MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, ADOLPH MAYER, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen.

Walther v. Dyck
in München.

David Hilbert
in Göttingen.

Otto Blumenthal
in Aachen.

63. Band. 4. Heft.

Ausgegeben am 28. März 1907.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1907.

Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen.

I. Teil: Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener.*)

Von

Erhard Schmidt in Bonn.

Einleitung.

Fredholm**) hat eine Auflösungsformel der inhomogenen linearen Integralgleichung

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

entdeckt, welche das Resultat enthielt, daß diese Gleichung nach $\varphi(s)$ stets aufgelöst werden kann, wenn λ nicht eine der Nullstellen einer gewissen ganzen Transzendenten $\delta(\lambda)$ ist. Für diese Werte von λ, in Hilbertscher Bezeichnung die sogenannten *„Eigenwerte des Kernes $K(s, t)$"*, und *nur* für diese läßt, wie Fredholm ferner zeigte, die homogene Gleichung

$$0 = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

Lösungen zu, die nach Hilbert *„zum betreffenden Eigenwert des Kernes $K(s, t)$ gehörige Eigenfunktionen"* genannt werden. Hilbert***) hat die in der Theorie der partiellen und gewöhnlichen Differentialgleichungen so wichtigen Fragen nach der Existenz sogenannter Normalfunktionen und der Entwickelbarkeit willkürlicher Funktionen nach ihnen durch Einführung der Greenschen Funktion auf das viel allgemeinere Problem zurückgeführt, die Existenz von Eigenfunktionen eines in s und t *sym-*

---

*) Dieser Teil ist bis auf das neu hinzugekommene IV^te Kapitel, den § 13 und unwesentliche Änderungen in den übrigen Kapiteln ein Abdruck meiner im Juli 1905 erschienenen Göttinger Inauguraldissertation.

**) Acta Mathematica Bd. 27.

***) Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathem.-Phys. Cl. 1904 Heft 3.

metrischen Kernes $K(s, t)$ zu beweisen und die Gesetze der Entwickelbarkeit willkürlicher Funktionen nach ihnen aufzustellen. Die Greensche Funktion selbst wird durch eine Integralgleichung mit unsymmetrischem Kerne bestimmt, wobei die Fredholmschen Formeln zur Anwendung kommen. Indem nun Hilbert*) das für die willkürlichen stetigen Funktionen $x(s)$ und $y(t)$ gebildete Doppelintegral

$$\int_a^b\int_a^b K(s,t)\,x(s)\,y(t)\,ds\,dt$$

als quadratische Form von unendlich viel Variabelen betrachtet, erhält er durch Grenzübergang den der kanonischen Orthogonalzerlegung quadratischer Formen entsprechenden Zerlegungssatz

$$\int_a^b\int_a^b K(s,t)\,x(s)\,y(t)\,ds\,dt = \sum_\nu \frac{1}{\lambda_\nu}\int_a^b x(s)\,\varphi_\nu(s)\,ds\cdot\int_a^b y(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt.$$

Hierbei durchläuft $\varphi_\nu(s)$ alle Eigenfunktionen des Kernes — jede mit einem solchen Faktor versehen, daß das Integral über ihr Quadrat 1 gibt — und λ_ν die zugehörigen Eigenwerte. Aus diesem Satze folgt zunächst unmittelbar, daß jeder symmetrische Kern Eigenfunktionen hat. Unter der Voraussetzung, daß der Kern ein „*allgemeiner*“ ist, d. h. daß es zu jeder stetigen Funktion $\alpha(s)$ und jeder beliebig kleinen positiven Größe ε eine stetige Funktion $\beta(s)$ gibt, so daß

$$\int_a^b\left\{\alpha(s)-\int_a^b K(s,t)\,\beta(t)\,dt\right\}^2 ds<\varepsilon$$

ist, leitet dann Hilbert den grundlegenden Entwicklungssatz ab, daß jede unter Vermittelung einer stetigen Funktion $h(s)$ durch das Integral

$$g(s)=\int_a^b K(s,t)\,h(t)\,dt$$

darstellbare Funktion $g(s)$ in eine absolut und gleichmäßig konvergente, nach Eigenfunktionen des Kernes $K(s, t)$ fortschreitende Reihe entwickelbar ist. Diese Sätze enthalten implicite auch die analogen für die Integralgleichung

$$0=\psi(s)-\lambda\int_a^b G(s,t)\,p(t)\,\psi(t)\,dt$$

— wo $G(s, t)$ symmetrisch und $p(t) > 0$ ist —, welche durch die Substitution

$$\sqrt{p(s)}\cdot\psi(s)=\varphi(s),\quad \sqrt{p(s)}\cdot G(s,t)\cdot\sqrt{p(t)}=K(s,t)$$

*) Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathem.-Phys. Cl. 1904 Heft 1.

auf die obige Gleichung

$$0 = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

zurückgeführt wird. Eine Reihe verwandter und z. T. äquivalenter Theoreme hat Stekloff*) mit Hilfe der von ihm weit ausgebildeten Schwarz-Poincaréschen Methoden erhalten.

Nach Erledigung einiger Hilfssätze im ersten Kapitel der vorliegenden Arbeit finden im zweiten die Hilbertschen Sätze, unter Vermeidung des Grenzübergangs aus dem Algebraischen, sehr einfache Beweise. Zunächst wird die Existenz von Eigenwerten durch ein Verfahren bewiesen, das, einem berühmten Beweise von H. A. Schwarz nachgebildet**), in der Sprache der Fredholmschen Formeln darauf hinauskommen würde, daß die Gleichung

$$\delta(\lambda) = 0$$

nach der Bernoullischen Methode aufgelöst wird. Aus dem Existenzsatz ergeben sich die Entwicklungssätze in analoger Weise, wie aus dem Fundamentalsatz der Algebra die Entwicklung einer ganzen Funktion in ein Produkt von Linearfaktoren. Hierbei stellt sich die Gültigkeit des Hilbertschen Entwicklungssatzes als unbeschränkt heraus, postuliert also insbesondere nicht die von Hilbert gemachte Voraussetzung der „Allgemeinheit“ des Kernes. Das erwähnte, der kanonischen Orthogonalzerlegung quadratischer Formen entsprechende Hilbertsche Zerlegungstheorem kann dann aus dem Entwicklungssatz durch Integration unmittelbar gewonnen werden. Die durch mehrfache Nullstellen der Funktion $\delta(\lambda)$ verursachten Komplikationen treten bei der hier gegebenen Beweisanordnung nicht auf. Die Fredholmschen Formeln werden nicht benutzt, vielmehr liefert die unbeschränkte Gültigkeit der Entwicklungssätze für den Fall des symmetrischen Kernes eine neue Gestaltung der Auflösung der inhomogenen linearen Integralgleichung.***) Jede *unsymmetrische* lineare Integralgleichung läßt sich aber, wie in § 13 gezeigt wird, durch eine einfache Substitution auf eine *symmetrische* zurückführen.

Indem im dritten Kapitel die Voraussetzung der Symmetrie des Kernes fallen gelassen wird, werden die Funktionen $\varphi_\nu(s)$ und $\psi_\nu(s)$ dann als

*) Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg 1904 p. 7 etc. Annales de la Fac. de Toulouse 2ᵉ S., VI 1905.

**) H. A. Schwarz, Gesammelte Abhandlungen Bd. 1, S. 241—262.

***) Vergl. noch die während des Druckes vorliegender Arbeit von Hilbert veröffentlichte umfassende Neubegründung der Theorie der Integralgleichungen auf Grund der von ihm geschaffenen Theorie der quadratischen Formen von unendlich viel Variabelen. Göttinger Nachrichten 1906, Vierte und Fünfte Mitteilung.

ein zum Eigenwerte λ_ν gehöriges Paar von adjungierten Eigenfunktionen des Kernes $K(s, t)$ definiert, wenn die Gleichungen

$$\varphi_\nu(s) = \lambda_\nu \int_a^b K(s, t)\, \psi_\nu(t)\, dt$$

$$\psi_\nu(s) = \lambda_\nu \int_a^b K(t, s)\, \varphi_\nu(t)\, dt$$

bestehen; $\varphi_\nu(s)$ möge eine Eigenfunktion der ersten, $\psi_\nu(s)$ eine der zweiten Art heißen. Es ergeben sich dann die Entwicklungssätze in folgender Gestalt: Ist die stetige Funktion $g(s)$ unter Vermittelung der stetigen Funktion $h(s)$ durch das Integral

$$g(s) = \int_a^b K(s, t)\, h(t)\, dt$$

darstellbar, so ist $g(s)$ in eine absolut und gleichmäßig konvergente nach Eigenfunktionen erster Art fortschreitende Reihe entwickelbar; ist

$$g(s) = \int_a^b K(t, s)\, h(t)\, dt,$$

so läßt sich $g(s)$ in gleicher Weise nach Eigenfunktionen zweiter Art entwickeln. Aus diesen Sätzen wird durch Integration der der kanonischen Orthogonalzerlegung bilinearer Formen entsprechende Zerlegungssatz gewonnen

$$\int_a^b\int_a^b K(s, t)\, x(s)\, y(t)\, ds\, dt = \sum_\nu \frac{1}{\lambda_\nu} \int_a^b x(s)\, \varphi_\nu(s)\, ds \int_a^b y(t)\, \psi_\nu(t)\, dt.$$

Die Sätze des dritten Kapitels sind meines Wissens bisher nicht bekannt.

Die Entwicklungen von Funktionen zweier Variabelen nach Potenzen, nach trigonometrischen, nach Kugel- und vielen anderen Funktionen lassen sich in Gestalt einer Reihe schreiben, welche nach Produkten einer Funktion der einen Variabelen mit einer Funktion der anderen fortschreitet.

Im Anschluß an diese Bemerkung entspringt für die Variationsrechnung folgende Frage, welche den Gegenstand des vierten Kapitels bildet: Gegeben sei eine stetige Funktion $K(s, t)$ von zwei Variabelen s und t. Gesucht wird ein System von höchstens m Paaren einer stetigen Funktion von s und einer stetigen Funktion von t, so daß die Summe ihrer Produkte die gegebene Funktion $K(s, t)$ möglichst gut approximiert. Das Maß der Approximation, dessen Minimum die Problemstellung fordert, soll wie gewöhnlich durch das Doppelintegral über das Fehlerquadrat definiert werden. Es wird bewiesen, daß die Lösung des Problems durch die m ersten Paare adjungierter Eigenfunktionen des unsymmetrischen

Kernes $K(s,t)$ gebildet wird. Für das Maß der besten Approximation M_m ergibt sich die Formel

$$M_m = \int_a^b\int_a^b (K(s,t))^2\,ds\,dt - \sum_{\nu=1}^{\nu=m}\frac{1}{\lambda_\nu^2},$$

wo λ_ν die m ersten Eigenwerte des Kernes $K(s,t)$ durchläuft, und es zeigt sich, daß das Maß der besten Approximation mit wachsendem m verschwindet.

Alle Sätze und Beweise der vier ersten Kapitel behalten ihre Gültigkeit, wenn s und t Punkte eines n-dimensionalen ganz im Endlichen liegenden, aus einer endlichen Anzahl analytischer Stücke bestehenden Gebildes in einem $(n+m)$-dimensionalen Raum bedeuten, und ds und dt die entsprechenden Elemente.

Das fünfte Kapitel setzt das zweite, dritte und vierte nicht voraus, sondern nur die im ersten bewiesenen Hilfssätze. Die Theorie der Entwicklung von Funktionen nach Potenzen und Polynomen, nach Fourierschen Reihen und unendlichen Reihen endlicher trigonometrischer Reihen, nach Kugelfunktionen und nach Normalfunktionen partieller und gewöhnlicher Differentialgleichungen legt die Frage nahe: Gegeben sei eine unendliche Reihe im Intervall $a \leqq x \leqq b$ definierter reeller stetiger Funktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_\nu(x), \cdots$. Was sind die Bedingungen dafür, daß jede im Intervall $a \leqq x \leqq b$ definierte stetige Funktion sich in eine gleichmäßig konvergente, nach den Funktionen $\varphi_\nu(x)$ oder endlichen linearen Aggregaten derselben fortschreitende Reihe entwickeln läßt? Oder mit andern Worten: Was sind die Bedingungen dafür, daß jede im Intervall $a \leqq x \leqq b$ definierte stetige Funktion durch Funktionen des Funktionenkörpers, welcher aus der Reihe der $\varphi_\nu(x)$ durch die Operationen der Multiplikation mit Konstanten und der Addition entsteht, gleichmäßig approximiert werden kann? Und wenn das der Fall ist, wie bestimmen sich die Koeffizienten einer solchen Entwicklung?

Nennt man nun das gegebene Funktionensystem der $\varphi_\nu(x)$ dann ein *abgeschlossenes*, wenn es keine von Null verschiedene stetige Funktion $f(x)$ gibt, so daß für jedes ν

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_\nu(x)\,dx = 0$$

ist, so erhellt vorweg, daß die *Abgeschlossenheit* des Systems der $\varphi_\nu(x)$ eine notwendige Bedingung für unsere Forderung darstellt.*) Anderenfalls müssten nämlich alle entwickelbaren Funktionen der Bedingung genügen,

*) Diese Bemerkung ist schon von J. P. Gram, Crelles Journal Bd. 94, S. 58 gemacht worden.

daß ihr Produkt, mit $f(x)$ von a bis b integriert, Null ergibt, und diese Bedingung würde z. B. von der Funktion $f(x)$ selber und allen genügend wenig von ihr abweichenden nicht erfüllt werden.

Es wird nun gezeigt, *daß ebenso wie die Abgeschlossenheit des vorgeschriebenen Funktionensystems eine notwendige Bedingung für unsere Forderung darstellt, die Abgeschlossenheit des Systems seiner zweiten Ableitungen eine hinreichende ist,* wenn noch nötigenfalls die Funktionen 1 und x adjungiert werden. *Ist die darzustellende Funktion einmal stetig differenzierbar, so ergeben sich für die Koeffizienten der Darstellung ganz allgemein gültige einfache Formeln.*

In einer an die hier vorliegende sich unmittelbar anschließenden Abhandlung wird zunächst eine neue und sehr einfache Methode zur Auflösung der linearen unsymmetrischen Integralgleichung auseinandergesetzt werden. Die dieser Methode zugrunde liegenden Prinzipien ermöglichen auch eine Behandlung der nicht linearen Integralgleichungen, welche den Gegenstand des zweiten Teiles dieser Abhandlung bilden wird. Unter einer nicht linearen Integralgleichung verstehe ich eine Funktionalgleichung, welche eine solche Bestimmung der gesuchten Funktionen fordert, daß eine gegebene Funktion einer konvergenten unendlichen Reihe gleich wird, deren Glieder aus den gesuchten Funktionen und weiteren gegebenen Funktionen durch die Operationen der Integration und Multiplikation und also auch Potenzierung zu positiven ganzzahligen Exponenten entstehen. So ist z. B.

$$f(s) - \int\int K(s, t, r)\,(\varphi(t))^m\,(\varphi(r))^n\,dt\,dr = 0,$$

wo $\varphi(s)$ gesucht und $f(s)$ und $K(s, t, r)$ gegeben sind, eine solche nicht lineare Integralgleichung. Ebenso nun wie die gewöhnliche nicht lineare Gleichung

$$y = f(x)$$

in der Umgebung einer Lösung eine und nur eine Lösung zuläßt, wenn $f'(x)$ nicht verschwindet, im anderen Falle aber Verzweigungen eintreten, so hängt auch der Lösbarkeitscharakter einer nicht linearen Integralgleichung in der Umgebung einer Lösung von einer abgeleiteten linearen Integralgleichung ab. Verschwindet für diese der Fredholmsche Nenner $\delta(\lambda)$ nicht, so hat die nicht lineare Integralgleichung in der Umgebung eine und nur eine Lösung, verschwindet aber $\delta(\lambda)$, so treten *funktionale* Verzweigungen ein, für welche es gelingt die den Puiseuxschen entsprechenden Sätze aufzustellen.

Diese Theoreme ermöglichen es z. B. bei den nicht linearen elliptischen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung die Abhängigkeit der Lösungsflächen von den Randwerten zu verfolgen und zwar mit vollständiger

Beherrschung der Verzweigungen d. h. derjenigen Lösungen, in deren Umgebung es für willkürlich aber wenig veränderte Randwerte nicht mehr eine sondern mehrere Lösungsflächen gibt. Der Verzweigungscharakter hängt davon ab, ob die Jacobische derivierte lineare Differentialgleichung bei den Randwerten Null von Null verschiedene Lösungen hat oder nicht, was durch die Betrachtung einer linearen Integralgleichung zu entscheiden ist.

Auch die von Poincaré entdeckte Bifurkation in der Theorie der rotierenden Gleichgewichtsfiguren ist eine solche Verzweigung einer nicht linearen Integralgleichung. In einer dritten Abhandlung werde ich diese und noch mehrere andere Anwendungen ausführlich auseinandersetzen.

Erstes Kapitel.

Vorbereitende Sätze über orthogonale Funktionen.

§ 1.

Die Besselsche und die Schwarzsche Ungleichung.

Es seien $\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots, \psi_n(x)$ n stetige im Intervall $a \leqq x \leqq b$ definierte reelle Funktionen, welche sämtlich zueinander *orthogonal* sein, d. h. für jedes Paar voneinander verschiedener Indizes μ und ν der Gleichung

$$\int_a^b \psi_\mu(x)\,\psi_\nu(x)\,dx = 0$$

genügen mögen, und welche außerdem noch sämtlich *normiert* sein, d. h. für jedes ν der Gleichung

$$\int_a^b (\psi_\nu(x))^2 dx = 1$$

genügen mögen. Dann gilt für die beliebige reelle stetige Funktion $f(x)$ die *Besselsche Identität*

$$\int_a^b \Big(f(x) - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \psi_\nu(x) \int_a^b f(y)\,\psi_\nu(y)\,dy\Big)^2 dx = \int_a^b (f(x))^2\,dx - \sum_{\nu=1}^{\nu=n}\Big(\int_a^b f(y)\,\psi_\nu(y)\,dy\Big)^2$$

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\Big(\int_a^b f(y)\,\psi_\nu(y)\,dy\Big)^2 \leqq \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Ist die gegebene Reihe der zueinander orthogonalen und normierten Funktionen unendlich, so ergibt diese letzte Ungleichung wegen des positiven Vorzeichens aller Summanden die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\Big(\int_a^b f(y)\,\psi_\nu(y)\,dy\Big)^2.$$

Es seien nun $f(x)$ und $\varphi(x)$ zwei reelle stetige Funktionen. Setzt man $\psi_1(x) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{\int_a^b (\varphi(y))^2 dy}}$, so ist $\psi_1(x)$ normiert, und die obige Besselsche Ungleichung für den Fall $n = 1$ ergibt

$$\left(\int_a^b f(x)\,\psi_1(x)\,dx\right)^2 \leqq \int_a^b (f(x))^2\,dx$$

$$\left(\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx\right)^2 \leqq \int_a^b (f(x))^2\,dx \cdot \int_a^b (\varphi(x))^2\,dx.$$

Das ist die bekannte *Ungleichung von Schwarz.* Die Besselsche Identität und alle in diesem Paragraphen aus ihr gezogenen Folgerungen bleiben gültig, wenn $f(x)$ eine reelle integrabele Funktion ist, deren Quadrat von a bis b integriert auch einen endlichen Wert gibt, woraus wegen

$$f(x) \cdot \psi_\nu(x) \leqq (f(x))^2 + (\psi_\nu(x))^2$$

auch die Endlichkeit und Bestimmtheit von

$$\int_a^b f(x)\,\psi_\nu(x)\,dx$$

folgt.

§ 2.

Ein Konvergenzsatz.

Es sei $Q(z, x)$ innerhalb des Gebietes $a \leqq x \leqq b$, $a \leqq z \leqq b$ als reelle nach x integrabele Funktion von z und x definiert, und es gelte für $a \leqq z \leqq b$ die Ungleichung

$$\int_a^b (Q(z, x))^2\,dx \leqq A,$$

wo A eine Konstante bedeutet; es sei ferner $\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots, \psi_\nu(x), \cdots$ eine unendliche Reihe reeller stetiger Funktionen, welche in der Bezeichnungsweise der vorigen Paragraphen normiert und zueinander orthogonal sein mögen. Dann konvergiert, wenn $f(x)$ eine beliebige reelle integrabele Funktion bedeutet, deren Quadrat von a bis b integriert auch einen endlichen Wert ergibt, die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \int_a^b f(y)\,\psi_\nu(y)\,dy \cdot \int_a^b Q(z, x)\,\psi_\nu(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} U_\nu(z)$$

für $a \leqq z \leqq b$ absolut und gleichmäßig; und zwar ist

$$\sum_{\nu=n}^{\nu=\infty} |U_\nu(z)| \leqq 2\sqrt{A}\sqrt{\sum_{\nu=n}^{\nu=\infty}\left(\int_a^b f(y)\,\psi_\nu(y)\,dy\right)^2},$$

wo der Ausdruck auf der rechten Seite, wegen der im vorigen Paragraphen bewiesenen Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left(\int_a^b f(y)\,\psi_\nu(y)\,dy\right)^2$ mit wachsendem n verschwindet.

Beweis. Es ist

$$\sum_{\nu=n}^{\nu=n+m} |U_\nu(z)| = \sum_k U_k(z) - \sum_\varrho U_\varrho(z),$$

wo k diejenigen der Indizes $n, n+1, \cdots, n+m$ durchläuft, welche für den betrachteten Wert von z positiven Gliedern der Summe, und ϱ diejenigen, welche negativen entsprechen.

Vertauscht man auf der linken Seite das Summen- mit dem Integralzeichen, so ergibt sich gemäß der im vorigen Paragraphen gegebenen Ungleichung von Schwarz

$$\sum_k U_k(z) \leqq \sqrt{\int_a^b (Q(z,x))^2\,dx}\cdot\sqrt{\int_a^b\left(\sum_k \psi_k(x)\int_a^b f(y)\,\psi_k(y)\,dy\right)^2 dx}.$$

Da nun die Funktionen $\psi_k(x)$ zueinander orthogonal und normiert sind, so ist

$$\int_a^b\left(\sum_k \psi_k(x)\int_a^b f(y)\,\psi_k(y)\,dy\right)^2 dx = \sum_k\left(\int_a^b f(y)\,\psi_k(y)\,dy\right)^2$$

$$\leqq \sum_{\nu=n}^{\nu=\infty}\left(\int_a^b f(y)\,\psi_\nu(y)\,dy\right)^2$$

und mithin ist

$$\sum_k U_k(z) \leqq \sqrt{A}\sqrt{\sum_{\nu=n}^{\nu=\infty}\left(\int_a^b f(y)\,\psi_\nu(y)\,dy\right)^2}.$$

Dieselbe Ungleichung erhält man für

$$-\sum_\varrho U_\varrho(z),$$

und durch Addition dieser beiden Ungleichungen ergibt sich die zu beweisende.

Zusatz. Wählt man für $Q(z, x)$ diejenige unstetige Funktion, welche für $x \leqq z$ gleich $+1$ und für $x > z$ gleich 0 ist, so folgt, daß die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \int_a^b f(y)\,\psi_\nu(y)\,dy \cdot \int_a^z \psi_\nu(x)\,dx$$

für $a \leqq z \leqq b$ absolut und gleichmäßig konvergiert.

§ 3.

Ersetzung linear unabhängiger Funktionensysteme durch orthogonale.

Es seien $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$ n für $a \leqq x \leqq b$ definierte reelle stetige Funktionen, die als linear unabhängig vorausgesetzt werden. Dann konstruieren wir die Funktionen*)

$$\psi_1(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{\int_a^b (\varphi_1(y))^2\,dy}}$$

$$\psi_2(x) = \frac{\varphi_2(x) - \psi_1(x)\int_a^b \varphi_2(z)\,\psi_1(z)\,dz}{\sqrt{\int_a^b \left(\varphi_2(y) - \psi_1(y)\int_a^b \varphi_2(z)\,\psi_1(z)\,dz\right)^2 dy}}$$

$$\vdots$$

$$\psi_n(x) = \frac{\varphi_n(x) - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n-1} \psi_\varrho(x)\int_a^b \varphi_n(z)\,\psi_\varrho(z)\,dz}{\sqrt{\int_a^b \left(\varphi_n(y) - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n-1} \psi_\varrho(y)\int_a^b \varphi_n(z)\,\psi_\varrho(z)\,dz\right)^2 dy}}.$$

Durch diese Formeln ist für jedes ν $\psi_\nu(x)$ rekursiv durch $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \cdots, \varphi_\nu(x)$ linear homogen mit konstanten Koeffizienten darstellbar und umgekehrt auch $\varphi_\nu(x)$ durch $\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots, \psi_\nu(x)$. In keiner der Formeln kann nämlich der Nenner verschwinden; denn wäre ν der erste Index, für welchen das geschähe, so müßte

$$\varphi_\nu(x) - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\nu-1} \psi_\varrho(x)\int_a^b \varphi_\nu(z)\,\psi_\varrho(z)\,dz = 0$$

sein, und da die $\psi_\varrho(x)$ aus den $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_{\nu-1}(x)$ linear homogen

*) Im wesentlichen dieselben Formeln sind von J. P. Gram in der Abhandlung „Ueber die Entwickelung reeller Functionen in Reihen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate“, Crelles Journal Bd. 94, aufgestellt worden.

mit konstanten Koeffizienten zusammengesetzt werden können, so würde sich ein Widerspruch zur vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit der Funktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$ ergeben. *Die Funktionen $\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots, \psi_n(x)$ bilden ferner ein normiertes und orthogonales Funktionensystem* d. h. genügen den Gleichungen

$$\int_a^b \psi_\mu(x)\,\psi_\nu(x)\,dx = 0 \quad \text{oder} \quad 1,$$

je nachdem ν und μ verschieden oder gleich sind. Das ist zunächst klar für die Funktionen $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$; nehmen wir nun das Normiertsein und die Orthogonalität des Funktionensystems $\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots, \psi_{\nu-1}(x)$ an, so folgt dasselbe auch für das Funktionensystem $\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots, \psi_{\nu-1}(x), \psi_\nu(x)$, denn es ist

$$\int_a^b (\psi_\nu(x))^2 dx = 1 \quad \text{und} \quad \int_a^b \psi_\nu(x)\,\psi_\varrho(x) = 0 \quad \text{für} \quad \varrho \leqq \nu - 1.$$

Wenn die Funktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_{n-1}(x)$ zwar ein linear unabhängiges System bilden, aber nicht die Funktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$, dann ist die lineare Abhängigkeit der letzteren gegeben durch die Gleichung

$$\varphi_n(x) - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n-1} \psi_\varrho(x) \int_a^b \varphi_n(z)\,\psi_\varrho(z)\,dz = 0.$$

Denn verschwände dieser Ausdruck nicht identisch, so wären die Funktionen $\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots, \psi_n(x)$ linear homogen mit konstanten Koeffizienten darstellbar durch die Funktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$ und mithin auch wegen der vorausgesetzten linearen Abhängigkeit der letzteren durch die Funktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_{n-1}(x)$. Es müssen also die Funktionen $\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots, \psi_n(x)$ linear voneinander abhängig sein. Das ist aber unmöglich; denn in einem orthogonalen System kann keine Gleichung von der Form

$$\sum_\nu c_\nu \psi_\nu(x) = 0$$

bestehen, wo nicht sämtliche $c_\nu = 0$ sind, wie sich durch Multiplikation dieser Gleichung mit $\psi_\nu(x)\,dx$ und Integration von a bis b ergibt.

Wir haben also in den Zählern der diskutierten Ausdrücke eine Reihe von linearen homogenen Formen der Funktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$, deren Eigenschaft es ist, im Falle einer linearen Abhängigkeit zwischen den letzteren dieselbe durch das identische Verschwinden einer der Formen nicht bloß als notwendiges und hinreichendes Kriterium anzuzeigen, sondern auch darzustellen.

Schlußbemerkung. Alle Formeln und Sätze dieses Kapitels mit Ausnahme des Zusatzes zu § 2 behalten ihre Gültigkeit, wenn x, y, z Punkte eines n-dimensionalen, ganz im Endlichen liegenden, aus einer endlichen Anzahl analytischer Stücke bestehenden Gebildes in einem $n+m$-dimensionalen Raum bedeuten, und dx, dy, dz die entsprechenden Elemente.

Zweites Kapitel.

Über die lineare symmetrische Integralgleichung.

§ 4.

Begriff der Eigenfunktion.

Es sei $K(s, t)$ eine für $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ definierte, reelle, stetige Funktion, die in s und t symmetrisch ist. Dann heißt jede stetige, nicht identisch verschwindende, reelle oder komplexe Funktion $\varphi(s)$, welche identisch in s der Gleichung

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

genügt, wo λ eine Konstante bedeutet, eine zu dem betreffenden *Eigenwerte* von λ gehörige *Eigenfunktion des Kernes* $K(s, t)$.

Zwei zu verschiedenen Werten von λ gehörige Eigenfunktionen $\varphi_\mu(s)$ und $\varphi_\nu(s)$ sind zueinander orthogonal, d. h. genügen der Gleichung

$$\int_a^b \varphi_\mu(s)\, \varphi_\nu(s)\, ds = 0.$$

Denn es sei

$$\varphi_\mu(s) = \lambda_\mu \int_a^b K(s, t)\, \varphi_\mu(t)\, dt,$$

$$\varphi_\nu(s) = \lambda_\nu \int_a^b K(s, t)\, \varphi_\nu(t)\, dt;$$

multipliziert man die erste dieser Gleichungen mit $\lambda_\nu \varphi_\nu(s)\, ds$, die zweite mit $\lambda_\mu \varphi_\mu(s)\, ds$, integriert von a bis b und subtrahiert, so ergibt sich bei Berücksichtigung der Symmetrie von $K(s, t)$

$$(\lambda_\nu - \lambda_\mu) \int_a^b \varphi_\mu(s)\, \varphi_\nu(s)\, ds = 0,$$

woraus die zu beweisende Gleichung folgt.

Wäre $\varphi_\nu(s)$ eine zu einem komplexen Eigenwerte von $K(s,t)$ gehörige Eigenfunktion, so würde die zu $\varphi_\nu(s)$ konjugierte Funktion zum konjugierten Eigenwerte gehören, wegen der Verschiedenheit dieser beiden Eigenwerte müßten dann $\varphi_\nu(s)$ und die zu $\varphi_\nu(s)$ konjugierte Funktion zueinander orthogonal sein, was unmöglich ist, da das Integral über das Produkt zweier konjugierter Funktionen stets größer als 0 ist. *Also sind alle Eigenwerte des Kernes $K(s,t)$ reell.*

Ist $\psi(s)$ eine komplexe Eigenfunktion, so folgt, weil, wie eben gezeigt, der zugehörige Eigenwert reell sein muß, daß $\psi(s) = \varphi(s) + i\bar{\varphi}(s)$, wo $\varphi(s)$ und $\bar{\varphi}(s)$ *reelle* Eigenfunktionen desselben Eigenwertes sind. Aus diesem Grunde sollen in allen folgenden Sätzen dieses Kapitels nur die *reellen Eigenfunktionen* betrachtet und unter der Bezeichnung *„Eigenfunktion"* verstanden sein.

§ 5.

Das vollständige normierte Orthogonalsystem.

Die Anzahl linear unabhängiger zu einem bestimmten Eigenwerte λ gehöriger Eigenfunktionen ist endlich.

Beweis: Da jedes aus zum selben Eigenwerte gehörigen Eigenfunktionen mit konstanten Koeffizienten gebildete lineare homogene Aggregat wieder eine zum betreffenden Eigenwerte gehörige Eigenfunktion liefert, so ergibt die Konstruktion des § 3 zu jedem System von n linear unabhängigen zum Eigenwerte λ gehörigen Eigenfunktionen ein System von ebensovielen Eigenfunktionen desselben Eigenwertes, welche *normiert und zueinander orthogonal* sind; dieselben mögen jetzt durch $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s), \cdots, \varphi_n(s)$ bezeichnet werden. Die im § 1 gegebene Besselsche Ungleichung liefert dann für jedes s

$$\int_a^b (K(s,t))^2\,dt \geqq \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \Big(\int_a^b K(s,t)\,\varphi_\nu(t)\,dt\Big)^2 = \frac{1}{\lambda^2}\sum_{\nu=1}^{\nu=n}(\varphi_\nu(s))^2;$$

multipliziert man diese Ungleichung mit ds und integriert von a bis b, so ergibt sich bei Berücksichtigung der Gleichungen

$$\int_a^b (\varphi_\nu(s))^2\,ds = 1$$

die Beziehung

$$n \leqq \lambda^2 \int_a^b\!\!\int_a^b (K(s,t))^2\,ds\,dt,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Ist die Anzahl der linear unabhängigen zu einem Eigenwert gehörigen Eigenfunktionen gleich m, so heißt der betreffende Eigenwert ein m-facher.

Ein *vollständiges normiertes Orthogonalsystem des Kernes* $K(s,t)$ soll ein solches System von normierten und zueinander orthogonalen Eigenfunktionen dieses Kernes heißen, daß jede Eigenfunktion dieses Kernes sich linear homogen mit konstanten Koeffizienten durch eine endliche Anzahl von Funktionen des Systems darstellen läßt.

Die in der Darstellung einer Eigenfunktion durch Funktionen des Systems vorkommenden Funktionen desselben müssen alle zum selben Eigenwerte gehören wie die darzustellende Funktion; denn es sei die Gleichung

$$\psi(s) = \sum_{\nu} c_\nu \varphi_\nu(s)$$

eine solche Darstellung für die Eigenfunktion $\psi(s)$ durch Funktionen des Systems; dann ist wegen der Orthogonalität der letzteren

$$c_\nu = \int_a^b \psi(s)\, \varphi_\nu(s)\, ds,$$

und dieser Ausdruck verschwindet, wenn $\psi(s)$ und $\varphi_\nu(s)$ zu verschiedenen Eigenwerten gehören, wie im vorigen Paragraphen gezeigt wurde.

Man erhält ein solches vollständiges normiertes Orthogonalsystem des Kernes $K(s,t)$, indem man zu jedem Eigenwerte λ durch die Konstruktion des § 3 ein System von ebenso vielen normierten und zueinander orthogonalen Eigenfunktionen bildet, als die Vielfachheit des betreffenden Eigenwertes beträgt.

Durchläuft $\varphi_\varrho(t)$ eine beliebige endliche Anzahl von Funktionen eines vollständigen normierten Orthogonalsystems des Kernes $K(s,t)$ und λ_ϱ die entsprechenden Eigenwerte, so folgt aus der Besselschen Ungleichung

$$\int_a^b (K(s,t))^2\, dt \geqq \sum_\varrho \left(\int_a^b K(s,t)\, \varphi_\varrho(t)\, dt\right)^2 = \sum_\varrho \frac{1}{\lambda_\varrho^2} (\varphi_\varrho(s))^2,$$

$$\int_a^b\int_a^b (K(s,t))^2\, ds\, dt \geqq \sum_\varrho \frac{1}{\lambda_\varrho^2}.$$

Hieraus ergibt sich, daß die Eigenwerte des Kernes $K(s,t)$, jeder nach seiner Vielfachheit gezählt, keine Häufungspunkte im Endlichen haben können. Also lassen sie sich ihrem absoluten Betrage nach in eine Reihe anordnen, und wenn es ihrer unendlich viele gibt, so wachsen die absoluten Beträge über alle Grenzen.

§ 6.

Die iterierten Kerne.*)

Wir definieren

$$K^1(s, t) = K(s, t),$$

$$K^2(s, t) = \int_a^b K(s, r)\, K^1(r, t)\, dr,$$

$$K^\nu(s, t) = \int_a^b K(s, r)\, K^{\nu-1}(r, t)\, dr.$$

Denkt man sich dann $K^{n+1}(s, t)$ als n-faches Integral über das Produkt von $n + 1$ Kernen explizite ausgedrückt, so erhellt sofort

$$(1) \qquad K^{\mu+\nu}(s, t) = \int_a^b K^\mu(s, r)\, K^\nu(r, t)\, dr,$$

$$K^\nu(s, t) = K^\nu(t, s).$$

Ferner kann keine der Funktionen $K^n(s, t)$ identisch in s und t verschwinden. Denn wäre

$$K^n(s, t) = 0,$$

so wäre auch

$$K^{n+1}(s, t) = 0,$$

und gemäß (1) wäre auch

$$\int_a^b K^{n_1}(s, r)\, K^{n_1}(r, t)\, dr = 0,$$

wo n_1 die ganze unter den beiden Zahlen $\frac{n}{2}$ und $\frac{n+1}{2}$ bedeutet; mithin wäre auch

$$0 = \int_a^b K^{n_1}(s, r)\, K^{n_1}(r, s)\, dr = \int_a^b (K^{n_1}(s, r))^2\, dr,$$

woraus das in s und t identische Verschwinden von $K^{n_1}(s, t)$ folgen würde. Durch genügend häufige Wiederholung dieses Schlußverfahrens würde sich das identische Verschwinden von $K(s, t)$ im Widerspruch zur Voraussetzung ergeben.

Es sei

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt.$$

Dann ist

$$\varphi(s) = \lambda^n \int_a^b K^n(s, t)\, \varphi(t)\, dt.$$

*) Vergl. H. A. Schwarz l. c. Fredholm l. c. S. 384. Hilbert l. c. S. 244—247.

Es ist also jede Eigenfunktion des Kernes $K(s,t)$ *auch eine Eigenfunktion des Kernes* $K^n(s,t)$. Ist andererseits

$$\psi(s) = c\int_a^b K^n(s,t)\,\psi(t)\,dt,$$

so definiere man die Funktionen $\chi_\nu(s)$ durch die Gleichungen

$$n\chi_\nu(s) = \psi(s) + h_\nu\int_a^b K(s,t)\,\psi(t)\,dt + h_\nu^2\int_a^b K^2(s,t)\,\psi(t)\,dt + \cdots$$
$$+ h_\nu^{n-1}\int_a^b K^{n-1}(s,t)\,\psi(t)\,dt \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots, n),$$

wobei h_ν die n Wurzeln der Gleichung $h^n = c$ durchläuft. Dann ist, weil $\sum_{\nu=1}^{\nu=n} h_\nu^k$ nur dann von Null verschieden ist, wenn k durch n teilbar ist,

$$\psi(s) = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \chi_\nu(s). \tag{2}$$

Ferner erhält man

$$\chi_\nu(s) = h_\nu\int_a^b K(s,t)\,\chi_\nu(t)\,dt.$$

Also sind die $\chi_\nu(s)$, sofern sie nicht identisch verschwinden, was wegen (2) nicht für alle ν der Fall sein kann, Eigenfunktionen des Kernes $K(s,t)$. Da derselbe nach § 4 nur reelle Eigenwerte hat, muß $\chi_\nu(s)$ für alle nicht reellen h_ν identisch verschwinden. Ist folglich n ungerade, und bezeichnet man mit $h_1 = \sqrt[n]{c}$ die reelle Wurzel der Gleichung $h^n = c$, so ist

$$\psi(s) = \sqrt[n]{c}\int_a^b K(s,t)\,\psi(t)\,dt.$$

Ist aber n gerade, so muß $c > 0$ sein, und wenn dann $h_1 = +\sqrt[n]{c}$, $h_2 = -\sqrt[n]{c}$ die beiden reellen Wurzeln der Gleichung $h^n = c$ bezeichnen, so ist

$$\psi(s) = \chi_1(s) + \chi_2(s),$$

$$\chi_1(s) = +\sqrt[n]{c}\int_a^b K(s,t)\,\chi_1(t)\,dt,$$

$$\chi_2(s) = -\sqrt[n]{c}\int_a^b K(s,t)\,\chi_2(t)\,dt,$$

wobei noch eine der beiden Funktionen $\chi_1(s)$ und $\chi_2(s)$ identisch verschwinden kann. *Ist also n ungerade, so ist jede Eigenfunktion von*

$K^n(s, t)$ auch eine Eigenfunktion von $K(s, t)$; ist aber n gerade, so ist jede Eigenfunktion von $K^n(s, t)$ entweder eine Eigenfunktion von $K(s, t)$ oder die Summe zweier solcher.

Jedes vollständige normierte Orthogonalsystem des Kernes $K(s, t)$ ist auch ein solches für den Kern $K^n(s, t)$.

§ 7.

Fundamentalsatz.

Zu jedem nicht identisch verschwindenden Kerne $K(s, t)$ gibt es mindestens eine Eigenfunktion. Den Beweis dieses Fundamentalsatzes lasse ich, um hier den Ideengang nicht zu unterbrechen, in § 11 nachfolgen.

