Über meine Modifikationen des Ostwaldschen Prinzips und über den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie.

Von

Moritz Réthy in Budapest.

---

1. Das Ostwaldsche Prinzip wird in der Mechanik von zwei Standpunkten aus betrachtet. Bei dem einen handelt es sich darum, welche Konsequenzen aus ihm fließen, wenn man es dem Wortlaute nach auffaßt. Bei dem anderen geht man davon aus, daß das Prinzip bei wortgetreuer Auffassung schon in sehr einfachen Fällen — z. B. beim horizontalen Wurf eines schweren freien materiellen Punktes im leeren Raum — den Tatsachen widerspricht, und stellt Modifikationen fest, durch welche der Widerspruch wegfällt.

Herr Fejér vertritt in einer in diesen Annalen, Bd. 61, p. 422—436, erschienenen schönen Arbeit den ersten, ich in einem Bd. 59, p. 554—572 erschienenen Aufsatz den zweiten Standpunkt.

Im ersten Teil seiner Arbeit beschreibt Herr Fejér die Bewegung eines materiellen Punktes in der Ebene, wenn für sie das Ostwaldsche Prinzip, laut welchem „von allen möglichen Energieumwandlungen diejenige erfolgt, welche in gegebener Zeit den größtmöglichen Umsatz ergibt", für eine *fest* gegebene Zeit bestehen soll. Er zeigt, daß eine solche Bewegung bei beliebig gegebenen Anfangsgeschwindigkeiten und fester Zeit nicht möglich ist, und daß die *Bewegung*, die bei passend gegebenen Daten in Übereinstimmung mit dem Prinzip erfolgt, *eine brachistochronale*, also nur ausnahmsweise die natürliche ist (pag. 430).

Im zweiten Teil beantwortet Herr Fejér die speziellere Frage nach den Bedingungen, die erforderlich sind und auch genügen, wenn die Ostwaldsche Maximumseigenschaft der Potentialdifferenz in der Bahn eines in der Ebene bewegten materiellen Punktes *zu jeder Zeit* erfüllt sein soll: *Die durch die Anfangslage gehende Kraftlinie muß eine Gerade und die Anfangsgeschwindigkeit gleich Null sein oder in die Gerade fallen. Die*

Bewegung erfolgt eben dieser Kraftlinie entlang und befriedigt die Gleichungen der Mechanik (p. 433).

Im ersten Teil meiner oben zitierten Arbeit zeige ich, daß das in Rede stehende Prinzip dadurch, daß man an Stelle der Energieen ihre mittleren Werte in fest gegebener Zeit setzt, in ein dem Hamiltonschen äquivalentes Prinzip übergeht.

Im zweiten Teil hingegen wird eine Modifikation des Ostwaldschen Prinzips gegeben, bei welcher die Energieen selbst, nicht ihre mittleren Werte, eine Rolle spielen, bei welcher aber an Stelle der Maximumseigenschaft nur das Verschwinden der Variation der Potentialdifferenz in einem engeren Variationsgebiet, wie es das Ostwaldsche ist, gefordert wird. Diese Modifikation führt zu einer Verallgemeinerung der Mechanik.

Von diesem zweiten Teile meiner Arbeit, und hauptsächlich auch vom zweiten Teil der von Fejér, soll hier die Rede sein; ich stecke mir nämlich die folgenden Ziele:

1. Der Übergang zur eben genannten Modifikation des Variationsgebietes ist in meiner Arbeit (p. 562, letztes Al.), wie mich mehrere Fachgenossen, in erster Linie Herr Fejér, aufmerksam zu machen die Güte hatten, eben nur analytisch angedeutet. Die ihm zugrunde liegende Voraussetzung soll in § 1 an der Hand einer nach meiner Methode geführten Ableitung der Fejérschen speziellen Sätze klargestellt, und der Übergang genau beschrieben werden.

Im Anschluß daran stelle ich ein diesem modifizierten Ostwaldschen äquivalentes Prinzip auf, das eine Verallgemeinerung des Hamiltonschen ist.

2. Ich will in § 2 zeigen, daß der so verallgemeinerten Mechanik neue Analogien zum zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie entspringen.*)

§ 1.

II. Das Ostwaldsche Maximum-Problem für einen freien Punkt, wenn die Maximumseigenschaft in jedem Punkte der Bahn erfüllt sein soll.

Die Koordinaten eines freien materiellen Punktes von der Masse 1 seien mit x, y, z, kürzer mit q_i $(i = 1, 2, 3)$ bezeichnet, die lebendige Kraft sei T, die potentielle Energie $-U$, und die Gesamtenergie E, demnach

*) Dieser Aufsatz unterscheidet sich in § 2 wenig von meiner in Mathematikai Értesitö 1906 erschienenen Abhandlung; § 1 hingegen ist anders geordnet, ausführlicher und infolge der Darstellung meiner Bewegungsgleichungen mittels einer Verallgemeinerung des Hamiltonschen Prinzips wesentlich vereinfacht.

$$(1') \qquad T \equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} q_i'^2 = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2),$$

$$(1'') \qquad E \equiv T - U.$$

Ich stelle mir die Aufgabe, die p. 431 und p. 435 gestellten Fragen der Fejérschen Arbeit nach den in meinem Aufsatze angewandten Methoden für einen in der Ebene oder im Raume frei beweglichen Punkt zu behandeln. Das Ostwaldsche Prinzip lautet bei diesen Fragen wie folgt:

Von allen möglichen Energieumwandlungen wird diejenige eintreten, die in gegebener Zeit vom Beginn der Bewegung an fortwährend den größtmöglichen Umsatz ergibt.

Das Ostwaldsche Problem ist daher wie folgt zu formulieren:

Der materielle Punkt M, dessen Lage M_0 und Geschwindigkeit v_0 zur Zeit $t = 0$ gegeben ist, bewege sich unter Einhaltung der Gleichung der lebendigen Kraft

$$(2) \qquad T - T_0 = U - U_0$$

und beschreibe die Bahn P; man vergleiche seine Bewegung mit der eines anderen zu derselben Zeit von derselben Anfangslage und mit derselben Anfangsgeschwindigkeit (wenn $v_0 = 0$ sein sollte, in derselben Richtung) ausgehenden Punktes $\overline{M}$, der ebenfalls an die Einhaltung der Gleichung (2) gebunden ist. Die Werte des Potentials U seien zur beliebig gewählten Zeit t_1 im Falle der Bewegung von M

$$U(x_1 . y_1, z_1),$$

im Falle der Bewegung von $\overline{M}$

$$U(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1).$$

Wie muß die Bewegung des Punktes M beschaffen sein, wenn die Ungleichung

$$U(x_1, y_1, z_1) > U(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$$

bei willkürlich gewählter Zeit t_1 stattfinden soll?

