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi'} \right) &= \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

\*) Sylvester, On the Motion of a Rigid Body acted on by no external Forces. Philosoph. Transact. of the Royal Society of London, vol. 156, 1866, p. 778.

\*\*) Radau, Sur une propriété des systèmes qui ont un plan invariable. Liouville Journ. de Mathém. s. 2. t. XIV, 1869.

Wendet man die Flächensätze auf die  $xy$ - und  $\xi\xi$ -Ebenen an und bemerkt, daß

$$\cos(x, \eta) = -\sin \psi; \quad \cos(y, \eta) = \cos \psi; \quad \cos(z, \eta) = 0$$

ist, so bekommt man zwei Flächenintegrale der Form

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \psi'} = C; \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi'} = -A \sin \psi + B \cos \psi,$$

wo  $A, B, C$  dieselbe Bedeutung haben, wie in (8).

Die letzte der Bewegungsgleichungen gibt das dritte Integral

$$(59) \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} = -(A \cos \psi + B \sin \psi) \psi'.$$

Nun ist aber nach (57)

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \psi'} = \sum_{i=1}^{i=3} \left( \xi_i \frac{\partial T}{\partial v_i} - \eta_i \frac{\partial T}{\partial u_i} \right) \cos \varphi - \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial T}{\partial w_i} \eta_i \sin \varphi; \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi'} = - \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial T}{\partial w_i} \xi_i;$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} = - \sum_{i=1}^{i=3} \left( \xi_i \frac{\partial T}{\partial v_i} - \eta_i \frac{\partial T}{\partial u_i} \right) \psi' \sin \varphi - \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial T}{\partial w_i} \eta_i \psi' \cos \varphi$$

und nach (58) und (57)

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial w_i} &= m_i w_i - \frac{m_i}{M} \sum_{j=1}^{j=3} m_j w_j = \left( -m_i \eta_i + \frac{m_i}{M} \sum_{j=1}^{j=3} m_j \eta_j \right) \psi' \sin \varphi \\ &+ \left( -m_i \xi_i + \frac{m_i}{M} \sum_{j=1}^{j=3} m_j \xi_j \right) \varphi'; \end{aligned}$$

folglich erhält man aus den Integralen:

$$(60) \quad \sum_{i=1}^{i=3} \left( \xi_i \frac{\partial T}{\partial v_i} - \eta_i \frac{\partial T}{\partial u_i} \right) \cos \varphi - R \psi' \sin^2 \varphi - Q \varphi' \sin \varphi = C;$$

$$Q \psi' \sin \varphi + P \varphi' = A \sin \psi - B \cos \psi;$$

$$\sum_{i=1}^{i=3} \left( \xi_i \frac{\partial T}{\partial v_i} - \eta_i \frac{\partial T}{\partial u_i} \right) \psi' \sin \varphi + R \psi'^2 \sin \varphi \cos \varphi + Q \psi' \varphi' \cos \varphi = (A \cos \psi + B \sin \psi) \psi',$$

wo

$$(61) \quad P = \frac{1}{M} \left( \sum_{i=1}^{i=3} m_i \xi_i \right)^2 - \sum_{i=1}^{i=3} m_i \xi_i^2; \quad Q = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{i=3} m_i \eta_i \sum_{j=1}^{j=3} m_j \xi_j - \sum_{i=1}^{i=3} m_i \xi_i \eta_i;$$

$$R = \frac{1}{M} \left( \sum_{i=1}^{i=3} m_i \eta_i \right)^2 - \sum_{i=1}^{i=3} m_i \eta_i^2$$

gesetzt ist.



Jetzt unterscheiden wir drei Fälle.

Den aufgestellten drei Gleichungen genügt man, erstens wenn man voraussetzt, daß

$$\psi' = 0; \quad \varphi' = 0; \quad A = B = 0; \quad \sum_{i=1}^{i=3} \left( \xi_i \frac{\partial T}{\partial v_i} - \eta_i \frac{\partial T}{\partial u_i} \right) = \text{const.}$$

ist. Die Ebene der Punkte  $M_1, M_2, M_3, M_4$  hat eine im Raume feste Richtung und in dieser Ebene gilt der Satz von der Erhaltung der Flächenräume.