§ 8.

Entwicklung des Kernes und seiner Iterationen.*)

Es mögen die Funktionen $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \cdots, \varphi_\nu(s), \cdots$ ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem des Kernes $K(s, t)$ bilden, denen die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\nu, \cdots$ der absoluten Größe nach geordnet entsprechen mögen. *Wenn dann die Reihe*

$$\sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu}$$

gleichmäßig für $a \leqq s \leqq b,\ a \leqq t \leqq b$ *konvergiert, so ist*

$$K(s, t) = \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu}; \tag{3}$$

insbesondere ergibt sich hieraus, daß diese Gleichung stets gültig ist, wenn die Anzahl der Eigenfunktionen des vollständigen normierten Orthogonalsystems endlich ist.

Beweis: Wir setzen:

$$K(s, t) - \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu} = Q(s, t).$$

Dann ist $Q(s, t)$ auch eine stetige symmetrische Funktion von s und t, und es ist

$$\int_a^b Q(s, t)\,\varphi_\nu(t)\,dt = 0 \tag{4}$$

für alle Werte von ν. Wäre nun $Q(s, t)$ nicht identisch Null, so müßte

*) Vergl. Hilbert l. c. S. 69—72. — Stekloff l. c. S. 404—425.

es nach dem Fundamentalsatz des vorhergehenden Paragraphen eine stetige Funktion $\psi(s)$ geben, so daß

$$\psi(s) = c\int_a^b Q(s, t)\, \psi(t)\, dt$$

ist. Aus (4) folgt, daß für alle Werte von ν

$$\int_a^b \psi(s)\, \varphi_\nu(s)\, ds = 0, \tag{5}$$

mithin ist auch

$$\int_a^b Q(s, t)\, \psi(t)\, dt = \int_a^b K(s, t)\, \psi(t)\, dt,$$

also ist

$$\psi(s) = c\int_a^b K(s, t)\, \psi(t)\, dt,$$

$\psi(s)$ wäre also eine Eigenfunktion des Kernes $K(s, t)$, welche wegen ihrer durch Gleichung (5) gegebenen Orthogonalität zu allen Funktionen $\varphi_\nu(s)$ sich nicht durch eine endliche Anzahl von ihnen linear homogen mit konstanten Koeffizienten darstellen ließe — im Widerspruch zur Voraussetzung, daß die Funktionen $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \cdots, \varphi_\nu(s), \cdots$ ein *vollständiges* normiertes Orthogonalsystem des Kernes $K(s, t)$ bilden. Also ist $Q(s, t)$ identisch gleich Null, was zu beweisen war.

Hieraus schließen wir: *es ist stets*

$$K^4(s, t) = \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)\, \varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu^4} \tag{6}$$

und die Reihe auf der rechten Seite konvergiert absolut und gleichmäßig. Denn da nach § 6 die Funktionen $\varphi_\nu(s)$ auch ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem des Kernes $K^4(s, t)$ bilden, denen die Eigenwerte λ_ν^4 entsprechen, so folgt unsere Behauptung aus der eben bewiesenen, wenn nur die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihe rechts dargetan werden kann. Es ist aber

$$\sum_{\nu=n}^{\nu=n+m} \left| \frac{\varphi_\nu(s)\, \varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu^4} \right| \leqq \frac{1}{2\lambda_n^2} \left(\sum_{\nu=n}^{\nu=n+m} \frac{(\varphi_\nu(s))^2}{\lambda_\nu^2} + \sum_{\nu=n}^{n=n+m} \frac{(\varphi_\nu(t))^2}{\lambda_\nu^2} \right)$$

und da nach der Besselschen Ungleichung

$$\int_a^b (K(s, t))^2\, dt \geqq \sum_{\nu=n}^{\nu=n+m} \left(\int_a^b K(s, t)\, \varphi_\nu(t)\, dt \right)^2 = \sum_{\nu=n}^{\nu=n+m} \frac{(\varphi_\nu(s))^2}{\lambda_\nu^2},$$

so folgt

$$\sum_{\nu=n}^{\nu=n+m} \left| \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu^4} \right| \leqq \frac{1}{\lambda_n^2} \int_a^b (K(s,t))^2\,dt,$$

woraus die zu beweisende absolute und gleichmäßige Konvergenz sich ergibt.

§ 9.

Entwicklung willkürlicher Funktionen.*)

Es mögen wie im vorigen Paragraphen die Funktionen $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \cdots, \varphi_\nu(s), \cdots$ ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem des Kernes $K(s,t)$ bilden, denen die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\nu, \cdots$ dem absoluten Betrage nach geordnet entsprechen mögen. Ist dann $h(s)$ eine stetige Funktion, so daß

$$\int_a^b K(s,t)\,h(t)\,dt = 0$$

ist, dann ergibt sich durch Multiplikation dieser Gleichung mit $\varphi_\nu(s)\,ds$ und Integration von a bis b die für alle ν gültige Gleichung

$$\int_a^b h(s)\,\varphi_\nu(s)\,ds = 0.$$

Umgekehrt folgt aber auch aus dem Bestehen dieser Gleichungen für alle ν die Gleichung

$$\int_a^b K(s,t)\,h(t)\,dt = 0.$$

Beweis. Multipliziert man die im vorigen Paragraphen bewiesene Gleichung

$$K^4(s,t) = \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu^4}$$

mit $h(s)\,h(t)\,ds\,dt$ und integriert nach s und t von a bis b, so folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b\!\!\int_a^b K^4(s,t)\,h(s)\,h(t)\,ds\,dt \\ &= \int_a^b dr \int_a^b K^2(s,r)\,h(s)\,ds \int_a^b K^2(t,r)\,h(t)\,dt \\ &= \int_a^b dr \left(\int_a^b K^2(s,r)\,h(s)\,ds\right)^2; \end{aligned}$$

---

*) Vergl. Hilbert l. c. S. 72—78. Stekloff l. c. S. 404—425.

29*

mithin ist identisch in r

$$\int_a^b K^2(s, r)\, h(s)\, ds = 0;$$

daher ist auch

$$0 = \int_a^b\int_a^b K^2(s, t)\, h(s)\, h(t)\, ds\, dt,$$

und durch Wiederholung des eben angewandten Schlußverfahrens ergibt sich identisch in r

$$\int_a^b K(r, s)\, h(s)\, ds = 0,$$

was zu beweisen war.

Es sei die stetige Funktion $g(s)$ darstellbar durch die Gleichung

$$g(s) = \int_a^b K(s, t)\, p(t)\, dt,$$

wo $p(t)$ eine stetige Funktion bedeutet, dann ist

$$g(s) = \sum_\nu \varphi_\nu(s) \int_a^b g(t)\, \varphi_\nu(t)\, dt = \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu} \int_a^b p(t)\, \varphi_\nu(t)\, dt$$

$$= \sum_\nu \int_a^b K(s, t)\, \varphi_\nu(t)\, dt \int_a^b p(t)\, \varphi_\nu(t)\, dt,$$

und die Reihe rechts konvergiert absolut und gleichmäßig.

Beweis. Aus der dritten Darstellungsform ihres allgemeinen Gliedes erlaubt uns der in § 2 bewiesene Konvergenzsatz die behauptete absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihe abzulesen.

Setzt man

$$g(s) - \sum_\nu \varphi_\nu(s) \int_a^b g(t)\, \varphi_\nu(t)\, dt = h(s),$$

so ist für alle ν

$$(7) \qquad \int_a^b h(s)\, \varphi_\nu(s)\, ds = 0$$

und mithin nach dem eben bewiesenen Theorem

$$(8) \qquad \int_a^b K(s, t)\, h(t)\, dt = 0.$$

Nun ist

$$\int_a^b (h(s))^2\, ds = \int_a^b h(s)\, g(s)\, ds - \sum_\nu \int_a^b h(s)\, \varphi_\nu(s)\, ds \int_a^b g(t)\, \varphi_\nu(t)\, dt$$

und da wegen der Gleichungen (7) die Summe rechts verschwindet, so ist

$$\int_a^b (h(s))^2\,ds = \int_a^b h(s)\,g(s)\,ds = \int_a^b p(r)\,dr \int_a^b K(s,r)\,h(s)\,ds = 0$$

wegen Gleichung (8). Also ist $h(s)$ identisch gleich Null, was zu beweisen war.

Es mögen $p(s)$ und $q(s)$ zwei stetige Funktionen bedeuten; dann ergibt sich durch Multiplikation der eben bewiesenen Gleichung mit $q(s)ds$ und Integration von a bis b

$$\int_a^b \int_a^b K(s,t)\,q(s)\,p(t)\,ds\,dt = \sum_\nu \frac{1}{\lambda_\nu} \int_a^b q(s)\,\varphi_\nu(s)\,ds \int_a^b p(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt.$$

Dies ist die Fundamentalformel von Hilbert, welche er aus der kanonischen Zerlegung einer quadratischen Form durch Grenzübergang gewinnt, und aus welcher er dann die Sätze des § 8 und das erste Theorem des § 9 für alle Kerne und das Entwicklungstheorem für „allgemeine" Kerne ableitet.

§ 10.

Die inhomogene lineare Integralgleichung.

Es sei $f(s)$ eine gegebene stetige Funktion; es soll eine stetige Funktion $\varphi(s)$ bestimmt werden, so daß

$$(9) \qquad f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt$$

ist. Wir setzen

$$\varphi(s) = f(s) + g(s).$$

Dann ist

$$(10) \qquad g(s) = \lambda \int_a^b K(s,t)\,(f(t) + g(t))\,dt,$$

es ist folglich nach dem Entwicklungssatze des vorigen Paragraphen

$$(11) \qquad g(s) = \sum_\nu \varphi_\nu(s) \int_a^b g(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt,$$

wo $\varphi_\nu(s)$ ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem des Kernes $K(s,t)$ durchläuft, und die Reihe rechts absolut und gleichmäßig konvergiert. Multipliziert man (10) mit $\varphi_\nu(s)\,ds$ und integriert, so folgt

$$\int_a^b g(s)\,\varphi_\nu(s)\,ds = \lambda\int_a^b (f(t)+g(t))\,dt\int_a^b K(s,t)\,\varphi_\nu(s)\,ds,$$

(12) $$\int_a^b g(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt = \frac{\lambda}{\lambda_\nu}\int_a^b f(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt + \frac{\lambda}{\lambda_\nu}\int_a^b g(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt,$$

$$\int_a^b g(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt = \frac{\lambda}{\lambda_\nu-\lambda}\int_a^b f(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt,$$

und also gemäß (11)

(13) $$\varphi(s) = f(s) + \lambda\sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu-\lambda}\int_a^b f(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt.$$

Umgekehrt konvergiert aber auch, wenn λ von allen λ_ν verschieden ist, die letzte Reihe nach § 2 absolut und gleichmäßig, weil

$$\frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu-\lambda}\int_a^b f(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt = \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\lambda_\nu}}\int_a^b K(s,t)\,\varphi_\nu(t)\,dt\int_a^b f(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt$$

ist, und es stellt die rechte Seite der Gleichung (13) eine Lösung der Gleichung (9) dar, wie sich durch Einführung derselben in Gleichung (9) bei Berücksichtigung der aus dem Entwicklungssatz des vorigen Paragraphen folgenden Gleichung

$$\int_a^b K(s,t)\,f(t)\,dt = \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu}\int_a^b f(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt$$

ergibt. *Wir sehen also, daß, wenn λ kein Eigenwert des Kernes $K(s,t)$ ist, die Gleichung* (9) *immer eine und nur eine durch die Gleichung* (13) *gegebene Lösung hat. Ist aber λ ein k-facher Eigenwert, so ergibt die Gleichung* (12), *daß, damit die Gleichung* (9) *eine Lösung hat, $f(s)$ den k Gleichungen*

$$\int_a^b f(t)\,\varphi_{n+\nu}(t)\,dt = 0$$

genügen muß, wo $n+1, n+2, \cdots, n+k$ die Indizes der zum betreffenden k-fachen Eigenwerte gehörigen Eigenfunktionen des vollständigen normierten Orthogonalsystems bedeuten; dann ist, wie die Einführung in die Gleichung (9) *zeigt,*

$$\varphi(s) = f(s) + a_1\varphi_{n+1}(s) + a_2\varphi_{n+2}(s) + \cdots + a_k\varphi_{n+k}(s)$$
$$+ \lambda\sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu-\lambda}\int_a^b f(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt,$$

wo v alle Indizes des Orthogonalsystems mit Ausnahme von $n+1, n+2, \cdots, n+k$ durchläuft, und $a_1, a_2, \cdots, a_k$ beliebige Konstanten bedeuten. Dies sind für den symmetrischen Kern die wesentlichsten derjenigen Sätze, welche von Fredholm durch seine Reihen bewiesen worden sind.

§ 11.

Beweis des Fundamentalsatzes.*)

Jetzt gehen wir zu dem in § 7 schuldig gebliebenen Beweise des Fundamentalsatzes über, daß es zu jedem Kerne mindestens eine Eigenfunktion gibt.

Wir setzen

$$U_1 = \int_a^b K^1(s,s)\,ds,\quad U_2 = \int_a^b K^2(s,s)\,ds, \cdots, U_n = \int_a^b K^n(s,s)\,ds, \cdots.$$

Dann folgt aus § 6 (1)

$$U_{\mu+\nu} = \int_a^b\int_a^b K^\mu(s,r)\,K^\nu(s,r)\,dr\,ds, \tag{14}$$

$$U_{2\nu} = \int_a^b\int_a^b (K^\nu(s,r))^2\,dr\,ds. \tag{15}$$

Da nun $K^\nu(s,t)$, wie in § 6 gezeigt, nicht identisch verschwinden kann, so folgt, daß alle $U_{2\nu}$ von Null verschieden und positiv sind. Es sei $n \geqq 2$; setzt man dann in (14) $n+1$ für μ und $n-1$ für ν und wendet die in § 1 gegebene Schwarzsche Ungleichung an, welche gemäß der Schlußbemerkung des ersten Kapitels auch für vielfache Integrale ihre Gültigkeit behält, so folgt

$$U_{2n}^2 \leqq U_{2n-2} \cdot U_{2n+2},$$

$$\frac{U_{2n}}{U_{2n-2}} \leqq \frac{U_{2n+2}}{U_{2n}}.$$

Setzt man nun

$$\frac{U_{2n+2}}{U_{2n}} = c_n, \tag{16}$$

so ist also

$$c_{n-1} \leqq c_n. \tag{17}$$

Nun ist nach § 6 Gleichung (1)

*) Vergl. H. A. Schwarz l. c.

$$K^{\mu+\nu}(s,t)=\int_a^b K^\mu(s,r)\,K^\nu(r,t)\,dr,$$

$$(K^{\mu+\nu}(s,t))^2\leqq\int_a^b(K^\mu(s,r))^2\,dr\int_a^b(K^\nu(t,r))^2\,dr,$$

$$\int_a^b\!\!\int_a^b(K^{\mu+\nu}(s,t))^2\,ds\,dt\leqq\int_a^b\!\!\int_a^b(K^\mu(s,r))^2\,dr\,ds\cdot\int_a^b\!\!\int_a^b(K^\nu(t,r))^2\,dr\,dt.$$

Also nach (15)

$$U_{2\mu+2\nu}\leqq U_{2\mu}\cdot U_{2\nu},$$

$$U_{2\nu}\geqq\frac{U_{2\mu+2\nu}}{U_{2\mu}}$$

und wegen (16) und (17)

(18) $$U_{2\nu}\geqq c_\mu^\nu.$$

Bei Berücksichtigung von (17) ergibt sich hieraus, daß

$$\operatorname*{Lim}_{\mu=\infty} c_\mu=c,$$

wo c eine endliche positive Größe bedeutet und

(19) $$\frac{U_{2\nu}}{c^\nu}\geqq 1$$

ist.

Aus (16) folgt, weil $c_n\leqq c$ ist, daß

(20) $$\frac{U_{2n+2}}{c^{n+1}}\leqq\frac{U_{2n}}{c^n}.$$

Aus (19) und (20) folgt, daß

(21) $$\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\frac{U_{2n}}{c^n}=U$$

ist, wo U eine endliche Zahl $\geqq 1$ ist.

Nun ist

$$\frac{K^{2n+2m}(s,t)}{c^{n+m}}-\frac{K^{2n}(s,t)}{c^n}$$

$$=\frac{1}{c}\int_a^b\!\!\int_a^b K(s,r_1)\left\{\frac{K^{2n+2m-2}(r_1,r_2)}{c^{n+m-1}}-\frac{K^{2n-2}(r_1,r_2)}{c^{n-1}}\right\}K(r_2,t)\,dr_1\,dr_2,$$

$$\left(\frac{K^{2n+2m}(s,t)}{c^{n+m}}-\frac{K^{2n}(s,t)}{c^n}\right)^2\leqq\frac{1}{c^2}\int_a^b\!\!\int_a^b(K(s,r_1)K(r_2,t))^2\,dr_1\,dr_2\times$$

$$\times\int_a^b\!\!\int_a^b dr_1\,dr_2\left\{\left(\frac{K^{2n+2m-2}(r_1,r_2)}{c^{n+m-1}}\right)^2-2\,\frac{K^{2n+2m-2}(r_1,r_2)\,K^{2n-2}(r_1,r_2)}{c^{2n+m-2}}+\left(\frac{K^{2n-2}(r_1,r_2)}{c^{n-1}}\right)^2\right\}.$$

Bei Berücksichtigung von (14) und (15) ergibt sich hieraus

$$\left(\frac{K^{2n+2m}(s,t)}{c^{n+m}} - \frac{K^{2n}(s,t)}{c^n}\right)^2 \leqq \frac{1}{c^2}\int_a^b (K(s,r_1))^2 dr_1 \int_a^b (K(t,r_2))^2 dr_2 \times$$
$$\times \left\{\frac{U_{4n+4m-4}}{c^{2n+2m-2}} - 2\,\frac{U_{4n+2m-4}}{c^{2n+m-2}} + \frac{U_{4n-4}}{c^{2n-2}}\right\}.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite wird aber wegen (21) mit wachsendem n, unabhängig von m, s und t, unendlich klein. Hieraus folgt, daß $\frac{K^{2n}(s,t)}{c^n}$ mit wachsendem n gleichmäßig gegen eine mithin stetige Funktion $u(s,t)$ konvergiert, welche wegen

$$\int_a^b u(s,s)\,ds = \lim_{n=\infty} \int_a^b \frac{K^{2n}(s,s)\,ds}{c^n} = \lim_{n=\infty} \frac{U_{2n}}{c^n} = U \geqq 1$$

nicht identisch in s und t verschwinden kann. Ferner folgt aus

$$\frac{K^{2n+2}(s,t)}{c^{n+1}} = \frac{1}{c}\int_a^b K^2(s,r)\,\frac{K^{2n}(r,t)}{c^n}\,dr$$

$$u(s,t) = \frac{1}{c}\int_a^b K^2(s,r)\,u(r,t)\,dr.$$

Wählt man nun für t einen solchen Wert t_1, daß $u(s,t_1)$ nicht identisch in s verschwindet, so ist gemäß der letzten Gleichung $u(s,t_1)$ eine Eigenfunktion des Kernes $K^2(s,t)$. Daraus folgt aber nach § 6, daß auch $K(s,t)$ eine Eigenfunktion haben muß, was zu beweisen war.

§ 12.

Erweiterung der Voraussetzungen.

Auch Unstetigkeiten des symmetrischen Kernes können in einem durch folgende Voraussetzungen beschränkten Umfange zugelassen werden.

I. Die Punktmenge in der s,t-Ebene, welche aus den Unstetigkeitsstellen von $K(s,t)$ gebildet wird und daher in der s,t-Ebene abgeschlossen ist, soll auf jeder Geraden $s = \text{const.}$ den äußeren Inhalt Null haben.

II. $\int_a^b (K(s,t))^2 dt$ soll für $a \leqq s \leqq b$ endlich und bestimmt sein und eine stetige Funktion von s darstellen.

Man teile das quadratische Definitionsgebiet von $K(s,t)$ durch Parallelen zu den Seiten in 2^{2n} gleiche Quadrate und bezeichne mit Q_n

das aus der Gesamtheit derjenigen Quadrate gebildete Gebiet, welche im Inneren oder auf der Umgrenzung Unstetigkeitsstellen von $K(s,t)$ enthalten. Dann kann aus I und II ohne Schwierigkeit das Ergebnis bewiesen werden: zu jeder beliebig kleinen positiven Größe ε gibt es eine Zahl n, so daß für alle Geraden $s = \text{const.}$ sowohl die Gesamtlänge der auf ihnen von Q_n überdeckten Gebiete als auch der Wert des über die Gesamtheit dieser Gebiete erstreckten Integrals

$$\int_{Q_n} (K(s,t))^2\, dt^{*)}$$

$< \varepsilon$ sind.

Hieraus folgt zunächst, daß auch für alle Geraden $s = \text{const.}$

$$\int_{Q_n} |K(s,t)|\, dt < \varepsilon$$

ist; denn gemäß der Schwarzschen Ungleichung ist

$$\Big(\int_{Q_n} |K(s,t)|\, dt\Big)^2 \leqq \int_{Q_n} (K(s,t))^2 dt \cdot \int_{Q_n} dt \leqq \varepsilon^2.$$

Aus den bewiesenen Ungleichungen ergibt sich leicht: Der planare Inhalt der aus den Unstetigkeitsstellen von $K(s,t)$ bestehenden Punktmenge ist gleich Null. Für jede stetige Funktion $m(t)$ sind $\int_a^b (K(s,t))\, m(t)\, dt$ und $\int_a^b (K(s,t))^2 m(t)\, dt$ für $a \leqq s \leqq b$ endlich und bestimmt und stellen eine stetige Funktion von s dar. Ähnlich beweist man leicht bei Anwendung der Schwarzschen Ungleichung auf das Integral über das Produkt der beiden Kerne, daß auch

$$K^2(s,t) = \int_a^b K(s,r)\, K(r,t)\, dr$$

für $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ endlich und bestimmt ist und eine stetige Funktion von s und t darstellt, welche wegen

$$K^2(s,s) = \int_a^b (K(s,r))^2\, dr$$

nur dann identisch verschwinden kann, wenn $K(s,t)$ in seinem ganzen Stetigkeitsbereich identisch verschwindet.

Diese aus den Voraussetzungen I und II gewonnenen Folgerungen gestatten leicht alle in den §§ 4, 5, 6 vorkommenden Operationen wie namentlich die häufigen Vertauschungen der Integrationsordnung auch für

---

*) Es kann statt der Voraussetzungen I und II auch I und die Gültigkeit dieser Ungleichung gefordert werden, aus welchen Voraussetzungen sich leicht II ergibt.

den Fall des unstetigen Kernes zu legitimieren.*) Die Sätze und Beweise der §§ 4, 5, 6 bleiben daher ungeändert gültig. Der in § 7 ausgesprochene Fundamentalsatz bleibt bestehen, weil $K^2(s, t)$ als stetiger Kern Eigenfunktionen haben muß und hieraus gemäß § 6 die Existenz von Eigenfunktionen von $K(s, t)$ folgt.

Im § 8 muß die Gültigkeit der Gleichung (3) auf den Stetigkeitsbereich des Kernes beschränkt werden, während die Gleichung (6) unverändert gültig bleibt. In den §§ 9 und 10 bleiben alle Sätze und Beweise unverändert bestehen.

Es ist auch zulässig, daß I und II längs einer endlichen Anzahl von Geraden $s = \text{const.}$ unerfüllt sind, indem der Kern auf beiden Rändern dieser verschiedene Wertefolgen annimmt, I und II müssen dann aber in jedem der Rechtecke, in welche das Definitionsquadrat des Kernes durch die genannten Geraden zerlegt wird, *einschließlich* der Ränder postuliert werden, und es müssen an den betreffenden Werten von s beiden Eigenfunktionen sowie der Lösungsfunktionen der inhomogenen Integralgleichung Sprünge zugelassen werden.

Ferner kann der Gültigkeitsbereich des in § 9 erhaltenen Entwicklungssatzes noch dahin erweitert werden, daß die Voraussetzung der Stetigkeit der Funktion $p(t)$ durch die Voraussetzung der Integrabilität und der Integrabilität ihres Quadrates ersetzt wird.

Ebenso ändert sich nichts in den Sätzen und Beweisen dieses Kapitels, wenn $s, t, r, \cdots,$ Punkte eines n-dimensionalen, ganz im Endlichen liegenden, aus einer endlichen Anzahl analytischer Stücke bestehenden Gebildes in einem $(n + m)$-dimensionalen Raum bedeuten und $ds, dt, dr, \cdots$ die entsprechenden Elemente.

Auch in diesem Fall bestimmen die Bedingungen I und II einen Bereich der Zulässigkeit von Unstetigkeiten.

Drittes Kapitel.

Über die lineare unsymmetrische Integralgleichung.

§ 13.

Die inhomogene Integralgleichung.

Es seien der nicht mehr als symmetrisch vorausgesetzte Kern $K(s, t)$ und $f(s)$ für $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ als reelle stetige Funktionen definiert. Gesucht wird eine reelle stetige Funktion $\varphi(s)$, welche die Integralgleichung

---

*) Siehe z. B. Jordan, Cours d'Analyse Bd. II, Cap. II, II.

$$f(s) = \varphi(s) - \int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt \tag{22}$$

erfüllt.

Setzt man

$$g(t) = \chi(t) - \int_a^b K(s,t)\,\chi(s)\,ds, \tag{23}$$

so ergeben sich die Identitäten

$$g(s) - \int_a^b K(s,t)\,g(t)\,dt = \chi(s) - \int_a^b Q(s,t)\,\chi(t)\,dt, \tag{24}$$

$$\int_a^b (g(s))^2\,ds = \int_a^b \chi(s)\left(\chi(s) - \int_a^b Q(s,t)\,\chi(t)\,dt\right)ds, \tag{25}$$

wo

$$Q(s,t) = K(s,t) + K(t,s) - \int_a^b K(s,r)\,K(t,r)\,dr$$

und mithin *symmetrisch* ist.

Man bezeichne jede von Null verschiedene reelle stetige Funktion, welche, für $\varphi(s)$ substituiert, die rechte Seite der Gleichung (22) identisch verschwinden läßt, als *Nulllösung in s des Kernes* und jede von Null verschiedene reelle stetige Funktion, welche für $\chi(t)$ substituiert die rechte Seite der Gleichung (23) identisch verschwinden läßt, als *Nulllösung in t*. Gemäß dem ersten Theorem des § 5 für $\lambda = 1$, bei dessen Beweis von der Voraussetzung der Symmetrie des Kernes kein Gebrauch gemacht wird, sind die Anzahlen der *linearunabhängigen* Nulllösungen in s sowie in t *endlich*. Ist $\chi(t)$ eine Nulllösung in t, so folgt aus (23) und (24), daß $\chi(t)$ eine zum Eigenwerte $\lambda = 1$ gehörige Eigenfunktion des symmetrischen Kernes $Q(s,t)$ ist; aus (25) und (23) folgt das umgekehrte. Mithin erhält man die Gesamtheit der ersteren Funktionen, indem man die mit ihr als *identisch* erwiesene Gesamtheit der letzteren bildet.

Nun ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit der Gleichung (22) *die Orthogonalität von $f(s)$ zu allen eventuell vorhandenen Nulllösungen in t, und aus einer Lösung ergeben sich dann alle durch additive Hinzufügung aller Nulllösungen in s**).

Denn die Notwendigkeit dieser Bedingung erhellt vorweg bei Multiplikation der Gleichung (22) mit einer Nulllösung in t und Integration; und daß die Bedingung hinreichend ist, zeigt die unmittelbare Anwendung der Auflösungstheoreme des § 10 auf die symmetrische Integralgleichung

*) Dieses Theorem ist auch zuerst von Fredholm l. c. bewiesen worden.

$$f(s) = \chi(s) - \int_a^b Q(s,t)\,\chi(t)\,dt,$$

auf welche gemäß (24) die Gleichung (22) durch die Substitution

$$\varphi(t) = \chi(t) - \int_a^b K(s,t)\,\chi(s)\,ds$$

zurückgeführt wird.

§ 14.

Begriff der Eigenfunktion.

Es sei $K(s,t)$ eine für $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ definierte reelle stetige Funktion, die nicht als symmetrisch vorausgesetzt werden soll. Wenn dann die beiden reellen oder komplexen stetigen nicht identisch verschwindenden Funktionen $\varphi(s)$ und $\psi(s)$ den Gleichungen

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s,t)\,\psi(t)\,dt \tag{26}$$

$$\psi(s) = \lambda \int_a^b K(t,s)\,\varphi(t)\,dt \tag{27}$$

genügen, so sollen sie als ein *Paar zum betreffenden Eigenwert λ gehöriger adjungierter Eigenfunktionen des Kernes* $K(s,t)$ bezeichnet werden.

Wir definieren nun

$$\overline{K}(s,t) = \int_a^b K(s,r)\,K(t,r)\,dr \tag{28}$$

$$\underline{K}(s,t) = \int_a^b K(r,s)\,K(r,t)\,dr. \tag{29}$$

Dann sind $\overline{K}(s,t)$ und $\underline{K}(s,t)$ symmetrisch.

Führt man (27) in (26) und (26) in (27) ein, so ergeben sich die Gleichungen

$$\varphi(s) = \lambda^2 \int_a^b \overline{K}(s,t)\,\varphi(t)\,dt \tag{30}$$

$$\psi(s) = \lambda^2 \int_a^b \underline{K}(s,t)\,\psi(t)\,dt. \tag{31}$$

Wäre nun

$$\varphi(s) = \varphi_1(s) + i\varphi_2(s) \quad \text{und} \quad \psi(s) = \psi_1(s) + i\psi_2(s),$$

so würde, da λ^2 als Eigenwert des symmetrischen Kernes $\overline{K}(s,t)$, wie in § 4 gezeigt, reell sein muß, aus (30) folgen

$$\varphi_1(s) = \lambda^2 \int_a^b \overline{K}(s,t)\, \varphi_1(t)\, dt$$

$$\int_a^b (\varphi_1(s))^2\, ds = \lambda^2 \int_a^b \int_a^b \varphi_1(s)\, \overline{K}(s,t)\, \varphi_1(t)\, ds\, dt$$

$$= \lambda^2 \int_a^b dr \int_a^b K(s,r)\, \varphi_1(s)\, ds \int_a^b K(t,r)\, \varphi_1(t)\, dt$$

$$\int_a^b (\varphi_1(s))^2 ds = \lambda^2 \int_a^b dr \left(\int_a^b K(s,r)\, \varphi_1(s)\, ds\right)^2.$$

Ebenso ergibt sich

$$\int_a^b (\varphi_2(s))^2\, ds = \lambda^2 \int_a^b dr \left(\int_a^b K(s,r)\, \varphi_2(s)\, ds\right)^2.$$

Da nun in mindestens einer dieser beiden Gleichungen nicht beide Seiten identisch verschwinden können, so folgt, *daß* λ^2 *positiv und mithin* λ *reell ist.* Es müßten mithin $\varphi_1(s)$ und $\psi_1(s)$, $\varphi_2(s)$ und $\psi_2(s)$ je ein Paar zum Eigenwerte λ gehöriger adjungierter Eigenfunktionen des Kernes $K(s,t)$ bilden. Aus diesem Grunde sollen im folgenden nur *reelle* Paare von adjungierten Eigenfunktionen betrachtet und unter dieser Bezeichnung verstanden werden. Indem wir über das Vorzeichen von $\psi(s)$ geeignet verfügen, können wir die Eigenwerte eines unsymmetrischen Kernes sämtlich als *positiv* voraussetzen.

Aus (30) folgt, wenn $\psi(s)$ durch (27) definiert wird, (26) und durch Einführung von (26) in (27) (31); ebenso folgt aus (31), wenn $\varphi(s)$ durch (26) definiert wird, (27) und durch Einführung von (27) in (26) (30). *Es entspricht also jeder Eigenfunktion des symmetrischen Kernes* $\overline{K}(s,t)$ *eine Eigenfunktion des symmetrischen Kernes* $\underline{K}(s,t)$ *und umgekehrt — und zwar so, daß das betreffende Funktionenpaar ein Paar adjungierter Eigenfunktionen des unsymmetrischen Kernes* $K(s,t)$ *bildet.*

§ 15.

Das vollständige normierte Orthogonalsystem eines unsymmetrischen Kernes.

Die adjungierten Funktionen eines vollständigen normierten Orthogonalsystems des Kernes $\overline{K}(s,t)$ *bilden wieder ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem des Kernes* $\underline{K}(s,t)$ *und umgekehrt.*

Beweis.

$$\int_a^b \psi_\mu(r)\,\psi_\nu(r)\,dr = \int_a^b dr\,\lambda_\mu \int_a^b K(t,r)\,\varphi_\mu(t)\,dt\,\lambda_\nu \int_a^b K(s,r)\,\varphi_\nu(s)\,ds$$

$$= \lambda_\mu \lambda_\nu \int_a^b \overline{K}(s,t)\,\varphi_\mu(t)\,\varphi_\nu(s)\,ds\,dt;$$

wegen (30) ergibt sich hieraus

$$\int_a^b \psi_\mu(s)\,\psi_\nu(s)\,ds = \frac{\lambda_\nu}{\lambda_\mu} \int_a^b \varphi_\mu(s)\,\varphi_\nu(s)\,ds.$$

Bilden also die Funktionen $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \cdots, \varphi_n(s), \cdots$ ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem des Kernes $\overline{K}(s,t)$, so folgt aus der letzten Gleichung, daß auch die adjungierten Funktionen $\psi_1(s), \psi_2(s), \cdots, \psi_n(s), \cdots$ sämtlich normiert und zueinander orthogonal sind. Es sei nun $\psi(s)$ eine Eigenfunktion von $\underline{K}(s,t)$ und $\varphi(s)$ ihre adjungierte, also eine Eigenfunktion von $\overline{K}(s,t)$. Dann ist gemäß Voraussetzung

$$\varphi(s) = \sum_\varrho c_\varrho \varphi_\varrho(s),$$

wo ϱ eine endliche Anzahl von Indizes durchläuft, und nach § 5 sämtliche $\varphi_\varrho(s)$ zum selben Eigenwerte gehören wie $\varphi(s)$. Dann folgt wegen der Gleichungen

$$\psi_\varrho(s) = \lambda \int_a^b K(t,s)\,\varphi_\varrho(t)\,dt,$$

$$\psi(s) = \lambda \int_a^b K(t,s)\,\varphi(t)\,dt$$

das Resultat

$$\psi(s) = \sum_\varrho c_\varrho \psi_\varrho(s).$$

Also bilden die Funktionen $\psi_1(s), \psi_2(s), \cdots, \psi_n(s), \cdots$ auch ein *vollständiges* normiertes Orthogonalsystem des Kernes $\underline{K}(s,t)$, was zu beweisen war; die Umkehrung ergibt sich in analoger Weise. Unter einem *vollständigen normierten Orthogonalsystem des unsymmetrischen Kernes $K(s,t)$ wollen wir das Paar zweier solcher adjungierter vollständiger normierter Orthogonalsysteme der Kerne $\overline{K}(s,t)$ und $\underline{K}(s,t)$ verstehen.*

§ 16.

Entwicklung willkürlicher Funktionen.

Es mögen die Funktionen

$$\varphi_1(s),\ \varphi_2(s),\cdots,\varphi_n(s),\cdots$$
$$\psi_1(s),\ \psi_2(s),\cdots,\psi_n(s),\cdots,$$

denen die Eigenwerte $\lambda_1,\ \lambda_2,\cdots,\lambda_n,\cdots$ der Größe nach geordnet entsprechen mögen, ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem des unsymmetrischen Kernes $K(s,t)$ in der Definition des vorigen Paragraphen bilden. Dann gelten folgende Sätze:

Wenn identisch in s

$$\int_a^b K(t,s)\,h(t)\,dt=0$$

ist, wo $h(s)$ *eine stetige Funktion bedeutet, so ist auch für jedes* ν

$$\int_a^b h(s)\,\varphi_\nu(s)\,ds=0,$$

wie die Multiplikation der Gleichung (26) *mit* $h(s)\,ds$ *und Integration von* a *bis* b *ergibt; ebenso ist, wenn identisch in* s

$$\int_a^b K(s,t)\,h(t)\,dt=0$$

ist, für jedes ν

$$\int_a^b h(s)\,\psi_\nu(s)\,ds=0.$$

Umgekehrt gilt aber auch, wenn für jedes ν

$$\int_a^b h(s)\,\varphi_\nu(s)\,ds=0$$

ist, die Gleichung

$$\int_x^b K(t,s)\,h(t)\,dt=0,$$

und wenn für jedes ν

$$\int_a^b h(s)\,\psi_\nu(s)\,ds=0$$

ist, die Gleichung

$$\int_a^b K(s,t)\,h(t)\,dt=0.$$

Beweis. Wir beweisen nur die erste Behauptung, da der Beweis der zweiten derselbe ist. Da $h(s)$ gemäß Voraussetzung zu allen Funktionen eines vollständigen normierten Orthogonalsystems des symmetrischen Kernes $\overline{K}(s,t)$ orthogonal ist, so folgt nach § 9, daß

$$\int_a^b \overline{K}(s,t)\,h(t)\,dt = 0,$$

$$0 = \int_a^b \overline{K}(s,t)\,h(s)\,h(t)\,ds\,dt = \int_a^b dr \int_a^b K(s,r)\,h(s)\,ds \int_a^b K(t,r)\,h(t)\,dt$$

$$= \int_a^b dr \left(\int_a^b K(s,r)\,h(s)\,ds\right)^2;$$

folglich ist identisch in r

$$\int_a^b K(s,r)\,h(s)\,ds = 0,$$

was zu beweisen war.

Wenn

$$g(s) = \int_a^b K(s,t)\,h(t)\,dt$$

ist, wo $h(t)$ eine stetige Funktion bedeutet, so ist

$$g(s) = \sum_\nu \varphi_\nu(s) \int_a^b g(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt = \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu} \int_a^b h(t)\,\psi_\nu(t)\,dt$$

$$= \sum_\nu \int_a^b K(s,t)\,\psi_\nu(t)\,dt \int_a^b h(t)\,\psi_\nu(t)\,dt;$$

wenn

$$g(s) = \int_a^b K(t,s)\,h(t)\,dt$$

ist, so ist

$$g(s) = \sum_\nu \psi_\nu(s) \int_a^b g(t)\,\psi_\nu(t)\,dt = \sum_\nu \frac{\psi_\nu(s)}{\lambda_\nu} \int_a^b h(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt$$

$$= \sum_\nu \int_a^b K(t,s)\,\varphi_\nu(t)\,dt \int_a^b h(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt,$$

und die Reihen rechts konvergieren in beiden Gleichungen absolut und gleichmäßig.

Beweis. Wir wollen nur die erste Behauptung beweisen, da der Beweis der zweiten derselbe ist. Aus der dritten Darstellungsform ihres allgemeinen Gliedes gestattet der im § 2 bewiesene Konvergenzsatz die behauptete absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihe abzulesen. Setzt man nun

$$g(s) - \sum_\nu \varphi_\nu(s) \int_a^b g(t)\, \varphi_\nu(t)\, dt = f(s),$$

so folgt

(32) $$\int_a^b f(s)\, \varphi_\nu(s)\, ds = 0,$$

und hieraus ergibt sich nach dem eben bewiesenen Theorem

(33) $$\int_a^b K(t, s) f(t)\, dt = 0.$$

Nun ist

$$\int_a^b (f(s))^2\, ds = \int_a^b f(s)\, g(s)\, ds = \int_a^b h(t)\, dt \int_a^b K(s, t) f(s)\, ds = 0$$

wegen (33). Folglich ist $f(s) = 0$, was zu beweisen war.

Es seien $p(s)$ und $q(s)$ zwei stetige Funktionen. Der eben bewiesene Satz liefert dann

$$\int_a^b K(s, t)\, q(t)\, dt = \sum \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu} \int_a^b q(t)\, \psi_\nu(t)\, dt$$

und nach Multiplikation dieser Gleichung mit $p(s)\, ds$ und Integration von a bis b erhält man

$$\int_a^b \int_a^b K(s, t)\, p(s)\, q(t)\, ds\, dt = \sum_a \frac{1}{\lambda_\nu} \int_a^b p(s)\, \varphi_\nu(s)\, ds \int_a^b q(t)\, \psi_\nu(t)\, dt.$$

Dieser Satz entspricht der kanonischen Zerlegung einer bilinearen Form.