Ich denke mir die Bahn P des Punktes M bestimmt, und vergleiche sie, von $t = 0$ angefangen, immer zu einer und derselben Zeit t mit einer und derselben (im übrigen beliebig herausgegriffenen) zulässigen Bahn $\overline{P}$ des Punktes $\overline{M}$; dann muß, da t_1 bei einer und derselben Bahn P von willkürlicher Größe sein soll, die Ungleichung

$$U(x, y, z) > U(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$$

von $t = 0$ an immerfort stattfinden, wenn x, y, z die Koordinaten von M und $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ die von $\overline{M}$ zur Zeit t sind.

Die Forderungen des Problems ziehen also notwendigerweise die Gültigkeit der Variationsgleichungen

$$\delta t = 0, \quad \delta(T - U) = 0, \quad \delta U = 0 \tag{3}$$

nach sich, die während der Bewegung zu jeder Zeit t einzuhalten sind. Ich schreibe an Stelle der Gleichungen (3) das mit ihnen äquivalente Gleichungssystem

$$\delta t = 0, \quad \delta T = 0, \quad \delta U = 0. \tag{3'}$$

a) Im Fall des ebenen Problems genüge ich der Gleichung

$$\delta U \equiv \frac{\partial U}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\,\delta y \equiv X\delta x + Y\delta y = 0$$

mittels des Ansatzes

$$\delta x = \frac{Y}{R}\,\delta s, \quad \delta y = -\frac{X}{R}\,\delta s, \quad R^2 = X^2 + Y^2. \tag{4'}$$

Daraus ergibt sich

$$x'\,\delta x + y'\,\delta y = \frac{x'\,Y - y'\,X}{R}\,\delta s, \quad x''\,\delta x + y''\,\delta y = \frac{x''\,Y - y''\,X}{R}\,\delta s$$

und daher

$$\begin{aligned} \delta T &\equiv \frac{d}{dt}\,(x'\,\delta x + y'\,\delta y) - x''\,\delta x - y''\,\delta y) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{x'\,Y - y'\,X}{R}\,\delta s\right) - \frac{x''\,Y - y''\,X}{R}\,\delta s. \end{aligned} \tag{3'}$$

Da $\delta T = 0$ sein muß für alle Bahnen, die von der gegebenen Anfangslage auf verlangte Weise ausgehen und der gesuchten wirklichen Bahn unendlich nahe gelegen sind, also auch für eine Bahn, bei der δs in einem beliebigen Intervall konstant ist, so muß vor allem

$$\frac{d}{dt}\,\frac{x'\,Y - y'\,X}{R} - \frac{x''\,Y - y''\,X}{R} = 0,$$

daher für beliebige Bahnen

$$\frac{x'\,Y - y'\,X}{R}\,\frac{d\delta s}{dt} = 0$$

erfüllt sein. Mithin muß zu jeder Zeit $t > 0$ die Doppelgleichung

$$\frac{x'\,Y - y'\,X}{R} = \frac{x''\,Y - y''\,X}{R} = 0 \tag{5}$$

stattfinden.

Wenn also das Problem überhaupt eine Lösung hat, so kann die Bahn nur eine geradlinige sein und die Richtung der Kraft muß kontinuierlich mit der dieser geraden Bahn zusammenfallen. Da den Voraussetzungen gemäß den Kräften ein Potential zukommt, und die Bewegung dem Prinzip (2) der lebendigen Kraft unterworfen ist, so befriedigt diese der geraden Kraftlinie entlang erfolgende Bewegung die Gesetze der Mechanik.

Daß aber diese Bewegung, falls die Anfangsgeschwindigkeit $= 0$ ist oder im allgemeineren Fall der Richtung nach mit der geraden Kraftlinie zusammenfällt, dem gestellten Maximumproblem auch entspricht, das folgt daraus, daß sie bei dauernd wachsendem Potential eine Brachistochrone ist.

Ist die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit von der der Kraftlinie verschieden, so hat das Problem keine Lösung.

Die für diese Spezialfälle gefundenen Sätze von Fejér sind hiermit auch auf diesem Wege abgeleitet.

b) Im Falle eines im Raume frei beweglichen materiellen Punktes geschieht der Gleichung $\delta U = 0$ durch einen jeden der beiden Ansätze

$$(4'') \quad \begin{aligned} &\delta x = \frac{Z}{R_1}\,\delta s, \quad \delta y = 0, \quad \delta z = -\frac{X}{R_1}\,\delta s, \quad R_1^2 = X^2 + Z^2, \\ &\delta x = 0, \quad \delta y = \frac{Z}{R_2}\,\delta s, \quad \delta z = -\frac{Y}{R_2}\,\delta s, \quad R_2^2 = Y^2 + Z^2 \end{aligned}$$

Genüge; im Sinne des Gleichungssystems (3′) hat daher (bei $\delta t = 0$) δT zu verschwinden, sobald man an Stelle von $\delta x, \delta y, \delta z$ das eine oder das andere System substituiert. Daher gelten die in a) bewiesenen Gesetze auch für einen im Raume frei beweglichen Punkt.

III. Modifikation des Ostwaldschen Problems im Falle eines im Raume frei beweglichen Punktes.

Da das Ostwaldsche Maximumproblem zu Resultaten führt, die mit der Erfahrung nur in ganz speziellen Fällen übereinstimmen, so kann man aus ihm ein den Erfahrungen nicht widersprechendes Problem nur mittels Einschränkung des Variationsgebietes gewinnen. Ich will den Versuch machen, das Problem derart umzuformen, daß ich die Forderung, daß die Variationsgleichungen

$$\delta t = 0, \quad \delta T = 0, \quad \delta U = 0$$

von $t = 0$ an fortwährend gelten sollen, nur in gewissem sogleich näher zu beschreibendem Sinne aufrecht erhalte.