Zweitens möge

$$\psi = 0$$

und  $\varphi'$  von Null verschieden sein. Man hat dann

$$(62) \quad \sum_{i=1}^{i=3} \left( \xi_i \frac{\partial T}{\partial v_i} - \eta_i \frac{\partial T}{\partial u_i} \right) \cos \varphi - Q \varphi' \sin \varphi = C; \quad P \varphi' = -B.$$

Die Ebene der Punkte  $M_1, M_2, M_3, M_4$  rotiert um die  $y$ -Achse mit einer Winkelgeschwindigkeit, die der Größe  $P$  (61) umgekehrt proportional ist.

Eliminiert man aus den Bewegungsgleichungen mit Hilfe des zweiten Integrals (62) die Derivierte  $\varphi'$ , so sind die neuen Bewegungsgleichungen

$$(63) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Theta_i}{\partial \xi_i} \right) = \frac{\partial (\Theta_i + U)}{\partial \xi_i}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Theta_i}{\partial \eta_i} \right) = \frac{\partial (\Theta_i + U)}{\partial \eta_i} \quad (i = 1, 2, 3),$$

wo nach Routh\*)

$$\Theta_1 = \Theta - B \varphi' = \Theta + \frac{B^2}{P}$$

ist. Da nach (59)

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial \varphi} = \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} = 0$$

ist, so ändern diese Gleichungen ihre Form nicht, wenn man aus ihnen mit Hilfe des ersten Integrals (62) den Winkel  $\varphi$  eliminiert. Außerdem kann noch aus den erwähnten Gleichungen mit Hilfe des Integrals der lebendigen Kraft

$$\Theta_1 = U + h - B \varphi'$$

die Zeit eliminiert werden. Das Problem reduziert sich also in diesem Falle auf die Integration von fünf Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Sind, drittens, die  $\varphi'$  und  $\psi'$  beide von Null verschieden, so wählen wir die  $xy$ -Ebene parallel der invariablen Ebene:

$$A = B = 0.$$

\*) Routh, A treatise on the stability of a given state of motion, ch. IV, art. 20. London 1877.

Aus den Formeln (60) finden wir:

$$Q\psi' \sin \varphi + P\varphi' = 0; \quad R\psi' \sin \varphi + Q\varphi' = -C \sin \varphi;$$

$$\sum_{i=1}^{i=3} \left( \xi_i \frac{\partial T}{\partial v_i} - \eta_i \frac{\partial T}{\partial u_i} \right) = C \cos \varphi,$$

so daß

$$(Q^2 - PR)\psi' = CP; \quad (PR - Q^2)\varphi' = CQ \sin \varphi$$

wird.

Auch in diesem Falle lassen sich die Größen  $\psi'$ ,  $\varphi'$ ,  $\varphi$  aus den Bewegungsgleichungen eliminieren. Bezeichnet man

$$\Theta_2 = \Theta - C\psi' = \Theta - \frac{C^2 P}{Q^2 - PR} = \text{Funkt. } (\xi_i, \eta_i, \xi'_i, \eta'_i),$$

so sind die neuen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Theta_2}{\partial \xi'_i} \right) = \frac{\partial (\Theta_2 + U)}{\partial \xi_i}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Theta_2}{\partial \eta'_i} \right) = \frac{\partial (\Theta_2 + U)}{\partial \eta_i} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Indem man aus diesen Formeln mit Hilfe des Integrals der lebendigen Kraft

$$\Theta_2 = U + h - C\psi'$$

die Zeit eliminiert, bekommt man auch hier fünf Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

2. Um eine Anwendung der Formeln des vorhergehenden Paragraphen zu erhalten, wollen wir etwas ausführlicher auf den zweiten Fall eingehen.