Aus der eben bewiesenen Gleichung ergibt sich, daß, wenn $\sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)\, \psi_\nu(t)}{\lambda_\nu}$ gleichmäßig konvergiert,

(34) $$K(s, t) = \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)\, \psi_\nu(t)}{\lambda_\nu}$$

ist, und daß also insbesondere *diese Gleichung stets gültig ist, wenn das vollständige normierte Orthogonalsystem des Kernes $K(s, t)$ nur aus einer endlichen Anzahl von Funktionenpaaren besteht.*

§ 17.

Erweiterung der Voraussetzungen.

Wie eine der in § 13 auseinandergesetzten völlig analoge Schlußweise zeigt, können auch Unstetigkeiten des unsymmetrischen Kernes in einem durch folgende Voraussetzungen beschränkten Umfange zugelassen werden.

I. Die Punktmenge in der s, t-Ebene, welche aus den Unstetigkeitsstellen von $K(s, t)$ gebildet wird, soll auf jeder Geraden $s = \text{const.}$, $t = \text{const.}$ den äußeren Inhalt Null haben.

II. $\int\limits_a^b (K(s, t))^2\, dt$ und $\int\limits_a^b (K(t, s))^2\, dt$ sollen für $a \leqq s \leqq b$ endlich und bestimmt sein und stetige, nicht identisch verschwindende Funktionen von s darstellen.

Dann bleiben alle Sätze und Beweise dieses Kapitels bestehen, nur muß die Gültigkeit der Gleichung (34) auf den Stetigkeitsbereich von $K(s, t)$ beschränkt werden.

Ebenso ändert sich nichts in den Sätzen und Beweisen dieses Kapitels, wenn $s, t, r, \cdots$ Punkte eines n-dimensionalen, ganz im Endlichen liegenden, aus einer endlichen Anzahl analytischer Stücke bestehenden Gebildes in einem $(n + m)$-dimensionalen Raum bedeuten und $ds, dt, dr, \cdots$ die entsprechenden Elemente. Auch in diesem Fall bestimmen die Bedingungen I und II einen Bereich der Zulässigkeit von Unstetigkeiten.

Viertes Kapitel.

Über die beste Approximation von Funktionen zweier Variabeler durch Produktsummen von Funktionen einer Variabelen.

§ 18.

Das Approximationstheorem.

Es sei $K(s, t)$ eine gegebene, für $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ definierte reelle stetige Funktion. *Es werde verlangt, sie durch eine Summe von höchstens m Produkten einer stetigen Funktion von s mit einer stetigen Funktion von t möglichst gut zu approximieren*, wobei, wie gewöhnlich, als Maß der Approximation das über das Definitionsgebiet der gegebenen Funktion erstreckte Doppelintegral des Fehlerquadrates betrachtet wird.

Es mögen die Funktionen

$$\varphi_1(s),\ \varphi_2(s), \cdots, \varphi_\nu(s), \cdots;$$
$$\psi_1(s),\ \psi_2(s), \cdots, \psi_\nu(s), \cdots,$$

denen die positiven Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\nu, \cdots$ der wachsenden Größe nach geordnet entsprechen, ein *vollständiges normiertes Orthogonalsystem des unsymmetrischen Kernes* $K(s, t)$ in der Definition des § 15 bilden. Im speziellen Falle, daß die Anzahl der vom Index ν durchlaufenen Paare adjungierter Eigenfunktionen $\varphi_\nu(s), \psi_\nu(s) \leqq m$ ist, liefert die Gleichung (34) eine unmittelbare und triviale Lösung des gestellten Problems. Ist aber jene Anzahl unendlich oder endlich und $\geqq m$, *so wird die Lösung durch die Produktsumme*

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=m} \frac{\varphi_\nu(s)\,\psi_\nu(t)}{\lambda_\nu}$$

gegeben.

Beweis. Das Maß der Approximation M_m, dessen Minimum die Problemstellung fordert, wird gemäß Voraussetzung durch die Gleichung

$$M_m = \int_a^b\int_a^b \left(K(s, t) - \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \frac{\varphi_\nu(s)\,\psi_\nu(t)}{\lambda_\nu}\right)^2 ds\,dt$$

definiert.

Dieser Ausdruck reduziert sich bei Heranziehung der Definitionsgleichungen (26), (27) und bei Berücksichtigung der Orthogonalität und des Normiertseins des Systems der Funktionen $\varphi_\nu(s)$ und des Systems der Funktionen $\psi_\nu(s)$ leicht auf die Formel

$$M_m = \int_a^b\int_a^b (K(s, t))^2 ds\,dt - \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \frac{1}{\lambda_\nu^2}. \tag{35}$$

Wir haben also zu zeigen, daß

$$\int_a^b\int_a^b \left(K(s, t) - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \alpha_\nu \beta_\nu\right)^2 ds\,dt \geqq \int_a^b\int_a^b (K(s, t))^2 ds\,dt - \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \frac{1}{\lambda_\nu^2} \tag{36}$$

ist für alle Systeme von n stetigen Funktionenpaaren

$$\alpha_1(s),\ \alpha_2(s), \cdots, \alpha_n(s);$$
$$\beta_1(t),\ \beta_2(t), \cdots, \beta_n(t),$$

wo $n \leqq m$ ist, und α_ν statt $\alpha_\nu(s)$ und β_ν statt $\beta_\nu(t)$ geschrieben wird. Wir können voraussetzen, daß die Funktionen $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ normiert und zueinander orthogonal sind; denn wäre das nicht der Fall, so könnten wir sie nach § 3 durch ein System von höchstens n solchen linear homogen mit konstanten Koeffizienten ausdrücken und dann die Produktsumme nach diesen ordnen. Dann ist

$$(37)\quad \int_a^b\int_a^b \Big(K(s,t)-\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\alpha_\nu\beta_\nu\Big)^2 ds\,dt = \int_a^b\int_a^b (K(s,t))^2 ds\,dt$$
$$+\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\int_a^b\Big(\alpha_\nu^2-2\alpha_\nu\int_a^b K(s,t)\,\beta_\nu\,dt\Big)ds$$
$$=\int_a^b\int_a^b (K(s,t))^2 ds\,dt+\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\int_a^b\Big(\alpha_\nu-\int_a^b K(s,t)\,\beta_\nu\,dt\Big)^2 ds$$
$$-\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\int_a^b\Big(\int_a^b K(s,t)\,\beta_\nu\,dt\Big)^2 ds.$$

Die zu beweisende Ungleichung (36) folgt also a fortiori aus der Ungleichung

$$0\leqq\sum_{\nu=1}^{\nu=m}\frac{1}{\lambda_\nu^2}-\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\int_a^b\Big(\int_a^b K(s,t)\,\beta_\nu\,dt\Big)^2 ds$$

und diese, weil $n\leqq m$ ist, wieder a fortiori aus der Ungleichung

$$(38)\qquad 0\leqq\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\frac{1}{\lambda_\nu^2}-\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\int_a^b\Big(\int_a^b K(s,t)\,\beta_\nu\,dt\Big)^2 ds,$$

welche wir jetzt beweisen wollen.

Gemäß dem in § 16 gegebenen Entwicklungssatze ist

$$(39)\qquad \int_a^b K(s,t)\,\beta_\nu\,dt=\sum_\varrho\frac{\varphi_\varrho(s)}{\lambda_\varrho}\int_a^b\beta_\nu\psi_\varrho(t)\,dt,$$

wo die Summe über alle Paare adjungierter Eigenfunktionen $\varphi_\varrho(s)$, $\psi_\varrho(t)$ des vollständigen normierten Orthogonalsystems zu erstrecken ist. Bei Berücksichtigung des Normiertseins und der Orthogonalität des Systems der Funktionen $\varphi_\varrho(s)$ folgt aus der Gleichung (39) leicht

$$(40)\qquad \int_a^b\Big(\int_a^b K(s,t)\,\beta_\nu\,dt\Big)^2 ds=\sum_\varrho\frac{1}{\lambda_\varrho^2}\Big(\int_a^b\beta_\nu\psi_\varrho(t)\,dt\Big)^2.$$

Da nun gemäß der Besselschen Ungleichung § 1

$$(41)\qquad 1=\int_a^b\beta_\nu^2\,dt\geqq\sum_\varrho\Big(\int_a^b\beta_\nu\psi_\varrho(t)\,dt\Big)^2$$

ist, und mithin letztere Summe konvergiert, so ergibt eine leichte identische Umformung der rechten Seite der Gleichung (40)

$$(42) \qquad \int_a^b \Big(\int_a^b K(s,t)\,\beta_\nu\,dt\Big)^2 ds = \frac{1}{\lambda_n^2} + \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \Big(\frac{1}{\lambda_\mu^2} - \frac{1}{\lambda_n^2}\Big)\Big(\int_a^b \beta_\nu \psi_\mu(t)\,dt\Big)^2$$

$$- \sum_k \Big(\frac{1}{\lambda_n^2} - \frac{1}{\lambda_k^2}\Big)\Big(\int_a^b \beta_\nu\,\psi_k(t)\,dt\Big)^2 - \frac{1}{\lambda_n^2}\Big[1 - \sum_\varrho \Big(\int_a^b \beta_\nu\,\psi_\varrho(t)\,dt\Big)^2\Big],$$

wo k alle Indizes $> n$ des vollständigen Orthogonalsystems durchläuft. Die für alle Werte von k gemäß Voraussetzung gültige Ungleichung

$$\lambda_k \geqq \lambda_n$$

und die Ungleichung (41) zeigen, daß

$$\sum_k \Big(\frac{1}{\lambda_n^2} - \frac{1}{\lambda_k^2}\Big)\Big(\int_a^b \beta_\nu\,\psi_k(t)\,dt\Big)^2 \geqq 0$$

und

$$\frac{1}{\lambda_n^2}\Big[1 - \sum_\varrho \Big(\int_a^b \beta_\nu\,\psi_\varrho(t)\,dt\Big)^2\Big] \geqq 0$$

ist. Mithin folgt die zu beweisende Ungleichung (38) a fortiori aus der Ungleichung

$$0 \leqq \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{1}{\lambda_\nu^2} - \frac{n}{\lambda_n^2} - \sum_{\nu=1}^{\nu=n}\sum_{\mu=1}^{\mu=n} \Big(\frac{1}{\lambda_\mu^2} - \frac{1}{\lambda_n^2}\Big)\Big(\int_a^b \beta_\nu\,\psi_\mu(t)\,dt\Big)^2$$

$$= \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \Big(\frac{1}{\lambda_\mu^2} - \frac{1}{\lambda_n^2}\Big)\Big[1 - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \Big(\int_a^b \psi_\mu(t)\,\beta_\nu\,dt\Big)^2\Big].$$

Daß aber dieser letzte Ausdruck $\geqq 0$ ist, folgt aus den gemäß Voraussetzung bestehenden Ungleichungen

$$\lambda_\mu \leqq \lambda_n$$

und aus der wegen der Orthogonalität und des Normiertseins des Systems der Funktionen β_ν gültigen Besselschen Ungleichung

$$1 = \int_a^b (\psi_\mu(t))^2\,dt \geqq \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \Big(\int_a^b \psi_\mu(t)\,\beta_\nu(t)\,dt\Big)^2.$$

§ 19.

Das Maß der besten Approximation.

Das im vorigen Paragraphen definierte Maß der besten Approximation M_m *einer Funktion* $K(s,t)$ *durch eine Summe von höchstens* m *Produkten einer Funktion von* s *mit einer Funktion von* t *verschwindet bei unbegrenzt wachsendem* m.

Beweis. Gemäß der Gleichung (35) kann die zu beweisende Behauptung durch die Gleichung

$$(43)\qquad \sum_{\varrho} \frac{1}{\lambda_{\varrho}^2} = \int_a^b\int_a^b (K(s,t))^2\, ds\, dt$$

ausgedrückt werden, wo λ_ϱ alle Eigenwerte des unsymmetrischen Kernes $K(s, t)$, jeden nach seiner Vielfachheit gezählt, durchläuft.

Nach dem Entwicklungssatz § 16 ist

$$(44)\qquad \int_a^b K(s,t)\, K(r,t)\, dt = \sum_{\varrho} \frac{\varphi_\varrho(s)}{\lambda_\varrho} \int_a^b K(r,t)\, \psi_\varrho(t)\, dt = \sum_{\varrho} \frac{\varphi_\varrho(s)\, \varphi_\varrho(r)}{\lambda_\varrho^2},$$

wobei die Summe bei festem s gleichmäßig in r und bei festem r gleichmäßig in s konvergiert. Wenn $r = s$ gesetzt wird, erhält man

$$(45)\qquad \int_a^b (K(s,t))^2\, dt = \sum_{\varrho} \frac{(\varphi_\varrho(s))^2}{\lambda_\varrho^2}.$$

Aus der Gleichung (45) ergibt sich die zu beweisende Gleichung (43) durch eine nach s von a bis b erstreckte Integration, wenn diese auf der rechten Seite *gliedweise* ausgeführt werden darf; also insbesondere, wenn die Reihe auf der rechten Seite der Gleichung (45) *gleichmäßig* konvergiert. Den zur Schließung des Beweises allein noch erforderlichen Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (45), aus welcher übrigens wegen

$$\frac{\varphi_\varrho(s)\, \varphi_\varrho(r)}{\lambda_\varrho^2} \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{(\varphi_\varrho(s))^2}{\lambda_\varrho^2} + \frac{(\varphi_\varrho(r))^2}{\lambda_\varrho^2}\right)$$

auch die in s *und* r gleichmäßige Konvergenz der Reihe (44) folgt, leistet nun ein Theorem von Dini*), welches lautet:

Wenn eine Reihe positiver, stetiger, für $a \leqq s \leqq b$ definierter Funktionen der Variablen s so konvergiert, daß die Summe eine stetige Funktion von s darstellt, so ist die Konvergenz auch gleichmäßig.

Beweis. Es sei

$$(46)\qquad v(s) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} u_\nu(s),$$

und es seien $v(s)$ und alle $u_\nu(s)$ für $a \leqq s \leqq b$ stetig und $\geqq 0$.

Es bezeichne P_n die aus allen denjenigen Punkten gebildete Punktmenge, für welche die stetige Funktion

$$R_n(s) = v(s) - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} u_\nu(s)$$

---

*) Dini „Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali", Pisa 1878, § 99.

ihr Maximum erreicht, das wir mit Max. (R_n) bezeichnen wollen. Dann wähle man aus jeder Punktmenge P_n einen Punkt α_n aus, und es sei α einer der Häufungspunkte der aus den Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots$ bestehenden Punktmenge. Es sei nun ε eine beliebig kleine, positive, von Null verschiedene Größe. Da gemäß der vorausgesetzten Konvergenz der Reihe (46)

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} R_n(\alpha) = 0$$

ist, so gibt es einen Index p, so daß

$$R_p(\alpha) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{47}$$

ist. Wegen der Stetigkeit von $R_p(s)$, und weil α ein Häufungspunkt der Punktmenge $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots$ ist, läßt sich ein Index $q > p$ so bestimmen, daß

$$|R_p(\alpha_q) - R_p(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{48}$$

ist. Aus (47) und (48) folgt

$$R_p(\alpha_q) < \varepsilon.$$

Da nun wegen der vorausgesetzten Positivität der Funktionen $u_\nu(s)$ $R_n(s)$ nicht negativ sein kann und bei festem s mit wachsendem n nicht wachsen kann, so ergibt sich für $m > q > p$

$$0 \leqq \text{Max.}\,(R_m) = R_m(\alpha_m) \leqq R_q(\alpha_m) \leqq \text{Max.}\,(R_q) = R_q(\alpha_q) \leqq R_p(\alpha_q) < \varepsilon.$$

Also ist

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \text{Max.}\,(R_n) = 0,$$

was zu beweisen war.

Schlußbemerkung.

Auch Unstetigkeiten des Kernes können in dem in § 17 präzisierten Umfange zugelassen werden.

Ebenso ändert sich nichts in den Sätzen und Beweisen dieses Kapitels, wenn $s, t, r, \cdots$ Punkte eines n-dimensionalen, ganz im Endlichen liegenden, aus einer endlichen Anzahl analytischer Stücke bestehenden Gebildes in einem $(n+m)$-dimensionalen Raum bedeuten und $ds, dt, dr, \cdots$ die entsprechenden Elemente.

Fünftes Kapitel.

Über die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener.

§ 20.

Das vorgeschriebene Funktionensystem verschwindet in den Endpunkten des Definitionsintervalles.

Es sei $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_\nu(x), \cdots$ eine unendliche Reihe im Intervall $a \leqq x \leqq b$ definierter, reeller, stetiger und zweimal stetig differenzierbarer Funktionen, die außerdem noch für $x = a$ und $x = b$ sämtlich verschwinden mögen. Es sei ferner das System

$$\varphi_1''(x), \varphi_2''(x), \cdots, \varphi_\nu''(x), \cdots, \quad \text{wo} \quad \varphi_\nu''(x) \quad \text{für} \quad \frac{d^2\varphi_\nu(x)}{dx^2} \quad \text{geschrieben ist,}$$

ein *abgeschlossenes* d. h., wie schon in der Einleitung erklärt, ein solches, daß es keine von Null verschiedene stetige Funktion $f(x)$ gibt, welche für jedes ν der Gleichung

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_\nu''(x)\,dx = 0$$

genügt. Wir bilden dann

$$\psi_1(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{\int_a^b (\varphi_1'(y))^2\,dy}}$$

$$\psi_2(x) = \frac{\varphi_2(x) - \psi_1(x)\int_a^b \varphi_2'(z)\,\psi_1'(z)\,dz}{\sqrt{\int_a^b \left(\varphi_2'(y) - \psi_1'(y)\int_a^b \varphi_2'(z)\,\psi_1'(z)\,dz\right)^2 dy}}$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\psi_\nu(x) = \frac{\varphi_\nu(x) - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\nu-1}\psi_\varrho(x)\int_a^b \varphi_\nu'(z)\,\psi_\varrho'(z)\,dz}{\sqrt{\int_a^b \left(\varphi_\nu'(y) - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\nu-1}\psi_\varrho'(y)\int_a^b \varphi_\nu'(z)\,\psi_\varrho'(z)\right)^2 dy}}$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

wobei $\varphi_\nu'(x)$, $\psi_\nu'(x)$ bezüglich für $\frac{d\varphi_\nu(x)}{dx}$ und $\frac{d\psi_\nu(x)}{dx}$ geschrieben sind.

Wir beachten ferner noch folgendes. Wie in § 3 gezeigt, verschwindet einer der Nenner in den obigen Ausdrücken dann und nur dann, wenn die entsprechende Funktion $\varphi_\nu'(x)$ linear homogen mit konstanten

Koeffizienten durch die vorhergehenden darstellbar ist. Da aber wegen der Gleichungen

$$\varphi_\nu(a) = 0$$

jede solche lineare homogene Relation zwischen den $\varphi'_\nu(x)$ auch zwischen den $\varphi_\nu(x)$ gültig bleibt und umgekehrt, so folgt, daß einer der Nenner dann und nur dann verschwindet, wenn die betreffende Funktion $\varphi_n(x)$ von den vorhergehenden linear abhängig ist. In diesem Fall ignorieren wir die betreffende Funktion $\varphi_n(x)$ und fahren in der Bildung der Funktionen $\psi_\nu(x)$ so fort, als ob in der gegebenen Reihe der $\varphi_\nu(x)$ die Funktion $\varphi_n(x)$ überhaupt nicht vorkäme. *Durch die obigen Formeln sind dann alle $\psi_\nu(x)$ als lineare homogene Aggregate der $\varphi_\nu(x)$ gegeben und umgekehrt.*

Es sei nun $g(x)$ eine beliebige im Intervall $a \leqq x \leqq b$ definierte einmal stetig differenzierbare Funktion, welche für $x = a$ und $x = b$ verschwinde. Dann ist

$$g(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \psi_\nu(x) \int_a^b g'(y)\, \psi'_\nu(y)\, dy,$$

und die Summe auf der rechten Seite konvergiert absolut und gleichmäßig.

Beweis. Nach § 3 bestehen die Gleichungen

$$\int_a^b \psi'_\mu(x)\, \psi'_\nu(x)\, dx = 1 \quad \text{oder} \quad 0,$$

je nachdem μ und ν gleich oder verschieden sind. Hieraus folgt gemäß dem Zusatz zu § 2 die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihe auf der rechten Seite der zu beweisenden Gleichung. Setzen wir nun

$$g(x) - \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \psi_\nu(x) \int_a^b g'(y)\, \psi'_\nu(y)\, dy = f(x),$$

so ergibt sich wegen

$$\int_a^b g(x)\, \psi''_\varrho(x)\, dx = -\int_a^b g'(x)\, \psi'_\varrho(x)\, dx$$

und

$$\int_a^b \psi_\nu(x)\, \psi''_\varrho(x)\, dx = -\int_a^b \psi'_\nu(x)\, \psi'_\varrho(x)\, dx = -1 \quad \text{oder} \quad 0,$$

je nachdem ν und ϱ gleich oder verschieden sind, für jedes ϱ

$$\int_a^b f(x)\, \psi''_\varrho(x)\, dx = 0;$$

da aber jede Funktion $\varphi''_\nu(x)$ sich linear homogen mit konstanten Koef fizienten durch eine endliche Anzahl der $\psi_\nu''(x)$ darstellen läßt, so folgt für jedes ν

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_\nu''(x)\,dx = 0,$$

und hieraus erlaubt uns die vorausgesetzte Abgeschlossenheit des Systemes der $\varphi_\nu''(x)$ zu schließen, daß $f(x)$ identisch verschwindet, was zu beweisen war.

§ 21.

Der allgemeine Fall.

Es sei $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_\nu(x), \cdots$ eine unendliche Reihe im Intervall $a \leqq x \leqq b$ definierter, reeller, stetiger, zweimal stetig differenzierbarer Funktionen, die jedoch keinerlei Grenzbedingungen unterworfen seien. Es sei ferner das System $\varphi_1''(x), \varphi_2''(x), \cdots, \varphi_\nu''(x), \cdots$ ein abgeschlossenes. Wir bilden dann für jeden Index ν

$$\bar\varphi_\nu(x) = \varphi_\nu(x) - \varphi_\nu(a) - \frac{x-a}{b-a}\,(\varphi_\nu(b) - \varphi_\nu(a));$$

dann gelten die Gleichungen

$$\bar\varphi_\nu(a) = \bar\varphi_\nu(b) = 0$$
$$\bar\varphi_\nu''(x) = \varphi_\nu''(x),$$

und es ist daher das System $\bar\varphi_1''(x), \bar\varphi_2''(x), \cdots, \bar\varphi_\nu''(x), \cdots$ auch ein abgeschlossenes. Nun konstruieren wir, wie im vorigen Paragraphen, die Funktionenreihe

$$\psi_1(x) = \frac{\bar\varphi(x)}{\sqrt{\int_a^b (\bar\varphi_1'(y))^2\,dy}}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\psi_\nu(x) = \frac{\bar\varphi_\nu(x) - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\nu-1} \psi_\varrho(x) \int_a^b \bar\varphi_\nu'(z)\,\psi_\varrho'(z)\,dz}{\sqrt{\int_a^b \left(\bar\varphi_\nu'(y) - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\nu-1} \psi_\varrho'(y) \int_a^b \bar\varphi_\nu'(z)\,\psi_\varrho'(z)\,dz\right)^2 dy}}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Ist dann $g(x)$ eine beliebige im Intervall $a \leqq x \leqq b$ definierte stetige und einmal stetig differenzierbare Funktion und setzt man

$$\bar g(x) = g(x) - g(a) - \frac{x-a}{b-a}\,(g(b) - g(a)),$$
$$\bar g(a) = \bar g(b) = 0,$$

so liefert das im vorigen Paragraphen bewiesene Entwicklungstheorem

$$\bar{g}(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \psi_\nu(x) \int_a^b \bar{g}'(y)\, \psi_\nu'(y)\, dy,$$

$$g(x) = \frac{b\,g(a) - a\,g(b)}{b-a} + x\,\frac{g(b) - g(a)}{b-a} + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \psi_\nu(x) \int_a^b g'(y)\, \psi_\nu'(y)\, dy,$$

und die Reihen rechts konvergieren absolut und gleichmäßig.

Wir haben beim Beweise der Entwicklungssätze dieses und des vorigen Paragraphen vorausgesetzt, daß das System der $\varphi_\nu''(x)$ ein abgeschlossenes ist; es hätte aber genügt etwas weniger vorauszusetzen, nämlich bloß, daß jede Funktion, welche zu allen $\varphi_\nu''(x)$ orthogonal ist, linear ist; denn das für den im vorigen Paragraphen gegebenen Beweis erforderliche identische Verschwinden von $f(x)$ ergibt sich wegen des Verschwindens von $f(x)$ in den Endpunkten des Intervalls aus der Tatsache, daß $f(x)$ linear sein muß.

Da jede stetige Funktion durch einmal stetig differenzierbare gleichmäßig approximiert werden kann, so ergibt sich aus dem letzten Entwicklungstheorem: *Es sei $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_\nu(x), \cdots$ eine unendliche Reihe für $a \leqq x \leqq b$ definierter, reeller, zweimal stetig differenzierbarer Funktionen, deren zweite Ableitungen ein abgeschlossenes System bilden; dann läßt sich jede für $a \leqq x \leqq b$ definierte stetige Funktion in eine Reihe endlicher linearer homogener Aggregate der Funktionen* $1, x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_\nu(x), \cdots$ *gleichmäßig konvergent entwickeln.*

Die Theorie der Integralgleichungen und die Darstellung willkürlicher Funktionen in der mathematischen Physik.

Von

Adolf Kneser in Breslau.

Die von Fredholm*) begründete, von Hilbert**) in wesentlichen Punkten fortgebildete, von Schmidt***) weiter vervollkommnete Theorie der Integralgleichungen ist offenbar bestimmt, weite Gebiete der mathematischen Physik in der vorteilhaftesten Weise umzugestalten. Sie bietet aber hinsichtlich der wichtigen Lehre von der Darstellung willkürlicher Funktionen bis jetzt noch Mängel dar, die unmittelbar vor Augen treten, wenn man sich klar macht, was die hierher gehörigen Resultate für die Fouriersche Reihe leisten. Da zeigt sich, daß es weniger ist als schon sehr einfache Anwendungen erfordern; man erhält nämlich z. B. bezüglich der gewöhnlichen Sinusreihe nur den Satz, daß durch sie eine Funktion von x darstellbar ist, die mit ihren ersten beiden Ableitungen stetig ist und an den Stellen $x = 0$ und $x = \pi$ verschwindet; ebenso erhält man eine Entwicklung in die Kosinusreihe nur unter der Voraussetzung, daß die Ableitung der Funktion an den bezeichneten beiden Stellen verschwindet.

Nun kennt man aber nicht nur für die Fouriersche Reihe, sondern auch für die nach den Besselschen und den Sturm-Liouvilleschen Normalfunktionen fortschreitenden Reihen sehr viel allgemeinere Darstellungssätze, bei denen insbesondere nicht verlangt wird, daß die dargestellte Funktion an den Enden des betrachteten Intervalls denselben Bedingungen unterworfen sei, wie die Funktionen, nach denen man entwickelt.†) Diese allgemeinen Sätze mit der Theorie der Integralgleichungen

*) Stockholm Öfversigt 1900. Acta math. Bd. 27.

**) Göttinger Nachrichten 1904, 1905.

***) Entwicklung willkürlicher Functionen nach Systemen vorgeschriebener, Dissertation Göttingen 1905 und Bd. 63 dieser Annalen.

†) Kneser, Bd. 58 und 60 dieser Annalen.

in Verbindung zu setzen und dadurch die bezeichneten Mängel der bisherigen Theorie zu heben, ist das Ziel der vorliegenden Untersuchung. Wir hoffen die Lehre von der Darstellung willkürlicher Funktionen durch die in der mathematischen Physik vorkommenden Reihen in verschiedenen Punkten zu vertiefen und so einen neuen Beweis für die Fruchtbarkeit der Integralgleichungen zu erbringen.

§ 1.

Das Problem und ein Lemma.

Das Problem der mathematischen Physik, auf das wir die Integralgleichungen anwenden wollen, ist im wesentlichen das von Sturm und Liouville untersuchte. Eine Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dV}{dx}\right)+(g\lambda-l)V=0$$

sei vorgelegt, in der die Variable x auf ein festes endliches Intervall J, etwa das von $x=a$ bis $x=b$ reichende, beschränkt bleibt. Im Innern dieser Strecke seien die Funktionen k, g, l mit ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig, k und g außerdem positiv; λ sei eine Konstante. Ferner sei g so beschaffen, daß das Integral

$$u=\int_a^x g\,dx$$

auf der ganzen Strecke J mit Einschluß ihrer Endpunkte endlich und stetig bleibt. Dann kann man, ohne die Differentialgleichung wesentlich zu spezialisieren, die Größe g durch Eins ersetzen, indem man u als unabhängige Variable einführt, die, wenn x wachsend die Strecke J durchläuft, ebenfalls wachsend bis zu einer endlichen Grenze hinaufgeht. Die Differentialgleichung geht nämlich in folgende über:

$$g\frac{d}{du}\left(gk\frac{dV}{du}\right)+(g\lambda-l)V=0$$

oder in geänderter Bezeichnung

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dV}{dx}\right)+(\lambda-l)V=0,$$

wobei k und l die soeben geforderten Eigenschaften behalten.

Die Konstante λ wird nun durch Forderungen bestimmt, die an die Größe V gestellt werden und nicht bei beliebigen Werten von λ zu erfüllen sind. Auf der Strecke J sollen nämlich V und $\frac{dV}{dx}$ endlich und stetig sein und an den Enden von J sollen Gleichungen von der Form

$$k\frac{dV}{dx}-hV\Big|^a=0,\qquad k\frac{dV}{dx}+HV\Big|^b=0$$

gelten, in denen h und H vorgeschriebene Konstante sind; eine von ihnen oder beide können durch Gleichungen wie

$$V|^a = 0, \qquad V|^b = 0$$

vertreten werden. Ist ferner eine der Grenzen a und b, etwa a eine singuläre Stelle der Differentialgleichung, so nennen wir sie kurz einen singulären, andernfalls einen regulären Endpunkt der Strecke J. Für einen singulären Endpunkt wird keine Beziehung von einer der angegebenen Gestalten, sondern nur verlangt, V bleibe endlich; die Differentialgleichung ist immer so beschaffen, daß die geforderten Integrale V bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt sind. Man nennt s'e Normalfunktionen oder, vom Standpunkte der unten eingeführten Integralgleichungen, Eigenfunktionen eines Kerns, die zugehörigen Werte der Konstanten λ Eigenwerte.

Um besonders über die in singulären Stellen möglichen Verhältnisse bestimmte Anschauungen zu gewinnen, nehmen wir speziell an, was bei den wichtigsten Anwendungen zutrifft, k und l seien analytische, im Innern der Strecke J reguläre Funktionen von x, und $x = a$ sei für die Differentialgleichung der Normalfunktionen eine Stelle der Bestimmtheit im Sinne der Fuchsschen Theorie.*) Da die Differentialgleichung in der Form

$$V'' + \frac{k'}{k} V' + \frac{\lambda - l}{k} = 0$$

geschrieben werden kann, ist es für eine Singularität dieser Art charakteristisch, daß man entwickeln kann

$$\frac{k'}{k} = \frac{c_1}{x-a} + \mathfrak{P}_1(x-a),$$

$$\frac{\lambda - l}{k} = \frac{c_2}{(x-a)^2} + \frac{c_3}{x-a} + \mathfrak{P}_2(x-a),$$

wobei c Konstante und $\mathfrak{P}$ Potenzreihen sind. Die determinierende Gleichung ist

$$\gamma(\gamma - 1) + c_1\gamma + c_2 = 0;$$

wenn ihre Wurzeln weder gleich sind noch sich um eine ganze Zahl unterscheiden, hat die Differentialgleichung zwei Integrale von der Form

$$(x-a)^\gamma\, \mathfrak{P}_3(x-a).$$

Hieraus sieht man zunächst, daß die determinierende Gleichung keine komplexen Wurzeln haben kann, wenn die gestellten Forderungen erfüllbar sind und die Größe V bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmen. Da nämlich die Konstanten c wie die Funktionen k und l naturgemäß reell anzunehmen sind, hätte man zwei konjugiert imaginäre Wurzeln, also in dem

*) Schlesinger, Differentialgleichungen (Sammlung Schubert) Nr. 25.

reellen und imaginären Teil des hingeschriebenen Ausdrucks zwei Integrale, die entweder beide an der Stelle $x = a$ endlich blieben oder beide unendlich würden. Die Wurzeln der determinierenden Gleichung sind also reell und mindestens eine von ihnen nicht negativ, da sonst alle Integrale eine Potenz von $x - a$ mit negativem Exponenten als Faktor neben $\mathfrak{P}(x-a)$ und $\log(x-a)$ enthielten, also keins von ihnen an der Stelle $x = a$ endlich wäre. Ist nun γ die größte nicht negative Wurzel der determinierenden Gleichung, so ist ein Integral von der Form

$$(x-a)^{\gamma}\, \mathfrak{P}(x-a)$$

vorhanden, und dieses ist bei der Annahme $x = a$ endlich; es ist also bei den geltenden Voraussetzungen bis auf einen konstanten Faktor das einzige an der Stelle $x = a$ endliche Integral.

Es seien nun V und W zwei zu verschiedenen Werten von λ gehörige Integrale unserer Differentialgleichung, die an der Stelle $x = a$ von der angegebenen Beschaffenheit sind; bei dem zweiten trete etwa γ_1 an Stelle von γ. Dann kann man setzen

$$V = (x-a)^{\gamma}\, \mathfrak{P}_3(x-a), \qquad W = (x-a)^{\gamma_1}\, \mathfrak{P}_4(x-a),$$
$$VW' - WV' = (x-a)^{\gamma+\gamma_1-1}\, \mathfrak{P}_5(x-a);$$

auf Grund dieser Formeln untersuchen wir den im weiteren Verlauf der Untersuchung vorkommenden Ausdruck

$$k(VW' - V'W).$$

Zu diesem Zweck gehen wir davon aus, daß die größte Wurzel der determinierenden Gleichung nicht kleiner als $\frac{1-c_1}{2}$ ist, daß also die Ungleichung

$$\gamma + \gamma_1 \geqq 1 - c_1$$

gilt. Wenn nun zunächst $\gamma + \gamma_1 + c_1 - 1$ positiv ist, findet man aus der Formel

$$\frac{k'}{k} = \frac{c_1}{x-a} + \mathfrak{P}_1(x-a)$$

und der aus ihr folgenden

$$k = (x-a)^{c_1}\, \mathfrak{P}_6(x-a)$$

die Gleichung

$$k(VW' - V'W) = (x-a)^{\gamma+\gamma_1-1+c_1}\, \mathfrak{P}_5(x-a)\, \mathfrak{P}_6(x-a)$$

und hieraus

$$k(VW' - V'W)|^{a} = 0.$$

Wäre ferner

$$\gamma + \gamma_1 = 1 - c_1,$$

so erhielte man die Beziehungen

$$\gamma = \gamma_1 = \frac{1-c_1}{2}, \qquad 2\gamma + c_1 = 1.$$

Ferner hätte man Entwicklungen von der Form

$$V = C(x-a)^{\gamma} + C_1(x-a)^{\gamma+1} + \cdots,$$
$$W = D(x-a)^{\gamma} + D_1(x-a)^{\gamma+1} + \cdots,$$

aus denen man schließen könnte

$$VW' - V'W = (x-a)^{2\gamma}\,\mathfrak{P}_7(x-a),$$
$$k(VW' - V'W) = (x-a)^{2\gamma+c_1}\,\mathfrak{P}_8(x-a) = (x-a)\,\mathfrak{P}_8(x-a),$$

so daß die linke Seite dieser Gleichung wiederum bei der Annahme $x = a$ verschwindet.

Bedenken wir noch, daß für den Endpunkt b dieselben Erwägungen wie für a gelten, so sehen wir ein, daß von den Gleichungen

$$k(VW' - WV')|^{a} = 0, \qquad k(VW' - WV')|^{b} = 0$$

die erste gesichert ist, wenn V und W an der Grenze a, die zweite, wenn sie an der Grenze b die von den Normalfunktionen geforderten Eigenschaften haben. Diese Gleichungen sind an regulären Endpunkten selbstverständlich erfüllt, da hier entweder beide Größen V und W verschwinden, oder die Quotienten $V' : V$ und $W' : W$ denselben endlichen Wert haben.

Offenbar bleiben die letzten Betrachtungen gültig, wenn man unter $\mathfrak{P}$ nur stetige mit stetiger erster Ableitung versehene Funktionen versteht. Man überträgt so unsre Resultate auf den Fall, daß k, g, l nicht notwendig analytische Funktionen sind, die Differentialgleichung aber an den Stellen a und b nur diejenige Art von Singularitäten aufweist, die Bôcher*) bei linearen Differentialgleichungen mit nicht analytischen Koeffizienten als Verallgemeinerung der Fuchsschen Stellen der Bestimmtheit definiert und untersucht hat.

Beiläufig bemerken wir noch, daß, wenn man den Normalfunktionen an einem singulären Endpunkte a die Forderung auferlegen wollte, die Gestalt $(x-a)^{r}\,\varphi(x)$ zu haben, wobei r ein gegebener Exponent und $\varphi(a)$ endlich ist, nur scheinbar ein allgemeineres Problem als das oben ausgesprochene vorliegen würde. Man brauchte nämlich nur die Größe $(x-a)^{-r}V$ an Stelle von V einzuführen, um auf unser früheres Problem zurückzukommen, da diese Größe einer Differentialgleichung von derselben Form und derselben Art der Singularitäten genügt wie V selbst. Aus diesem Grunde und weil außerdem in den physikalischen Anwendungen stets zunächst gefordert wird, eine gewisse Größe bleibe endlich, betrachten wir durchweg nur Normalfunktionen, die an einer singulären Stelle endlich bleiben und dadurch bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt sind.

---

*) Transactions of the American Mathematical Society Bd. 1, S. 40. Bulletin of A. M. S. (2), Bd. 5, S. 280.

§ 2.

Differentialgleichung und Integralgleichung.

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir dazu über, die Normalfunktionen als Eigenfunktionen eines Kerns und Lösungen einer Integralgleichung zu betrachten, und leiten einige von Hilbert angegebene Resultate auf eine neue Weise ab, durch die gewisse in der zitierten Abhandlung besonders erörterte Ausnahmefälle*) der allgemeinen Theorie eingeordnet werden.

Zu diesem Zwecke richten wir zunächst die Differentialgleichung der Normalfunktionen so ein, daß $\lambda = 0$ nicht zu den Eigenwerten gehört. Es sei μ eine beliebige Konstante, die nicht zu den Eigenwerten gehört; eine solche gibt es, da wir annehmen, die für die Normalfunktionen charakteristischen Forderungen seien nicht bei jedem Wert von λ zu erfüllen. Wenn dann $\lambda = 0$ ein Eigenwert ist, ersetzen wir λ durch $\lambda + \mu$ und schreiben die Differentialgleichung der Normalfunktionen in der Form

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dV}{dx}\right) + [\lambda - (l - \mu)]\, V = 0.$$

Dann ist $\lambda = 0$ sicher kein Eigenwert mehr, da sonst für die ursprüngliche Gleichung μ ein solcher wäre, entgegen der Voraussetzung. Ändern wir auch noch die Bedeutung des Buchstabens l, so können wir die Gleichung der Normalfunktionen wieder in der Gestalt

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dV}{dx}\right) + (\lambda - l)\, V = 0$$

schreiben und annehmen, alle Eigenwerte seien von Null verschieden.

Jetzt bilden wir an jedem Ende des Intervalls J ein Integral der Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dy}{dx}\right) - ly = 0,$$

das die an diesem Ende für die Normalfunktionen geltenden Forderungen erfüllt. Diese Integrale seien $\varphi(x)$ und $\psi(x)$; das erste sei zunächst am unteren, das zweite am oberen Ende der Strecke J definiert. Da nun die Koeffizienten der Differentialgleichung, wenn man den der zweiten Ableitung auf den Wert Eins bringt, im Innern von J mit ihren ersten Ableitungen stetig sind, so kann man $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ als stetige, mit stetiger erster Ableitung versehene Funktionen über die ganze Strecke J fortsetzen, wobei nur für $\varphi(x)$ der obere, für $\psi(x)$ der untere Endpunkt, wenn er singulär ist, Singularitäten bringen kann. Die Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ können

*) Zweite Mitteilung, Göttinger Nachrichten 1904, S. 219.

ferner nicht bis auf einen konstanten Faktor zusammenfallen, da sonst ein Integral der letzten Gleichung vorläge, das an beiden Enden der Strecke J die für die Eigenfunktionen geltenden Grenzbedingungen erfüllt, was ausgeschlossen ist, da $\lambda = 0$ kein Eigenwert sein soll. Hieraus folgt, daß die Größe $k(\varphi\psi' - \varphi'\psi)$, die den Gleichungen

$$\frac{d(k\varphi')}{dx} - l\varphi = 0, \qquad \frac{d(k\psi')}{dx} - l\psi = 0$$

zufolge konstant ist, nicht verschwindet; multipliziert man daher $\varphi(x)$ mit einer passenden von Null verschiedenen Konstanten, wodurch die geforderten Eigenschaften nicht gestört werden, so erhält man die Gleichung

$$k(\varphi'\psi - \varphi\psi') = 1$$

für die ganze Strecke J mit Ausschluß singulärer Grenzen.