Substituiert man (bei $Z \neq 0$) die Lösung von $\delta U = 0$ nach δz, nämlich

$$\delta z = -\frac{X}{Z}\,\delta x - \frac{Y}{Z}\,\delta y$$

in $\delta T = 0$, so hat man wegen

$$(6') \quad x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z = \frac{x'Z - z'X}{Z}\,\delta x + \frac{y'Z - z'Y}{Z}\,\delta y \equiv P_1\delta x + Q_1\delta y,$$

$$(6'') \quad x''\delta x + y''\delta y + z''\delta z = \frac{x''Z - z''X}{Z}\,\delta x + \frac{y''Z - z''Y}{Z}\,\delta y \equiv P_2\delta x + Q_2\delta y$$

die Variationsgleichung

$$\frac{d}{dt}(P_1\delta x + Q_1\delta y) - P_2\delta x - Q_2\delta y = 0. \tag{7}$$

Fordert man, wie beim Maximumproblem, daß diese Gleichung sowohl bei $\delta y = 0$ als auch bei $\delta x = 0$ erfüllt sei, so ist sie bei beliebigen δx, δy erfüllt, und man kommt auf die in II. beschriebenen Bahnen und sonstigen einschränkenden Bedingungen.

Fordert man, daß diese Gleichung zwischen δx und δy ohne weiteres bestehe, so zeichnet man damit gar keine Bewegung vor einer anderen aus, sondern definiert nur zu einer jeden beliebigen Bewegung zugehörige Scharen von variierten Bewegungen.

Man hat daher nur einen Weg: dieser ist, zu fordern, daß die Gleichung (7) nur dann erfüllt sei, wenn zwischen δx und δy irgend eine, am einfachsten lineare Gleichung

$$\alpha\delta x + \beta\delta y = 0 \tag{7'}$$

von $t = 0$ an fortwährend besteht, wo α und β durch Lage und Geschwindigkeit bestimmte, einstweilen unbekannte Koeffizienten sind. Die Forderung, daß $\delta U = 0$ sei, bleibt dabei natürlich aufrecht, steht aber der Forderung des Maximums für U fern.

Es sei dieser Weg gewählt. Dann folgt hier ebenso wie in IIa, daß zu jeder Zeit die Gleichungen gelten müssen

$$\frac{P_1\beta - Q_1\alpha}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}} = 0, \quad \frac{P_2\beta - Q_2\alpha}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}} = 0, \tag{7''}$$

d. i.

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2}. \tag{8'}$$

Da P_1 und Q_1 durch Lage und Geschwindigkeit ausgedrückt sind, so ist hiermit das Verhältnis der Koeffizienten α und β bestimmt, andererseits sagt die Gleichung

$$P_1 : Q_1 = P_2 : Q_2,$$

daß die Bewegung der Differentialgleichung

$$\begin{vmatrix} x'' & y'' & z'' \\ x' & y' & z' \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0 \tag{8''}$$

gemäß vor sich geht. Diese Gleichung spricht aus, daß die Kraft zu jeder Zeit in der Oszillationsebene der Bahn wirkt.

Man erhält dasselbe Resultat auf symmetrischem Wege, wenn man bedenkt, daß infolge der Gleichungen (7′), (7″) sowohl $P_1\delta x + Q_1\delta y$

als auch $P_2 \delta x + Q_2 \delta y$ verschwinden, mithin den Gleichungen (6'), (6'') gemäß

$$(9') \qquad x' \delta x + y' \delta y + z' \delta z = 0,$$

$$(9'') \qquad x'' \delta x + y'' \delta y + z'' \delta z = 0$$

stattfinden. Nimmt man noch hinzu, daß

$$(9''') \qquad \delta U \equiv X \delta x + Y \delta y + Z \delta z = 0$$

gefordert wird, so folgt aus diesen Gleichungen einerseits das Bestehen jener Determinantengleichung, andererseits das Verhältnis der Variationen $\delta x : \delta y : \delta z$. Man hat so den Satz, daß durch die aufgestellten Forderungen die Richtung der Verschiebungen δx, δy, δz in jedem Punkte im allgemeinen eindeutig bestimmt ist, daß sie nämlich mit der Binormale der Bahn zusammenfällt.

IV. Fortsetzung. Aus dem Satze, daß die Bewegung eines freien materiellen Punktes so vor sich geht, daß die Kraft immer in der Oskulationsebene der Bahn liegt, folgt, daß, sobald nur die Verschiebungen δx, δy, δz in allen Punkten der Bahn in die Binormale fallen, für eine jede der betrachteten variierten Bewegungen die Gleichungen

$$\delta T = 0, \quad \delta U = 0 \quad (\text{bei } \delta t = 0)$$

bestehen. Dieser Satz läßt sich in der folgenden Form umkehren:

Wenn für alle betrachteten variierten Bewegungen die Gleichungen $\delta T = 0$, $\delta U = 0$ (bei $\delta t = 0$) bestehen sollen, sobald nur die Verschiebungen δs auf den Erzeugenden einer Regelfläche liegen, deren Leitlinie die wirkliche Bahn des materiellen Punktes ist, so liegt die Kraft in der Oskulationsebene der Bahn, und die Erzeugenden der Regelfläche sind die Binormalen der Bahn.

Man bezeichne nämlich die Winkel zwischen der Verschiebung δs und der Geschwindigkeit v resp. der Beschleunigung p mit φ resp. ψ, so daß man hat

$$(10) \qquad \sum_{i=1}^{3} q_i' \delta q_i = v \cos \varphi \, \delta s, \quad \sum_{i=1}^{3} q_i'' \delta q_i = p \cos \psi \, \delta s.$$

Die Gleichung $\delta T = 0$ schreibt sich dann in der Form

$$(10') \qquad \frac{d}{dt}(v \cos \varphi \, \delta s) - p \cos \psi \, \delta s = 0;$$

diese soll von $t = 0$ an fortwährend gelten, wenn nur die variierte Bewegung die wirkliche zur Zeit $t = 0$ berührt usw., hingegen $\frac{d \delta s}{dt}$ eine beliebige kontinuierliche Funktion der Zeit ist. Nimmt man daher eine solche variierte Bahn an, in der δs auf einer beliebigen gewählten Strecke konstant ist, so folgt aus der Gleichung (10'), daß hier

$$\frac{d}{dt}(v \cos \varphi) - p \cos \psi = 0$$

ist; daher fällt aus der Gleichung (10′) das mit δs multiplizierte Glied ganz allgemein fort, und wir folgern aus ihr, daß

$$v \cos \varphi = 0$$

sein muß. Da mithin infolge der voranstehenden Gleichung auch $p \cos \psi = 0$ ist, so zieht man aus (10) den Schluß, daß die beiden Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{3} q_i' \delta q_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} q_i'' \delta q_i = 0$$

immer erfüllt sein müssen.