Die Formeln (57) geben in diesem Falle

$$u_i = \xi'_i; \quad v_i = \eta'_i; \quad w_i = -\xi_i \varphi',$$

so daß nach (58) und (62)

$$\begin{aligned} 2\Theta_1 = 2\Theta - 2B\varphi' &= m_1 \left( 1 - \frac{m_1}{M} \right) (\xi_1'^2 + \eta_1'^2) + m_2 \left( 1 - \frac{m_2}{M} \right) (\xi_2'^2 + \eta_2'^2) \\ &+ m_3 \left( 1 - \frac{m_3}{M} \right) (\xi_3'^2 + \eta_3'^2) - 2 \frac{m_2 m_3}{M} (\xi_2' \xi_3' + \eta_2' \eta_3') \\ &- 2 \frac{m_3 m_1}{M} (\xi_3' \xi_1' + \eta_3' \eta_1') - 2 \frac{m_1 m_2}{M} (\xi_1' \xi_2' + \eta_1' \eta_2') + \frac{B^2}{P} \end{aligned}$$

wird, wo nach (61)

$$P = \frac{1}{M} (m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2 + m_3 \xi_3)^2 - (m_1 \xi_1^2 + m_2 \xi_2^2 + m_3 \xi_3^2)$$

ist.

Die Kräftefunktion nehmen wir in der Form (10) an.

Nun machen wir die Voraussetzung, daß die Massen zweier der Punkte  $M_1, M_2, M_3, M_4$  einander gleich sind:

$$m_3 = m_1.$$

Man überzeugt sich leicht, daß unter dieser Bedingung die Bewegungsgleichungen (63) das System partikulärer Integrale

$$\xi_1 + \xi_3 = 0; \quad \eta_3 = \eta_1; \quad \xi_2 = 0$$

zulassen.

Die Integrale (62) geben nach (61)

$$C = 0; \quad 2m_1 \xi_1^2 \varphi' = B.$$

Wir sehen also, daß für das gegebene Punktsystem eine solche Bewegung möglich ist, bei welcher die Entfernung zwischen den Punkten  $M_1$  und  $M_3$  mit gleichen Massen von der Geraden, die die beiden anderen Massenpunkte  $M_2$  und  $M_4$  verbindet, senkrecht geschnitten und halbiert wird. Die Ebene, in der die Massenpunkte liegen, rotiert um die Gerade  $M_2 M_4$  mit einer Winkelgeschwindigkeit, die dem Quadrate der Entfernung  $\overline{M_1 M_3}$  umgekehrt proportional ist. Die Rotationsachse hat eine im Raume feste Richtung (senkrecht zur invariablen Ebene).

Sind die Massen der Punkte  $M_2$  und  $M_4$  auch einander gleich:

$$m_2 = m_4 = 1,$$

so lassen die Bewegungsgleichungen (63) das partikuläre Integral

$$\eta_2 = 2\eta_1$$

zu, so daß die Punkte  $M_2$  und  $M_4$  in jedem Momente der Bewegung symmetrisch zur Geraden  $M_1 M_3$  liegen.

Wenn die Kraft, die an die Punkte  $M_i$  und  $M_j$  angreift, dem Kubus der Entfernung  $\overline{M_i M_j}$  umgekehrt proportional ist, so kann unser Problem durch Quadraturen gelöst werden.

Das Integral der lebendigen Kraft und die Jacobische Formel (32) geben dann:

$$m_1 \xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \frac{B^2}{4m_1 \xi_1^2} = -\frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{4m_1}{\xi_1^2 + \eta_1^2} + \frac{1}{4\eta_1^2} + \frac{m_1^2}{4\xi_1^2} \right) + h;$$

$$m_1 \xi_1^2 + \eta_1^2 = ht^2 + 2at + b,$$

wo  $a, b, h$  willkürliche Konstanten sind. Substituieren wir nun

$$\sqrt{m_1} \xi_1 = R \cos \omega; \quad \eta_1 = R \sin \omega,$$

so wird

$$R^2 = ht^2 + 2at + b;$$

$$R^2 R'^2 + R^4 \omega'^2 = hR^2 - \frac{B^2}{4 \cos^2 \omega} - \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{4m_1^2}{\cos^2 \omega + m_1 \sin^2 \omega} + \frac{1}{4 \sin^2 \omega} + \frac{m_1^3}{4 \cos^2 \omega} \right)$$

$$= hR^2 - F(\omega).$$

Nach Elimination von  $R$  erhält man die Quadratur

$$\int \frac{d\omega}{\sqrt{bh - a^2 - F(\omega)}} = \int \frac{dt}{ht^2 + 2at + b} + \text{const.}$$