Jetzt sei ξ ein Wert zwischen a und b; wir setzen, wenn $x \leqq \xi$,

$$K(x, \xi) = \psi(\xi)\,\varphi(x),$$

wenn $x \geqq \xi$, dagegen

$$K(x, \xi) = \varphi(\xi)\,\psi(x).$$

Dann ist $K(x, \xi)$ auf der ganzen Strecke J als Funktion von x stetig und bezüglich beider Argumente symmetrisch. Denn ist z. B. $x \leqq \xi$, so hat man für $K(\xi, x)$ den zweiten Ausdruck zu nehmen und findet $\varphi(x)\,\psi(\xi)$, also

$$K(x, \xi) = K(\xi, x),$$

und Entsprechendes gilt, wenn $x > \xi$.

Setzen wir ferner

$$\frac{\partial K(x, \xi)}{\partial x} = K'(x, \xi),$$

so finden wir

$$K'(\xi - 0, \xi) = \psi(\xi)\,\varphi'(\xi), \qquad K'(\xi + 0, \xi) = \varphi(\xi)\,\psi'(\xi),$$

also zufolge der φ und ψ verknüpfenden Identität

$$K'(\xi - 0, \xi) - K'(\xi + 0, \xi) = \varphi'(\xi)\,\psi(\xi) - \varphi(\xi)\,\psi'(\xi) = \frac{1}{k(\xi)},$$

woraus die Unstetigkeit der Größe $K'(x, \xi)$ an der Stelle $x = \xi$ klar wird. Beiläufig bemerken wir noch, daß die Größen

$$K(x, a) = \psi(x)\,\varphi(a), \qquad K'(x, a) = \psi'(x)\,\varphi(a)$$

endlich und bestimmt sind, ebenso auch, wenn a ein regulärer Endpunkt ist, die Größen

$$K(a, a) = \psi(a)\,\varphi(a),$$

$$\lim_{\varepsilon = +0} K'(a + \varepsilon + 0, a + \varepsilon) = \psi'(a)\,\varphi(a),$$

$$\lim_{\varepsilon = +0} K'(a + \varepsilon - 0, a + \varepsilon) = \varphi'(a)\,\psi(a),$$

da in diesem Falle $\psi(a)$ und $\psi'(a)$ endlich sind; die letzten beiden wollen wir durch $K'(a+0, a)$ und $K'(a-0, a)$ bezeichnen.

Jetzt ist es leicht, die Normalfunktionen V als Eigenfunktionen des symmetrischen Kerns $K(x, \xi)$ zu erkennen. Aus den Gleichungen

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dV}{dx}\right) + (\lambda - l)\,V = 0,$$

$$\frac{d(k\,K'(x, \xi))}{dx} - l\,K(x, \xi) = 0,$$

deren letzte gilt, weil K als Funktion von x mit $\varphi(x)$ oder $\psi(x)$ bis auf einen von x unabhängigen Faktor übereinstimmt, folgt nämlich

$$\frac{d}{dx}\left[k\left(K\frac{dV}{dx} - K'\,V\right)\right] + \lambda\,VK = 0.$$

Diese Gleichung integrieren wir über die Strecke J und beachten dabei folgende Tatsache allgemeiner Natur, die wir noch mehrfach zu benutzen haben: Ist $f(x)$ auf der Strecke J mit Ausnahme einer Stelle $x = \xi$ stetig, die Ableitung $f'(x)$ aber durchweg stetig, so hat man nicht die gewöhnliche Formel

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(x)\Big|_a^b,$$

sondern die erweiterte

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(x)\Big|_a^b + f(\xi - 0) - f(\xi + 0).$$

Führen wir nach dieser Regel die bezeichnete Integration durch und beachten noch, daß nach § 1 die Größe

$$k\left(K\frac{dV}{dx} - K'\,V\right)$$

an den Stellen $x = a$ und $x = b$ verschwindet, so erhalten wir

$$k\left(K\frac{dV}{dx} - K'\,V\right)\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} + \lambda\int_a^b K(x, \xi)\,V\,dx = 0,$$

oder, da die Gleichungen

$$K(x, \xi)\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} = 0, \qquad K'(x, \xi)\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} = \frac{1}{k(\xi)}$$

gelten,

$$V(\xi) = \lambda\int_a^b K(x, \xi)\,V\,dx,$$

oder in der Bezeichnung, die wir festhalten wollen,

$$V = V(x) = \lambda\int_a^b K(\alpha, x)\,V(\alpha)\,d\alpha.$$

Damit ist die Sturm-Liouvillesche Aufgabe auf eine Integralgleichung mit bestimmtem symmetrischem Kern zurückgeführt.

Die Umkehrung dieses Resultats ergibt sich, im wesentlichen nach Hilbert, in folgender Weise. Es sei $f(x)$ eine beliebige, im Intervalle J stetige Funktion von x; setzt man

$$F(x)=\int_a^b K(x,\alpha)\, f(\alpha)\, d\alpha,$$

so findet man:

$$F'(x)=\int_a^b K'(x,\alpha)\, f(\alpha)\, d\alpha=\int_a^x K'(x,\alpha)\, f(\alpha)\, d\alpha+\int_x^b K'(x,\alpha)\, f(\alpha)\, d\alpha,$$

$$\frac{d(k\,F'(x))}{dx}=\int_a^b \frac{d(k\,K'(x,\alpha))}{dx}\, f(\alpha)\, d\alpha+k\,K'(x,\alpha)\, f(\alpha)\Big|_{x+0}^{x-0}.$$

Nun gilt die eine oder andere der Gleichungen

$$K'(x,\alpha)=\psi(\alpha)\,\varphi'(x),\qquad K'(x,\alpha)=\varphi(\alpha)\,\psi'(x),$$

je nachdem $x<\alpha$ oder $x>\alpha$; man findet daher

$$K'(x,x+0)=\psi(x)\,\varphi'(x),\qquad K'(x,x-0)=\varphi(x)\,\psi'(x),$$

$$K'(x,x-0)-K'(x,x+0)=K'(x+0,x)-K'(x-0,x)=-\frac{1}{k};$$

der obige Ausdruck der Größe $(k\,F')'$ kann also geschrieben werden

$$\frac{d(k\,F'(x))}{dx}=\int_a^b \frac{d(k\,K'(x,\alpha))}{dx}\, f(\alpha)\, d\alpha-f(x).$$

Hieraus ergibt sich mit Rücksicht auf die Differentialgleichung, der die Größe K unterworfen ist,

$$\frac{d(k\,F'(x))}{dx}=\int_a^b l\,K(x,\alpha)\, f(\alpha)\, d\alpha-f(x),$$

oder

$$\frac{d(kF'(x))}{dx}-lF(x)=-f(x).$$

Speziell werde

$$f(x)=\lambda\,U$$

gesetzt und U sei irgend eine Lösung der Integralgleichung

$$U=\lambda\int_a^b K(x,\alpha)\, U(\alpha)\, d\alpha;$$

dann erfüllt U an den Stellen a und b die an die Normalfunktionen gestellten Forderungen, da dies von $K(x, \alpha)$ gilt, und man erhält die Gleichung

$$F(x) = U, \quad \frac{d}{dx}\left(k\frac{dU}{dx}\right) - lU = -\lambda U,$$

d. h. die Sturm-Liouvillesche Differentialgleichung als Folge der Integralgleichung.

Endlich erschließen wir noch als Korollar einen weiteren von Hilbert*) herrührenden Satz, von dem wir Gebrauch machen werden. Es sei $\Phi(x)$ eine mit ihren ersten beiden Ableitungen auf der Strecke J stetige Funktion, die an den Enden a und b denselben Bedingungen wie die Eigenfunktionen unterworfen ist. Setzen wir dann

$$-\frac{d(k\Phi'(x))}{dx} + l\Phi(x) = f(x)$$

und bilden mit dieser offenbar stetigen Funktion $f(x)$ den Ausdruck $F(x)$, so ist nach dem Obigen

$$\frac{d(kF'(x))}{dx} - lF(x) = -f(x),$$

die Differenz $F - \Phi$ ist also eine Lösung der Gleichung

$$\frac{d(ky')}{dx} - ly = 0,$$

die mit ihrer Ableitung stetig ist und an den Stellen $x = a$ und $x = b$ ebenfalls die an die Eigenfunktionen gestellten Forderungen erfüllt. Danach wäre y eine Eigenfunktion, und $\lambda = 0$ der zugehörige Eigenwert, was nach unseren Festsetzungen ausgeschlossen ist; y muß also identisch verschwinden und es ergibt sich

$$\Phi(x) = F(x), \quad \Phi(x) = \int_a^b K(\alpha, x) f(\alpha)\, d\alpha.$$

In dieser Form ist also jede Funktion von den für $\Phi(x)$ geforderten Eigenschaften darstellbar.

§ 3.

Hilfsmittel aus der allgemeinen Theorie der homogenen Integralgleichungen.

Aus der Dissertation von Schmidt**) entlehnen wir folgenden Satz. Es seien $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots$ die sämtlichen normierten Eigenfunktionen des

*) Zweite Mitteilung, Sätze 11 und 16, Göttinger Nachrichten 1904, S. 221 und 230.

**) Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener, § 8 symmetrischen Kerns $K(x, \xi)$, und $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ die zugehörigen Eigenwerte; d. h. es sollen die Gleichungen

$$\varphi_\nu(x) = \lambda_\nu \int_a^b K(x, \alpha) \varphi_\nu(\alpha) d\alpha,$$

$$\int_a^b (\varphi_\nu(\alpha))^2 d\alpha = 1$$

gelten, deren zweite einen in $\varphi_\nu(x)$ verfügbaren konstanten Faktor festlegt. Wenn dann in dem Gebiet $a \leqq x \leqq b$, $a \leqq y \leqq b$ die Reihe

$$\sum_\nu^{1, \infty} \frac{\varphi_\nu(x) \varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu}$$

gleichmäßig konvergiert und der Kern $K(x, y)$ überall endlich und stetig ist, so gilt die Formel

$$K(x, y) = \sum_\nu^{1, \infty} \frac{\varphi_\nu(x) \varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu}, \tag{A}$$

die eine Entwicklung des Kerns nach den Eigenfunktionen ergibt.

Die Voraussetzungen, an die diese Formel gebunden erscheint, sind bei den unten behandelten Kernen nicht ganz erfüllt; wohl aber sind gewisse von Schmidt*) an einer andern Stelle geforderte Eigenschaften immer vorhanden, daß nämlich, wenn $f(\alpha)$ eine auf der Strecke J mit Einschluß der Endpunkte stetige Funktion bedeutet, auch die Größe

$$\int_a^b f(\alpha) K(x, \alpha) d\alpha$$

eine auf der ganzen Strecke J stetige Funktion von x ist, und daß die von Hilbert als iterierter Kern bezeichnete Größe

$$K^2(x, y) = \int_a^b K(x, \alpha) K(\alpha, y) d\alpha$$

bezüglich beider Variablen x, y auf der ganzen Strecke J stetig ist, ohne identisch zu verschwinden.

Diese Eigenschaften, die nur, wenn singuläre Endpunkte auftreten, des Beweises bedürfen, beruhen darauf, daß in den unten behandelten Einzelfällen, wenn z. B. a ein singulärer Endpunkt ist, $\psi(x)$ in ihm logarithmisch unendlich wird, und daß $\varphi(x)$ dieselbe Eigenschaft an der Stelle b besitzt, wenn diese singulär ist. Wenn nun x und y dem Innern

*) Dissertation § 11, Schlußbemerkung.

der Strecke J angehören und $x \leqq y$ ist, findet man sofort aus den in § 2 gegebenen Formen des Kerns die Gleichungen

$$\int_a^b f(\alpha) K(x, \alpha) d\alpha = \psi(x) \int_a^x f(\alpha) \varphi(\alpha) d\alpha + \varphi(x) \int_x^b f(\alpha) \psi(\alpha) d\alpha,$$

$$K^2(x,y) = \psi(x) \psi(y) \int_a^x \varphi(\alpha)^2 d\alpha \quad \varphi(x) \psi(y) \int_x^y \varphi(\alpha) \psi(\alpha) d\alpha + \varphi(x) \varphi(y) \int_y^b \psi(\alpha)^2 d\alpha,$$

deren rechte Seiten bei der angegebenen Beschaffenheit der Größen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ stetig bleiben, auch wenn x oder x und y in einen singulären Endpunkt hineinrücken, womit die von Schmidt geforderten Stetigkeitseigenschaften gesichert sind.

Ebenso sieht man leicht, daß die Größe K^2 nicht identisch verschwindet; setzt man nämlich

$$f(\alpha) = K(\alpha, y),$$

so kann man $K^2(x, y)$ mit der Größe $F(x)$ des § 2 identifizieren und erhält damit die Differentialbeziehung

$$-K(x, y) = \frac{d}{dx}\left(k \frac{dK^2(x, y)}{dx}\right) - lK^2(x, y),$$

aus der das Behauptete folgt, da $K(x, y)$ nicht identisch verschwindet.

Nun sind nach § 6 der Dissertation von Schmidt $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\cdots$ auch die sämtlichen normierten Eigenfunktionen des Kerns K^2, sofern dieser nicht identisch verschwindet, und die zugehörigen Eigenwerte sind λ_1^2, λ_2^2, $\cdots$. Entwickelt man daher den Kern K^2 nach seinen Eigenfunktionen, wofür die nötigen Voraussetzungen erfüllt sind, so erhält man die Gleichung

$$K^2(x, y) = \sum_\nu^{1, \infty} \frac{\varphi_\nu(x) \varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu^2},$$

sobald ihre rechte Seite gleichmäßig bezüglich beider Variablen, die die ganze Strecke J durchlaufen, konvergiert. Diese Voraussetzung wollen wir in allen Einzelfällen als erfüllt nachweisen.

Jetzt erinnern wir uns der allgemeinen Bedingung, unter der eine unendliche Reihe gliedweise differenziert werden kann: Ist auf irgend einer Strecke des Konvergenzbereiches die aus den Ableitungen der einzelnen Glieder gebildete Reihe gleichmäßig konvergent, so ist sie auf dieser Strecke der Ableitung der ursprünglichen Reihe gleich, da sie gliedweise integriert werden kann und dann eine Reihe ergibt, die sich von der ursprünglichen nur um einen konstanten Summanden unterscheidet. Wenn daher jetzt die neue Voraussetzung eingeführt wird, daß die Reihen

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu'(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu^2}, \quad \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu}$$

gleichmäßig konvergieren, wenn x und y beliebige Teilstrecken des Intervalls J durchlaufen, die keinen singulären Endpunkt enthalten, so findet man für dieses Gebiet die Gleichung

$$\frac{dK^2(x,y)}{dx} = \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu'(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu^2},$$

die somit bezüglich beider Variablen für die ganze Strecke J mit Ausschluß singulärer Enden bewiesen ist.

Multipliziert man diese Gleichung mit k und berücksichtigt die Differentialgleichung

$$\frac{d(k\varphi_\nu')}{dx} + (\lambda_\nu - l)\varphi_\nu = 0,$$

so sieht man, daß die rechte Seite gliedweise differenziert die Reihe

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{(-\lambda_\nu + l)\,\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu^2}$$

ergibt, die bei den für x und y geltenden Voraussetzungen gleichmäßig konvergiert, also nach dem erwähnten Satze über das Differenzieren der Reihen die Ableitung der Größe

$$k\,\frac{dK^2(x,y)}{dx}$$

nach x darstellt. Diese ist aber zufolge der oben aus § 2 abgeleiteten Differentialbeziehung zwischen K und K^2

$$\frac{d}{dx}\left(k\,\frac{dK^2(x,y)}{dx}\right) = -K(x,y) + lK^2(x,y);$$

man erhält daher die Gleichungen

$$-K(x,y) + lK^2(x,y) = \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{(-\lambda_\nu + l)\,\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu^2},$$

$$K(x,y) = \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu},$$

sobald x und y Intervalle der bezeichneten Art durchlaufen.

Wendet man auf die letzte Formel nochmals den Satz über das Differenzieren der Reihen an, und setzt man ferner voraus, daß von den Reihen

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu'(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu}, \qquad \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu'(x)\,\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}$$

die erste gleichmäßig konvergiert, wenn x und y sich in der angegebenen Weise bewegen, außerdem aber $|x-y|$ über einer festen Grenze bleibt, die zweite aber gleichmäßig konvergiert, wenn x eine Strecke im Innern des Intervalls J durchläuft, so erhält man folgende Resultate.

(I) Wenn x und y beliebige Teilstrecken des Intervalls J durchlaufen, die keinen singulären Endpunkt enthalten, so gilt die gleichmäßig konvergente Entwicklung

$$\text{(A)} \qquad K(x,y) = \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu}.$$

(II) Unter denselben Voraussetzungen und wenn außerdem $|x-y|$ über einer festen Grenze liegt, gilt die gleichmäßig konvergente Entwicklung

$$\text{(B)} \qquad K'(x,y) = \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu'(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu};$$

ferner gilt die gleichmäßig konvergente Entwicklung

$$\text{(C)} \qquad \frac{dK(x,x)}{dx} = 2\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu'(x)\,\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu},$$

wenn x eine Strecke im Inneren des Intervalls J durchläuft.

Wir werden ferner in den Einzelfällen folgende Eigenschaften der Größen φ_ν ableiten.

(III) Gelten dieselben Voraussetzungen wie unter (II) für x und y, und enthalten die durchlaufenen Strecken keinen Endpunkt, so liegt die Größe

$$\sum_{\nu}^{1,n} \frac{\varphi_\nu'(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu}$$

zwischen endlichen, von n, x und y unabhängigen Grenzen.

(IV) Ist a ein singulärer Endpunkt und gelten die Ungleichungen

$$a \leqq x \leqq a + c, \quad c_1 > c > 0, \quad a + c_1 \leqq \xi < b,$$

so liegt die Größe

$$\int_a^x \sum_{\nu}^{1,n} \varphi_\nu(\alpha)\,\varphi_\nu(\xi)\,d\alpha$$

zwischen endlichen, von x, ξ und n unabhängigen Grenzen.

Die Formel (C) ist im allgemeinen auch an regulären Endpunkten unrichtig. Wenn aber x von a und b verschieden ist, kann man nach § 2 setzen

$$K(x,x) = \varphi(x)\psi(x), \quad K'(x-0,x) = \varphi'(x)\psi(x), \quad K'(x+0,x) = \varphi(x)\psi'(x),$$

also

$$\text{(C)} \quad \frac{1}{2}\,\frac{dK(x,x)}{dx} = \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi'_\nu(x)}{\lambda_\nu} = \frac{1}{2}\,[K'(x+0,x) + K'(x-0,x)].$$

Eine andere Formel summiert die Reihe (C), wenn $x = a$ gesetzt wird und a ein regulärer Endpunkt ist. Die zugehörige Grenzbedingung sei

$$\varphi'(a) - h\varphi(a) = 0,$$

und die Konstante h endlich; dann findet man

$$\sum \frac{\varphi_\nu(a)\,\varphi'_\nu(a)}{\lambda_\nu} = h \sum \frac{(\varphi_\nu(a))^2}{\lambda_\nu},$$

also nach (I)

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(a)\,\varphi'_\nu(a)}{\lambda_\nu} = hK(a, a).$$

Da nun nach § 2 zu setzen ist

$$K(x, x) = \varphi(x)\psi(x), \quad K'(x-0, x) = \varphi'(x)\psi(x),$$

und diese Größen auch in dem regulären Endpunkte a endlich bleiben, so findet man als Korollar der Eigenschaft (I) die Gleichung

$$\text{(D)} \qquad \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(a)\,\varphi'_\nu(a)}{\lambda_\nu} = \varphi'(a)\psi(a) = K'(a-0, a) = \lim_{\varepsilon=0} K'(a+\varepsilon-0,\ a+\varepsilon),$$

und eine analoge Formel gilt natürlich, wenn b ein regulärer Endpunkt der Strecke J und die Konstante H endlich ist.

§ 4.

Grundformeln für die Darstellung willkürlicher Funktionen.

Mittels der Formeln (A), (B), (C), (D) können wir nun die wichtigsten die Darstellung willkürlicher Funktionen betreffenden Fragen in der gewünschten genaueren Weise beantworten. Unsere Schlußreihe kann in folgender Weise charakterisiert werden. Der für die Darstellungsformeln maßgebende Ausdruck

$$M_\nu = \varphi_\nu(x)\int_\xi^\eta f(\alpha)\,\varphi_\nu(\alpha)\,d\alpha$$

wird mit Hilfe der Differentialgleichung der Eigenfunktionen umgeformt, indem wir unter dem Integralzeichen

$$\varphi_\nu(\alpha) = \frac{1}{\lambda_\nu}\left\{-\frac{d(k(\alpha)\varphi'_\nu(\alpha))}{d\alpha} + l(\alpha)\varphi_\nu(\alpha)\right\}$$

setzen. Dann wird durch partielle Integration bewirkt, daß unter dem Integralzeichen $\varphi'_\nu(\alpha)$ und $\varphi''_\nu(\alpha)$ nicht mehr vorkommen. Nach dieser Umgestaltung wird die Summe aller M_ν gebildet und werden die auftretenden Reihen

$$\sum_\nu^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(\alpha)\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}, \quad \sum_\nu^{1,\infty} \frac{\varphi'_\nu(\alpha)\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}$$

nach den Formeln des § 3 durch K und K' ausgedrückt. So erhält man einen Ausdruck, in dem die mit Integralzeichen behafteten Glieder ähnliche Form haben, wie in dem umgestalteten Ausdruck M_ν, und nun wird die vorher durchgeführte partielle Integration gewissermaßen rückgängig gemacht, indem man bewirkt, daß unter dem Integralzeichen nicht K, sondern die zweite Ableitung dieser Größe steht. Endlich erhält man aus der Differentialgleichung

$$\frac{d(k(\alpha)K'(\alpha, x))}{d\alpha} - l(\alpha)K(\alpha, x) = 0$$

eine von Integralzeichen freie, unmittelbar diskutierbare Gestalt der Summe aller M_ν.

Um diese Rechnung im einzelnen durchzuführen, beginnen wir mit den unmittelbar ersichtlichen Gleichungen

$$\begin{aligned}
M_\nu = \frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}\int_\xi^\eta f(\alpha)\left[l(\alpha)\varphi_\nu(\alpha) + \frac{d(k(\alpha)\varphi'_\nu(\alpha))}{d\alpha}\right]d\alpha \\
= \int_\xi^\eta f(\alpha)l(\alpha)\frac{\varphi_\nu(\alpha)\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}\,d\alpha - f(\alpha)k(\alpha)\frac{\varphi'_\nu(\alpha)\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}\Big|_\xi^\eta \\
+ \frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}\int_\xi^\eta f'(\alpha)k(\alpha)\varphi'_\nu(\alpha)d\alpha \\
= \int_\xi^\eta f(\alpha)l(\alpha)\frac{\varphi_\nu(\alpha)\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}\,d\alpha - f(\alpha)k(\alpha)\frac{\varphi'_\nu(\alpha)\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}\Big|_\xi^\eta \\
+ f'(\alpha)k(\alpha)\frac{\varphi_\nu(\alpha)\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}\Big|_\xi^\eta - \int_\xi^\eta \frac{d(f'(\alpha)k(\alpha))}{d\alpha}\frac{\varphi_\nu(\alpha)\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}\,d\alpha.
\end{aligned}$$

In diesen Gleichungen ist schon benutzt, was wir später, auch wenn ξ und η veränderlich sind, immer festhalten wollen, daß die Funktion $f(\alpha)$ mit ihren ersten beiden Ableitungen auf der Strecke von $\alpha = \xi$ bis $\alpha = \eta$ stetig sei. Für die Größen x, ξ und η aber machen wir solche Voraussetzungen, daß die Summe aller M_ν gleichmäßig konvergiert, und zwar setzen wir fest, daß jede dieser Größen eine Teilstrecke des Intervalls J durchlaufe, die keinen singulären Endpunkt enthält. Die von der Größe ξ durchlaufene Strecke liege entweder im Inneren von J, oder ziehe sich in den Endpunkt a zusammen, wenn dieser regulär ist, so daß dann zugelassen wird, daß ξ den festen Wert a hat. Ferner seien c und c_1 beliebig kleine positive Konstante, und gelte die Ungleichung

$$\eta - \xi > c.$$

Bezüglich der Größe x verfolgen wir zwei Annahmen:

1. Es bestehe eine der Beziehungen

$$x - \eta > c_1, \quad \xi - x > c_1.$$

2. Es sei $x = \xi$.

Unter diesen Voraussetzungen sind zunächst in der Reihe

$$R(x)^{\xi,\eta} = \sum_{\nu}^{1,\infty} M_\nu,$$

wenn wir für M_ν den letzten der erhaltenen Ausdrücke setzen, die von Integralzeichen freien Summen

$$-\sum_{\nu}^{1,\infty} f(\alpha)\,k(\alpha)\,\frac{\varphi_\nu'(\alpha)\,\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}\Bigg|_\xi^\eta + \sum_{\nu}^{1,\infty} f'(\alpha)\,k(\alpha)\,\frac{\varphi_\nu(\alpha)\,\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}\Bigg|_\xi^\eta$$

gleichmäßig konvergent. Für die Summen

$$\sum_{\nu}^{1,\infty}\frac{\varphi_\nu(\xi)\,\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}, \quad \sum_{\nu}^{1,\infty}\frac{\varphi_\nu(\eta)\,\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}$$

ist dies aus der Eigenschaft (I) des § 3 unmittelbar ersichtlich, da die von x, ξ und η durchlaufenen Strecken keinen singulären Endpunkt enthalten. Dasselbe gilt aber auch nach § 3 (II) von der Summe

$$\sum_{\nu}^{1,\infty}\frac{\varphi_\nu'(\eta)\,\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu},$$

da die Differenz $|\eta - x|$ bei beiden Voraussetzungen 1. und 2. über einer positiven Grenze bleibt, und von der Summe

$$\sum_{\nu}^{1,\infty}\frac{\varphi_\nu'(\xi)\,\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}$$

bei der Annahme 1., die auch die Größe $|\xi - x|$ der Null nicht beliebig nahe kommen läßt. Bei der Annahme 2. ist letztere Summe

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu'(\xi)\,\varphi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu},$$

und diese konvergiert wiederum nach § 3 (II) gleichmäßig, da ξ entweder ein im Inneren der Strecke J liegendes Intervall durchläuft oder den konstanten Wert a behält. Die Werte aller dieser Summen ergeben sich aus den Formeln (B), (C) und (D) des § 3.

Da ferner die Summe

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(\alpha)\,\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}$$

gleichmäßig konvergiert, wenn α das Intervall von ξ bis η durchläuft, so konvergiert die ganze Reihe $R(x)^{\xi,\eta}$ bei unseren Voraussetzungen gleichmäßig, und man kann bei den im letzten Ausdruck von M_ν auftretenden Integralen die Zeichen der Summation und Integration vertauschen. So erhält man den Ausdruck

$$\begin{aligned} R(x)^{\xi,\eta} = \int_\xi^\eta f(\alpha)\,l(\alpha)\,K(\alpha, x)\,d\alpha - f(\eta)k(\eta)\,K'(\eta, x) + f'(\alpha)k(\alpha)\,K(\alpha, x)\Big|_\xi^\eta \\ + f(\xi)\,k(\xi)\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu'(\xi)\,\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu} - \int_\xi^\eta K(\alpha, x)\,\frac{d(f'(\alpha)\,k(\alpha))}{d\alpha}\,d\alpha. \end{aligned}$$

Das letzte Integral ergibt, wenn man partiell integriert,

$$\begin{aligned} -\int_\xi^\eta K(\alpha, x)\,\frac{d(f'(\alpha)k(\alpha))}{d\alpha}\,d\alpha &= -f'(\alpha)k(\alpha)K(\alpha, x)\Big|_\xi^\eta + \int_\xi^\eta f'(\alpha)k(\alpha)\,K'(\alpha, x)\,d\alpha \\ &= -f'(\alpha)k(\alpha)K(\alpha, x)\Big|_\xi^\eta + f(\alpha)k(\alpha)K'(\alpha, x)\Big|_\xi^\eta - \int_\xi^\eta f(\alpha)\,\frac{d(k(\alpha)\,K'(\alpha, x))}{d\alpha}\,d\alpha; \end{aligned}$$

setzt man diesen Wert in die vorige Gleichung und berücksichtigt die oben angeführte Differentialgleichung, die die Größe $K(\alpha, x)$ erfüllt, so erhält man den einfachen Ausdruck

$$R(x)^{\xi,\eta} = f(\xi)k(\xi)\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu'(\xi)\,\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu} - f(\xi)k(\xi)\,K'(\xi, x),$$

dessen Wert in jedem Falle bestimmt werden kann.

Gilt nämlich die Voraussetzung 1., so bleibt $|x-\xi|$ über einer positiven Grenze, und ist daher nach § 3 (II) zu setzen

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi'_\nu(\xi)\,\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu} = K'(\xi, x),$$

also

$$R(x)^{\xi,\eta} = 0.$$

Macht man zweitens die Annahme 2., so ist in dem Ausdruck $R(x)^{\xi,\eta}$ für die zunächst zweideutige Größe $K'(\xi, x)$ der Wert $K'(\xi+0, \xi)$ zu nehmen, da das letzte Glied von der unteren Grenze des Integrals

$$\int_\xi^\eta d[f(\alpha)k(\alpha)\,K'(\alpha, x)]$$

herrührt. Ist nun ξ zunächst von a verschieden, so ergibt die Formel (C) des § 3

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi'_\nu(\xi)\,\varphi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu} = \frac{1}{2}\,[K'(\xi+0, \xi) + K'(\xi-0, \xi)]$$

und man erhält aus dem für $R(x)^{\xi,\eta}$ aufgestellten Ausdrucke

$$R(\xi)^{\xi,\eta} = \frac{1}{2}\,f(\xi)k(\xi)\,[K'(\xi-0, \xi) - K'(\xi+0, \xi)],$$

also zufolge der Unstetigkeit der Funktion K'

$$R(\xi)^{\xi,\eta} = \frac{1}{2}\,f(\xi).$$

Setzt man dagegen $\xi = a$ und ist die Konstante h endlich, so ergibt sich nach § 3 (D) und mittels der in § 2 angegebenen Werte von $K'(a \pm 0, a)$ die Gleichung

$$R(a)^{a,\eta} = -f(a)k(a)\,K'(a+0, a) + f(a)k(a)\,K'(a-0, a) = f(a).$$

Alle drei Reihen, deren Werte hiermit bestimmt sind, konvergieren gleichmäßig bei den zugelassenen Werten von x, ξ und η, da dies im allgemeinen von der Reihe $R(x)^{\xi,\eta}$ bewiesen ist.

Analog den letzten beiden Ausdrücken $R(\xi)^{\xi,\eta}$ und $R(a)^{a,\eta}$ erhält man offenbar, wenn man die Rollen der Endpunkte a und b vertauscht und die Integrationsrichtung überall umkehrt, die Formeln

$$R(\eta)^{\xi,\eta} = \frac{1}{2}\,f(\eta), \quad R(b)^{\xi,b} = f(b);$$

in der ersten Gleichung wird vorausgesetzt, daß das Intervall der Größe η den Endpunkt b nicht enthalte oder daß beständig $\eta = b$ sei, während ξ auch in den Endpunkt a, wenn dieser regulär ist, hineinrücken darf; in der zweiten muß b ein regulärer Endpunkt sein.

Läßt man endlich x zwischen ξ und η liegen, und die Differenzen $x-\xi$ und $\eta-x$ über festen Grenzen bleiben, während ξ und η beliebige Teilintervalle der Strecke J durchlaufen, denen keine singulären Endpunkte angehören, so erhält man die gleichmäßig konvergente Reihe

$$R(x)^{\xi,\eta}=R(x)^{\xi,x}+R(x)^{x,\eta}=f(x);$$

dies ergibt sich offenbar, indem man die für $R(\xi)^{\xi,\eta}$ und $R(\eta)^{\xi,\eta}$ abgeleiteten Werte kombiniert.

Die erhaltenen Resultate können in folgender Weise zusammengefaßt werden.

Es seien $\varphi_\nu(x)$ *die normierten Eigenfunktionen eines Kernes* $K(x,y)$, *für den die Eigenschaften* (I) *und* (II) *des* § 3 *gesichert sind, und werde allgemein gesetzt*

$$R(x)^{\xi,\eta}=\sum_{\nu}^{1,\infty}\varphi_\nu(x)\int_{\xi}^{\eta}f(\alpha)\varphi_\nu(\alpha)d\alpha.$$

Jede der Größen x, ξ, η *durchlaufe eine Strecke, die einen Teil des Intervalls* J *bildet, ohne einen singulären Endpunkt zu enthalten; die Funktion* $f(\alpha)$ *bleibe mit ihren ersten beiden Ableitungen auf der Strecke von* ξ *bis* η *stetig. Die Größen* $|x-\xi|$, $|y-\eta|$ *und* $\eta-\xi$ *mögen über positiven Grenzen bleiben;* c, c_1 *seien beliebig kleine positive Größen. Dann gelten folgende Gleichungen unter den neben ihnen stehenden besonderen Bedingungen.*

$$\xi-a>c,\quad R(\xi)^{\xi,\eta}=\frac{1}{2}f(\xi),$$

$$b-\eta>c_1,\quad R(\eta)^{\xi,\eta}=\frac{1}{2}f(\eta),$$

$$\xi<x<\eta,\quad R(x)^{\xi,\eta}=f(x),$$

$$(x-\xi)(x-\eta)>0,\quad R(x)^{\xi,\eta}=0.$$

Ist a *ein regulärer Endpunkt und die zugehörige Konstante* h *endlich, so gilt die Gleichung*

$$R(a)^{a,\eta}=f(a),$$

ebenso, wenn b *ein regulärer Endpunkt und die Konstante* H *endlich ist,*

$$R(b)^{\xi,b}=f(b).$$

In allen diesen Gleichungen konvergieren die Reihen R *gleichmäßig.*

§ 5.

Ergänzungen und Ergebnisse.

Die erhaltenen Resultate zeigen auch, unter welchen Bedingungen eine Funktion $f(x)$ durch die in den Anwendungen hauptsächlich vorkommende Reihe

$$R(x) = R(x)^{a,b} = \sum_{\nu}^{1,\infty} \varphi_\nu(x) \int_a^b f(\alpha)\varphi_\nu(\alpha)\,d\alpha$$

dargestellt werden kann.

Zunächst seien beide Endpunkte a und b regulär und die Strecke J werde durch die Stellen

$$a = \xi_0,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_{n-1},\ \xi_n = b$$

in solche Teilstrecken zerlegt, daß innerhalb jeder von ihnen $f(x)$ mit den ersten beiden Ableitungen stetig sei. Setzt man dann allgemein $\xi_\nu = \eta_{\nu-1}$, so ist offenbar

$$R(x) = R(x)^{\xi_0,\eta_0} + R(x)^{\xi_1,\eta_1} + \cdots + R(x)^{\xi_{n-1},\eta_{n-1}}$$

und die Summanden rechts sind nach § 4 zu bestimmen. Fällt x mit keiner Stelle ξ zusammen, so ist nur ein Summand, etwa der $(p+1)^{\text{te}}$, von Null verschieden, derjenige nämlich, dessen Integrationsintervall den Wert x umfaßt, und dieser hat den Wert

$$R(x)^{\xi_p,\eta_p} = R(x)^{\xi_p,x} + R(x)^{x,\eta_p} = f(x),$$

so daß man erhält

$$R(x) = f(x).$$

Fällt x dagegen mit einem Werte $\xi_\nu = \eta_{\nu-1}$ zusammen, so hat man nur zwei von Null verschiedene Summanden

$$R(\xi_\nu)^{\xi_\nu,\eta_\nu} = \frac{1}{2} f(x_\nu), \quad R(\eta_{\nu-1})^{\xi_{\nu-1},\eta_{\nu-1}} = \frac{1}{2} f(\eta_{\nu-1});$$

genauer hat man, wenn $f(x)$ an der Stelle ξ_ν unstetig ist, zu setzen

$$f(\xi_\nu) = f(\xi_\nu + 0), \quad f(\eta_{\nu-1}) = f(\eta_{\nu-1} - 0) = f(\xi_\nu - 0),$$

und daraus ergibt sich für das ganze Innere der Strecke J die Gleichung

$$R(x) = \frac{1}{2}\,[f(x+0) + f(x-0)].$$

Endlich erhält man, wenn x einer der Grenzen a und b gleich gesetzt wird, wieder jedesmal nur einen von Null verschiedenen Summanden, der nach § 4 die folgenden Werte hat:

$$R(a)^{\xi_0,\eta_0} = f(a), \quad R(b)^{\xi_{n-1},\eta_{n-1}} = R(b)^{\xi_{n-1},b} = f(b),$$

so daß sich für die Endpunkte bezüglich der Reihe $R(x)$ ergibt

$$R(a) = f(a), \quad R(b) = f(b).$$

Um die analogen Resultate für den Fall, daß mindestens eine der Grenzen, etwa a, singulär ist, abzuleiten, bedarf es einer ergänzenden Untersuchung; denn da jetzt der Summand R^{a,η_0} nach § 4 nicht zu bestimmen ist, würde man aus den durchgeführten Betrachtungen zunächst nur eine Gleichung

$$R(x)^{\eta_0, \eta_n - 2} = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$$

erhalten, in der x ein beliebiger Wert im Inneren von J sein könnte; wäre b regulär, so könnte η_{n-2} durch b ersetzt werden.

Wir definieren nun eine Hilfsfunktion $g(\alpha)$ in folgender Weise. Auf der Strecke von $\alpha = a$ bis $\alpha = \eta_0$, auf der $f(\alpha)$, $f'(\alpha)$ und $f''(\alpha)$ stetige Funktionen sind, sei $g(\alpha) = f(\alpha)$; ferner sei $g(\alpha)$ auf der ganzen Strecke J mit ihren ersten beiden Ableitungen stetig und es sei $g(x) = f(x)$; endlich sei $g(\alpha) = 0$ auf der Strecke von η_{n-2} bis b, der x nicht angehört. Dann genügt $g(\alpha)$ an beiden Enden der Strecke J den an die Eigenfunktionen gestellten Forderungen, ist also nach § 2 in der Form

$$g(x) = \int_a^b K(x, \alpha) h(\alpha)\, d\alpha$$

darstellbar, wobei $h(\alpha)$ eine auf der Strecke J stetige Funktion bedeutet. Eine solche Funktion ist aber, wie wir aus der allgemeinen Theorie der Integralgleichungen*) entnehmen, nach den Eigenfunktionen in eine auf der ganzen Strecke J gleichmäßig konvergierende Reihe zu entwickeln, deren Koeffizienten ähnlich wie in der Fourierschen Reihe bestimmt werden:

$$g(x) = \sum_\nu^{1,\infty} \varphi_\nu(x) \int_a^b g(\alpha)\, \varphi_\nu(\alpha)\, d\alpha;$$

denn die Bedingungen dieses Satzes sind nach § 3 bei unsern Kernen erfüllt.

Anderseits ergeben die Sätze des § 4

$$\sum_\nu^{1,\infty} \varphi_\nu(x) \int_{\eta_0}^{\eta_n - 2} g(\alpha)\, \varphi_\nu(\alpha)\, d\alpha = f(x) = g(x),$$

da die Reihe links als die für die Funktion $g(\alpha)$ gebildete Reihe $R^{\eta_0, \eta_n - 2}$ anzusehen ist; sie konvergiert nach § 4 gleichmäßig, solange $\eta_0 - a$, $b - \eta_{n-2}$, $x - \eta_0$ und $\eta_{n-2} - x$ über festen positiven Grenzen bleiben. Kombiniert man diese Gleichung mit der vorhergehenden für $g(x)$ aufgestellten, so findet man das gewünschte Resultat:

$$\sum_\nu^{1,\infty} \varphi_\nu(x) \int_a^{\eta_0} g(\alpha)\, \varphi_\nu(\alpha)\, d\alpha = \sum_\nu^{1,\infty} \varphi_\nu(x) \int_a^{\eta_0} f(\alpha)\, \varphi_\nu(\alpha)\, d\alpha = 0,$$

und diese Reihe konvergiert unter derselben Bedingung wie $R^{\eta_0, \eta_n - 2}$ gleichmäßig.