Da außerdem auch

$$\delta U \equiv \sum_{i=1}^{3} Q_i \delta q_i = 0$$

gefordert wird, so ist die Umkehrbarkeit des Satzes bewiesen.

Die Gleichungen (9′), (9″), die die Grundlage meiner Formulierung des Ostwaldschen Problems (l. c. p. 563) bilden, sind hiermit für den Fall eines im Raume frei beweglichen Punktes auf zwei Wegen verifiziert; und ich bemerke hier, daß in meiner (l. c. p. 562) gegebenen weniger genauen Ableitung dieselbe Auffassung bezüglich der Verschiebungen zugrunde liegt wie hier in IV, und daß bei der Folgerung, daß die Gleichungen (14′), (14″) stattfinden müßten, die Gleichungen (13′) und (13″) als linear heterogen $\left(\text{in } \frac{\delta x}{\delta s}, \frac{\delta y}{\delta s}, \frac{\delta z}{\delta s}\right)$ betrachtet wurden.

V. Modifikation des Ostwaldschen Problems im Falle eines freien Punktsystems. Die Ausdehnung des Beweises IIIa) auf ein freies Punktsystem liegt auf der Hand. Ich löse die Gleichung

$$\delta U \equiv \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i \equiv \sum_{i=1}^{3n} Q_i \delta q_i = 0 \tag{11′}$$

nach δq_{3n} auf und substituiere in $\delta T = 0$. Da

$$\sum_{i=1}^{3n} q_i' \, \delta q_i = \sum_{i=1}^{3n-1} \frac{q_i' \, Q_{3n-1} - q_{3n-1}' Q_i}{Q_{3n}} \equiv \sum_{i=1}^{3n-1} \overline{Q}_i \delta q_i, \tag{11″}$$

$$\sum_{i=1}^{2n} q_i'' \delta q_i = \sum_{i=1}^{3n-1} \frac{q_i'' \, Q_{3n-1} - q_{3n-1}'' Q_i}{Q_{3n}} \equiv \sum_{i=1}^{3n-1} \overline{\overline{Q}}_i \delta q_i \tag{11‴}$$

ist, so hat man, wenn T die lebendige Kraft des materiellen Systems ist, die Gleichung

(12) $$\delta T' = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{3n-1} \overline{Q}_i \delta q_i - \sum_{i=1}^{3n-1} \overline{\overline{Q}}_i \delta q_i = 0$$

zu erfüllen, vorausgesetzt, daß zwischen den $\delta q_1, \delta q_2, \cdots, \delta q_{3n-1}$ die lineare Gleichung

(12′) $$\alpha_1 \delta q_1 + \alpha_2 \delta q_2 + \cdots + \alpha_{3n-1} \delta q_{3n-1} = 0$$

besteht, wo die Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{3n-1}$ aus der Forderung zu bestimmen sind, daß die Gleichung $\delta T = 0$ eben mittels dieser linearen Gleichung (für alle zulässigen variierten Kurven) in demselben Sinne wie in IIIa) zu einer identischen wird.

Mittels Elimination von δq_{3n-1} hat man

(13′) $$\sum_{i=1}^{3n-1} \overline{Q}_i \delta q_i = \sum_{i=1}^{3n-2} \frac{\overline{Q}_i \alpha_{3n-1} - \overline{Q}_{3n-1} \alpha_i}{\alpha_{3n-1}} \equiv \sum_{i=1}^{3n-2} \overline{R}_i \delta q_i,$$

(13″) $$\sum_{i=1}^{3n-1} \overline{\overline{Q}}_i \delta q_i - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\overline{\overline{Q}}_i \alpha_{3n-1} - \overline{\overline{Q}}_{3n-1} \alpha_i}{\alpha_{3n-1}} \equiv \sum_{i=1}^{3n-2} \overline{\overline{R}}_i \delta q_i,$$

und aus der Forderung, daß

$$\delta T = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{3n-2} R_i \delta q_i - \sum_{i=1}^{3n-2} \overline{R}_i \delta q_i \equiv 0$$

sein soll, folgert man, wie früher,

$$\overline{R}_i = \overline{\overline{R}}_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, 3n-2).$$

Mittels der Gleichungen (11″), (11‴), (13′), (13″) erhält man nun, daß die Gleichungen

(11‴) $$\sum_{i=1}^{3n} q_i' \, \delta q_i = 0,$$

(11^IV) $$\sum_{i=1}^{3n} q_i'' \delta q_i = 0$$

erfüllt sein müssen, wenn gleichzeitig

$$\delta U \equiv \sum_{i=1}^{3n} Q_i \delta q_n = 0$$

ist; und zwar haben diese drei Gleichungen zu bestehen, wenn man, beliebige drei ausgenommen, alle übrigen $\delta q_i = 0$ setzt. Auf diese Weise ergeben sich $3n-2$ voneinander unabhängige Bewegungsgleichungen

$$\begin{vmatrix} q_1'' & q_2'' & q_i'' \\ q_1' & q_2' & q_i' \\ Q_1 & Q_2 & Q_i \end{vmatrix} = 0 \qquad (i = 3, 4, \cdots, 3n) \tag{14}$$

und die Verhältnisse $\delta q_1 : \delta q_2 : \delta q^i$ $(i = 3, 4, \cdots, 3n)$. Zu den Bewegungsgleichungen gesellt sich noch die vorgeschriebene Gleichung

$$T - T_0 = U - U_0.$$

VI. Hamiltonsche Form des modifizierten Ostwaldschen Prinzips. Man kommt zu denselben Gleichungen sowohl in diesem Fall wie auch in den allgemeinsten Fällen, jedoch weit einfacher, wenn man das auf dieser Grundlage beruhende, in meiner Arbeit ausführlich dargestellte modifizierte Ostwaldsche Prinzip nach dem Hamiltonschen Vorbilde formuliert. Für den Fall eines nur holonomen Bedingungsgleichungen unterworfenen materiellen Systems lautet es wie folgt:

Es seien $q_1, q_2, \cdots, q_{n_1}$ die unabhängigen Koordinaten des materiellen Systems, und τ, v Funktionen (von t, T, $\cdots$), die wir einstweilen als irgendwie gegeben betrachten. Man drücke die lebendige Kraft T in den q_i, q_i' und das Potential U in den q_i aus.

Die Bewegungsgleichungen des materiellen Systems werden durch die Forderung geliefert, daß bei einer beliebigen Überführung aus der Anfangslage in die Endlage die symbolische Gleichung

$$\int_0^{t_1} (\tau\, \delta T + v\, \delta U)\, dt = 0 \qquad (\delta t = 0) \tag{15}$$

erfüllt sein soll.

Man hat nämlich bei der üblichen Bezeichnung

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i'},$$

die identische Gleichung

$$\tau \delta T \equiv \sum_{i=1}^{n_2} \left[\left(\tau \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d(\tau p_i)}{dt} \right) \delta q + \frac{d}{dt} (\tau p_i \delta q_i) \right];$$

daher folgt aus der symbolischen Gleichung (15) auf bekanntem Wege, daß die Bewegungsgleichungen des Systems die folgenden sind:

$$\tau \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d(\tau p_i)}{dt} + v \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0,$$

d. i.

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = (1 + \lambda) \left(\frac{dp_i}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) + \mu p_i, \tag{16}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n_1),$$

wo gesetzt ist

(16′) $$1 + \lambda = \frac{\tau}{v}, \qquad \mu = \frac{1}{v}\frac{d\tau}{dt}.$$

Ist $\tau = v = 1$, so ist die symbolische Gleichung die Hamiltonsche und die Bewegung die zum Potential U gehörige natürliche.

Ist $\tau = -v = \frac{1}{T}$, so ist die symbolische Gleichung die zum Potential U gehörige brachistochronale; sie drückt demnach in diesem Falle den wesentlichen Teil der im Ostwaldschen Prinzip (bei fest gegebener Zeit) enthaltenen Forderung aus, — das von ihr nicht ausgedrückte bezieht sich nämlich bloß auf die Konstantenbestimmung.

Sind die Kräfte und Bedingungsgleichungen explizit unabhängig von t, und

$$\mu = -\frac{\lambda}{2T}\frac{dT}{dt},$$

so ist in der Bewegung das Prinzip (2) der lebendigen Kraft erfüllt. Ist $\lambda = 0$, so ist die Bewegung die natürliche; ist $\lambda = -2$, so ist die Bewegung die brachistochronale. Ist λ beliebig, so hat man

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{dp_i}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \lambda A_i,$$

wo

$$A_i \equiv \frac{dp_i}{dt} - \frac{p_i}{2T}\frac{dT}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_i}.$$

Ist daher die Anfangsgeschwindigkeit des materiellen Systems $= 0$, so verschwindet A_i beim Beginn der Bewegung, und die Beschleunigungen sind in diesem Zeitpunkt, falls λ endlich bleibt, dieselben wie bei der natürlichen Bewegung.*) Da nämlich T eine homogene quadratische Funktion von den q_i' ist, so verschwinden alle $\frac{\partial T}{\partial q_i}$; man hat ferner zu Beginn der Bewegung von unendlich Kleinen höherer Ordnung abgesehen

$$p_i = p_i' \Delta t, \qquad q_i' = q_i'' \Delta t,$$

daher

$$\frac{p_i}{2T}\frac{dT}{dt} = \frac{p_i \sum (p_j' q_j' + p_j q_j'')}{2\sum p_j q_j'} = p_i'.$$

VII. Verallgemeinerte Hamiltonsche Form des Prinzips für den Fall von Ungleichungen. Im Hinblick auf die im § 2 folgende Anwendung mögen hier die Bewegungsgleichungen eines materiellen Punktsystems abgeleitet werden, zwischen dessen Koordinaten $q_1, q_2, \cdots, q_{n_1}$ durch Gleichungen oder Ungleichungen

(17) $$F_j(q_1, q_2, \cdots, q_{n_1}, t) \gtreqless 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots, \nu)$$

*) Vergl. meine Arbeit p. 564, die Fejérsche Arbeit p. 434.

ausgedrückte Beziehungen stattfinden. An Stelle der symbolischen Gleichung (15) hat man dann

$$(15') \qquad \int_0^{t_1} (\tau \delta U + v \delta U) dt \gtreqless 0 \qquad (v > 0,\ \delta t = 0)$$

zu setzen, wo zwischen den δq_i lineare Gleichungen bestehen, vorgeschrieben durch diejenigen Beziehungen F_j, die eben zur gegebenen Zeit erfüllt sein müssen.

Die Bewegungsgleichungen des materiellen Systems sind daher zur Zeit t

$$(18') \qquad \frac{\partial U}{\partial q_i} = (1+\lambda)\left(\frac{dp_i}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right) + \mu p_i + \sum_{j=1}^{\nu} \bar{\lambda}_j \frac{\partial F_j}{\partial q_i},$$
$$(i = 1, 2, 3, \cdots, n_1),$$

wo λ und μ dieselbe Bedeutung haben wie in IV., $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \cdots, \bar{\lambda}_\nu$ hingegen Lagrangesche Multiplikatoren sind.

Das Prinzip der lebendigen Kraft soll nicht vorausgesetzt werden.

§ 2.

Analogien zum zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie.

VIII. Ich werde in den folgenden Betrachtungen ein materielles Punktsystem von der in VII. beschriebenen Art voraussetzen, jedoch einen Punkt von der Masse $m_i = m_{i+1} = m_{i+2}$ durch Cartesische Koordinaten q_i, q_{i+1}, q_{i+2} festlegen, die mit x_i bezeichnet werden sollen. Die Bewegungsgleichungen des Systems sind dann im Sinne von (18′)

$$(18) \qquad X_i = (1+\lambda) m_i x_i'' + \mu m_i x_i' + \sum_{j=1}^{\nu} \bar{\lambda}_j \frac{\partial F_j}{\partial x_i},$$
$$(i = 1, 2, 3, \cdots, 3n).$$

Ich will mir die Bewegung fürs erste so vorstellen, daß das materielle Punktsystem sich in einem Mittel bewegt, das an seiner Bewegung auf folgende Weise teilnimmt: ein Teil des Mittels von der veränderlichen Masse λm_i um den Punkt m_i herum bewegt sich mit derselben Geschwindigkeit v_i wie m_i selbst; der übrige Teil des Mittels ruht und übt auf m_i eine Reibungskraft im entgegengesetzten Sinne der Geschwindigkeit v_i aus, deren Größe $= \mu m_i v_i$ ist, wo μ nicht negativ sei. Die beiden Größen λ und μ sollen für $t_0 \leqq t \leqq t_1$ eindeutig gegebene Funktionen von t sein, und der Anfangswert von λ sei gleich seinem Wert zur Zeit t_1.