*) Schmidt, Dissertation § 9; § 11, Schlußbemerkung.

Ähnlich würde sich ergeben

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \varphi_\nu(x) \int_{\eta_{n-2}}^{b} f(\alpha)\,\varphi_\nu(\alpha)\,d\alpha = 0,$$

und damit ist die Gleichung

$$R(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$$

für das Innere der Strecke J auch in dem Fall erwiesen, daß singuläre Endpunkte zugelassen werden. *Jede Funktion also, die ebenso wie ihre erste und zweite Ableitung auf der Strecke J nur eine endliche Anzahl endlicher Sprünge macht, sonst aber stetig ist, kann bei den Voraussetzungen* § 3 (I), (II) *nach den Eigenfunktionen $\varphi_\nu(x)$ so entwickelt werden, wie es die letzte Gleichung zeigt.*

Um noch allgemeinere Klassen von Funktionen entwickeln zu können, setzen wir zunächst auf der ganzen Strecke

$$f(\alpha) = 1$$

und führen die Bezeichnung

$$\Phi(\alpha, n) = \sum_{\nu}^{1,n} \varphi_\nu(\xi)\,\varphi_\nu(\alpha)$$

ein. Dann ergibt sich aus der Differentialgleichung der Eigenfunktionen als spezieller Fall einer in § 4 benutzten Gleichung

$$\int_{\xi}^{\eta} \Phi(\alpha, n)\,d\alpha = \sum_{\nu}^{1,n} \varphi_\nu(\xi) \int_{\xi}^{\eta} \varphi_\nu(\alpha)\,d\alpha = k(\alpha) \sum_{\nu}^{1,n} \frac{\varphi_\nu(\xi)\,\varphi_\nu'(\alpha)}{\lambda_\nu}\Bigg|_{\xi}^{\eta}$$
$$+ \int_{\xi}^{\eta} l(\alpha) \sum_{\nu}^{1,n} \frac{\varphi_\nu(\xi)\,\varphi_\nu(\alpha)}{\lambda_\nu};$$

wenn daher ξ und η um beliebig kleine endliche Strecken voneinander und von a und b entfernt bleiben, so liegt dieser Ausdruck zwischen festen von n, ξ und η unabhängigen Grenzen, da dies vom ersten Teil der rechten Seite nach § 3 (III) gilt, vom zweiten Teil aber aus der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(\xi)\,\varphi_\nu(\alpha)}{\lambda_\nu} = K(\xi, \alpha)$$

folgt. Ferner ergibt sich aus § 4 der Satz

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \varphi_\nu(\xi) \int_{\xi}^{\eta} \varphi_\nu(\alpha)\,d\alpha = \lim_{n=\infty} \int_{\xi}^{\eta} \Phi(\alpha, n)\,d\alpha = \frac{1}{2}$$

und dieser Grenzwert wird unter der Voraussetzung

$$a + c_0 < \xi < \eta < b - c_2, \quad \eta - \xi > c_1,$$

in der durch c beliebig kleine positive Konstante bezeichnet sind, gleichmäßig angestrebt. Für die Funktion $\Phi(\alpha, n)$ sind daher die Voraussetzungen erfüllt, unter denen man aus der letzten Gleichung nach einer von du Bois-Reymond herrührenden Methode mittels des zweiten Mittelwertsatzes schließen kann

$$\lim_{n=\infty} \int_{\xi}^{\eta} f(\alpha)\,\Phi(\alpha, n)\, d\alpha = \sum_{\nu}^{1,\infty} \varphi_\nu(\xi) \int_{\xi}^{\eta} f(\alpha)\,\varphi_\nu(\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{2} f(\xi+0),$$

wobei $f(\alpha)$ eine beliebige Funktion bedeutet, die auf der Strecke von $\alpha = \xi$ bis $\alpha = \eta$ von beschränkter Schwankung ist. Man kontrolliert diese Behauptung leicht auf Grund der Darstellung von Jordan*), der wir uns mit der Bezeichnung $\Phi(\alpha, n)$ angeschlossen haben.

Analog der letzten Gleichung findet man offenbar, indem man die Rollen der Größen ξ und η vertauscht,

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \varphi_\nu(\eta) \int_{\xi}^{\eta} f(\alpha)\,\varphi_\nu(\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{2} f(\eta-0)$$

und hieraus, wenn $f(\alpha)$ auf der ganzen Strecke J von beschränkter Schwankung ist, und x zwischen $a + c_0$ und $b - c_2$ liegt,

$$R(x)^{a+c_0,\, b-c_2} = \sum_{\nu}^{1,\infty} \varphi_\nu(x) \int_{a+c_0}^{b-c_2} f(\alpha)\,\varphi_\nu(\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)].$$

Um in diese Formel die erwünschten Integrationsgrenzen a und b einführen zu können, gehen wir davon aus, daß nach den an die Funktion $g(\alpha)$ geknüpften Erwägungen, wenn

$$x > a + c_0 \geqq \eta > a$$

angenommen wird, die Gleichung

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \varphi_\nu(x) \int_{a}^{\eta} \varphi_\nu(\alpha)\, d\alpha = 0$$

gilt; die Reihe konvergiert bezüglich der Variablen x und η gleichmäßig, wenn $x - (a + c_0)$ und $\eta - a$ über beliebig kleinen festen Grenzen bleiben. Ziehen wir jetzt, was bisher noch nicht geschehen ist, die Eigenschaft § 3 (IV) heran und setzen, abweichend von der bisherigen Bezeichnung,

$$\Phi(\alpha, n) = \sum_{\nu}^{1,n} \varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\alpha),$$

---

*) Cours d'analyse Bd. 2, Nr. 221.

so sehen wir, daß das Integral

$$\int_a^\eta \Phi(\alpha, n)\, d\alpha$$

zwischen endlichen von n und η unabhängigen Grenzen liegt, und zwar auch wenn $\eta - a$ beliebig klein wird. Außerdem gibt die soeben aufgestellte Gleichung

$$\lim_{n=\infty} \int_a^\eta \Phi(\alpha, n)\, d\alpha = 0,$$

und der Grenzwert wird gleichmäßig angestrebt, wenn η die Strecke von $a + c_0$ bis zu einer a beliebig wenig übertreffenden Grenze herab durchläuft. Der Ausdruck $\Phi(\alpha, n)$ hat daher wiederum die an der zitierten Stelle von Jordan geforderten Eigenschaften, aus denen man, wenn $f(x)$ eine Funktion von beschränkter Schwankung ist, schließen kann

$$\lim_{n=\infty} \int_a^\eta f(\alpha)\, \Phi(\alpha, n)\, d\alpha = 0,$$

oder, indem man speziell $\eta = a + c_0$ setzt

$$R(x)^{a, a+c_0} = \sum_\nu^{1,\infty} \varphi_\nu(x) \int_a^{a+c_0} f(\alpha)\, \varphi_\nu(\alpha)\, d\alpha = 0.$$

Kombiniert man dies Resultat mit dem für $R^{a+c_0, b-c_2}$ gefundenen Ausdruck und stellt eine analoge Formel für das Intervall von $b - c_2$ bis b auf, so ergibt sich schließlich die erwünschte Gleichung

$$R^{a,b} = R^{a, a+c_0} + R^{a+c_0, b-c_2} + R^{b-c_2, b}$$
$$= \sum_\nu^{1,\infty} \varphi_\nu(x) \int_a^b f(\alpha)\, \varphi_\nu(\alpha)\, d\alpha = \tfrac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)],$$

die somit unter den Voraussetzungen § 3, (I) *bis* (IV) *für eine beliebige Funktion von beschränkter Schwankung und für das Innere der Strecke* J *bewiesen ist.*

Will man von der Eigenschaft (IV), die im allgemeinen schwer zu beweisen ist, keinen Gebrauch machen, so braucht man nur vorauszusetzen, daß die Funktion $f(\alpha)$ von einem singulären Endpunkte an eine beliebig kleine Strecke weit stetig sei und stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung besitze, im übrigen aber von beschränkter Schwankung sei.

Endlich kann mittels der jetzt vorliegenden Ergebnisse auch gezeigt werden, daß die Reihe $R(x)$ gleichmäßig konvergiert, wenn die Variable x

eine Strecke durchläuft, die in einer größeren enthalten ist, auf der die Funktion $f(x)$ stetig bleibt. Wir können uns betreffs dieses Nachweises auf eine Abhandlung berufen*), in der dieser Satz zwar nur für die Sturm-Liouvilleschen Normalfunktionen, aber doch im wesentlichen nach einer allgemeinen Methode abgeleitet ist. Das Integral

$$\int_\xi^\eta \Phi(\alpha, n)\, d\alpha$$

konvergiert nämlich nach den oben erhaltenen Resultaten genau in dem Sinne gleichmäßig gegen seine Grenze $\frac{1}{2}$, wie es a. a. O.**) vorausgesetzt ist. Allerdings ist dort mittels der asymptotischen Darstellung der Normalfunktionen bewiesen, daß die Reihe

$$\sum_\nu^{1,\infty} \varphi_\nu(x) \int_a^\eta \varphi_\nu(\alpha) f(\alpha)\, d\alpha = \lim_{n=\infty} \int_a^\eta f(\alpha)\, \Phi(\alpha, n)\, d\alpha$$

bei den Voraussetzungen

$$x > \eta + c, \quad c > 0,$$

und wenn $f(\alpha)$ von beschränkter Schwankung ist, gleichmäßig gegen den Wert Null konvergiert; das haben wir aber soeben aus der Eigenschaft (IV) erschlossen, was nötig war, da die asymptotische Darstellung im allgemeinen an den singulären Stellen ungültig wird. Für die zitierte Argumentation sind also die Grundlagen auch hier gesichert, und der ausgesprochene Satz über die gleichmäßige Konvergenz der Reihe $R(x)$ ist so gut wie bewiesen.

§ 6.

Anwendungen: die Sturm-Liouvilleschen Reihen.

Von Sturm und Liouville sind eingehend diejenigen Normalfunktionen untersucht, bei denen auf der Strecke J die Größe k von Null verschieden und l endlich, beide Endpunkte a und b also regulär sind, und der Kern $K(x, \xi)$ endlich und stetig bleibt, wenn jedes seiner Argumente die ganze Strecke J durchläuft. Unter dieser Voraussetzung kann man die Gleichung

$$\frac{d(ky')}{dx} + (\lambda - l)y = 0$$

durch die Substitutionen

$$z = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{k}}, \quad U = y\sqrt[4]{k}$$

*) Math. Annalen Bd. 60, S. 411 ff.

**) a. a. O. S. 408.

in die Gleichung

$$\frac{d^2 U}{dz^2} + (\lambda - l_1) U = 0$$

überführen. Wird hier als unabhängige Variable das Produkt aus z und einem passenden konstanten Faktor eingeführt, und die Bedeutung der Buchstaben x, l, λ in leicht zu übersehender Weise geändert, so bewirkt man, daß das Intervall J sich von 0 bis π erstreckt, und die Differentialgleichung der Normalfunktionen ist

$$\frac{d^2 U}{dz^2} + (\lambda - l) U = 0,$$

wobei l auf der Strecke J endlich ist und nach § 2 so eingerichtet gedacht werden kann, daß keiner der Eigenwerte verschwindet. Die Grenzbedingungen sind

$$\frac{dU}{dx} - hU \Big|^0 = 0, \quad \frac{dU}{dx} + HU \Big|^\pi = 0,$$

wobei auch unendliche Werte von h und H, d. h. Bedingungen von der Form

$$U|^0 = 0, \quad U|^\pi = 0$$

nicht ausgeschlossen sind. Wir bleiben bei der Annahme endlicher Werte von h und H, da andernfalls nur leichte Modifikationen nötig werden.

Unter diesen Voraussetzungen gelten nun nach Liouville*), wenn ϱ den positiven Wert von $\sqrt{\lambda}$ bedeutet, die Formeln

$$U = \cos \varrho x + \frac{\Psi}{\varrho}, \quad \frac{U'}{\varrho} = -\sin \varrho x + \frac{\Psi}{\varrho},$$

$$\varrho = \sqrt{\lambda} = \nu + \frac{\Psi}{\nu},$$

wobei $\nu = 1, 2, \cdots$ zu setzen ist und durch Ψ, wie auch fernerhin, Größen bezeichnet sind, die zwischen endlichen, von ν und x unabhängigen Grenzen verbleiben.

Um die normierten Eigenfunktionen herzustellen, benutzen wir die für die eingeführte Größe U von Liouville abgeleitete Formel**)

$$\int_0^\pi U(\alpha)^2 \, d\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\Psi}{\nu};$$

da nun der angegebene Wert von ϱ ergibt

---

*) Liouville, Journal de Math. (1) Bd. 2. Kneser, Math. Annalen Bd. 58, S. 116.

**) Math. Annalen Bd. 58, S. 122.

$$\cos \varrho x = \cos \nu x \cos \frac{\Psi}{\nu} - \sin \nu x \sin \frac{\Psi}{\nu} = \cos \nu x + \frac{\Psi}{\nu},$$

$$\sin \varrho x = \sin \nu x + \frac{\Psi}{\nu},$$

so findet man als Ausdruck der normierten Eigenfunktionen

$$U\left[\int_0^\pi U(\alpha)^2 d\alpha\right]^{-\frac{1}{2}} = \varphi_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \nu x + \frac{\Psi}{\nu},$$

$$\frac{\varphi_\nu'(x)}{\nu} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \nu x + \frac{\Psi}{\nu},$$

und die zugehörigen Eigenwerte sind

$$\lambda_\nu = \varrho^2 = \nu^2 + \frac{\Psi}{\nu}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{\lambda_\nu} = \frac{1}{\nu^2}\left(1 + \frac{\Psi}{\nu}\right), \quad \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu} = \frac{2}{\pi}\,\frac{\cos \nu x \cos \nu y}{\nu^2} + \frac{\Psi}{\nu^3}.$$

Die Reihe

$$\sum_\nu^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu}$$

konvergiert daher gleichmäßig, wenn x und y das ganze Intervall J mit Einschluß der Grenzen durchlaufen, und damit ist nach dem in § 3 zitierten Satze von Schmidt die Gleichung (A) erwiesen.

Um auch die Formeln (B) und (C) zu erhalten, gehen wir davon aus, daß die aufgestellten Formen der normierten Eigenfunktionen ergeben

$$\frac{\varphi_\nu'(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu} = \frac{\varphi_\nu'(x)}{\nu}\,\varphi_\nu(y)\left(\frac{1}{\nu} + \frac{\Psi}{\nu^2}\right) = -\frac{2 \sin \nu x \cos \nu y}{\pi \nu} + \frac{\Psi}{\nu^2},$$

$$\sum_\nu \frac{\varphi_\nu'(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu} = -\frac{1}{\pi}\sum_\nu \frac{\sin \nu(x+y)}{\nu} - \frac{1}{\pi}\sum_\nu \frac{\sin \nu(x-y)}{\nu} + \sum_\nu \frac{\Psi}{\nu^2}.$$

Hier ist das letzte Glied der rechten Seite gleichmäßig konvergent, wie immer x und y im Intervall J sich bewegen mögen. Nehmen wir aber an, x durchlaufe ein Intervall, das einen Teil von J bildet, den Punkt y aber nicht enthält, so bleiben $x - y$ und $x + y$ oberhalb einer positiven Grenze und unterhalb eines Wertes von der Form $2\pi - c$, wobei c positiv ist. Daraus folgt die gleichmäßige Konvergenz auch des ersten und zweiten Gliedes auf der rechten Seite unserer Gleichung; denn es ist bekannt*), daß die Reihe

$$S = \sum_\nu^{1,\infty} \frac{\sin \nu u}{\nu}$$

*) Weber-Wellstein, Enc. d. Elementarmathematik Bd. 1, § 135.

auf jeder Strecke, die durch die Beziehungen

$$0 < c_0 < u < 2\pi - c, \quad c > 0$$

definiert ist, gleichmäßig konvergiert. Ferner bleibt die Summe der ersten n Glieder dieser Reihe, wie immer u und n gewählt werden mögen, zwischen endlichen, von u und n unabhängigen Grenzen, auch wenn u der Null beliebig nahe kommt; dieselbe Eigenschaft kommt daher auch der Reihe

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu'(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu}$$

zu, wenn x und y Strecken des Intervalls J durchlaufen, die den Endpunkt π nicht enthalten.

Die Formel (C) macht keine neuen Schwierigkeiten; denn unsere Ausdrücke für $\varphi_\nu(x)$ und $\varphi_\nu'(x)$ ergeben

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu'(x)}{\lambda_\nu} = -\frac{1}{\pi}\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\sin 2\nu x}{\nu} + \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\Psi}{\nu^2},$$

und aus den angeführten Eigenschaften der Reihe S schließt man sofort, daß die hingeschriebene Reihe gleichmäßig konvergiert, wenn x eine zwischen 0 und π liegende Strecke durchläuft. Damit sind die Eigenschaften (I), (II), (III) und die Formeln (A), (B), (C) in dem vollen Umfange gesichert, wie sie in § 4 gebraucht werden; die Eigenschaft (IV) kommt nicht in Frage, da beide Endpunkte regulär sind. Die Resultate der §§ 4 und 5 gelten also für die Sturm-Liouvilleschen Reihen, wie wir übrigens auf andere Weise schon früher nachgewiesen haben.*)

§ 7.

Die Darstellung willkürlicher Funktionen durch Besselsche.

Die einfachsten von der mathematischen Physik gestellten Aufgaben, die denen des vorigen Paragraphen analog sind und auf Besselsche Funktionen führen, können in folgender Form ausgesprochen werden. Es sollen die Integrale der Besselschen Gleichung

$$-\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \lambda x y = 0$$

gefunden werden, die an der singulären Stelle $a = 0$ endlich sind, und an der Stelle $b = 1$ einer der Forderungen

$$y|^1 = 0, \quad y' + Hy|^1 = 0,$$

*) Math. Annalen Bd. 60.

in denen H eine Konstante ist, unterworfen und auf der Strecke von 0 bis 1 mit ihren Ableitungen stetig sind; man findet leicht

$$y = J(x\sqrt{\lambda}), \quad J(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots,$$

und erhält für λ eine der Gleichungen

$$J(\sqrt{\lambda}) = 0, \quad \sqrt{\lambda}\, J'(\sqrt{\lambda}) + HJ(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Um die Besselsche Differentialgleichung auf die Gestalt zu bringen, die wir in unserer Theorie voraussetzen, substituieren wir

$$du = 2x\,dx, \qquad x = \sqrt{u},$$

und ersetzen u durch x; dann ergibt sich

$$\frac{d}{dx}\left(4x\frac{dy}{dx}\right) + \lambda y = 0.$$

Die Werte a und b und die Form der Grenzbedingungen ändern sich nicht; für y aber haben wir jetzt die Funktion $J(\sqrt{\lambda x})$ zu nehmen. Um den Eigenwert $\lambda = 0$ zu vermeiden, ersetzen wir λ in der letzten Gleichung durch $\lambda - \mu$, so daß sie die folgende Gestalt annimmt:

$$\frac{d}{dx}\left(4x\frac{dy}{dx}\right) + (\lambda - \mu)\, y = 0.$$

Ihre an der Stelle $x = 0$ endliche Lösung ist jetzt

$$J(\varrho\sqrt{x}) = J\left(\sqrt{(\lambda - \mu)\, x}\right),$$

wobei die Quadratwurzeln positiv zu nehmen sind und

$$\lambda = \mu + \varrho^2$$

gesetzt ist, für ϱ aber eine der Gleichungen

$$J(\varrho) = 0, \qquad \varrho J'(\varrho) + HJ(\varrho) = 0$$

gilt.

Die normierten Eigenfunktionen sind

$$J(\varrho\sqrt{x})\left[\int_0^1 J^2(\varrho\sqrt{u})\, du\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= J(\varrho\sqrt{x})\left[2\int_0^1 \alpha J^2(\varrho\alpha)\, d\alpha\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Um sie hinsichtlich ihrer Größenverhältnisse genauer zu untersuchen, gehen wir von folgenden bekannten Formeln*) aus, die gelten, sobald x oberhalb einer beliebig kleinen positiven Grenze ε verbleibt:

$$J(x) = \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{\pi x}} + \frac{\Psi}{x^{\frac{3}{2}}},$$

$$J'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{\pi x}} + \frac{\Psi}{x^{\frac{3}{2}}};$$

in ihnen, wie auch weiter unten, ist das Symbol Ψ vieldeutig und bezeichnet Größen, die zwischen endlichen, von x unabhängigen Grenzen liegen. Aus diesen Gleichungen folgt sofort:

$$J^2(x) + J'^2(x) = \frac{2}{\pi x} + \frac{\Psi}{x^2}.$$

Anderseits ergibt die Besselsche Differentialgleichung leicht**)

$$\int_0^x \alpha J^2(\alpha)\, d\alpha = \frac{x^2}{2} [J^2(x) + J'^2(x)],$$

speziell also

$$\int_0^1 \alpha J^2(\varrho\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{2} [J^2(\varrho) + J'^2(\varrho)],$$

und hieraus folgt auf Grund der angegebenen asymptotischen Darstellung von $J(x)$ und $J'(x)$ die Formel

$$\int_0^1 \alpha J^2(\varrho\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{\pi\varrho} + \frac{\Psi_0}{\varrho^2},$$

$$\left[\int_0^1 \alpha J^2(\varrho\alpha)\, d\alpha\right]^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi\varrho}\left(1 + \frac{\Psi_0}{\varrho^{\frac{3}{2}}}\right),$$

und die Größen Ψ_0 liegen zwischen endlichen, von ϱ unabhängigen Grenzen. Nur wenn der Wert $\varrho = 0$ vorkommt, verliert diese Formel ihren Sinn; da wir sie aber nur bei Konvergenzuntersuchungen benutzen, ist das kein wesentlicher Mangel. Abgesehen von diesem Falle erhalten wir somit für die normierten Eigenfunktionen und ihre Ableitungen die Ausdrücke

$$\varphi_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi\varrho}{2}}\, J(\varrho\sqrt{x})\left(1 + \frac{\Psi_0}{\varrho^{\frac{3}{2}}}\right),$$

$$\varphi_\nu'(x) = \frac{\varrho}{2}\sqrt{\frac{\pi\varrho}{2x}}\, J'(\varrho\sqrt{x})\left(1 + \frac{\Psi_0}{\varrho^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Lassen wir jetzt x über einer beliebig kleinen positiven Grenze

*) Lipschitz, Crelles Journal Bd. 56. Jordan, Cours d'analyse Bd. 3, Nr. 215, 216.

**) Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichungen Bd. 1, § 79.

bleiben, so können wir wiederum die asymptotischen Ausdrücke von $J(x)$ und $J'(x)$ benutzen und erhalten folgende Gleichungen:

$$\varphi_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{x}}\left(\sin\varrho\sqrt{x} + \cos\varrho\sqrt{x} + \frac{\Psi}{\varrho\sqrt{x}}\right)\left(1 + \frac{\Psi_0}{\varrho^{\frac{3}{2}}}\right),$$

$$\varphi_\nu'(x) = \frac{\varrho}{2\sqrt{2}\sqrt[4]{x^3}}\left(\cos\varrho\sqrt{x} - \sin\varrho\sqrt{x} + \frac{\Psi}{\varrho\sqrt{x}}\right)\left(1 + \frac{\Psi_0}{\varrho^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Hieraus ergibt sich, daß die Gleichungen, deren Wurzeln die Größen ϱ sind, sobald diese eine gewisse Grenze überschreiten, durch eine der Formen

$$\cos\varrho + \sin\varrho = 0, \qquad \varrho(\cos\varrho - \sin\varrho) + H(\sin\varrho + \cos\varrho) = 0$$

annähernd dargestellt werden. Wenn daher r von ν unabhängig ist und das vieldeutige Symbol Ψ Größen bezeichnet, die zwischen endlichen von ν unabhängigen Grenzen liegen, so kann man setzen

$$\varrho = r + \nu\pi + \frac{\Psi}{\nu},$$

und hieraus ergibt sich für die Eigenwerte

$$\frac{1}{\lambda_\nu} = \frac{1}{\mu + \varrho^2} = \frac{1}{\pi^2\nu^2}\left(1 + \frac{\Psi}{\nu}\right), \qquad \frac{1}{\lambda_\nu^2} = \frac{1}{\pi^4\nu^4}\left(1 + \frac{\Psi}{\nu}\right).$$

Man findet ferner leicht, wenn u eine beliebige Größe bedeutet, die Gleichungen

$$\cos\varrho u = \cos(r + \nu\pi)u + \frac{\Psi}{\nu}, \qquad \sin\varrho u = \sin(r + \nu\pi)u + \frac{\Psi}{\nu};$$

benutzt man diese Werte in den für $\varphi_\nu(x)$ und $\varphi_\nu'(x)$ gegebenen Ausdrücken, so findet man

$$\varphi_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{x}}\left\{\sin(r + \nu\pi)\sqrt{x} + \cos(r + \nu\pi)\sqrt{x} + \frac{\Psi}{\nu}\right\},$$

$$\varphi_\nu'(x) = \frac{\varrho}{2\sqrt{2}\sqrt[4]{x^3}}\left\{\cos(r + \nu\pi)\sqrt{x} - \sin(r + \nu\pi)\sqrt{x} + \frac{\Psi}{\nu}\right\},$$

und wenn y ebenso wie x über einer beliebig kleinen positiven Grenze bleibt,

$$\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(y) = \frac{1}{2\sqrt[4]{xy}}\left\{\sin(r+\nu\pi)(\sqrt{x}+\sqrt{y}) + \cos(r+\nu\pi)(\sqrt{x}-\sqrt{y}) + \frac{\Psi}{\nu}\right\},$$

$$\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu'(x) = \frac{\varrho}{4x}\left\{\cos 2(r+\nu\pi)\sqrt{x} + \frac{\Psi}{\nu}\right\},$$

$$\varphi_\nu'(x)\,\varphi_\nu(y) = \frac{\varrho}{4\sqrt[4]{x^3 y}}\left\{\cos(r+\nu\pi)(\sqrt{x}+\sqrt{y}) + \sin(r+\nu\pi)(\sqrt{y}-\sqrt{x}) + \frac{\Psi}{\nu}\right\}.$$

Da nun die Reihen

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\cos \nu u}{\nu}, \quad \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\sin \nu u}{\nu}$$

gleichmäßig konvergieren, wenn mit beliebig kleinen positiven Konstanten c, c_1 die Ungleichung

$$c \leqq u \leqq 2\pi - c_1$$

festgesetzt wird; da ferner unter dieser Bedingung auch die Summe

$$\sum_{\nu}^{1,n} \frac{\cos \nu u}{\nu},$$

und unter der weiteren Voraussetzung

$$0 < u \leqq 2\pi - c_1$$

die Summe

$$\sum_{\nu}^{1,n} \frac{\sin \nu u}{\nu}$$

zwischen endlichen von ν und u unabhängigen Grenzen liegt, so ist ersichtlich, daß die Reihen

$$R = \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu}, \quad S = \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu'(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu^2}$$

gleichmäßig konvergieren, wenn x und y beliebige, die Stelle 0 nicht enthaltende Teilstrecken des von 0 bis 1 reichenden Intervalls J durchlaufen; daß unter derselben Voraussetzung und wenn außerdem $|x-y|$ über einer beliebig kleinen Grenze bleibt, auch die Reihe

$$T = \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu'(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu}$$

gleichmäßig konvergiert; daß die Reihe

$$U = \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu'(x)}{\lambda_\nu}$$

gleichmäßig konvergiert, wenn x eine zwischen 0 und 1 liegende Strecke durchläuft; daß endlich, wenn x, y, $1-x$ und $1-y$ über endlichen Grenzen bleiben, die Summe

$$\sum_{\nu}^{1,n} \frac{\varphi_\nu'(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu}$$

zwischen endlichen von n unabhängigen Grenzen liegt.

Das letzte dieser Resultate gibt die Eigenschaft (III) des § 3; um die Formeln (A), (B), $\cdots$ zu gewinnen, überzeugen wir uns zunächst davon, daß der Kern $K(x, y)$ die in § 3 geforderten Eigenschaften besitzt. Das wird daraus klar, daß $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ Integrale der Differentialgleichung sind, die auch für die Größe $J\sqrt{-\mu x}$ gilt. Diese hat an der singulären Stelle $x = 0$ ein logarithmisch unendliches Integral; eben diese Singularität weist daher die Funktion $\psi(x)$ auf, wie auch der in § 6 gegebene explizite Ausdruck zeigt.

Ferner konvergiert die Reihe

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu^2} = \sum_{\varrho} \frac{2\pi\varrho\, J(\varrho\sqrt{x})\, J(\varrho\sqrt{y})}{(\mu+\varrho^2)^2}\left(1 + \frac{\Psi_0}{\varrho^{\frac{3}{2}}}\right),$$

da die Funktion $J(u)$ bei beliebigen reellen Werten von u zwischen festen endlichen Grenzen bleibt, gleichmäßig, wenn jede der Größen x und y das ganze Intervall J mit Einschluß der Stelle 0 durchläuft. Hieraus und aus dem, was über die Konvergenz der Reihen R, S, T und U bewiesen ist, kann man nach § 3 die Eigenschaften (I) und (II) erschließen.

Unsere allgemeinen Sätze ergeben somit, daß eine Funktion von x zwischen den Stellen $x = 0$ und $x = 1$ auf die Fouriersche Art nach den Normalfunktionen $\varphi_\nu(x)$ entwickelt werden kann, wenn sie auf einer beliebig kleinen an der Stelle 0 beginnenden Strecke mit ihren ersten beiden Ableitungen stetig, im übrigen aber auf der betrachteten Strecke nur von beschränkter Schwankung ist. Entwickelt man irgend eine zulässige Funktion $f(\sqrt{x})$ und ersetzt dann x durch x^2, so erhält man die gewöhnlich benutzte Formel

$$f(x) = \sum_{\varrho} J(\varrho x)\, \frac{\int_0^1 \alpha f(\alpha)\, J(\varrho\alpha)\, d\alpha}{\int_0^1 \alpha J^2(\varrho\alpha)\, d\alpha}.$$

Den durchgeführten ähnliche Entwicklungen gelten übrigens für die Besselschen Funktionen $J_n(x)$; man ersieht das leicht daraus, daß $J_n(\sqrt{x})$ ein Integral der Gleichung

$$4\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \left(1 - \frac{n^2}{x}\right) y = 0$$

ist und daß $J_n(x)$ in folgender Weise asymptotisch dargestellt werden kann*):

*) Jordan, Cours d'analyse Bd. 3, Nr. 216. Gray and Mathews, Bessel Functions Kap. 4, Nr. 91.

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{4} - x\right];$$

damit sind die im vorhergehenden fundamentalen Eigenschaften der Funktion $J(x)$ auf $J_n(x)$ im wesentlichen übertragen.

§ 8.

Die Entwicklung beliebiger Funktionen von beschränkter Schwankung nach Besselschen.

Das Resultat des vorigen Paragraphen dürfte für alle Anwendungen ausreichen, da es wohl immer genügt, Funktionen zu betrachten, die selbst ebenso wie ihre ersten beiden Ableitungen nur eine endliche Anzahl von endlichen Sprüngen machen, im übrigen aber stetig sind. Immerhin dürfte es theoretisch wichtig erscheinen, die Entwicklungssätze möglichst auszudehnen; nach § 5 wissen wir, daß eine beliebige Funktion von beschränkter Schwankung nach den Normalfunktionen entwickelt werden kann, wenn für diese die Eigenschaft (IV) des § 3 gesichert ist. Das wollen wir für die Besselschen Funktionen bezüglich des singulären Endpunktes $a = 0$ durchführen, indem wir uns auf den Fall $H = \infty$ beschränken, d. h. den Fall, daß die Eigenfunktionen den Gleichungen $\varphi_\nu(1) = 0$, $J(\varrho) = 0$ unterworfen sind. Zu diesem Zweck muß der Kern $K(x, y)$ wirklich gebildet werden. Setzen wir $\mu = -\beta^2$, so daß die Differentialgleichung der Eigenfunktionen in der Form

$$\frac{d}{dx}\left(4x\frac{dy}{dx}\right) + (\lambda + \beta^2)\, y = 0$$

erscheint, so ist die Gleichung, deren Integrale $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ in der Bezeichnung des § 3 sind, die folgende

$$\frac{d}{dx}\left(4x\frac{dy}{dx}\right) + \beta^2 y = 0.$$

Sie hat die linear unabhängigen Integrale $J(\beta\sqrt{x})$ und $K(\beta\sqrt{x})$, letzteres im Sinne von Riemann-Weber*) verstanden, und man kann daher setzen

$$\varphi(x) = C\, J(\beta\sqrt{x}), \qquad \psi(x) = J(\beta\sqrt{x})\, K(\beta) - J(\beta)\, K(\beta\sqrt{x}),$$

wobei C eine Konstante bedeutet, die durch die Forderung

$$k(\varphi'(x)\,\psi(x) - \varphi(x)\,\psi'(x)) = 1$$

bestimmt wird; dann erfüllt $\varphi(x)$ an der unteren, $\psi(x)$ an der oberen

*) Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik Bd. 1, § 73.

Grenze der Strecke J die an die Normalfunktionen gestellten Forderungen. Da nun die Identität

$$JK' - J'K = -\frac{2}{\pi x}$$

gilt, findet man durch leichte Rechnung

$$C = -\frac{\pi}{2J(\beta)},$$

und demnach bei der Annahme $x < \xi$ den Kern

$$K(x, \xi) = \frac{\pi J(\beta\sqrt{x})\left[J(\beta\sqrt{\xi})\,K(\beta) - J(\beta)\,K(\beta\sqrt{\xi})\right]}{2J(\beta)}.$$

Die Formel (A) ergibt also, da die Eigenwerte die Gestalt

$$\lambda = \varrho^2 + \mu = \varrho^2 - \beta^2$$

haben, die Gleichung

$$K(x, \xi) = \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\xi)}{\varrho^2 - \beta^2}$$

und ϱ durchläuft, wir wiederholen es, die positiven Wurzeln der Gleichung $J(\varrho) = 0$.

Da nun die Reihe

$$\sum \frac{1}{\varrho^2}$$

konvergiert, so konvergiert die rechte Seite der erhaltenen Gleichung auch bei beliebig festgelegten positiven Werten x, ξ und bei komplexen Werten von β, und zwar gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Gebiet, das die Stellen $\pm\varrho$ nicht enthält. Wir haben eine Partialbruchzerlegung der Größe $K(x, \xi)$ vor uns, die als Funktion der komplexen Größe β meromorph ist und die Pole $\beta = \pm\varrho$ besitzt. Multiplizieren wir die Gleichung mit 2β und setzen

$$-2\beta K(x, \xi) = \Phi(\beta) = \frac{\pi\beta J(\beta\sqrt{x})\left[J(\beta)\,K(\beta\sqrt{\xi}) - J(\beta\sqrt{\xi})\,K(\beta)\right]}{J(\beta)},$$

so ergibt sich

$$\Phi(\beta) = \sum_{\nu}^{1,\infty} \varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\xi)\left\{\frac{1}{\beta - \varrho} + \frac{1}{\beta + \varrho}\right\},$$

und es ist ersichtlich, daß zu den Polen $\beta = \varrho$ und $\beta = -\varrho$ das Residuum $\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\xi)$ gehört. Integriert man daher in der Ebene der komplexen Größen β längs einer geschlossenen Kurve, die die ersten n positiven

Werte ϱ und die ihnen entgegengesetzten $-\varrho$, sonst aber keine Pole der Funktion $\Phi(\beta)$ umschließt, so findet man

$$\frac{1}{2\pi i}\int \Phi(\beta)\,d\beta = 2\sum_{\nu}^{1,n} \varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\xi).$$

Entsprechend würde man in der Ebene der komplexen Größe μ um die ersten n Werte $-\varrho^2$ herum integrierend eine Gleichung

$$\frac{1}{2\pi i}\int K(x,\xi)\,d\mu = \sum_{\nu}^{1,n} \varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\xi)$$

erhalten.

Wir nehmen nun als Integrationslinie in der β-Ebene den Umfang des Rechtecks, dessen Ecken die Punkte $\pm s \pm ti$ sind, und dessen Inneres genau n positive Werte ϱ enthalte. Da $\Phi(\beta)$, wie die Partialbruchzerlegung zeigt, eine ungerade Funktion ist, so liefern die Hälften, in die das Rechteck durch die imaginäre Achse zerlegt wird, denselben Beitrag zum Integral, und da $\Phi(\beta)$ bei reellen Werten von β reell ist, liefern die oberhalb und unterhalb der reellen Achse liegenden symmetrischen Viertel des Rechteckumfangs konjugiert imaginäre Beiträge, so daß man, wenn s und t positiv sind, setzen kann

$$\sum_{\nu}^{1,n} \varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\xi) = 2\Re\left\{\int_s^{s+ti}\Phi(\beta)\,d\beta + \int_{s+ti}^{ti}\Phi(\beta)\,d\beta\right\},$$

wobei die Integrale geradlinig zu nehmen sind. Um die Größe dieser Integrale abzuschätzen, schreiben wir

$$x_1 = \sqrt{x}, \qquad \xi_1 = \sqrt{\xi}, \qquad \beta = \sigma + \tau i,$$
$$P = \sqrt{2\pi\beta x_1}\,J(\beta x_1), \qquad N = 2\sqrt{2\pi\beta}\,J(\beta),$$
$$Q = \sqrt{2\pi\beta}\,\sqrt{2\pi\beta\xi_1}\,[J(\beta)\,K(\beta\xi_1) - J(\beta\xi_1)\,K(\beta)],$$
$$\sqrt{x_1\xi_1}\,\Phi(\beta) = \frac{PQ}{N},$$

und benutzen die Weberschen Formeln*)

$$\sqrt{2\pi u}\,J(u) = e^{-i\left(u-\frac{\pi}{4}\right)}\,S(2iu) + e^{i\left(u-\frac{\pi}{4}\right)}\,S(-2iu),$$
$$\sqrt{2\pi u}\,K(u) = e^{-i\left(u-\frac{\pi}{4}\right)}\,S(2iu) - e^{i\left(u-\frac{\pi}{4}\right)}\,S(-2iu),$$

in denen der reelle Teil von u und $\sqrt{2\pi u}$ positiv vorauszusetzen ist, und $S(z)$ eine Funktion bedeutet, die in der ganzen Ebene der komplexen

*) Riemann-Weber Bd. 1, § 73.

Größen z mit Ausnahme der negativen reellen Achse eindeutig bestimmt ist; konvergiert der reelle Teil von u von der positiven Seite her gegen den Wert Null, während der imaginäre Teil nicht verschwindet, so konvergieren die Größen $S(2iu)$ und $S(-2iu)$ gegen endliche Grenzen und die Gleichungen bleiben richtig. Da nun in den Ausdrücken P, Q, N die Argumente der Funktionszeichen J und K nicht negative reelle Teile haben und auf der Integrationslinie nicht den Wert Null erreichen, so kann $\Phi(\beta)$ durch die Funktion S ausgedrückt werden, wenn man noch festsetzt, daß auch die in P, Q, N auftretenden Quadratwurzeln positive reelle Teile haben sollen. Bei dieser Annahme erhält man aus den Weberschen Formeln

$$P = e^{-i\left(\beta x_1 - \frac{\pi}{4}\right)} S(2\beta i x_1) + e^{i\left(\beta x_1 - \frac{\pi}{4}\right)} S(-2\beta i x_1),$$
$$Q = e^{i\beta(1-\xi_1)} S(2\beta i \xi_1) S(-2\beta i) - e^{-i\beta(1-\xi_1)} S(-2\beta i \xi_1) S(2\beta i).$$

Nun hat die Funktion $S(z)$ erstens die Eigenschaft, für alle Werte von z dem absoluten Betrage nach unter einer festen Grenze zu bleiben*), z. B. unter 3,5; daraus ergibt sich sofort

$$|P| < 3{,}5\,(e^{\tau x_1} + e^{-\tau x_1})$$

und, da τ nicht negativ ist,

$$|P| < 7 e^{\tau x_1}.$$

Sodann nähert sich $S(z)$ der Grenze 1, wenn z über alle Grenzen wächst; wenn daher ξ über einer festen positiven Grenze liegt, also etwa

$$\xi > c > 0$$

vorausgesetzt wird, so liegen die Größen

$$|S(\pm 2\beta\xi_1 i)|, \qquad |S(\pm 2\beta i)|$$

der Eins beliebig nahe, sind z. B. kleiner als 2, sobald

$$|\beta| > g$$

genommen wird, wobei g eine von ξ unabhängige positive Größe ist. Unter dieser Annahme findet man aus dem angegebenen Ausdruck von Q durch die Funktionen S sofort

$$|Q| < 4 e^{\tau(1-\xi_1)} + 4 e^{-\tau(1-\xi_1)} < 8 e^{\tau(1-\xi_1)},$$

und hieraus

$$|PQ| < 56\, e^{\tau(1-\xi_1+x_1)}.$$

Dieses Resultat wollen wir mit einer unteren Grenze der Größe $|N|$ kombinieren. Zu einer solchen führen wiederum die Weberschen Formeln, deren erste ergibt

*) Riemann-Weber Bd. 1, §§ 75, 76.

$$N = 2\sqrt{2\pi\beta}\,J(\beta) = 2\cos\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right)[S(2\beta i) + S(-2\beta i)]$$
$$+ 2i\sin\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right)[-S(2\beta i) + S(-2\beta i)]$$
$$= 4\cos\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right)(1+p) + 4qi\sin\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right);$$

da nun $S(z)$ bei wachsenden Werten von $|z|$ gegen die Grenze Eins konvergiert, so ist klar, daß $|p|$ und $|q|$ unter einer vorgeschriebenen Grenze, etwa unter $\frac{1}{4}$ liegen, sobald $|\beta|$ eine gewisse positive Konstante g_1 überschritten hat, die ebenso wie g von x und ξ durchaus unabhängig ist. Somit gelten zugleich die Beziehungen

$$|p| < \frac{1}{4}, \quad |q| < \frac{1}{4}, \quad |\beta| > g_1.$$

Da nun der letzte für N erhaltene Ausdruck, wenn $e_1, e_2, \cdots$ Größen vom absoluten Betrage Eins sind, in der Form

$$\begin{aligned} N &= 2(e^\tau e_1 + e^{-\tau} e_2)(1+p) + 2q(e^\tau e_3 + e^{-\tau} e_4) \\ &= 2e^\tau \{e_1(1+p) + qe_3\} + 2e^{-\tau}\{e_2(1+p) + qe_4\} \\ &= re^\tau + r_1 e^{-\tau} \end{aligned}$$

geschrieben werden kann, und die für $|p|$ und $|q|$ geltenden Schranken die Ungleichungen

$$|r| > 1, \quad |r_1| < 3$$

ergeben, so folgt

$$|N| > e^\tau - 3e^{-\tau}.$$

Wenn wir daher zunächst $\tau = t$ setzen, also β auf der Strecke von ti bis $s + ti$ annehmen und t so groß nehmen, daß

$$e^{2t} > 6, \quad t > \frac{1}{2}\lg 6,$$

so ergibt die für N gefundene Beziehung

$$|N| > \frac{1}{2}e^t,$$

und die oben gefundene obere Schranke der Größe $|PQ|$ ergibt

$$\sqrt{x_1\xi_1}\,|\Phi(\beta)| = \left|\frac{PQ}{N}\right| < 112\,e^{t(x_1-\xi_1)}.$$

Da nun die Differenz $\xi - x$ mit Rücksicht auf den Zweck der ganzen Entwicklung über einer positiven Grenze bleibt, so daß etwa eine Ungleichung

$$\sqrt{\xi} - \sqrt{x} = \xi_1 - x_1 > c_1, \quad c_1 > 0$$

vorausgesetzt wird, so ist klar, daß das Integral

$$\int_{ti+s}^{ti} \sqrt{x_1 \xi_1}\, \Phi(\beta)\, d\beta$$

dem absoluten Werte nach beliebig klein gemacht werden kann, indem man einen beliebigen Wert von s festhält, t aber über eine von s, c_1 und g_1, nicht aber von x und ξ abhängige Grenze hinauswachsen läßt.

Eine andere Erwägung fordert die Strecke von s bis $s+ti$, da hier auch der Wert $\tau = 0$ zugelassen ist, für den N verschwinden könnte. Um dies zu verhindern, wählen wir s so, daß $s - \frac{\pi}{4}$ ein Vielfaches von π ist; dann gelten auf der Geraden $\sigma = s$ offenbar die Gleichungen

$$\cos\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) = \pm \cos \tau i, \qquad \sin\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) = \pm \sin \tau i,$$

$$N = \pm 4(1+p)\cos \tau i \pm 4q \sin \tau i = 2e^{\tau}\{\pm(1+p)(1+e^{-2\tau}) \pm iq(1-e^{-2\tau})\}$$
$$= 2e^{\tau}\{\pm(1+e^{-2\tau}) + m\}, \qquad m = \pm p(1+e^{-2\tau}) \pm qi(1-e^{-2\tau}).$$

Wegen der für $|p|$ und $|q|$ erwirkten Ungleichungen ist nun

$$|m| < \frac{3}{4}, \qquad |m \pm (1+e^{-2\tau})| \geqq 1 + e^{-2\tau} - |m| > \frac{1}{4},$$
$$|N| > \frac{1}{2} e^{\tau}.$$

Die für das Produkt $|PQ|$ gefundene Schranke ergibt somit

$$\sqrt{x_1 \xi_1}\, |\Phi(\beta)| = \left|\frac{PQ}{N}\right| < 112\, e^{-\tau(\xi_1 - x_1)},$$

und hieraus folgt, wenn man geradlinig von s bis $s + ti$ integriert,

$$\left| \int_{s}^{s+ti} \Phi(\beta)\, d\beta \right| < \frac{112\,(1 - e^{-t(\xi_1 - x_1)})}{(\xi_1 - x_1)}.$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung bleibt offenbar, da $\xi_1 - x_1$ über einer positiven Grenze c_1 liegt, stets unter einer festen von t, x und ξ unabhängigen Grenze. Erinnern wir uns nun daran, daß das Integral

$$\sqrt{x_1 \xi_1} \int_{ti}^{s+ti} \Phi(\beta)\, d\beta$$

bei jedem festen Wert von s der Null beliebig angenähert werden konnte, indem man für t einen von ξ und x unabhängigen, hinreichend großen Wert nahm; daß ferner längs der Integrationswege nur die Ungleichungen

$$|\beta| > g, \qquad |\beta| > g_1$$

vorausgesetzt werden, so ergibt die oben abgeleitete Gleichung

$$\sum_{\nu}^{1,n} \varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\xi) = 2\,\Re\left\{\int_{ti}^{ti+s} \Phi(\beta)\,d\beta + \int_{ti+s}^{s} \Phi(\beta)\,d\beta\right\},$$

in der n die Anzahl der Werte von ϱ bedeutet, die zwischen 0 und s liegen, folgendes Resultat. Sobald n eine gewisse von ξ und x unabhängige Grenze n_1 überschritten hat, liegt die Summe

$$\sqrt[4]{x\xi}\sum_{\nu}^{1,n} \varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\xi),$$

in der mit beliebig kleinen positiven Werten c_0 und c die Beziehungen

$$\xi - x > c_0 > 0, \qquad \xi > c > 0$$

vorausgesetzt werden, zwischen endlichen, von x und ξ unabhängigen Grenzen. Da nun die für $n = 1, 2, \cdots, n_1$ gebildeten Summen stetige Funktionen von x und ξ sind, kann die Beschränkung der Zahl n wieder aufgehoben werden, und da das Integral

$$\int_0^x \frac{d\alpha}{\sqrt[4]{\alpha}}$$

endlich ist, ergibt sich weiter, daß alle Integrale

$$\int_0^x \sum_{\nu}^{1,n} \varphi_\nu(\alpha)\,\varphi_\nu(\xi)\,d\alpha$$

zwischen endlichen von n, x und ξ unabhängigen Grenzen liegen. Dadurch ist die Eigenschaft (IV) des § 3 in vollem Umfange erwiesen.

§ 9.

Entwicklung nach Legendreschen Polynomen.

Die Funktionen $P_n(x)$, die durch die Gaußsche Reihe in der Form

$$P_n(x) = F\left(-n,\ n+1,\ 1,\ \frac{1-x}{2}\right)$$

ausgedrückt werden, sind diejenigen Integrale der Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + \lambda y = 0,$$

die an den beiden singulären Stellen $x = -1$ und $x = +1$ endlich bleiben; solche Integrale hat diese Gleichung, wie aus der Theorie der hypergeometrischen Reihe entnommen werden kann, nur wenn

$$\lambda = n(n+1)$$

gesetzt werden kann, wobei n eine positive ganze Zahl oder Null bedeutet. Um den Kern der zugehörigen Integralgleichung nach der in § 2 gegebenen Regel zu finden, ersetzen wir λ durch $\lambda + \mu$, wobei

$$\mu = \alpha(1+\alpha)$$

gesetzt wird und α keine ganze Zahl ist. Die Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ des § 2 sind dann Integrale der Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + \alpha(1+\alpha)y = 0,$$

von denen das erste bei $x = -1$, das zweite bei $x = +1$ endlich ist, und beide zwischen -1 und $+1$ endlich und stetig bleiben. Man erfüllt diese Anforderungen, indem man setzt

$$\varphi(x) = F\left(-\alpha,\ 1+\alpha,\ 1,\ \frac{1+x}{2}\right), \quad \psi(x) = CF\left(-\alpha,\ 1+\alpha,\ 1,\ \frac{1-x}{2}\right);$$

die Konstante C bestimmt sich durch die Beziehung

$$\varphi'(x)\,\psi(x) - \varphi(x)\,\psi'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Wir finden den genauen Wert C, indem wir

$$\frac{1-x}{2} = \varepsilon, \quad \frac{1+x}{2} = 1 - \varepsilon$$

setzen und ε unendlich abnehmen lassen. Dann gelten die Näherungsformeln*)

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= F(-\alpha,\ 1+\alpha,\ 1,\ 1-\varepsilon) = \frac{-\lg\varepsilon}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)} \\
&= +\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\lg\varepsilon, \\
\varphi'(x) &= -\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{\varepsilon}, \quad \psi(x) = 1, \quad \psi'(x) = -\alpha(1+\alpha), \\
\frac{1}{1-x^2} &= \frac{1}{4\varepsilon},
\end{aligned}$$

und die angegebene Beziehung zwischen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ergibt

$$-\frac{C\sin\pi\alpha}{\pi}\left\{\alpha(1+\alpha)\lg\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\right\} = \frac{1}{4\varepsilon},$$

also

$$C = \frac{\pi}{4\sin\alpha\pi}.$$

Hieraus sieht man zugleich, daß $\varphi(x)$ an der singulären Endstelle $x = +1$ logarithmisch unendlich wird. Dasselbe gilt offenbar von $\psi(x)$

*) Goursat, Sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la série hypergéometrique, Thèse, Paris 1881, S. 37. Annales de l'Ecole Normale (2) Bd. 10.

an der Stelle $x = -1$; der mit $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ gebildete Kern hat also die in § 3 geforderte Beschaffenheit und ist explizit

$$K(x, \xi) = \frac{\pi F\left(-\alpha,\ 1+\alpha,\ 1,\ \frac{1+x}{2}\right) F\left(-\alpha,\ 1+\alpha,\ 1,\ \frac{1-\xi}{2}\right)}{4 \sin \alpha\pi}$$

oder

$$K(x, \xi) = \frac{\pi F\left(-\alpha,\ 1+\alpha,\ 1,\ \frac{1-x}{2}\right) F\left(-\alpha,\ 1+\alpha,\ 1,\ \frac{1+\xi}{2}\right)}{4 \sin \alpha\pi},$$

je nachdem $x < \xi$ oder $x > \xi$.

Die Eigenwerte sind jetzt $n(n+1) - \alpha(\alpha+1)$, wobei $n = 0, 1, 2, \cdots,$ zu setzen ist; die normierten Eigenfunktionen sind wegen der bekannten Formel

$$\int_{-1}^{+1} P_n^{\,2}(\alpha)\, d\alpha = \frac{2}{2n+1}$$

die Größen

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi_{n+1}(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\, P_n(x),$$

und die Entwicklung des Kerns nach den Eigenfunktionen hat, je nachdem x kleiner oder größer als ξ ist, die erste oder zweite der folgenden Gestalten:

$$\frac{\pi F\left(-\alpha, 1+\alpha, 1, \frac{1+x}{2}\right) F\left(-\alpha, 1+\alpha, 1, \frac{1-\xi}{2}\right)}{4 \sin \alpha\pi} = \sum_n^{0,\infty} \frac{(2n+1) P_n(x) P_n(\xi)}{2\,[n(n+1) - \alpha(\alpha+1)]}$$

$$\frac{\pi F\left(-\alpha, 1+\alpha, 1, \frac{1-x}{2}\right) F\left(-\alpha, 1+\alpha, 1, \frac{1+\xi}{2}\right)}{4 \sin \alpha\pi} = \sum_n^{0,\infty} \frac{(2n+1) P\ \ (x) P_n(\xi)}{2\,[n(n+1) - \alpha(\alpha+1)]}.$$

Diese Formeln sind nach § 2 bewiesen, sobald die dort aufgestellten Voraussetzungen, unter denen die Formel (A) gilt, als erfüllt nachgewiesen sind; hier liegt, wie bei den Besselschen Funktionen, der Fall vor, daß auf den iterierten Kern $K^2(x, y)$ zurückgegriffen werden muß.

Zunächst ist zu beachten, daß die Legendreschen Polynome auf der Strecke J, d. h. von -1 bis $+1$, zwischen den Grenzen -1 und $+1$ bleiben; hieraus ersieht man sofort, daß die Reihe

$$\sum_\nu^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\, \varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu^2} = \sum_n^{0,\infty} \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) P_n(x)\, P_n(y)}{[n(n+1) - \alpha(\alpha+1)]^2}$$

gleichmäßig konvergiert, wenn x und y unabhängig voneinander die Strecke J mit Einschluß ihrer Endpunkte durchlaufen. Da ferner die Formel

$$P_n'(x) = \frac{nxP_n(x) - nP_{n-1}(x)}{1-x^2}$$

gilt, so folgt, daß die Reihe

$$\sum_\nu^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu'(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu^2} = \sum_n^{0,\infty} \frac{n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(nP_n(x) - P_{n-1}(x)\right)P_n(y)}{(1-x^2)\,[n(n+1)-\alpha(\alpha+1)]^2}$$

gleichmäßig konvergiert, wenn y die Strecke J durchläuft, für x aber die Bedingung

$$-1+\varepsilon < x < 1-\varepsilon$$

festgesetzt wird, in der ε eine beliebig kleine positive Größe ist.

Etwas tiefer liegende Eigenschaften der Legendreschen Polynome sind heranzuziehen, um die Konvergenz der Reihen

$$\sum_\nu \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu}, \quad \sum_\nu \frac{\varphi_\nu'(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu}$$

zu untersuchen. Die Ungleichung, der x unterworfen wurde, kann, wenn man $x = \cos\theta$ setzt, dahin formuliert werden, daß

$$|\sin\theta| > \varepsilon_1$$

ist, wobei ε_1 wie ε beliebig klein und positiv ist. Dann gilt*) die asymptotische Darstellung

$$P_n(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\theta}}\left\{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right] + \frac{\Psi}{n}\right\},$$

und Ψ liegt zwischen endlichen, von n unabhängigen Grenzen. Hieraus folgt zunächst, daß die Reihe

$$\sum_\nu^{2,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu} = \sum_n^{1,\infty} \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)P_n(y)}{n(n+1)-\alpha(\alpha+1)}\sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\theta}}$$
$$\cdot\left\{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right] + \frac{\Psi}{n}\right\}$$

in dem Gebiete

$$-1+\varepsilon < x < 1-\varepsilon, \quad -1 \leqq y \leqq +1$$

gleichmäßig konvergiert, nämlich mindestens so gut wie die mit einer passenden Konstanten multiplizierte Reihe

$$\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

*) Heine, Kugelfunktionen, Bd. 1, § 40.

Stellen wir endlich auch $P_n(y)$ asymptotisch dar, indem wir

$$y = \cos\eta$$

setzen und die Ungleichung

$$|\sin\eta| > \varepsilon_1$$

festhalten, so ergibt der schon einmal benutzte Ausdruck für $P_n'(x)$ die Gleichung

$$\frac{\varphi_{n+1}'(x)\,\varphi_{n+1}(y)}{\lambda_{n+1}} = \frac{n\left(n+\frac{1}{2}\right)x P_n(x) P_n(y)}{[n(n+1)-\alpha(\alpha+1)](x^2-1)} - \frac{n\left(n+\frac{1}{2}\right)P_{n-1}(x)P_n(y)}{(x^2-1)[n(n+1)-\alpha(\alpha+1)]}$$

$$= -\frac{n\left(n+\frac{1}{2}\right)\cos\theta}{[n(n+1)-\alpha(\alpha+1)]\sin^2\theta}\cdot\frac{2}{n\pi\sqrt{\sin\theta\sin\eta}}$$

$$\cdot\left[\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]+\frac{\Psi}{n}\right]\left[\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta-\frac{\pi}{4}\right]+\frac{\Psi}{n}\right]$$

$$+\frac{n\left(n+\frac{1}{2}\right)}{[n(n+1)-\alpha(\alpha+1)]\sin^2\theta}\cdot\frac{2}{\pi\sqrt{n(n-1)\sin\theta\sin\eta}}$$

$$\cdot\left[\cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]+\frac{\Psi}{n}\right]\left[\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta-\frac{\pi}{4}\right]+\frac{\Psi}{n}\right],$$

oder, indem das Symbol Ψ wie früher vieldeutig, aber immer im Sinne der gegebenen Definition gebraucht und dazu benutzt wird, Größen, die mit wachsenden Werten von n der Grenze 1 zustreben, in der Form

$$1+\frac{\Psi}{n}$$

darzustellen,

$$\frac{\varphi_{n+1}'(x)\,\varphi_{n+1}(y)}{\lambda_{n+1}}$$

$$= \frac{-2\cos\theta}{n\pi\sin^2\theta\sqrt{\sin\theta\sin\eta}}\left\{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta-\frac{\pi}{4}\right]+\frac{\Psi}{n}\right\}$$

$$+\frac{2}{n\pi\sin^2\theta\sqrt{\sin\theta\sin\eta}}\left\{\cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta-\frac{\pi}{4}\right]+\frac{\Psi}{n}\right\}$$

$$= \frac{-\cos\theta}{n\pi\sin^2\theta\sqrt{\sin\theta\sin\eta}}\left\{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(\theta+\eta)+\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)(\theta-\eta)+\frac{\Psi}{n}\right\}$$

$$+\frac{1}{n\pi\sin^2\theta\sqrt{\sin\theta\sin\eta}}$$

$$\cdot\left\{\sin\left[n(\theta+\eta)+\frac{1}{2}(\eta-\theta)\right]+\cos\left[n(\theta-\eta)-\frac{1}{2}(\eta+\theta)\right]+\frac{\Psi}{n}\right\},$$

oder endlich, indem man durch A, B, C, D von n unabhängige Größen bezeichnet, die bei den für x und y geltenden Voraussetzungen zwischen festen endlichen Grenzen liegen,

$$\frac{\varphi'_{n+1}(x)\,\varphi_{n+1}(y)}{\lambda_{n+1}} = \frac{A}{n}\sin n(\theta+\eta) + \frac{B}{n}\sin n(\theta-\eta) + \frac{C}{n}\cos n(\theta+\eta)$$
$$+\frac{D}{n}\cos n(\theta-\eta) + \frac{\Psi}{n^2};$$

speziell findet man

$$\pi \sin^2\theta \sqrt{\sin\theta\sin\eta}\, D = -\cos\theta\cos\frac{\theta-\eta}{2} + \cos\frac{\eta+\theta}{2} = \sin\theta\sin\frac{\theta-\eta}{2}.$$

Nun konvergieren die Reihen

$$\sum_{\nu}^{1,\infty}\frac{\sin\nu u}{\nu},\quad \sum_{\nu}^{1,\infty}\frac{\cos\nu u}{\nu}$$

bekanntlich gleichmäßig unter der Voraussetzung

$$c < u < 2\pi - c_1,$$

wenn c und c_1 beliebig kleine positive Werte sind; anderseits sind bei unseren Festsetzungen die Winkel θ und η in Grenzen von der Form c und $\pi - c_1$ eingeschlossen, so daß eine Beziehung von der Form

$$c < \theta + \eta < 2\pi - c_1$$

gilt. Setzen wir daher noch fest, daß $x - y$ und damit $\theta - \eta$ über einer beliebig kleinen positiven Grenze bleibt, so hat man auch eine Beziehung von der Form

$$c < \theta - \eta < 2\pi - c_1,$$

und jetzt konvergieren die Reihen

$$\sum_{\nu}^{1,\infty}\frac{\cos\nu(\theta+\eta)}{\nu},\quad \sum_{\nu}^{1,\infty}\frac{\sin\nu(\theta+\eta)}{\nu},\quad \sum_{\nu}^{1,\infty}\frac{\cos\nu(\theta-\eta)}{\nu},\quad \sum_{\nu}^{1,\infty}\frac{\sin\nu(\theta-\eta)}{\nu}$$

gleichmäßig, mithin auch die Reihe

$$\sum_{\nu}^{1,\infty}\frac{\varphi'_\nu(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu}$$

unter der Annahme

$$-1+\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon,\quad -1+\varepsilon_1 \leqq y \leqq 1-\varepsilon_1,\quad |x-y| > \varepsilon_2,$$

wobei ε, ε_1, ε_2 beliebig kleine positive Größen sind.

Man sieht ferner leicht, daß auch, wenn x gegen einen festen zwischen $-1+\varepsilon_1$ und $1-\varepsilon_1$ liegenden Wert von y heranrückt, die Summe

$$\sum_{\nu}^{1,n}\frac{\varphi'_\nu(x)\,\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu}$$

zwischen endlichen, von n und x unabhängigen Grenzen bleibt; denn ersichtlich gilt dies von den Größen

$$\sum_{\nu}^{1,n}\frac{\Psi}{\nu^2},\quad \sum_{\nu}^{1,n}\frac{\sin\nu(\theta\pm\eta)}{\nu},\quad \sum_{\nu}^{1,n}\frac{\cos\nu(\theta+\eta)}{\nu},\quad \sum_{\nu}^{1,n}\frac{\sin\nu(\theta-\eta)}{\nu},$$

ebenso aber auch von der Summe

$$D\sum_{\nu}^{1,n}\frac{\cos\nu(\theta-\eta)}{\nu}$$

auf Grund des oben angegebenen Ausdrucks für D; dieser ergibt nämlich

$$\pi\sin^2\theta\sqrt{\sin\theta\sin\eta}\,D\sum_{\nu}^{1,n}\frac{\cos\nu(\theta-\eta)}{\nu}$$

$$=\frac{\sin\theta}{4\cos\frac{\theta-\eta}{2}}\sum_{\nu}^{1,n}\frac{2\sin(\theta-\eta)\cos\nu(\theta-\eta)}{\nu}$$

$$=\frac{-\sin\theta}{4\cos\frac{\theta-\eta}{2}}\sum_{\nu}^{1,n}\frac{\sin(\nu-1)(\theta-\eta)\sin(\nu+1)(\theta-\eta)}{\nu}$$

$$=\frac{-\sin\theta}{4\cos\frac{\theta-\eta}{2}}\left\{\sin(\theta-\eta)+2\sum_{\nu}^{1,n-1}\left(\frac{\sin\nu(\theta-\eta)}{\nu}+\frac{\Psi}{\nu^2}\right)+\frac{\sin(n+1)(\theta-\eta)}{n+1}\right\}$$

und hieraus folgt das Behauptete, da bei den für x und y festgesetzten Schranken die Größen $\sin\theta$ und $\sin\eta$ über festen positiven Grenzen bleiben, und die Summe

$$\frac{-\sin\theta}{2\cos\frac{\theta-\eta}{2}}\sum_{\nu}^{1,n-1}\frac{\sin\nu(\theta-\eta)}{\nu}$$

in dem angegebenen Sinne endlich ist. Die Eigenschaft (III) des § 3 ist also ebenfalls für unsere Normalfunktionen gesichert. Endlich ist die Eigenschaft (IV) in einer Abhandlung von Darboux*) genau in der für unsere Zwecke brauchbaren Form nachgewiesen.

Damit werden die allgemeinen Resultate des § 4 anwendbar und es gilt für jede Funktion $f(x)$, die von $x=-1$ bis $x=+1$ beschränkte Schwankung hat, die Gleichung

$$\sum_{\nu}^{0,\infty}\left(\nu+\tfrac{1}{2}\right)P_\nu(x)\int_{-1}^{+1}f(\alpha)\,P_\nu(\alpha)\,d\alpha=\tfrac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)],$$

*) Sur l'approximation des fonctions de très grands nombres et sur une classe étendue de développements en série. Journal de math. (3) Bd. 4, S. 389.

die aus der Theorie der Integralgleichungen bisher nur für Funktionen mit stetiger erster und zweiter Ableitung abgeleitet war.

In ganz ähnlicher Weise wie die Legendreschen lassen sich auch die Jacobischen Polynome*)

$$X_n(u) = F(\alpha + n, -n, \gamma, u)$$

bei der Voraussetzung

$$\gamma > 0, \quad \alpha + 1 - \gamma > 0$$

behandeln. Sie sind nämlich einmal Integrale einer der Legendreschen sehr ähnlichen Differentialgleichung; sodann hat Darboux in der zitierten Abhandlung eine asymptotische Darstellung in der Form

$$X_n(\sin^2\varphi) = A \sin\varphi^{\frac{1}{2}-\gamma} \cos\varphi^{\gamma-\alpha-\frac{1}{2}} \left\{ \cos\left((2n+\alpha)\varphi + h\right) + \frac{\Psi}{n^{\frac{1}{2}+\gamma}} \right\}$$

gegeben, in der A und h Konstante sind, Ψ aber dieselbe Bedeutung wie oben hat; durch diese Formel wird die oben gebrauchte asymptotische Formel für $P_n(\cos\theta)$ direkt verallgemeinert, wenn man $\theta = 2\varphi$ setzt. Übrigens ist die Frage nach der Darstellung willkürlicher Funktionen durch die Jacobischen Polynome von Darboux in der zitierten Abhandlung unter sehr allgemeinen Voraussetzungen erledigt und zwar nach einer Methode, die der von Dirichlet für die Fouriersche Reihe angewandten insofern ähnlich ist, als sie auf der Summation einer endlichen Anzahl von Gliedern der zur Darstellung dienenden Reihe beruht.

Die durchgeführten Beispiele zeigen wohl, von welcher Art die Vorteile sind, die man aus der Theorie der Integralgleichungen für die Lehre von der Darstellung willkürlicher Funktionen von einer Variablen ziehen kann. Ähnliche Untersuchungen bezüglich der Funktionen von zwei Variablen hoffen wir in einer folgenden Abhandlung geben zu können.

*) Jordan, Cours d'analyse Bd. 3, Nr. 186.

The Inversion of a Definite Integral.

By

H. Bateman of Cambridge (England).

The following paper is intended as a contribution towards the solution of a problem proposed by Abel*). Let $f(s)$ and $\varkappa(s, t)$ be two given functions and c a given path of integration, it is required to determine if possible, a function $\varphi(t)$ such that

$$f(s) = \int_c \varkappa(s, t)\, \varphi(t)\, dt. \tag{1}$$

This problem is not soluble in general because a function defined by a definite integral is usually subject to certain restrictions depending on the nature of the function $\varkappa(s, t)$, accordingly there are two goals to be aimed at: we must first find necessary or sufficient conditions to be satisfied by the function $f(s)$ in order that the equation may be soluble, and then we must give a method of determining the function $\varphi(t)$ when it is known to exist.

Fredholm has remarked**) that the above equation may be considered as a particular case of the more general equation

$$\psi(s) = \lambda f(s) = \varphi(s) + \lambda \int_a^b \varkappa(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

in which the parameter λ is finally made infinite, but it is difficult to find conditions that the formula which he gives for the solution of this equation should have any meaning when λ tends to infinity; also this method requires that the function $f(s)$ should be given for values of s lying between a and b.

We must therefore seek another method of determining the function φ which will lead more directly to the conditions to be imposed on f.

*) Collected Works, Vol. II, p. 67.

**) Acta Math. 1903.

This is what I have endeavoured to do in § 1, the results are not very satisfactory, but the method is one of direct calculation and so can be used to give in a descriptive way a sufficient criterion for the existence of a solution; also when the function $\varkappa(s, t)$ is subject to certain restrictions the method will certainly lead to the solution if it exists.

In § 2 a particular integral equation is considered and the solution is obtained by means of Potential Theory. The result is then used to reduce the solution of a more general integral equation to that of an integral equation of the second kind.

In § 3 the partial integral equation

$$\int_a^b f(s, x)\,\varkappa(x, t)\,dx = \int_a^b f(x, t)\,\varkappa(s, x)\,dx$$

is dealt with, it appears that if $\varkappa(s, t)$ is the Green's function for the differential equation $L_s(u) = 0$, then any solution $f(s, t)$ of this integral equation is also a solution of the partial differential equation

$$L_s(u) = L_t(u).$$

The solutions of a partial differential equation of this kind can therefore be divided into groups, each group being associated with a Green's function for a particular set of boundary conditions and every member of the group being a solution of the corresponding integral equation.

In § 4 some instances are given in which the series

$$\sum \frac{\psi_n(s)\,\psi_n(t)}{\lambda_n}$$

represents the fundamental function $\varkappa(s, t)$ even though it is non-uniformly convergent in the neighbourhood of certain points. It follows then that when the series is multiplied by $\psi_n(s)$ and integrated term by term we shall obtain a correct result.

It is known that a series which is non-uniformly convergent for values of s in the neighbourhood of a point σ can be integrated term by term when the radius of non-uniform convergence for this point is finite*). It would be interesting if a series of the above type could be shown to satisfy this condition, or if some definite criterion for the legitimacy of the integration could be obtained.

It may be worth while to mention a very general class of series which can be integrated through a point of discontinuity.

Let $\psi_1(s) \cdots \psi_n(s) \cdots$ be a system of functions such that any

*) E. W. Hobson. The integration of series. Acta Math. 1903.

function $f(s)$ with only a finite number of discontinuities can be expanded in the form

$$\sum_0^\infty \psi_n(s) \int_a^b f(t)\,\varphi_n(t)\,dt.$$

Construct the expansion $\sum_0^\infty \psi_n(s)\,a_n(t)$ for the discontinuous function

$$\left.\begin{aligned} F(s) = +\,\chi(s) &\quad s > t \\ 0 &\quad s = t \\ -\,\chi(s) &\quad s < t \end{aligned}\right\}$$

then

$$a_n(t) = -\int_a^t \varphi_n(s)\,\chi(s)\,ds + \int_t^b \varphi_n(s)\,\chi(s)\,ds$$

and

$$\frac{d}{dt}\,a_n(t) = -\,2\chi(t)\,\varphi_n(t).$$

The expansion for $f(s)\,\chi(s)$ is

$$\begin{aligned} f(s)\,\chi(s) = &\quad \sum_0^\infty \psi_n(s) \int_a^b f(t)\,\chi(t)\,\varphi_n(t)\,dt \\ = &-\tfrac{1}{2}\sum_0^\infty [\psi_n(s)\,f(t)\,a_n(t)]_a^b + \tfrac{1}{2}\sum \psi_n(s) \int_a^b f'(t)\,a_n(t)\,dt. \end{aligned}$$

Now

$$\begin{aligned} \sum a_n(t)\,\psi_n(s) &= +\,\chi(s) \quad s > t, \\ &= -\,\chi(s) \quad s < t \end{aligned}$$

and the series $\sum \psi_n(s)\,a_n(t)\,f'(t)$ is non-uniformly convergent in the neighbourhood of $t = s$ (since it is discontinuous), but still it can be integrated through this point, for the equation obtained by integrating term by term is

$$f(s)\,\chi(s) =$$

$$+\,\tfrac{1}{2}\,[f(b)\,\chi(s) + f(a)\,\chi(s)] + \tfrac{1}{2}\int_a^s f'(t)\,\chi(t)\,dt - \tfrac{1}{2}\int_s^b f'(t)\,\chi(t)\,dt,$$

and this is evidently satisfied.

Hence the series $\sum_0^\infty \psi_n(s)\,a_n(t)\,f'(t)$ can be integrated through its point of discontinuity $t = s$.

The remainder of this section is devoted to the consideration of the equation

$$f(s) = \varphi(s) - \int_a^b \varkappa(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

as b varies and it is shown that if the solution $\varphi(s)$ is known for all values of b within a range a to $a + A$, and $f(s)$ is independent of b, then the function $\varkappa(s, t)$ can be uniquely determined. The proof depends upon a theorem due to Volterra and assumes that the limitations stated in his theorem are satisfied.

In conclusion I should like to thank Prof. Hilbert for the interest he has taken in the work and for some useful suggestions.

§ 1.

The conditions to be satisfied in order that the integral equation of the first kind may be soluble.

Only a few cases are known in which a general formula has been given for obtaining the function $\varphi(t)$ from the equation

$$f(s) = \int_c^d G(s, t)\, \varphi(t)\, dt \tag{1}$$

and in these the expression for φ takes one of two forms. In the classical cases given by Fourier, Riemann and Hankel the function φ is expressed as a definite integral similar in form to the original one, but when $G(s, t)$ is the Green's function corresponding to certain boundary conditions for a self-adjoint linear differential equation of the second order and $f(s)$ satisfies the same boundary conditions and possesses a continuous second derivate, Hilbert has shown that φ is given by operating on f with the given differential equation.

In order to solve (1) by means of a definite integral we may seek a relation of the form

$$\int_c^d G(s, t)\, F(t, x)\, dt = \frac{d}{dx} H(s, x). \tag{2}$$

A solution will then be given by

$$\varphi(t) = \int_{x_1}^{x_2} F(t, x)\, dx$$

provided

$$H(s, x_2) - H(s, x_1) = f(s).$$

Let us now suppose that the function $G(s, t)$ is finite and integrable (in which we include the conditions for a change in the order of integration) for $c \leqq t \leqq d$ and $a \leqq s \leqq b$ and that $f(s)$ is also finite and integrable for these values of s, then we can construct two such functions F and H as follows.

Forming the symmetrical function

$$(3) \qquad \varkappa(s, t) = \int_c^d G(s, r)\, G(t, r)\, dr$$

we write

$$f_1(s) = \int_a^b \varkappa(s, t) f(t)\, dt, \cdots, f_r(s) = \int_a^b \varkappa(s, t) f_{r-1}(t)\, dt,$$

$$(4) \qquad \begin{aligned} g_r(t) &= \int_a^b G(u, t) f_r(u)\, du, \\ F(t, x) &= x g_1(t) - \frac{x^3}{1!} g_3(t) + \frac{x^5}{2!} g_5(t) - \cdots, \\ H(s, x) &= f(s) - \frac{x^2}{1!} f_2(s) + \frac{x^4}{2!} f_4(s) - \frac{x^6}{3!} f_6(s) + \cdots. \end{aligned}$$

These series are absolutely and uniformly convergent for all finite values of x, for if G and f are the maximum values of $|G(s, t)|$ and $|f(s)|$ for the given values of s and t we have

$$|f_r(s)| < |b - a|^r G^{2r} f |c - d|^r, \qquad |g_r(s)| < |b - a|^{r+1} |c - d|^r G^{2r+1} f,$$

and so the series converge like exponential series.

Observing now that

$$\int_e^d G(s, t)\, g_r(t)\, dt = \int_c^d G(s, t)\, dt \int_a^b G(u, t) f_r(u)\, du$$
$$= \int_a^b \varkappa(s, u) f_r(u)\, du = f_{r+1}(s)$$

we find that

$$(5) \qquad \int_c^d G(s, t) F(t, x)\, dt = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \{H(s, x)\},$$

an equation of the required form.

We must now see whether this relation can be used to obtain a solution of equation (1). If we write

$$(6) \qquad \varphi(t) = 2 \int_0^M F(t, x)\, dx$$

and substitute in the equation we get

$$(7)\qquad \int_c^d G(s,t)\,\varphi(t)\,dt = 2\int_c^d G(s,t)\,dt \int_0^M F(t,x)\,dx$$

$$= -\int_0^M \frac{d}{dx} H(s,x)\,dx$$

$$= H(s,0) - H(s,M) = f(s) - H(s,M).$$

Two courses are now open to us, we may either write $\Psi(s)$ instead of $f(s)$ in equation (1) and endeavour to determine $f(s)$ so that

$$f(s) - H(s,M) = \Psi(s)$$

or we may try the effect of putting $M = \infty$, in which case the method will succeed if the function $f(s)$ is such that the quantity $H(s,x)$ is zero for x infinite and the processes which have been gone through are legitimate.

Every step can be examined directly if the functions $f(s)$ and $G(s,t)$ are known, hence we can determine if a particular function $f(s)$ will lead to a solution, but for most purposes it is convenient to have a definite criterion.

It has been shown by Hilbert*) that if a symmetrical function $\varkappa(s,t)$ is such that to every small positive quantily ε and every continuous function $g(s)$ there corresponds a function $h(t)$ for which

$$\int_a^b \left[g(s) - \int_a^b \varkappa(s,t)\,h(t)\,dt\right]^2 ds < \varepsilon$$

then any function $f(s)$ which is defined by an equation of the form

$$f(s) = \int_a^b \varkappa(s,t)\,\varphi(t)\,dt$$

can be expressed in an absolutely and uniformly convergent series of the function, $\psi_n(s)$ which satisfy the homogeneous equations

$$\psi_n(s) = \lambda_n \int_a^b \varkappa(s,t)\,\psi_n(t)\,dt \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

This theorem suggests a type of function for which the integral equation of the first kind may be soluble and we accordingly consider a function $f(s)$ which can be expanded in absolutely and uniformly convergent series

*) Göttinger Nachrichten 1904. Erste Mitteilung; following E. Schmidt (Inaugural-Dissertation, Göttingen 1905) the first supposition for $\varkappa(s,t)$ can be left.

$$f(s) = \sum_1^\infty c_n \psi_n(s) \tag{8}$$

where the quantities λ_n are supposed to be arranged according to their absolute values.*)

Multiplying by $\varkappa(s, t)$ and integrating term by term we have

$$f_1(s) = \sum_1^\infty \frac{c_n}{\lambda_n} \psi_n(s), \cdots, f_r(s) = \sum_1^\infty \frac{c_n}{\lambda_n^r} \psi_n(s).$$

Therefore

$$H(s, x) = \sum_0^\infty (-1)^r \frac{x^{2r}}{r!} \sum_1^{m-1} \frac{c_n}{\lambda_n^{2r}} \psi_n(s) + \sum_0^\infty (-1)^r \frac{x^{2r}}{r!} \sum_m^\infty \frac{c_n}{\lambda_n^{2r}} \psi_n(s).$$

Now corresponding to any small quantity ε we can choose m so that

$$\sum_m^\infty |c_n \psi_n(s)| < \varepsilon$$

also

$$|\lambda_n| > |\lambda_m| \quad \text{if} \quad n > m,$$

therefore

$$\sum_m^\infty \left| \frac{c_n}{\lambda_n^{2r}} \psi_n(s) \right| < \frac{\varepsilon}{\lambda_m^{2r}}.$$

Hence

$$\left| \sum_0^\infty (-1)^r \frac{x^{2r}}{r!} \sum_m^\infty \frac{c_n}{\lambda_n^{2r}} \psi_n(s) \right| < \sum_0^\infty \varepsilon \frac{1}{r!} \frac{x^{2r}}{\lambda_m^{2r}} < \varepsilon e^{\frac{x^2}{\lambda_m^2}}.$$

Thus

$$H(s, x) = \sum_1^{m-1} c_n e^{-\frac{x^2}{\lambda_n^2}} \psi_n(s) + \eta$$

where

$$\eta < \varepsilon \cdot e^{\frac{x^2}{\lambda_m^2}}.$$

Making ε tend to zero we have

$$H(s, x) = \sum_1^\infty c_n e^{-\frac{x^2}{\lambda_n^2}} \psi_n(s). \tag{9}$$

*) It is known that the quantities λ_n are all real.