Bezeichnet man die lebendige Kraft des materiellen Punktsystems mit T, so ist bei Zugrundelegung dieser Vorstellung die lebendige Kraft des mitbewegten Mittels $= \lambda T$, während

$$- \sum_{i=1}^{3n} \mu m_i x_i' x_i' \, dt = -2 \mu T dt$$

die Arbeit der Reibungskräfte im Zeitelement dt darstellt.

Die Verbindungen zwischen den materiellen Punkten seien zweierlei: von der Zeit explizit unabhängige und solche, die von der Zeit abhängen. Im Falle der Verbindungen erster Art ist

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} x_i' = 0;$$

im Falle der Verbindungen zweiter Art ist

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} x_i' = - \frac{\partial F_j}{\partial t}.$$

Nun setze ich voraus, daß die Verbindungen dieser Art davon herrühren, daß das Punktsystem mit äußeren, nach gegebenem Gesetz sich bewegenden Massen zusammenhängt oder durch solche in der Bewegung beschränkt wird, so daß

$$\frac{\partial F_j}{\partial t} = \frac{\partial F_j}{\partial \mathfrak{a}_j} \mathfrak{a}_j' + \frac{\partial F_j}{\partial \mathfrak{b}_j} \mathfrak{b}_j' + \frac{\partial F_j}{\partial \mathfrak{c}_j} \mathfrak{c}_j'$$

ist, wo die $\mathfrak{a}_j$, $\mathfrak{b}_j$, $\mathfrak{c}_j$ die Koordinaten eines Punktes A_j bezeichnen, durch dessen Bewegung die jener äußern Masse M_j bestimmt wird, die die Verbindung F_j beeinflußt. Dann stellen aber die Ausdrücke

$$- \bar{\lambda}_j \frac{\partial F_j}{\partial \mathfrak{a}_j}, \quad - \bar{\lambda}_j \frac{\partial F_j}{\partial \mathfrak{b}_j}, \quad - \bar{\lambda}_j \frac{\partial F_j}{\partial \mathfrak{c}_j}$$

die auf die äußere Masse M_j infolge der Verbindung F_j ausgeübte Kraft dar, und daher ist

$$- \bar{\lambda}_j \left(\frac{\partial F_j}{\partial \mathfrak{a}_j} \mathfrak{a}_j' + \frac{\partial F_j}{\partial \mathfrak{b}_j} \mathfrak{b}_j' + \frac{\partial F_j}{\partial \mathfrak{c}_j} \mathfrak{c}_j' \right) dt = - \bar{\lambda}_j \frac{\partial F_j}{\partial t} dt$$

die infolge von F_j während der Zeit dt auf die Bewegung der äußern Masse durch unser materielles System geleistete Arbeit. Daher ist

$$- \sum_{j=1}^{\nu} \bar{\lambda}_j \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} x_i' \, dt$$

die während des Zeitelementes dt unserem Punktsystem von außen zugeführte Arbeit. Es gibt selbstverständlich viel allgemeinere Arten von Verbindungen, bei denen dasselbe zutrifft.

Setzen wir noch voraus, daß den Kräften X_i ein von der Zeit explizite unabhängiges Potential U zukommt, so ist die Summe

$$d[(1+\lambda)T-U]+\sum_{j=1}^{\nu}\bar{\lambda}_j\sum_{i=1}^{3n}\frac{\partial F_j}{\partial x_i}x_i'\,dt\equiv dQ \tag{19}$$

d. i. der Zuwachs an totaler Energie (des durch das Mittel ergänzten materiellen Systems) minus der von außen dem System zugeführten Arbeit, wie aus dem Gleichungssystem (18) folgt,

$$= T\,d\lambda - 2\mu T\,dt. \tag{19'}$$

Die Bewegung des durch das Mittel ergänzten materiellen Punktsystems befolgt demnach ein dem zweiten Hauptsatz der Wärmetheorie formal analoges Gesetz, und es ist von Interesse, daß im Falle eines reibungslosen Systems

$$dQ = T\,d\lambda,$$

also für einen Kreisprozeß im Verlauf der Zeit $t_0 \leqq t \leqq t_1$, da λ zu Ende desselben zu seinem Anfangswert zurückkehrt,

$$\int\frac{dQ}{T}=0$$

sich ergibt, hingegen im Falle des Vorhandenseins einer Reibung an Stelle dieser Gleichung die Beziehung

$$\int\frac{dQ}{T}=-2\int\mu\,dt<0$$

gültig ist. Selbstverständlich gilt für einen vollen Kreisprozeß ebenso auch der Ausspruch

$$\int\frac{dQ}{Tf(\lambda)}\gtreqless 0,$$

wenn nur $f(\lambda)$ eine reelle positive Funktion von λ bezeichnet.

IX. Eine zweite Interpretation der Gleichungen (18) ist die folgende: Es sei speziell

$$\mu=\frac{d\lambda}{dt},$$

so daß die Gleichungen (18) zu schreiben sind

$$X_i=\frac{d}{dt}((1+\lambda)m_i x_i')+\sum_{j=1}^{\nu}\bar{\lambda}_j\frac{\partial F_j}{\partial x_i},\qquad (i=1,2,\cdots,3n). \tag{18'}$$

Aus diesen folgt im Falle von Kräften, denen ein von der Zeit explizite unabhängiges Potential zukommt, die Gleichung:

$$(19') \qquad d((1+\lambda)T-U)+\sum_{j=1}^{\nu}\bar{\lambda}_j\sum_{i=1}^{3n}\frac{\partial F_j}{\partial x_i}x_i'\,dt=-T\,d\lambda.$$

Bei derselben Vorstellung von der Bewegung des Mittels, die wir in Nr. VIII. beschrieben, mit dem Unterschiede, daß jetzt Reibung ausgeschlossen ist, wird durch diese Gleichung ausgesprochen, daß die dem ergänzten Punktsystem zugeführte Energie

$$(19'') \qquad dQ=-T\,d\lambda$$

ist.