Similarly it can be shown that

$$F(t,x) = \int_a^b G(s,t)\, R(s,x)\, ds$$

where

$$R(s,x) = \sum_1^\infty c_n \frac{x}{\lambda_n} e^{-\frac{x^2}{\lambda_n^2}} \psi_n(s). \tag{10}$$

Now let μ be any arbitrary finite small positive quantity, then a number m can be found so that

$$\sum_m^\infty |c_n \psi_n(s)| < \frac{\mu}{2}$$

and a large quantity M can be chosen so that

$$\sum_1^m |c_n e^{-\frac{M^2}{\lambda_n^2}} \psi_n(s)| < \frac{\mu}{2}.$$

Then will

$$|H(s,M)| = \left| \sum_1^{m-1} c_n e^{-\frac{M^2}{\lambda_n^2}} \psi_n(s) + \sum_m^\infty c_n e^{-\frac{M^2}{\lambda_n^2}} \psi_n(s) \right| < \frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{2} < \mu$$

accordingly we have the following theorem.

'*If $f(s)$ can be expanded in an absolutely and uniformly convergent series of the functions $\psi_n(s)$ then a function $\varphi(t)$ can be determined so that $\int_a^b G(s,t)\, \varphi(t)\, dt$ differs from $f(s)$ by a quantity less than μ.*'

If however we wish to make $\int_a^b G(s,t)\, \varphi(t)\, dt$ exactly equal to $f(s)$ it is necessary to make M infinite and then it is by no means certain that the integral for $\varphi(t)$ has a meaning. Two points remain to be settled.

(1) We must show that the function $F(t,x)$ given by formula (10) can be integrated with regard to x up to $x = \infty$.

(2) We must show that the order of integration in the double integral

$$\int_c^d G(s,t) dt \int_0^\infty F(t,x)\, dx$$

can be inverted.

The general case is rather difficult to deal with, accordingly we shall content ourselves by showing that if the function $\varphi(t)$ has a certain form our method does certainly lead to its determination.

Let us assume that the function $\varphi(t)$ can be expanded in an absolutely and uniformly convergent series of the functions $\chi_n(t)$ which satisfy the homogeneous equations

$$\chi_n(t) = \mu_n \int_c^d h(s, t)\, \chi_n(s)\, ds$$

where

$$h(s, t) = \int_a^b G(r, s)\, G(r, t)\, dr.$$

Then since

$$f(s) = \int_c^d G(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

and

$$\varphi(t) = \sum_1^\infty a_n \chi_n(t)$$

it follows that

(11) $$F(t, x) = \sum_1^\infty \frac{x}{\mu_n^2}\, e^{-\frac{x^2}{\mu_n^2}}\, a_n \chi_n(t).$$

For

$$g_1(t) = \int_a^b G(u, t)\, f_1(u)\, du$$

$$= \int_a^b G(u, t)\, du \int_c^d G(u, v)\, dv \int_a^b G(w, v)\, f(w)\, dw$$

$$= \int_a^b G(u, t)\, du \int_c^d G(u, v)\, dv \int_a^b G(w, v)\, dw \int_c^d G(w, r)\, \varphi(r)\, dr$$

$$= \int_c^d h(t, v)\, dv \int_c^d h(v, r)\, \varphi(r)\, dr.$$

Similarly

$$g_n(t) = \int_c^d h(t, v)\, g_{n-1}(v)\, dv$$

hence

$$g_1(t) = \int_c^d h(t, v)\,dv \int_c^d h(v, r)\,dr \sum_1^{\infty} a_n \chi_n(r)$$

$$= \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{\mu_n^2} \chi_n(t)$$

and

$$g_r(t) = \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{\mu_n^{r+1}} \chi_n(t)$$

which lead to the required result.

We must now determine $2\int_0^{\infty} F(t, x)\,dx$ and to do this we must integrate the series (11) term by term and this will be legitimate if the following sufficient conditions are satisfied.

1°. The series $u_1(x) + u_2(x) + \cdots$ should be uniformly convergent in an arbitrary interval.

2°. $\int u_n dx$ should exist for all values of n.

3°. $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^{\infty} u_n(x)\,dx$ should converge for values of a within the range of integration.

4°. A number p can be found independent of r and such that

$$\left| \sum_{n=1}^{r} \int_x^{\infty} u_n(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

for all k's greater than p.

The first three conditions are evidently satisfied on account of the uniform convergence of the series $\sum_1^{\infty} a_n \chi_n(t)$. The fourth condition will be satisfied if p can be found independent of r such that

$$\left| \sum_{n=1}^{r} a_n e^{-\frac{x^2}{\mu_n^2}} \chi_n(t) \right| < \varepsilon$$

for all k's greater than p. Now since the series $\sum_1^{\infty} a_n \chi_n(t)$ is absolutely convergent we can determine a number m such that

$$\sum_m^\infty |a_n \chi_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

and then

$$\sum_m^r \left| a_n e^{-\frac{\varkappa^2}{\mu_n^2}} \chi_n(t) \right| < \sum_m^\infty \left| a_n e^{-\frac{\varkappa^2}{\mu_n^2}} \chi_n(t) \right| < \frac{\varepsilon}{2};$$

also we can determine a number p such that

$$\left| \sum_1^m a_n e^{-\frac{\varkappa^2}{\mu_n^2}} \chi_n(t) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

if $\varkappa > p$, and then we shall have

$$\left| \sum_{n=1}^r a_n e^{-\frac{\varkappa^2}{\mu_n^2}} \chi_n(t) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

All the conditions being satisfied the integration term by term may be effected and we have

$$2\int_0^\infty F(t, x)\,dx = 2\int_0^\infty \sum_1^\infty \frac{x}{\mu_n^2} e^{-\frac{x^2}{\mu_n^2}} a_n \chi_n(t) \cdot dx$$

$$= \sum_0^\infty a_n \chi_n(t) = \varphi(t).$$

Hence the proposed method is in this case successful. It can also be used in some cases when the limits of integration are infinite provided the functions $g_r(t)$, $f_r(s)$, are defined by the equations

$$g_1(t) = \int_a^b G(u, t)\,du \int_c^d G(u, v)\,dv \int_a^b G(w, v) f(w)\,dw$$

$$g_n(t) = \int_a^b G(u, t)\,du \int_c^d G(u, v)\, g_{n-1}(v)\,dv$$

$$f_n(s) = \int_c^d G(s, v)\,dv \int_a^b G(w, v) f_{n-1}(w)\,dw.$$

For example if

$$f(s) = \int_0^\infty J_0(st) \sqrt{st}\, \varphi(t)\,dt$$

where J_0 denotes the zeroeth Bessel function, it has been shown by Hankel*) that

$$\varphi(t) = \int_0^\infty J_0(st)\sqrt{st}\, f(s)\, ds$$

and our function $F(t, x)$ is found to be

$$x e^{-x^2} \int_0^\infty J_0(st)\sqrt{st}\, f(s)\, ds$$

and so the method leads to the correct result.

§ 2.

Solution of a particular equation.

We shall now consider the particular integral equation

$$f(s) = \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t\, dt}{(1-2ts+s^2)^{\frac{n}{2}}} \quad (n = 1, 3, \cdots) \quad (-1 < s < +1)$$

and shall show that *if* $f(s)$ *is regular within the unit circle* $|s| = 1$, *the solution is given by*

$$\varphi(t) = \frac{1}{4\pi}(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} \int_0^{2\pi} [nf\{t + i\sqrt{1-t^2}\cos\alpha\}$$
$$+ 2\{t + i\sqrt{1-t^2}\cos\alpha\} + f'\{t + i\sqrt{1-t^2}\cos\alpha\}] \sin^{n-1}\alpha\, d\alpha.$$

Let $x_1, x_2, \cdots, x_{n+2}$ be a system of rectangular coordinates in a space of $n+2$ dimensions and $r^2 = x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_{n+2}^2 = 1$ a unit hypersphere situated in this space.

The equations

$$V_1 = f(x_1 + ix_2)$$
$$V_0 = \frac{1}{r^n} f\left(\frac{x_1 + ix_2}{r^2}\right)$$

define a potential function for points inside and outside the hypersphere respectively. This potential function is continuous at the boundary and so will be due to a boundary distribution σ, the conditions of being continuous within the hypersphere and of vanishing at infinity being fulfilled since $f(s)$ is regular for $|s| < 1$.

---

*) Mathematische Annalen, Bd. 8 (1875), p. 482. The function $f(s)$ must of course be such that the improper integral has a meaning.

Poisson's equation for the space we are dealing with is

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial x_{n+2}^2} + \lambda \varrho = 0$$

where λ is n times the total area of the boundary of a unit hypersphere. The corresponding equation for determining the surface density is accordingly

$$\frac{\partial V_1}{\partial n_1} + \frac{\partial V_0}{\partial n_0} + \lambda \sigma = 0$$

where the normals are drawn into the two portions of space separated by the boundary.

Substituting the above values of V for the boundary $r = 1$, we find that

$$\lambda \sigma = n f(x_1 + i x_2) + 2(x_1 + i x_2) f'(x_1 + i x_2).$$

The potential at the point $(s, 0, 0, \cdots)$ when calculated by direct integration is

$$V = \int\limits_S \frac{\sigma \, dS}{(1 - 2 x_1 s + s^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

Put

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos\theta \\ x_2 &= \sin\theta \cos\varphi \\ x_3 &= \sin\theta \sin\varphi \cos\chi \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ x_{n+1} &= \sin\theta \sin\varphi \sin\chi \cdots \cos\omega \\ x_{n+2} &= \sin\theta \sin\varphi \sin\chi \cdots \sin\omega \end{aligned}$$

then

$$dS = \sin^n\theta \cdot \sin^{n-1}\varphi \cdots d\theta \, d\varphi \cdots d\omega,$$

accordingly

$$V = \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^n\theta \sin^{n-1}\varphi \cdot \sigma \, d\theta \, d\varphi}{(1 - 2 s \cos\theta + s^2)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \cdots \sin^{n-2}\chi \cdots d\chi \cdots d\omega.$$

and

$$\lambda = n \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \sin^n\theta \sin^{n-1}\varphi \, d\theta \, d\varphi \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \cdots \sin^{n-2}\chi \cdots d\chi \cdots d\omega.$$

Now by an easy calculation we find that

$$\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \sin^n\theta \sin^{n-1}\varphi \cdot d\theta \, d\varphi = \frac{4\pi}{n},$$

hence our equation becomes

$$f(s) = V = \frac{n}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\lambda\sigma \sin^n\theta \sin^{n-1}\varphi \cdot d\theta\, d\varphi}{(1-2s\cos\theta+s^2)^{\frac{n}{2}}}$$

i. e. if

$$f(s) = \int_0^{\pi}\frac{\varphi(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta}{(1-2s\cos\theta+s^2)^{\frac{n}{2}}}$$

then

$$\varphi(\cos\theta) = \frac{n}{4\pi}\sin^{n-1}\theta\int_0^{2\pi}\lambda\sigma\sin^{n-1}\varphi\cdot d\varphi.$$

Putting $\cos\theta = t$ and substituting the value of $\lambda\sigma$ obtained above, we have

$$\varphi(t) = \frac{1}{4\pi}(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\int_0^{2\pi}\Big[nf\big(t+i\sqrt{1-t^2}\cos\alpha\big)$$
$$+2\big(t+i\sqrt{1-t^2}\cos\alpha\big)f'\big(t+i\sqrt{1-t^2}\cos\alpha\big)\Big]\sin^{n-1}\alpha\, d\alpha$$

which is the formula stated.

If we put $n=1$, $\varphi(t) = P_m(t)$ where P_m is the Legendre polynomial we find that $f(s) = \frac{2}{2m+1}s^m$, and our formula gives

$$\varphi(t) = P_m(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big(t+\sqrt{t^2-1}\cos\alpha\big)^m d\alpha$$

which is Laplace's formula for $P_m(t)$.

Our formula may also be written in another form. If we differentiate the equation

$$f(s) = \int_{-1}^{+1}\frac{\varphi(t)\, dt}{(1-2ts+s^2)^{\frac{n}{2}}}$$

we get

$$\chi(s) = nf(s) + 2sf'(s) = n\int_{-1}^{+1}\frac{(1-s^2)\,\varphi(t)\, dt}{(1-2ts+s^2)^{\frac{n}{2}+1}}$$

accordingly the solution of

$$\chi(s) = \int_{-1}^{+1}\frac{n(1-s^3)}{(1-2ts+s^2)^{\frac{n+2}{2}}}\varphi(t)\, dt$$

is given by

$$\varphi(t) = \frac{(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \chi(t + \sqrt{t^2-1}\cos\alpha)\sin^{n-1}\alpha \cdot d\alpha.$$

The result may be obtained by another method which also applies when n is an even integer.

The function $\dfrac{(1-s^2)(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}}{(1-2ts+s^2)^{\frac{n+2}{2}}}$ only differs by a constant factor from $\dfrac{\partial G}{\partial \nu}$ where G is the Green's function for the hypersphere, and the formula

$$V = \int_0^{\pi} \chi(x_1 + \sqrt{r^2 - x_1^2}\cos\alpha)\sin^{n-1}\alpha \cdot d\alpha$$

represents a potential function which is a function of r and x_1 only and which takes the value

$$\int_0^{\pi} \chi(s)\sin^{n-1}\alpha \cdot d\alpha$$

at the point $(s, 0, 0, \cdots)$.

The values which this potential function takes at points on the hypersphere will be given by

$$V(t) = \int_0^{\pi} \chi(t + \sqrt{t^2-1}\cos\alpha)\sin^{n-1}\alpha \cdot d\alpha$$

and Green's formula $V = \int_S \dfrac{\partial G}{\partial \nu} V(t)\, ds$ gives us the required relation, hence we have the following theorem:

If $\chi(s)$ is regular within the unit circle $|s| = 1$, the integral equation

$$\chi(s) = \int_{-1}^{+1} \frac{n(1-s^2)}{(1-2ts+s^2)^{\frac{n+2}{2}}}\varphi(t)\,dt \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots, \infty)$$

is satisfied by

$$\varphi(t) = \frac{(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}}{2\pi} \int_0^{\pi} \chi(t + \sqrt{t^2-1}\cos\alpha)\sin^{n-1}\alpha \cdot d\alpha.$$

The previous relation may be deduced from this; hence if

$$f(s) = \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t)\, dt}{(1-2ts+s^2)^{\frac{n}{2}}} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad (-1 < s < +1)$$

then

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi}(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} \int_0^\pi \Big[n f\big(t + \sqrt{t^2-1} \cos\alpha\big)$$

$$+ 2\big(t + \sqrt{t^2-1}\cos\alpha\big) f'\big(t + \sqrt{t^2-1}\cos\alpha\big)\Big] \sin^{n-1}\alpha \cdot d\alpha.$$

An interesting case occurs when $n = 2$, for if $s + \frac{1}{s} = 2z$ the first equation may be written

$$F(z) = s f(s) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t)}{z-t}\, dt$$

and the second equation gives

$$\varphi(t) = \frac{1}{i\pi}\Big[\big(t + \sqrt{t^2-1}\cos\alpha\big) f\big(t + \sqrt{t^2-1}\cos\alpha\big)\Big]_0^\pi.$$

The function $F(z)$ is in general a many-valued function of the form $\frac{1}{2}\varphi(z) \operatorname{Log}\frac{z+1}{z-1} + \psi(z)$ and since the two values of the logarithm differ by $2i\pi$ we see at once how the above formula will give the correct result.

The formula which we have obtained may be used to make the solution of an integral equation of the first kind depend upon that of an integral equation of the second kind.

Let

$$\chi(s) = \int_{-1}^{+1} \left[G(s, t) + \frac{n(1-s^2)}{(1-2ts+s^2)^{\frac{n+2}{2}}} \right] \varphi(t)\, dt$$

then if

$$\psi(t) = \frac{(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}}{2\pi} \int_0^\pi \chi\big(t + \sqrt{t^2-1}\cos\alpha\big) \sin^{n-1}\alpha \cdot d\alpha$$

we shall have

$$\psi(t) = \varphi(t) + \int_{-1}^{+1} \varkappa(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

where

$$\varkappa(s, t) = \frac{(1-s^2)^{\frac{n-1}{2}}}{2\pi} \int_0^\pi G\big(s + \sqrt{s^2-1}\cos\alpha, t\big) \sin^{n-1}\alpha \cdot d\alpha.$$

Now this is an integral equation of the second kind and so can be solved by Fredholm's method provided the determinantal function δ is not equal to zero.

§ 3.

A partial integral equation.

The theory of the integral equation of the second kind

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b \varkappa(s, t)\, \varphi(t)\, dt \tag{1}$$

is closely connected with that of a certain partial integral equation

$$\int_a^b \varkappa(s, x)\, f(x, t)\, dx = \int_a^b \varkappa(x, t)\, f(s, x)\, dx. \tag{2}$$

This equation has many remarkable properties, for instance if $f(s, t)$ and $g(s, t)$ are two solutions then the function

$$h(s, t) = \int_a^b f(s, x)\, g(x, t)\, dx$$

is also a solution.

For if we multiply both sides by $g(r, s)$ and integrate with regard to s between a and b we have, assuming that the order of integration can be reversed,

$$\int_a^b \int_a^b g(r, s)\, \varkappa(s, x)\, f(x, t)\, ds\, dx = \int_a^b \varkappa(x, t)\, h(r, x)\, dx$$

or

$$\int_a^b \int_a^b \varkappa(r, s)\, g(s, x)\, f(x, t)\, ds\, dx = \int_a^b \varkappa(x, t)\, h(r, x)\, dx$$

since $g(r, s)$ is a solution of (1).

Hence

$$\int_a^b \varkappa(r, s)\, h(s, t)\, ds = \int_a^b \varkappa(x, t)\, h(r, x)\, dx$$

which proves the proposition.

The function $\varkappa(s, t)$ itself is evidently a solution of (2) hence we can form at once a number of other solutions, namely

$$\varkappa\varkappa(s, t) = \int_a^b \varkappa(s, x)\, \varkappa(x, t)\, dx,$$

$$\varkappa\varkappa\varkappa(s, t) = \int_a^b \varkappa(s, x)\, \varkappa\varkappa(x, t)\, dx,$$

. . . .

The solving function $K(s,t)$ of the equation (1) is also a solution for we have the equations

$$\varkappa(s,t) = K(s,t) - \lambda \int_a^b \varkappa(s,r)\, K(r,t)\, dr,$$

$$K(s,t) = \varkappa(s,t) + \lambda \int_a^b K(s,r)\, \varkappa(r,t)\, dr.$$

Again, if we seek a solution of the form $\varphi(s)\,\psi(t) = f(s,t)$ we find at once that we must have

$$\varphi(s) - \lambda \int_a^b \varkappa(s,t)\, \varphi(t)\, dt = 0,$$

$$\psi(t) - \lambda \int_a^b \varkappa(s,t)\, \psi(s)\, ds = 0$$

and it is known*) that these equations are satisfied by functions $\varphi(s)$ and $\psi(s)$ when λ is one of the roots of the determinantal equation

$$\delta(\lambda) = 0.$$

Now let us consider the particular case in which the function $\varkappa$ is the Green's function corresponding to boundary conditions I ... IV **) for the self-adjoint linear differential equation of the second order

$$L_s(u) = 0.$$

It is then evident that a function $f(s,t)$ which satisfies the integral equation

$$(3) \qquad \int_a^b G(s,x)\, f(x,t)\, dx = \int_a^b G(x,t)\, f(s,x)\, dx$$

must satisfy the same boundary conditions as $G(s,x)$.

For instance if we take boundary conditions I, viz.

$$G(a,x) = G(b,x) = 0$$

we have, putting $s = a$ in the above equation,

$$0 = \int_a^b G(x,t)\, f(0,x)\, dx.$$

But if $\varphi(t)$ is a function which has a continuous second derivate and which satisfies the given boundary conditions, the solution of the equation

$$\varphi(t) = \int_a^b G(x,t)\, f(x)\, dx$$

*) Plemelj, Zur Theorie der Fredholmschen Funktionalgleichung. Monatshefte für Mathematik und Physik. XV. Jahrg., p. 93 u. p. 337).

**) Cf. Hilbert, Gött. Nachr. 1904. Zweite Mitteilung.

is given by $f(x) = -L_x\{\varphi(x)\}$ and this solution is unique, accordingly we must have $f(0, x) = 0$.

If we refer to the definitions of the functions $G(s, t)$ in Hilbert's paper it is easy to see that they are all solutions of the partial differential equation

(4) $$L_s(u) = L_t(u).$$

We can now show that a continuous solution of equation (3) is also a solution of this partial differential equation. If we write

$$\varphi(s, t) = \int_a^b G(s, x) f(x, t)\, dx = \int_a^b G(x, t) f(s, x)\, dx$$

we have

$$f(s, t) = -L_s \varphi(s, t)$$
$$= -\int_a^b G(x, t)\, L_s f(s, x)\, dx.$$

But since $f(s, t)$ satisfies the given boundary conditions we have

$$f(s, t) = -\int_a^b G(x, t)\, L_x \cdot f(s, x)\, dx$$

therefore

$$0 = \int_a^b G(x, t)\, [L_s f(s, x) - L_x f(s, x)]\, dx.$$

Now the equation $0 = \int_a^b G(x, t)\, \psi(t)\, dt$ only possesses one solution viz. $\psi(t) = 0$, hence we have

$$L_s f(s, x) - L_x f(s, x) = 0.$$

Thus corresponding to each Green's function for $L_x(u) = 0$ there is a group of solutions of the partial differential equation, and if $f(s, t)$, $g(s, t)$ are any two members of this group the function

$$h(s, t) = \int_a^b f(s, x)\, g(x, t)\, dx$$

will also belong to the group.

If $\psi_n(s)$ is an 'Eigenfunktion' belonging to the function $G(s, t)$ the quantity $\psi_n(s)\, \psi_n(t)$ is a solution of (3) and so

$$\int_a^b f(s, x)\, \psi_n(x)\, \psi_n(t)\, dx$$

is a solution and is of the form $\varphi(s)\, \psi_n(t)$, hence we must have $\varphi(s) = \mu_n \psi_n(s)$, that is

$$\mu_n \psi_n(s) = \int_a^b f(s, x)\, \psi_n(x)\, dx.$$

This equation shows that the functions $\psi_n(s)$ are also Eigenfunctions for the 'Kern' $f(s, t)$.

There are other types of integral equations which are satisfied by certain groups of solutions of a partial differential equation. For example we can show that if $F(x, y, z)$ is a solution of Laplace's equation

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi F(x, y, z + i\varrho \cos\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x + \varrho\cos\varphi,\ y + \varrho\sin\varphi,\ z)\, d\varphi$$

provided the integrals have a meaning.

In other words the integral of a solution of Laplace's equation round a circle of radius ϱ is equal to the integral of the same solution multiplied by a certain definite function, along an axis drawn through the centre of the circle and perpendicular to it, the integration extending from the centre of one point sphere passing through the given circle to the centre of the other.

A simple proof of this relation may be obtained by remarking that each integral represents the solution of

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial V}{\partial \varrho} = 0$$

which reduces to $F(x, y, z)$ when $\varrho = 0$, and this solution is known to be unique.

The two paths of integration appear to be related in some way to the characteristics of the differential equation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0;$$

if the relation could be expressed in a more definite form it might suggest how similar integral equations could be obtained for more general partial differential equations.

§ 4.

Construction of an integral equation possessing assigned solutions.

The problem of determining a function $\varkappa(s, t)$ so that the equation

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b \varkappa(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

may be satisfied for a given set of functions $\psi_n(s)$ and for a given set of values of λ, has been considered by Hilbert. If the functions $\psi_n(s)$ possess the orthogonal properties,

$$\int_a^b \psi_m(s)\,\psi_n(s)\,ds = 0 \qquad m \neq n$$
$$= 1 \qquad m = n$$

and the series $\sum \frac{1}{\lambda_n}\,\psi_n(s)\,\psi_n(t)$ is uniformly convergent it will furnish a solution of the problem. It is however not necessary for this series to be uniformly convergent as the following example will show.

Choosing the Legendre polynomials for our given set of functions we remark that they satisfy the equations

$$\frac{d}{ds}\left\{(1-s^2)\frac{du}{ds}\right\} + n(n+1)u = 0$$

and so we can obtain a simple function developable in the form

$$\sum A_n P_n(s)\,P_n(t)$$

by finding a suitable solution of the partial differential equation

$$\frac{d}{ds}\left\{(1-s^2)\frac{\partial \varkappa}{\partial s}\right\} = \frac{d}{dt}\left\{(1-t^2)\frac{\partial \varkappa}{\partial t}\right\}.$$

Assuming a solution of the form $\varkappa = F(s^2+t^2)$ we obtain

$$\varkappa(s,t) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2-t^2}}.$$

We shall now show that the function

$$\varkappa(s,t) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2-t^2}} \qquad s^2+t^2<1$$
$$= 0 \qquad s^2+t^2>1$$

gives us a solution of our problem.

If we integrate the expansion

$$P_n\left(st+\sqrt{(1-s^2)(1-t^2)}\cos\alpha\right) = P_n(s)\,P_n(t) + 2\sum_1^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!}\,P_n^m(s)P_n^m(t)\cos m\alpha$$

between 0 and π we obtain

$$\int_0^\pi P_n\left(st+\sqrt{(1-s^2)(1-t^2)}\cos\alpha\right)d\alpha = \pi P_n(s)\,P_n(t).$$

Putting $x = st+\sqrt{(1-s^2)(1-t^2)}\cos\alpha$ this relation gives

$$\int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2-s^2-t^2+2stx}} = \pi P_n(s)\,P_n(t),$$

the integral being taken over the values of x between -1 and $+1$ for which the quantity under the square root is positive.

When $t = 0$, this gives

$$\int_{-\sqrt{1-s^2}}^{+\sqrt{1-s^2}} \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2-s^2}} = \pi\, P_n(s)\, P_n(0)$$

which shows that with the above function $\varkappa(s, t)$ the functions $P_n(s)$ are solutions of the homogeneous integral equation.

The corresponding expansion is obtained by making use of a theorem of Darboux's.*)

Sufficient conditions that a function $f(s)$ may be expanded in a convergent series of Legendre polynomials for values of s lying between -1 and $+1$ are that

(1) The integrals $\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1} ds\, f(s)\, P_n(s)$ should have a meaning, this requires that if $f(s)$ becomes infinite within the range it should become infinite to an order less than unity.

(2) If $P_n(s)$ becomes infinite at one of the points ± 1 it should become infinite to an order less than $\frac{3}{4}$.

(3) $f(s)$ should satisfy the conditions laid down by Dirichlet for a function developable in a Fourier series, i. e. it should only have a limited number of maxima and minima and of discontinuities within the range.

When these conditions are satisfied the series

$$\sum_0^\infty \frac{2n+1}{2} P_n(s) \int_{-1}^{+1} f(s)\, P_n(s)\, ds$$

will converge to the value $f(s)$ at all points where $f(s)$ is continuous, and to the value

$$\frac{1}{2} \sum [f(s+0) + f(s-0)]$$

at any point where $f(s)$ is discontinuous.

Applying this theorem to the function

$$\begin{aligned} f(s) &= (1-s^2-x^2-t^2+2stx)^{-\frac{1}{2}} \qquad && 1-s^2-x^2-t^2+2stx > 0 \\ &= 0 && 1-s^2-x^2-t^2+2stx < 0 \end{aligned}$$

*) Approximation des fonctions de très grands nombres. Journ. de Math. (3e série) tome IV, (1878), p. 393.

we obtain the series

$$\frac{\pi}{2}\sum_{0}^{\infty}(2n+1)\,P_n(s)\,P_n(t)\,P_n(x).$$

Putting $x=0$ the expansion becomes

$$\frac{\pi}{2}\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots 2n-1}{2\cdot 4\cdots 2n}(4n+1)\,P_{2n}(s)\,P_{2n}(t)=\begin{array}{ll}(1-s^2-t^2)^{-\frac{1}{2}} & 1>s^2+t^2\\ 0 & 1<s^2+t^2;\end{array}$$

the particular case when $t=0$ has already been given by Heine.*)

Other expansions may be obtained in a similar way, for instance if $t^2=s^2$

$$\int\limits_{-\sqrt{1-t^2}}^{+\sqrt{1-t^2}}\frac{ds}{\sqrt{1-s^2-t^2}}\int\limits_{-\sqrt{1-s^2}}^{+\sqrt{1-s^2}}\frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2-s^2}}=\pi\,P_n(0)\int\limits_{-\sqrt{1-t^2}}^{+\sqrt{1-t^2}}\frac{P_n(s)}{\sqrt{1-s^2-t^2}}=\pi^2\,P_n^2(0)\,P_n(t).$$

The left hand side becomes on changing the order of integration

$$\int\limits_{-1}^{-t}P_n(x)\,dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}}\frac{ds}{\sqrt{(1-s^2-t^2)(1-x^2-s^2)}}+\int\limits_{-t}^{+t}P_n(x)\,dx\int\limits_{-\sqrt{1-t^2}}^{+\sqrt{1-t^2}}\frac{ds}{\sqrt{(1-s^2-t^2)(1-x^2-s^2)}}$$

$$+\int\limits_{t}^{1}P_n(x)\,dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}}\frac{ds}{\sqrt{(1-s^2-t^2)(1-x^2-s^2)}};$$

hence if $4K$ is the period of the Jacobian elliptic functions

$$\frac{\pi^2}{4}\sum_{0}^{\infty}(4n+1)\,\frac{1^2\cdot 3^2\cdots(2n-1)^2}{2^2\cdot 4^2\cdots(2n)^2}\,P_{2n}(s)\,P_{2n}(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,K\left(\sqrt{\frac{1-s^2}{1-t^2}}\right)\quad s^2>t^2$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\,K\left(\sqrt{\frac{1-t^2}{1-s^2}}\right)\quad s^2<t^2.$$

Putting $t=0$ we have the expansion

$$K'(s)=\frac{\pi^2}{4}\sum_{0}^{\infty}(-1)^n(4n+1)\,\frac{1^3\cdot 3^3\cdots(2n-1)^3}{2^3\cdot 4^3\cdots(2n)^3}\,P_{2n}(s).$$

If the solution of the integral equation of the second kind

$$f(s)=\varphi(s)-\int\limits_{a}^{b}\varkappa(s,t)\,\varphi(t)\,dt$$

is known for values of b contained within the interval a to $a+A$, the function $\varkappa(s,t)$ can be uniquely determined.

---

*) Handbuch der Kugelfunctionen Bd. 1, p. 85.

For when $b = a$ we have $\varphi(s) = f(s)$, and so the equation may be written

$$\varphi(s, b) - \varphi(s, a) = \int_a^b \varphi(t, b)\, \varkappa(s, t)\, dt$$

and is therefore of the form

$$F(b) - F(a) = \int_a^b \varphi(t, b)\, \psi(t)\, dt.$$

Now Volterra*) has shown that if in an integral equation of this kind $F(b)$ and $F'(b)$ remain finite and continuous for values of b between a and $a + A$, and the functions

$$\varphi(t, b) \quad \text{and} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial b} = H(t, b)$$

are always finite for $b > t > a$, $a + A > b > a$, and are integrable, and if the lower limit of the absolute value of $\varphi(b, b)$ is different from zero, there will exist one and only one finite and continuous function $\psi(t)$ which satisfies the functional equation for values of b between a and $a + A$ and this function will be given by

$$\varphi(b) = \frac{F'(b)}{\varphi(h, b)} - \frac{1}{\varphi(b, b)} \int_a^b F'(x) \sum_0^\infty S_i(x, b)\, dx$$

where

$$S_0(x, b) = \frac{H(x, b)}{\varphi(b, b)}$$

$$S_i(x, b) = \int_b^x S_{i-j}(x, \xi)\, S_{j-1}(\xi, b)\, d\xi.$$

Applying this theorem to our equation we see that the function $\varkappa(s, t)$ can be uniquely determined provided the above conditions are satisfied.

Göttingen, March 6th 1906.

*) Sopra alcune quistioni di inversione di integrali definiti. Annali di Matematica 1897.

Über das Anwachsen analytischer Funktionen.*)

Von

GEORG FABER in Karlsruhe.

Unter $\mathsf{M}(r)$ verstehe ich, wie üblich, den Maximalwert, den der absolute Betrag der im Kreise $|x| \leqq r$ regulären analytischen Funktion $f(x) = \sum_0^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu$ auf der Peripherie dieses Kreises annimmt. Die Funktion $\mathsf{M}(r)$ spielt bekanntlich bei funktionentheoretischen Überlegungen, besonders auch in der neueren Theorie der ganzen Funktionen eine große Rolle. Es ist allgemein bekannt, daß $\mathsf{M}(r)$ mit r monoton zunimmt, und es ist leicht zu beweisen, daß $\mathsf{M}(r)$ eine stetige Funktion von r ist; ferner ist unschwer einzusehen, daß nicht zu jeder stetigen monoton zunehmenden Funktion $\vartheta(r)$ eine analytische Funktion $f(x)$ gehört, deren $\mathsf{M}(r) = \vartheta(r)$ wäre. Es erhebt sich daher die Frage: welchen weiteren Einschränkungen unterliegen die Funktionen $\mathsf{M}(r)$? Diese Frage, deren Lösung auch Herr Borel**) als wünschenswert bezeichnet, scheint nicht näher untersucht zu sein; einen kleinen Beitrag hierzu liefere ich im folgenden, indem ich zeige, daß in einem rechtwinklgen (ξ, η)-Koordinatensystem die Kurven $\eta = \lg \mathsf{M}(e^\xi)$ — wo also $r = e^\xi$ gesetzt ist — nirgends konvex sind.

Die Funktion der zwei komplexen Veränderlichen x, y:

$$F(x, y) = \frac{1}{1 - y \cdot f(x)} = \sum_0^\infty {}^\nu y^\nu (f(x))^\nu$$

*) Nachdem ich die vorliegende Note der Annalenredaktion eingereicht hatte, teilte mir Herr Blumenthal mit, daß er schon im August d. J. von einer ganz andern Seite her zu dem gleichen Satz gelangt ist und denselben in den Jahresberichten der D. Math.-Ver. zu veröffentlichen gedenkt (vgl. Bd. 6, Heft 2).

**) Leçons sur les fonctions entières p. 120.

ist regulär, solange $|x| < r$, $y < \frac{1}{\mathsf{M}(r)}$ bleibt (denn in diesem Gebiete ist $|y \cdot f(x)| < 1$); dagegen hat die Funktion sicher eine singuläre Stelle für $|x| = r$, $|y| = \frac{1}{\mathsf{M}(r)}$; denn für mindestens einen Wert $x = r \cdot e^{i\vartheta}$ des Kreises $|x| = r$ wird $|f(x)| = \mathsf{M}(r)$, also $f(x) = \mathsf{M}(r) e^{i\vartheta_1}$, dann wird für $x = r \cdot e^{i\vartheta}$, $y = \frac{1}{\mathsf{M}(r)} \cdot e^{-i\vartheta_1}$ die Funktion $F(x, y) = \infty$.

r und $\frac{1}{\mathsf{M}(r)}$ sind demnach zusammengehörige Konvergenzradien der Potenzreihe $F(x, y) = \sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$; daraus folgt*) zunächst, daß $\mathsf{M}(r)$ differenzierbar ist (wenigstens in dem Sinne, daß die zwei vorwärts und rückwärts genommenen Differentialquotienten

$$\left(\frac{d\mathsf{M}(r)}{dr}\right)_+ \quad \text{und} \quad \left(\frac{d\mathsf{M}(r)}{dr}\right)_-$$

existieren, ob sie voneinander verschieden sein können, bleibe dahingestellt); sodann, daß $R = \frac{1}{\mathsf{M}(r)}$ der Differentialungleichung genügt:

$$\left(\frac{d^2 R}{dr^2}\right)_+ \leqq \frac{1}{R}\left(\frac{dR}{dr}\right)_+^2 - \frac{1}{r}\left(\frac{dR}{dr}\right)_+,$$

wo unter $\left(\frac{d^2 R}{dr^2}\right)_+$, solange die Existenz des zweiten Differentialquotienten nicht feststeht, der obere oder untere Limes für $h = 0$ von

$$\frac{\left(\frac{d(\mathsf{M}(r+h))^{-1}}{dr}\right)_+ - \left(\frac{d(\mathsf{M}(r))^{-1}}{dr}\right)_+}{h}$$

verstanden werden, und der Index $+$ durchweg durch den Index $-$ ersetzt werden darf.

Setzt man nun $\lg r = \xi$, $\lg \mathsf{M}(r) = \eta$, so geht nach einer ganz elementaren Rechnung die obige Differentialungleichung, abgesehen von dem stets positiven Faktor $e^\eta \cdot e^{-2\xi}$, über in $\left(\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\right)_+ \geqq 0$, womit die Behauptung bewiesen ist. Die so gefundene notwendige Beschränkung für die Funktionen $\mathsf{M}(r)$ ist nicht hinreichend, um dieselben vollständig zu charakterisieren.

Zum Schlusse will ich noch bemerken, daß die bekannte Lemairesche Grenzbeziehung zwischen den zusammengehörigen Konvergenzradien nun

---

*) S. Fabry C. R. Bd. 134 (1902), p. 1190—1192. — Faber, Math. Ann. Bd. 61 (1905), p. 300. — Hartogs, Math. Ann. Bd. 62 (1905), p. 77.

auch einen Grenzausdruck für die Funktion $\mathsf{M}(r)$ liefert: Bedeutet wieder $a_{\mu\nu}$ den Koeffizienten von x^μ in $(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)^\nu$, so ist:

$$\overline{\lim_{\mu+\nu=\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}| \cdot \frac{r^\mu}{(\mathsf{M}(r))^\nu}} = 1.$$

Statt der hier benutzten Hilfsfunktion $F(x, y)$ hätten natürlich auch beliebig viele andere dem gleichen Zweck dienen können; diese Bemerkung läßt sich vielleicht verwerten zur Herstellung anderer Grenzausdrücke für $\mathsf{M}(r)$, die zu weiteren Folgerungen geeigneter sind als der obige.

Karlsruhe, den 14. Oktober 1906.

The Finite, Discontinuous, Primitive Groups of Collineations in Three Variables.*)

By

H. F. Blichfeldt of Stanford University, California, U. S. A.

A complete enumeration of all finite, discontinuous groups of collineations in three variables was first attempted by C. Jordan in his well-known paper *Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algebrique*, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 84 (1878), p. 89. It appeared, however, shortly afterwards, that Jordan had overlooked two important groups, viz.: the G_{168}, discovered by Klein (*Mathematische Annalen*, 14 (1879), p. 428), and the G_{360}, discovered by Valentiner (Copenhagen, *Videnskabernes Selskabs Skrifter*, 6. *Raekke*, 1889). No other groups have since been added to Jordan's list. It seems therefore desirable to have a new and rigorous proof of the fact that Jordan's *groups together with the* G_{168} *and the* G_{360} *form indeed a complete set of the finite, discontinuous groups of collineations in three variables.* This is the theorem to be proved in the present paper.

1. We consider only finite groups of linear projective transformations of the plane $(x:y:z)$, and we call such groups *Collineation-groups* in three variables. We represent them by isomorphic groups of *linear homogeneous substitutions of determinants unity* in three variables (x, y, z), which groups we call *Linear Groups* (or *groups*, simply, where it cannot be misunderstood). The isomorphism will be $1:1$ or $1:3$, according as the linear group *does not* or *does* contain the group F of *similarity-substitutions* of order 3:

$$F:\begin{cases} x' = x, & y' = y, & z' = z; \\ x' = \omega x, & y' = \omega y, & z' = \omega z; \\ x' = \omega^2 x, & y' = \omega^2 y, & z' = \omega^2 z; & \qquad \omega^3 = 1,\ \omega \neq 1. \end{cases}$$

*) For a bibliography of this subject consult Wiman: *Endliche Gruppen linearer Substitutionen, Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Bd. I, pp. 528—530. See also two papers by the author, *On the Order of Linear Homogeneous Groups*, *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 4 (1903), pp. 387—397, and vol 5 (1904), pp. 310—325.