In den beiden Spezialfällen führt demnach die Vorstellung von dem Mitbewegtsein der umgebenden Materie zu ganz verschiedenen Resultaten; denn im ersten Fall war eine zugeführte positive Energie mit einer Zunahme, in diesem zweiten Fall hingegen mit einer Abnahme der mitbewegten Materie verbunden. Der Unterschied zwischen beiden wird durch das folgende mechanische Modell im weitern Sinn klargemacht: Man verbinde einmal zwei mit gleicher Geschwindigkeit v bewegte, keiner äußern Wirkung unterworfene Massen M und $M d\lambda$ starr miteinander, ein andres Mal die mit der Geschwindigkeit v bewegte Masse M mit der ruhenden Masse von der Größe $M d\lambda$; im ersten Fall ist die lebendige Kraft von $M + M d\lambda$ um $\frac{Mv^2}{2}d\lambda$ größer, im zweiten Fall (von unendlich Kleinen höherer Ordnung abgesehen) um $\frac{Mv^2}{2}d\lambda$ kleiner als die von M. Die Zunahme an Masse ist also im ersten Fall mit einer Zunahme, im zweiten Fall mit einer Abnahme der lebendigen Kraft verbunden. Wird umgekehrt die Masse $M d\lambda$ von der festen Verbindung mit M befreit und auf die Weise weggeführt, daß dabei kein Stoß erfolgt, so wird die lebendige Kraft von M um $\frac{Mv^2}{2}d\lambda$ kleiner sein, als die der vereinten Massen war. Es ist jedoch unmöglich, die Masse $M d\lambda$ auf eine Weise zu entfernen, daß dabei die lebendige Kraft der zurückgebliebenen Masse M sich vergrößere. Bei Voraussetzung negativer Massen $M d\lambda$, bei deren fester Verknüpfung mit M der Satz von der Erhaltung der Bewegungsgröße gültig bleiben soll, wird die Schwierigkeit gehoben. Im Fall von negativen Massen ist das Modell ein mechanisches im weitern Sinn. Denkt man sich demgemäß allgemeiner die Massen $m_i d\lambda$ mit den Anfangsgeschwindigkeiten v_i resp. 0 den Systempunkten m_i kontinuierlich (von t_0 bis zur Zeit t_1) zugeführt und mit denselben starr verknüpft, und sind die m_i dabei den freien Kräften X_i, den Widerstandskräften $\mu m_i x_i'$ und den Verbindungen F kontinuierlich unterworfen, so bestehen für die Bewegung die Gleichungssysteme (18) resp. (18'), also auch die Analogien (19'), (19''').

X. Ich vereinige die in VIII. und IX. beschriebenen Spezialfälle, indem ich setze

$$X_i = \lambda_1 m_i x_i' + \frac{d}{dt}\left((1+\lambda_2) m_i x_i'\right) + r m_i x_i' + \sum_{j=1}^{\nu} \bar{\lambda}_j \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \tag{18''}$$
$$(i = 1, 2, \cdots, 3n);$$

dabei bestehen zwischen den früheren λ, μ und diesen λ_1, λ_2, r, (wo $r \geqq 0$ vorausgesetzt sei) die Gleichungen

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= \lambda, \\ r + \frac{d\lambda_2}{dt} &= \mu. \end{aligned} \tag{18'''}$$

Bei der soeben beschriebenen Vorstellung von der mitbewegten Materie des Mittels und bei denselben Annahmen bezüglich der Kräfte und der Verbindungen wie früher, folgt jetzt, daß die dem ergänzten materiellen System im Zeitelement zugeführte Energie

$$dQ = Td(\lambda_1 - \lambda_2) - 2rTdt \tag{19$^{\text{IV}}$}$$

ist, wo dQ auch hier die linke Seite der Gleichung (19'') zum Ausdruck hat. Ist keine Reibung vorhanden, so hat man

$$dQ = Td(\lambda_1 - \lambda_2). \tag{19$^{\text{V}}$}$$

Werden die Massen $m_i d\lambda$ in den Zeitelementen dt dem System kontinuierlich zugeführt, so eignet sich das, am Ende von Nr. X., beschriebene Modell selbstredend auch zur Darstellung der durch (18'') bestimmten Bewegung.

XI. Man kann an Stelle der in VIII. und IX. gegebenen Interpretationen auch die folgende setzen: Ich stelle mir die Größen $-\lambda_1 m_i x_i''$ und $-\lambda_2 m_i x_i''$ als von dem Mittel herrührende Kräfte vor; die diesen Kräften zukommende potentielle Energie ist bei konstanten Werten von λ_1 und λ_2 gewiß

$$(\lambda_1 + \lambda_2) T;$$

derselbe Ausdruck soll für den allgemeineren Fall veränderlicher λ_1 und λ_2 zur Definition der potentiellen Energie der Kräfte dienen. Für die im Zeitelement dem materiellen System zugeführte Energie dQ ergibt sich dann derselbe Ausdruck wie früher.

Die Vorstellung der mitbewegten Materie des Mittels ist gewiß anschaulicher; dafür ist die Vorstellung von Kräften, die das Mittel auf das in ihm bewegte materielle System ausübt, allgemeinerer Natur.

XII. Bei einem Versuche, das beschriebene mechanische Modell auf die Wärmebewegungen anzuwenden, ist vor allem die Frage zu beantworten, welche Beziehungen zwischen der absoluten Temperatur ϑ und der Entropie S einerseits, und den Größen λ_1, λ_2 und T andererseits dann bestehen müssen? *Eine* Gleichung zwischen diesen Größen wird am einfachsten durch die Betrachtung idealer Gase erhalten. Die innere Energie eines idealen Gases von der Masse m ist nämlich

$$= m C_v \vartheta,$$

wo C_v die spezifische Wärme des Gases bei konstantem Volumen in dynamischem Maß bezeichnet und als vollständig konstant zu betrachten ist, da doch hier nur von einem idealen Zustande die Rede ist. Da die Anziehungskräfte zwischen den Molekülen eines idealen Gases zu vernachlässigen sind, so ist die innere Energie der Bewegung bei Zugrundelegung unserer Darstellung

$$= (1 + \lambda_1 + \lambda_2) T;$$

daraus ergibt sich die Beziehung

$$m C_v \vartheta = (1 + \lambda_1 + \lambda_2) T. \tag{20'}$$

Diese Gleichung soll im Falle eines beliebigen Körpers die absolute Temperatur *definieren*, wenn C_v eine dem Körper eigentümliche Konstante ist.

Es ist andererseits bei reversiblen Kreisprozessen ganz allgemein

$$d Q = m \vartheta \, d S;$$

da die Reibung bei umkehrbaren Vorgängen $= 0$ zu setzen ist, so haben wir bei Zugrundelegung unserer Darstellung im Sinne der Gleichung (19^{V})

$$d Q = T d(\lambda_1 - \lambda_2)$$

zu setzen. Wir haben also die weitere Beziehung

$$m \vartheta \, d S = T d(\lambda_1 - \lambda_2). \tag{20''}$$

Aus den Gleichungen (20′) und (20″) folgt daher

$$(1 + \lambda_1 + \lambda_2) d S = C_v d(\lambda_1 - \lambda_2). \tag{20'''}$$

Außer dieser ergibt sich keine weitere Beziehung zwischen λ_1, λ_2 und S; ich kann daher zwischen diesen Größen eine weitere Beziehung beliebig annehmen, wodurch ich eine unendliche Mannigfaltigkeit der möglichen Darstellungen erreiche.

Diese weitere Beziehung sei

$$\lambda_1 - \lambda_2 = f(S), \tag{21'}$$

wo $f(S)$ eine eindeutige, endliche, differentiierbare Funktion von S bedeutet; dann folgt aus (20‴)

$$1 + \lambda_1 + \lambda_2 = C_v f'(S), \tag{21''}$$

wo $f'(S)$ die Derivierte von $f(S)$ nach S bedeutet und im Sinne von (20′)

$= \frac{m\vartheta}{T}$, also gewiß nicht negativ ist. Wählt man $f(S)$ diesen Bestimmungen gemäß, so ist dadurch die Darstellung festgelegt, und einer jeden kontinuierlichen in sich zurückkehrenden Wertreihe des realen Parameters S entspricht ein geschlossener Kreisprozeß.

Die einfachsten Annahmen für $f(S)$ ergeben sich wie folgt:

Annahme α):

$$\lambda_2 = 0;$$

dann hat man (wenn C eine positive Konstante bezeichnet)

$$f(S) = Ce^{\frac{S}{C_v}} - 1 = \lambda_1.$$

Annahme β):

$$\lambda_1 = 0;$$

dann hat man

$$f(S) = -Ce^{-\frac{S}{C_v}} + 1 = -\lambda_2.$$

Annahme γ):

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0;$$

dann hat man (wenn S_0 eine Konstante bezeichnet)

$$f(S) = \frac{S - S_0}{C_v} = 2\lambda_1 = -2\lambda_2.$$

Bei dieser Annahme hat man ferner im Sinne der Beziehung (20′)

$$T = mC_v\vartheta.$$

Diese Gleichung spricht im wesentlichen das bekannte Clausiussche Gesetz aus.*)

Annahme δ):

$$\lambda_1 + \lambda_2 = A\cos\frac{S - S_0}{c} \qquad (|A| < 1),$$

wo A und c Konstanten bedeuten. Die frühere Annahme ergibt sich hieraus für $\lim A = 0$.

Annahme ε):

$$\lambda_1 + \lambda_2 = A_1 e^{\frac{S}{c}} + A_2 e^{-\frac{S}{c}},$$

wo A_1, A_2 und c Konstanten bedeuten. Ich erwähne diese Annahme als allgemeineres Beispiel für eine reelle Darstellung unseres Modells, da man bei gehöriger Wahl der genannten Konstanten erreichen kann, daß sowohl $\lambda_1 + \lambda_2$ als auch λ_2 für beliebige Werte des reellen Parameters S nicht negativ sind.

*) Pogg. Ann. 100, S. 370. 1857.

Für die zugehörigen Werte von τ und v im verallgemeinerten Hamiltonschen Integral (in VII., (15')) findet man mittels (16'), (18'''), (21'), (21'') leicht

$$\tau = e^{-\frac{S}{2C_v}} (Cf'(S))^{\frac{1}{2}},$$

$$v = e^{-\frac{S}{2C_v}} (Cf'(S))^{-\frac{1}{2}},$$

also im einfachsten Fall γ)

$$\tau = v = e^{-\frac{S}{2C_v}};$$

Zur Festlegung der Bewegungsgleichungen muß nur noch S als Funktion von $T, U, \cdots$ gegeben sein.

Ich erlaube mir zum Schluß das dieser Annahme γ) entsprechende Modell näher zu beschreiben: die Ähnlichkeit mit dem altbekannten, zur Versinnlichung der elektrodynamischen Erscheinungen dienenden Modell verleiht ihm, wie ich glaube, besonderes Interesse.

Ich gehe von der Annahme aus, daß die Körper ein Aggregat von in lebhafter Bewegung begriffenen Molekülen sind; ein jedes Molekül bestehe aus einem ponderablen, von Atomen gebildeten Kern und einer imponderablen Hülle, deren Stoff auch den Kern durchdringt und in getrennte Massen von gleicher Größe und von entgegengesetztem Vorzeichen zerlegt ist; die Summe aus den absoluten Werten dieser getrennten Massen verhalte sich zur Masse des Kerns wie die Entropie zu der mit C_v bezeichneten eigentümlichen Konstanten des Körpers. Der intermolekulare Raum sei durch zweierlei Imponderabilien, deren Teile wir „Elektronen“ nennen wollen, erfüllt: die Elektronen von der Art I seien in Bewegung begriffen mit Geschwindigkeiten, die in die der benachbarten Moleküle stetig übergehen, — die von der Art II ruhen; und beiderlei Arten befinden sich in polarisiertem Zustand, indem ein jedes Elektron in zwei gleiche „Ionen“ von entgegengesetztem Vorzeichen zerfällt. In ein jedes Molekül des Körpers dringen im Fall einer Wärmeaufnahme Ionen von beiderlei Arten in gleichen Massen ein, und zwar + Ionen von der Art I in die positiven, und — Ionen von der Art II in die negativen Teile der Hülle, wo alle die Geschwindigkeiten des Moleküls annehmen. Im Falle einer Wärmeabgabe hingegen treten — Ionen der Art I in die positiven, und + Ionen der Art II in die negativen Teile der Hülle.

Ist die Temperatur eines Körpers A kleiner als die eines angrenzenden Körpers B und der Unterschied unendlich klein, so strömen + Ionen von der Art I in die positiven, — Ionen von der Art II in die negativen

Teile der Hüllen der A Moleküle, und zu gleicher Zeit strömen $-$ Ionen von der Art I in die positiven und $+$ Ionen von der Art II in die negativen Massenteile der B Molekülhüllen in gleicher Menge ein, wo alle Ionen die Geschwindigkeiten der betreffenden Moleküle annehmen. Infolge der Gleichheit der entgegengesetzten Ströme und der unendlich kleinen Temperaturdifferenz von A und B ist die Wärmeabgabe von B gleich der Wärmeaufnahme von A.

Budapest, Februar 1906.