Thus, to the three linear homogeneous substitutions

$$x' = \theta(a_1 x + b_1 y + c_1 z), \qquad y' = \theta(a_2 x + b_2 y + c_2 z),$$
$$z' = \theta(a_3 x + b_3 y + c_3 z), \qquad \theta^3 = 1,$$

will correspond the one collineation

$$x' : y' : z' = (a_1 x + b_1 y + c_1 z) : (a_2 x + b_2 y + c_2 z) : (a_3 x + b_3 y + c_3 z).$$

2. We say that the group is *primitive* if it does not leave invariant a *point* or a *triangle*. A finite group leaving invariant a point will also leave invariant a straight line not passing through the point and vice versa (the group is completely 'reducible'*). We call such a group *intransitive**). A group which leaves invariant the triangle of reference is said to be written in *monomial form***). Its substitutions merely permute among themselves the variables x, y, z, in addition to affecting them with certain constant factors. A substitution or a group which leaves invariant each of the vertices of the triangle of reference, is said to be written in *canonical form*. The variables x, y, z are merely multiplied by certain constants by the substitutions of such a group. A substitution S of finite period n

$$x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z, \quad y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z, \quad z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z$$

can always be transformed, by a proper choice of new variables x_1, y_1, z_1, into the canonical form:***)

$$x_1' = \theta_1 x_1, \quad y_1' = \theta_2 y_1, \quad z_1' = \theta_3 z_1.$$

The quantities θ_1, θ_2, θ_3, called the *multipliers* of S, satisfy the equation $\theta^n = 1$. We have the equation

$$[S] = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = a_1 + b_2 + c_3.$$

The quantity $[S]$, so defined, shall be called the *weight* of S.

3. The more fundamental phraseology and theory of abstract groups and permutation-groups will be supposed known.†) In particular, it may be mentioned that an *abelian group* consists of mutually commutative substitutions, and that a *simple group* contains no invariant subgroup. The only simple groups whose orders are $\leqq 504$ are the following: the alternating permutation-groups in 5 and 6 letters, of orders 60 and 360 respectively; a group of order 168 and one of order 504††). The

*) Maschke, *Mathematische Annalen* 52 (1899), p. 363.

**) Maschke, *American Journal of Mathematics* 17 (1895), p. 168.

***) See Moore, *Mathematische Annalen* 50 (1898), p. 215 for proof and references.

†) Consult Burnside, *Theory of Groups*, Cambridge University Press, 1897; and Weber, *Algebra*, Bd II, Braunschweig (Vieweg und Sohn), 2nd edition, 1899.

††) Burnside, *Theory of groups*, pp. 371—375.

usual way of executing a consecutive set of linear substitutions $ABC\cdots$ in the order from left to right will be adhered to here. For instance, if we restrict ourselves to two variables x, y, and A is the substitution $x'' = a_1 x' + b_1 y'$, $y'' = c_1 x' + d_1 y'$, B the substitution $x' = a_2 x + b_2 y$, $y' = c_2 x + d_2 y$, so that

$$x'' = (a_1 a_2 + b_1 c_2)\,x + (a_1 b_2 + b_1 d_2)\,y,$$
$$y'' = (c_1 a_2 + d_1 c_2)\,x + (c_1 b_2 + d_1 d_2)\,y,$$

we write instead but one accent in the two substitutions A, B (i. e. B as above, $A: x' = a_1 x + b_1 y$, $y' = c_1 x + d_1 y$), and then indicate the order in which the two substitutions are executed by the symbol AB.

By the order of a group (i. e. total number of substitutions of the group) *shall be understood the order of the corresponding collineation-group, unless otherwise stated.*

4. A list of the finite, non-abelian, groups of linear homogeneous substitutions, of determinants $= 1$, in two variables x, y, will be useful for later references and is therefore given here. Each group is represented by a set of substitutions that generate it.*)

1^0. The *Dihedral* group of order $2n$:

$$\begin{cases} S: & x' = \alpha x, \quad y' = \alpha^{-1} y, \quad \alpha^n = 1; \\ T: & x' = y, \quad y' = -x. \end{cases}$$

2^0. The *Tetrahedral* group of order 12 (as a collineation-group; of order 24 as a linear group. When written as a linear group, it contains the group of similarity-substitutions in two variables: $x' = x$, $y' = y$; $x' = -x$, $y' = -y$):

$$\begin{cases} S: & x' = y, \quad y' = -x; \\ T: & x' = ix, \quad y' = -iy, \quad i^2 = -1; \\ U: & x' = \frac{1}{2}(-1-i)\,x + \frac{1}{2}(1+i)\,y, \\ & y' = \frac{1}{2}(-1+i)\,x + \frac{1}{2}(-1+i)\,y. \end{cases}$$

3^0. The *Octahedral* group of order 24 (as a collineation-group; of order 48 as a linear group):

$$\begin{cases} S,\ T \text{ and } U \text{ of } 2^0; \\ V: \quad x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\,x, \quad y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\,y. \end{cases}$$

*) See Klein, *Vorlesungen über das Ikosaeder* (Leipzig 1884), pp. 36—42; Weber, *Algebra*, Bd. II, pp. 269—287 (2nd edition, 1899).

4⁰. The *Icosahedral* group of order 60 (as a collineation-group; of order 120 as a linear group):

$$\begin{cases} S: & x' = y, \quad y' = -x; \\ T: & x' = \alpha x, \quad y' = \alpha^{-1} y, \quad \alpha^5 = 1, \quad \alpha \neq 1; \\ U: & x' = \dfrac{1}{\alpha - \alpha^{-1}}(x - (\alpha^2 + \alpha^{-2})y), \quad y' = \dfrac{1}{\alpha - \alpha^{-1}}(-(\alpha^2 + \alpha^{-2})x - y). \end{cases}$$

5. The arrangement of the analysis is as follows:

I. *Preliminary Theorems.*

II. *The Order is not Divisible by any Prime* > 7.

III. *The Order is a Factor of* $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2$. It is shown that, if the order is divisible by 2^4, or 3^4 etc., then will the group considered contain a certain invariant subgroup H, and will not be primitive unless the order of H is of the form 3^k. The primitive groups containing invariant subgroups of this order are the 'Hessian' group of order $216 = 2^3 \cdot 3^3$ and some of its subgroups (art. 23). The Theorem III is therefore established.

IV. *Auxiliary Theorems.* In any case where the order is divisible by $3^3 \cdot 5$, $3^3 \cdot 7$, 5^2, 7^2 or $5 \cdot 7$, the group has an invariant subgroup H and is therefore not primitive. Hence, the order is a factor of one of the numbers $2^3 \cdot 3^3$, $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, or $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$.

V. *Classification of the Primitive Groups.* The results are as follows:

A. Primitive groups having invariant intransitive subgroups (none).

B. Primitive groups having invariant monomial subgroups:

1⁰. The *Hessian* group of order 216 as a collineation-group, of order 648 as a linear group:

$$\begin{cases} S: & x' = y, \quad y' = z, \quad z' = x; \\ T: & x' = x, \quad y' = \omega y, \quad z' = \omega^2 z, \quad \omega^3 = 1, \quad \omega \neq 1; \\ U: & x' = \varphi x, \quad y' = \varphi y, \quad z' = \varphi \omega z, \quad \varphi^3 = \omega^2; \\ V: & x' = \varrho(x + y + z), \quad y' = \varrho(x + \omega y + \omega^2 z), \quad z' = \varrho(x + \omega^2 y + \omega z), \\ & \varrho = \dfrac{1}{\omega - \omega^2}. \end{cases}$$

2⁰. A subgroup of the Hessian group, of order 72 as a collineation-group, and of order 216 as a linear group:

$$\begin{cases} S,\ T \text{ and } V \text{ of } 1^0; \\ UVU^{-1}: \quad x' = \varrho(x + y + \omega^2 z), \quad y' = \varrho(x + \omega y + \omega z), \\ \qquad\qquad z' = \varrho(\omega x + y + \omega z). \end{cases}$$

3⁰. A subgroup of the Hessian group, of order 36 as a collineation-group, and of order 108 as a linear group: S, T and V of 1⁰.

C. Primitive groups isomorphic with simple abstract groups:

4⁰. Group of order 60, both as a collineation- and as a linear group:

$$\begin{cases} E_1: & x' = y, \quad y' = z, \quad z' = x; \\ E_2: & x' = x, \quad y' = -y, \quad z' = -z; \\ E_3: & x' = \frac{1}{2}(-x + \mu_2 y + \mu_1 z), \quad y' = \frac{1}{2}(\mu_2 x + \mu_1 y - z), \\ & z' = \frac{1}{2}(\mu_1 x - y + \mu_2 z), \\ & \mu_1 = \alpha + \alpha^4 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}), \quad \mu_2 = \alpha^2 + \alpha^3 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{5}), \\ & \alpha^5 = 1. \end{cases}$$

5⁰. Group of order 360 as a collineation-group, of order 1080 as a linear group:

$$\begin{cases} E_1, E_2 \text{ and } E_3 \text{ of } 4^0; \\ E_4: \quad x' = -x, \quad y' = -\omega z, \quad z' = -\omega^2 y, \qquad \omega^2 + \omega + 1 = 0. \end{cases}$$

6⁰. Group of order 168, both as a collineation- and as a linear group:

$$\begin{cases} S: & x' = \varepsilon x, \quad y' = \varepsilon^2 y, \quad z' = \varepsilon^4 z, \qquad \varepsilon^7 = 1, \quad \varepsilon \neq 1; \\ T: & x' = z, \quad y' = x, \quad z' = y; \\ U: & x' = h(\alpha x + \beta y + \gamma z), \quad y' = h(\beta x + \gamma y + \alpha z), \quad z' = h(\gamma x + \alpha y + \beta z), \\ & \alpha = \varepsilon^4 - \varepsilon^{-4}, \quad \beta = \varepsilon^2 - \varepsilon^{-2}, \quad \gamma = \varepsilon - \varepsilon^{-1}, \\ & h = \frac{1}{7}(\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 - \varepsilon^{-1} - \varepsilon^{-2} - \varepsilon^{-4}) = \frac{1}{\sqrt{-7}}. \end{cases}$$

6. For a detailed study of the subject of linear groups consult the following memoires, in addition to those mentioned in the footnotes and in the synopsis by Wiman, '*Endliche Gruppen linearer Substitutionen*', *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften,* Bd. 1, pp. 522—554:

Weber: Algebra II, Lineare Gruppen.

Frobenius: a series of articles in the *Sitzungsberichte der Kgl. Preuß. Akademie der Wissenschaften,* beginning with '*Über Gruppencharaktere*', Sitzungsberichte 1896, p. 985.

I. Schur: '*Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen*', *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* Bd. 127 (1904), p. 20; also articles given in the *Sitzungsberichte der Kgl. Preuß. Akad. d. Wiss.*, beginning with '*Über eine Klasse von endlichen Gruppen linearer Substitutionen*', 1905, p. 77.

W. Burnside: a series of papers in the *Proceedings of the London Mathematical Society,* beginning with '*On group characteristics*', vol. 33 (1900), p. 146; also a paper '*On the reduction of a group of homogeneous linear substitutions of finite order*', *Acta Mathematica* 28 (1904), p. 369.

A. Loewy: '*Über die Reducibilität der Gruppen linearer homogener Substitutionen*', *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 4 (1903), p. 44, and further papers in the same journal.

On the special problem of the collineation groups in four variables consult Bagnera, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1901, p. 161, and 1905, p. 1; Autonne, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1901, p. 351; Blichfeldt, *Transactions of the Am. Math. Society*, 1905, p. 230 and *Mathematische Annalen*, 1905, p. 204.

I. Preliminary Theorems.

7. The Theorems 1—3 will be assumed true for all linear groups in two variables, as they may be verified either directly from the list of the binary groups given (art. 4), or by employing the methods used below in the case of three variables to the case of two variables.

Theorem 1. *An abelian group can be written in canonical form.*

An abelian group G which is not the group F (art. 1) merely (for which the theorem is evident), contains an invariant substitution A which is not a similarity-substitution. Let us choose the variables so that A is written in canonical form (art. 2), say

$$x' = \alpha x, \quad y' = \beta y, \quad z' = \gamma z.$$

If no two of the multipliers α, β, γ are equal, we prove the theorem simply by determining the general form of any other substitution B of G, which must satisfy the relation

$$AB = BA.$$

If $\alpha = \beta \neq \gamma$, we find the general form of B (i. e. of every substitution of G) to be the following:

$$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy, \quad z' = ez.$$

The substitutions

$$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy$$

form an abelian group in two variables, which can be written in canonical form. New variables x_1, y_1, certain linear functions of x, y, may therefore be choosen so that every substitution of G is of the form

$$x_1' = \theta_1 x_1, \quad y_1' = \theta_2 y_1, \quad z' = \theta_3 z.$$

Theorem 2. *A group G containing an invariant abelian subgroup $H \neq F$ is either intransitive or can be written in monomial form.*

We prove the theorem simply by writing H in canonical form, and then find the general form of a substitution B of G such that $BA_1 = A_2B$, where A_1, A_2 belong to H.

Theorem 3. *A group G whose order is the power of a prime p can be written in monomial form.*

Consider a group G of order p^m. We can construct a series of groups

$$G, G_1, G_2, \cdots$$

of orders p^m, p^{m-1}, p^{m-2}, $\cdots$, each of which is contained in all that stand to the left of it and is invariant in G*). Now, if G is abelian, the theorem is true (Theo. 1). If G_1 is abelian, but G not, then can G_1 not be the group F, whose substitutions are commutative with every substitution of G**). Hence, G is intransitive or can be written in monomial form, by Theo. 2. If G is intransitive, say of the form

$$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy, \quad z' = ez,$$

the group formed of the substitutions

$$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy$$

will be of order p^n. The Theorem to be proved being true for two variables, it would be true for three.

If G_{i+1} is abelian, but G_i not, then is $G_{i+1} \neq F$. The group G, leaving G_{i+1} invariant, could be written in monomial form, and the Theorem is proved.

8. Lemma 1. *Let $\Sigma = 0$ be a true equation, the left-hand member of which is the sum of a finite number of roots of unity. A certain root of unity of order p^n (p being a prime), say θ, may be selected so that every term of Σ is the product of a power of θ and a root whose index***) is prime to p. Then, if θ be replaced by 1, the resulting equation may no longer be true, but the left-hand member will become $p \times$ (the sum of a finite number of roots of unity).*

This follows immediately from a Theorem by Kronecker†) which says that, θ being regarded a variable, the quantity Σ either is divisible by the expression

$$1 + \theta^{p^{n-1}} + \theta^{2p^{n-1}} + \cdots + \theta^{(p-1)p^{n-1}}$$

or vanishes for all values of θ. If θ_1 represents $\theta^{p^{n-1}}$, so that θ_1 is a primitive root of the equation $\theta_1{}^p - 1 = 0$, then we can write every power of θ occurring in Σ in the form $\theta^t \theta_1^{t_1}$, where $t < p$, $t_1 < p$. Then Kronecker's Theorem says that either will Σ vanish for every value of θ and θ_1, or must be divisible by $1 + \theta_1 + \theta_1{}^2 + \cdots + \theta_1{}^{p-1}$. In other

*) Burnside, *Theory of Groups*, p. 64.

**) Ibid. p. 63.

***) By the *index* of a root of unity φ we mean the least positive integer m for which $\varphi^m = 1$.

†) *Mémoire sur les facteurs irréductibles de l'expression $x^n - 1$, Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. 19 (1854), p. 178.

words, *if Σ be arranged according to powers of θ_1, then are the coefficients equal.*

9. Let $\theta, \alpha, \beta, \cdots$ represent a system of primitive roots of the equations

$$\theta^{p^n} - 1 = 0, \quad \alpha^{q^m} - 1 = 0, \quad \beta^{r^l} - 1 = 0, \cdots,$$

and $\theta_1, \alpha_1, \beta_1, \cdots$ primitive roots of the equations

$$\theta_1^{\,p} - 1 = 0, \quad \alpha_1^{\,q} - 1 = 0, \quad \beta_1^{\,r} - 1 = 0, \cdots,$$

$p, q, r, \cdots$ being different primes. We shall suppose the system $\theta, \alpha, \beta, \cdots$ chosen so that every term of Σ can be written in the form of a product of powers of roots of the system. Then a little consideration of Kronecker's Theorem will convince one that the terms of the quantity Σ can be arranged in the following form:

$$\Sigma = T(1 + \theta_1 + \theta_1^{\,2} + \cdots + \theta_1^{\,p-1}) + A(1 + \alpha_1 + \alpha_1^{\,2} + \cdots + \alpha_1^{\,q-1}) \\ + B(1 + \beta_1 + \beta_1^{\,2} + \cdots + \beta_1^{\,r-1}) + \cdots,$$

where the powers of θ contained in T are $< p$, those of α in A are $< q$, those of β in B are $< r$, etc. It is then apparent that the equation $\Sigma = 0$ is satisfied whatever finite values be given to the roots $\theta, \alpha, \beta, \cdots, \theta^2, \alpha^2, \beta^2, \cdots$, etc.; $\theta_1, \alpha_1, \beta_1, \cdots, \theta_1^{\,2}, \alpha_1^{\,2}, \beta_1^{\,2}, \cdots$, etc., regarded now as independent quantities, so long as

$$1 + \theta_1 + \theta_1^{\,2} + \cdots + \theta_1^{\,p-1} = 0, \quad 1 + \alpha_1 + \alpha_1^{\,2} + \cdots + \alpha_1^{\,q-1} = 0, \\ 1 + \beta_1 + \beta_1^{\,2} + \cdots + \beta_1^{\,r-1} = 0, \cdots .$$

In particular, we may put 0 for every $\theta, \theta^2, \cdots, \theta^{p-1}$, $\alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{q-1}$ $\beta, \beta^2, \cdots, \beta^{r-1}, \cdots$, occurring in $T, A, B, \cdots$, and replace $\theta_1, \theta_1^{\,2}, \cdots, \theta_1^{\,p-1}$, $\alpha_1, \alpha_1^{\,2}, \cdots, \alpha_1^{\,q-1}$, $\beta_1, \beta_1^{\,2}, \cdots, \beta_1^{\,r-1}, \cdots$ in such a manner by the numbers $0, 1, -1$ that we have $1 + \theta_1 + \theta_1^{\,2} + \cdots + \theta_1^{\,p-1} = 0$, etc. If, however, this scheme be carried out only with reference to the roots $\theta, \theta^2, \cdots, \theta^{p-1}$, $\alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{q-1}$, $\beta_1, \alpha_1^{\,2}, \cdots, \beta_1, \cdots$, at the same time replacing each of the roots $\theta_1, \theta_1^{\,2}, \cdots, \theta_1^{\,p-1}$ by 1, the quantity Σ will not necessarily be $= 0$, but will certainly be $\equiv 0 \pmod{p}$. We shall state this result in the following form:

Lemma 2. *Let every term of Σ be written in the form*

$$(\theta^t \alpha^a \beta^b \cdots)\,(\theta_1^{\,t_1} \alpha_1^{\,a_1} \beta_1^{\,b_1} \cdots), \qquad t,\ t_1 < p; \ \ a,\ a_1 < q; \ \ b,\ b_1 < r, \cdots .$$

Then if every factor $(\theta^t \alpha^a \beta^b \cdots)$ which is not already $= 1$ be replaced by 0, every factor $\theta_1^{\,t_1}$ by 1, and the powers $\alpha_1, \alpha_1^{\,2}, \cdots, \alpha_1^{\,q-1}, \beta_1, \beta_1^{\,2}, \cdots, \beta_1^{\,r-1}, \cdots$, regarded now as so many independent quantities, be replaced by 0, 1 or -1 in such a manner that the equations

$$1 + \alpha_1 + \alpha_1^{\,2} + \cdots + \alpha_1^{\,q-1} = 0, \quad 1 + \beta_1 + \beta_1^{\,2} + \cdots + \beta_1^{\,r-1} = 0, \cdots$$

are satisfied, then will the resulting value of Σ be an integer $\equiv 0 \pmod{p}$.

II. The Order is not Divisible by any Prime > 7.

10. Let G be a group whose order is divisible by a prime $p > 7$. Then it contains a substitution S of order p, which we may write in canonical form:

$$S:\quad x' = \theta_1 x,\quad y' = \theta_2 y,\quad z' = \theta_3 z, \qquad \theta_1{}^p = \theta_2{}^p = \theta_3{}^p = 1.$$

Two cases may arise: the multipliers are all different, or $\theta_1 = \theta_2 \neq \theta_3$. We shall consider only the first possibility, remarking that there will be hardly any difference in the manner of procedure in the two cases.

Let T be any other substitution of order p in G:

$$T:\quad x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z,\quad y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z,\quad z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z.$$

Let us form the substitutions TS, TS^2, TS^λ. We have (art. 2)

$$\begin{aligned}
[T] &= a_1 + b_2 + c_3\,,\\
[TS] &= a_1\theta_1 + b_2\theta_2 + c_3\theta_3\,,\\
[TS^2] &= a_1\theta_1{}^2 + b_2\theta_2{}^2 + c_3\theta_3{}^2,\\
[TS^\lambda] &= a_1\theta_1{}^\lambda + b_2\theta_1{}^\lambda + c_3\theta_3{}^\lambda.
\end{aligned}$$

Eliminating the quantities a_1, b_2, c_3 we get the equation

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} [T] & 1 & 1 & 1 \\ [TS] & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ [TS^2] & \theta_1{}^2 & \theta_2{}^2 & \theta_3{}^2 \\ [TS^\lambda] & \theta_1{}^\lambda & \theta_2{}^\lambda & \theta_3{}^\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Dividing by $(\theta_1 - \theta_2)\,(\theta_2 - \theta_3)\,(\theta_3 - \theta_1)$ we get

$$[TS^\lambda] + [T]\,\Sigma_1 + [TS]\,\Sigma_2 + [TS^2]\,\Sigma_3 = 0,$$

the coefficients Σ_1, Σ_2, Σ_3 being certain integral functions of θ_1, θ_2, θ_3. The weights $[TS^\lambda]$, $[T]$, $\cdots$ being each the sum of three roots of unity (art. 2), we have an equation $\Sigma = 0$ of the type considered in articles 8—9.

We shall apply the Lemma 2, and put 1 for every root whose index is p. To such roots belong θ_1, θ_2 and θ_3, and the quantities Σ_1, Σ_2 and Σ_3 take the values

$$-\frac{(\lambda - 1)(\lambda - 2)}{2},\quad \lambda(\lambda - 2),\quad -\frac{\lambda(\lambda - 1)}{2}$$

respectively, as may be proved readily. To clear of fractions we multiply throughout by $p + 1$. The weights $[TS^\lambda]$, $[T]$, etc., being each the sum of three roots of unity, will take integral values lying between -3 and $+3$, inclusive, by the process of article 9. Indicating the resulting value of the indeterminate quantity $[TS^\lambda]$ by $[TS^\lambda]'$, we obtain, finally, a congruence of the form

$$[TS^\lambda]' \equiv a\lambda^2 + b\lambda + c \pmod{p}, \qquad \lambda = 0, 1, 2, \cdots, p-1;$$

a, b, c being certain integers independent of λ.

Bearing in mind that $[TS^\lambda]'$ can have only 7 different values, namely ± 3, ± 2, ± 1, 0, we find without much trouble that the congruence is possible only if $a \equiv b \equiv 0 \pmod{p}$ when $p > 7$. It follows that

$$[TS^\lambda]' \equiv [T]' \equiv 3 \pmod{p},$$

since T was, by assumption, a substitution of order p.

Now, the weight $[TS^\lambda]$, for any given value of λ, could contain no roots not satisfying the equation $\theta^p - 1 = 0$. For if it did, we could at the outset have made one such root 0 by the scheme laid down in article 9, in which case the quantity $[TS^\lambda]$ (for the value of λ given) would have had one of the values ± 2, ± 1, 0 only. No one of these numbers is, however, $\equiv 3 \pmod{p}$, if $p > 7$.

11. The product of any two substitutions of G each of order p, as TS, must therefore be the identical substitution (whose weight is $1+1+1$) or be a substitution of order p. It follows that all the substitutions of order p contained in G, together with the identical substitution, form a group by themselves. This group, H say, is transformed into itself by the substitutions of G, as a substitution of order p is transformed into one of the same order. The order of H is evidently a power of p. It can therefore be written in monomial form (Theorem 3). A monomial group will, however, contain substitutions of order 2 or 3, unless the monomial form is the canonical merely, in which case the group is evidently abelian. Accordingly, H is an abelian group, and G can not be primitive (Theorem 2). Hence, finally, a primitive group can contain no substitution of prime order $p > 7$.

Theorem 4. *The order of a primitive group is not divisible by any prime $p > 7$.*

III. The Order is a Factor of $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2$.

12. We may study a group whose order is the power of a prime very easily by writing it in monomial form (Theorem 3). We shall not enter into the details of this simple problem, but merely state the following results:

α. A group of order 2^4 must contain a substitution of order 8, or a substitution of order 4 whose weight has the form $(-1+i+i)$, $i^2 = -1$.

β. A group of order 3^4 (of order 3^5 as a linear group containing F) must contain a substitution whose 3^{rd} power is neither the identical substitution nor a similarity-substitution.

γ. A group of order p^3, $p > 3$, must contain a substitution of order p^2.

We shall proceed to show that a group G containing any of the special substitutions just mentioned must leave invariant a certain subgroup H, defined below, and that as a consequence it cannot be primitive. Now, by a well known theorem, a group whose order is divisible by p^n (p being a prime) contains a subgroup of order p^n.*) It follows, from Theorem 4 and from the results stated under α, β, γ, that the order of a primitive group must be a factor of $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2$.

13. Consider a group G containing a substitution S of order 8, whose multipliers are φ_1, φ_2, φ_3. At least one of these must be a primitive 8^{th} root of unity, and we shall, for the present, assume that they are different one from the other. We choose the variables of G so that S is written in canonical form.

Let T be any other substitution of G. We can form an equation in the same manner as we formed (1) of article 10, by eliminating certain quantities a_1, b_2, c_3 from the weights of the substitutions T, TS^4, TS and TS^2, namely the equation:

$$\begin{vmatrix} [TS] & 1 & 1 & 1 \\ [TS^4] & \varphi_1{}^4 & \varphi_2{}^4 & \varphi_3{}^4 \\ [TS] & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ [TS^2] & \varphi_1{}^2 & \varphi_2{}^2 & \varphi_3{}^2 \end{vmatrix} = 0.$$

After multiplying out we divide by $(\varphi_1 - \varphi_2)(\varphi_2 - \varphi_3)(\varphi_3 - \varphi_1)$. The weights $[T]$, etc., being each the sum of three roots of unity, we obtain an equation $\Sigma = 0$ of the type considered in articles 8—9. We shall apply the Lemma 1, and put 1 for every root whose index is a power of 2. Indicating the modified weights by the symbols $[T]_2$, $[TS^4]_2, \cdots$, the resulting equation will be found to be of the form

$$3[T]_2 - [TS^4]_2 - 8[TS]_2 - 6[TS^2]_2 \equiv 0 \pmod{2},$$

or

$$[T]_2 \equiv [TS^4]_2 \pmod{2}.$$

14. The group G considered may contain other substitutions $S_1, S_2, \cdots$, besides S^4, enjoying the same property, viz:

$$(2) \qquad [T]_2 \equiv [TS_1]_2, \quad [T]_2 \equiv [TS_2]_2, \cdots \pmod{2},$$

T being any substitution of G. We shall prove *firstly*, that all such substitutions form a group H, and *secondly*, that this group is invariant in G.

Firstly, to show that, if S_1 and S_2 satisfy the congruences (2), so will $S_1 S_2$; i. e. to show that

$$[T]_2 \equiv [T(S_1 S_2)]_2 \pmod{2}.$$

*) Sylow's Theorem; see Burnside, *Theory of Groups*, p. 90.

Now, as T represents in turn all the substitutions of G, so does TS_1. Substituting TS_1 for T in the second of the congruences (2), we have

$$[(TS_1)]_2 \equiv [(TS_1)S_2]_2 \pmod{2},$$

i. e.

$$[TS_1]_2 \equiv [T(S_1 S_2)]_2$$
$$\equiv [T]_2 \pmod{2}$$

by the first of the congruences (2), proving the proposition.

Secondly, to show that, if T and V be any two substitutions of G, and if S_1 be a substitution of H, then is also VS_1V^{-1} a substitution of H. We have

(3) $$[V^{-1}TV]_2 \equiv [(V^{-1}TV)S_1]_2 \pmod{2}$$

by (2). But, we may readily prove that

$$[B] = [ABA^{-1}],$$

whatever be the substitutions (of finite orders) A and B. Hence,

$$[V^{-1}TV] = [T],$$
$$[(V^{-1}TV)S_1] = [V(V^{-1}TVS_1)V^{-1}] = [T(VS_1V^{-1})].$$

Substituting in (3) we get

$$[T]_2 \equiv [T(VS_1V^{-1})]_2 \pmod{2},$$

proving that VS_1V^{-1} belongs to H. That is, H is an invariant subgroup of G. The group H can neither be the group F nor the identical substitution, since H contains a substitution of order 2, namely S^4 (art. 13).

15. We have so far studied the effect of the presence in G of a substitution S of order 8, with three distinct multipliers. In like manner we may deal with the cases where G contains a substitution S' of order 8, two of whose multipliers are equal; or a substitution S'' of order 4, whose multipliers are -1, i, i; $i^2 = -1$. We begin with a determinant differing from the one of article 13 simply by lacking its last row and column in the former case, and its second row and last column in the latter. We show the presence of an invariant subgroup H in both cases, containing a known substitution of order 2, namely $(S')^4$ in the former case and $(S'')^2$ in the latter.

It remains for us to study the group H. It cannot contain a substitution whose order is a prime number $q \neq 2$. To prove this, let T in the congruences (2) be the identical substitution. Then we have

$$[T]_2 \equiv 3 \equiv [S^j]_2 \pmod{2},$$

S being a tentative substitution of H of order q, and S^j any power of S. If the multipliers of S are α, β, γ, we have

$$3 \equiv [S^j]_2 = \alpha^j + \beta^j + \gamma^j \pmod{2},$$

and therefore

$$3 \sum_{j=1}^{q} \eta^j \equiv \sum_{j=1}^{q} \eta^j (\alpha^j + \beta^j + \gamma^j) \pmod{2},$$

η being a root of the equation $\theta^q - 1 = 0$, which equation is also satisfied by α, β and γ. Now, if none of the latter roots are $= 1$, we get, by putting $\eta = 1$, the impossibility

$$3q \equiv 0 \pmod{2}.$$

In all other cases we get similar impossibilities by choosing a suitable value for η.

It follows that the order of H is a power of 2. We can therefore write this invariant subgroup of G in monomial form. When so written, we find it to be either

a) abelian, in which case G is not primitive (Theorem 2), or

b) intransitive, having a single invariant straight line. This line should evidently also be invariant under G, in which case G is intransitive, not primitive (art. 2).

To resume, if the order of G is divisible by 2^4, then will G contain a substitution of order 8, or one of order 4 whose multipliers are $-1, i, i$. The group G will, in both cases, contain an invariant subgroup H and is not primitive. Accordingly, *the order of a primitive group is not divisible by* 2^4.

16. In exactly the same way we prove that if G has a substitution of order p^2, $p > 3$, then it has an invariant subgroup H of order p^m. Such a group being abelian (cf. art. 11), it follows that G is not primitive (Theorem 2). Hence, *the order of a primitive group is not divisible by* p^3, *p being a prime* > 3.

In the case $p = 3$ we find that *a linear group can have no substitution of order* 3^m, *whose* 3^{rd} *power is not the identical or a similarity-substitution, unless it has an invariant subgroup H of order* 3^n. It will be shown later (art. 23) that there are three primitive groups which contain invariant subgroups whose orders are powers of 3. A cursory examination of these groups reveals the fact, however, that they contain no substitution whose 3^{rd} power is not the identical or a similarity-substitution. It follows that *the order of no primitive collineation group is divisible by* 3^4 (cf. articles 12 and 16). Hence, finally, we have the

Theorem 5. *The order of a primitive group is a factor of* $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2$.

IV. Auxiliary Theorems.

17. Theorem 6. *If the group G contains a substitution S of order* 5 *and one T of order* 7; *i. e. if the order of G is divisible by* $5 \cdot 7$, *then will G contain a substitution of order* $5 \cdot 7$.

Let $[S] = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$. Choose the variables so that T is written in canonical form. Then if a_1, b_2, c_3 be the coefficients in the principal diagonal of the matrix of S, we have

$$[ST^i] = a_1\beta_1^i + b_2\beta_2^i + c_3\beta_3^i, \quad i = 0, 1, 2, \cdots, 6.$$

Hence, if β be a primitive 7^{th} root of unity different from β_1^{-1}, β_2^{-1}, β_3^{-1}, then

(4) $[S] + \beta[ST] + \beta^2[ST^2] + \beta^3[ST^3] + \beta^4[ST^4] + \beta^5[ST^5] + \beta^6[ST^6] = 0$

Assume the theorem not true, so that none of the weights $[ST^i]$ contains both 7^{th} and 5^{th} roots at the same time. Let us arrange according to powers of β. Then must the coefficients of the different powers be equal (art. 8). Now,

a) if none of the weights $[ST^i]$ contains 7^{th} roots of unity, the equation considered is already arranged, and we have

$$[S] = [ST];$$

b) if some of the weights contain 7^{th} roots, say $[ST]$, $[ST^3]$, $\cdots$ then we will write the sum of the corresponding terms in the form

$$\beta[ST] + \beta^3[ST^3] + \cdots = k_0 + \beta k_1 + \beta^2 k_2 + \cdots + \beta^6 k_6,$$

and (4) becomes

$$\{[S] + k_0\} + \beta k_1 + \beta^2\{k_2 + [ST^2]\} + \beta^3 k_3 + \cdots = 0,$$

from which follows:

$$(5) \qquad [S] + k_0 = k_1, \quad \text{or} \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + k_0 - k_1 = 0.$$

Arranging this equation according to the five different powers of α, the coefficients should be equal (art. 8). But, $k_0 - k_1$ being free from 5^{th} roots, the equation (5) has at most four different powers of α, so that the coefficients should all be $= 0$, which is absurd. Hence, only (a) is tenable.

By writing S in canonical form instead of T, still assuming the theorem to be proved not true, we get in the same way

$$[T] + \alpha[ST] + \alpha^2[S^2T] + \alpha^3[S^3T] + \alpha^4[S^4T] = 0,$$

and

$$[T] = [ST].$$

Hence,

$$[S] = [T], \quad \text{or} \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3,$$

which, like (5), is an impossibility. Accordingly, at least one of the weights $[ST^i]$ must contain both 5^{th} and 7^{th} roots of unity, and the theorem is proved.

18. Theorem 7. *If a linear group G has a substitution S of order* 5 (*or* 7) *and a substitution T whose multipliers are $\varphi, \varphi, \varphi\omega^2$, where $\varphi^3 = \omega$, $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, then it has one of order* $9 \cdot 5$ (*or* $9 \cdot 7$).

Proceeding as in article 17, we obtain an equation of the form

$$[S] + \varphi^2\omega[ST] + \varphi[ST^2] = 0. \tag{6}$$

Now, it follows from Kronecker's Theorem (art. 8) that the equation

$$A + \varphi B + \varphi^2 C = 0,$$

(A, B, C being sums of roots of unity none of which can be written in the form $\varepsilon\varphi\omega^a$ or $\varepsilon\varphi^2\omega^a$, where ε is a root whose index is prime to 3) can be satisfied only if $A = B = C = 0$. Then the assumption that none of the weights $[ST]$ and $[ST^3]$ can contain both 9^{th} roots and 5^{th} (or 7^{th}) roots at the same time is readily proved untenable.

19. The two preceeding theorems state that G contains a substitution V of order $p^n q$, p and q being prime to each other, under certain conditions. This is the same as saying that, when these conditions are fulfilled, G contains two commutative substitutions $S\left(=V^{p^n}\right)$ and $T(=V^q)$ whose orders are prime to each other. In such cases G will have an invariant subgroup H, as we shall proceed to show, unless the weights of S and T are of certain types.

Theorem 8. *Let S and T be two commutative substitutions of a group G, of orders q and p^n respectively; p and q being different prime numbers. Then if two of the multipliers of S be not equal, G has an invariant subgroup H.*

The substitutions S and T generate an abelian group, which we will write in canonical form. We suppose

$$S: x' = \alpha_1 x, \quad y' = \alpha_2 y, \quad z' = \alpha_3 z;$$
$$T: x' = \beta_1 x, \quad y' = \beta_2 y, \quad z' = \beta_3 z$$

and assume that α_1, α_2 and α_3 are all different. Let A be any substitution of G, and let the coefficients in the principal diagonal of the matrix of A be a_1, b_2 and c_3. Then if we eliminate the three last quantities between the four equations obtained by writing down the weights

$[A] = a_1 + b_2 + c_3$, $[AT] = a_1\beta_1 + b_2\beta_2 + c_3\beta_3$, $[AS] =$ etc., $[AS^2] =$ etc.,

as in article 10, we get the equation

$$\begin{vmatrix} [A] & 1 & 1 & 1 \\ [AT] & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ [AS] & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ [AS^2] & \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \end{vmatrix} = 0.$$

We shall apply the Lemma 1, and write 1 for every root whose index is a power of p. Then we have

$$\{[A]_p - [AT]_p\}(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

This congruence can be changed into the following

$$[A]_p - [AT]_p \equiv 0 \pmod{p},$$

by multiplying both sides by a suitable factor. Now, A being any substitution of G, this last congruence indicates an invariant subgroup H of the kind defined in article 14 for $p = 2$.

20. It is thus shown that, if G contains a substitution V of order $p^n q$, p and q being different primes > 2, and is to be primitive, then must the substitution V^{p^n}, when written in canonical form, be of the type:

(7) $$V^{p^n}: x' = \alpha_1 x, \quad y' = \alpha_1 y, \quad z' = \alpha_2 z; \quad \alpha_1{}^q = \alpha_2{}^q = 1.$$

Again, if the order of G is divisible by 5^2 (or by 7^2), then G has an abelian subgroup of order 5^2 (or 7^2) (cf. art. 11) and must necessarily have a substitution of order 5 (or 7) of type (7). This we prove readily by constructing the different possible types of canonical groups of order 5^2 (or 7^2), omitting the cases where such groups contain substitutions of order 5^2 (or 7^2) (cf. art. 16).

Let us now consider a group G having a substitution S_1 of type (7). This substitution leaves invariant a point $(x = 0, y = 0)$ and *every* straight line through it. Let S_2 be another substitution into which S_1 is transformed by a substitution of G; S_2 will also leave invariant a certain point (say $\bar{x} = 0, \bar{y} = 0$) and every straight line through that point. Therefore, the straight line joining the two points, $(x = 0, y = 0)$ and $(\bar{x} = 0, \bar{y} = 0)$, must be left invariant by both S_1 and S_2. Accordingly, S_1 and S_2 will generate an intransitive group (art. 2) say of type

(8) $$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy, \quad z' = ez.$$

The substitutions

(9) $$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy$$

will form a finite group in two variables.

21. Let S_1 be of order 7. A substitution of order 7, contained in a group of type (9), must be commutative with every substitution of the group (cf. art. 4). Hence, the substitutions S_1 and S_2 must be commutative with each other, as far as they are looked upon as transforming the variables x, y. But then it is readily seen from the form of (8) that they are completely commutative. Accordingly, all the substitutions $S_1, S_2, \cdots$, which are transformed one into the other by the substitutions of G, are mutually commutative, and will therefore generate an abelian group, evidently contained invariantly in G. In this event G is not primitive (Theorem 2).

22. Let S_1 be of order 5. If S_1 and S_2 are not commutative, the group (9) generated by them must be the Icosahedral group 4^0, article (4). Among its substitutions are found the two, A, of order 3, written in canonical form, and B, a similarity-substitution of order 2:

$$A: x' = \omega x, \quad y' = \omega^2 y; \quad \omega^2 + \omega + 1 = 0;$$
$$B: x' = -x, \quad y' = -y.$$

The group (8) will then contain the substitutions

$$A_1: x' = \omega x, \quad y' = \omega^2 y, \quad z' = e_1 z;$$
$$B_1: x' = -x, \quad y' = -y, \quad z' = e_2 z.$$

The quantities e_1 and e_2 are 1 or are 5^{th} roots of unity, (8) being generated by substitutions of order 5. It is therefore allowed to put $e_1 = e_2 = 1$, which is equivalent to replacing A_1 and B_1 by their 5^{th} powers. But, A_1 and B_1 being commutative, we may call them S and T respectively and employ the reasoning of art. 19 to show that G has an invariant subgroup H. Hence, if G is to be primitive, S_1 and S_2 must be commutative. However, by following the reasoning of the latter half of article 21, we find that G cannot be primitive in this case either. Hence, finally, *a primitive group G can have no substitution of order* 5 *or* 7 *and of type* (7).

Constructing the different possible types of collineation-groups of order 3^3 allowed in a primitive group after article 16, we find that all such groups have a substitution T of the kind mentioned in Theorem 7. Now, by referring to the theorems 6, 7 and 8, we verify the following:

Theorem 9. *The order of a primitive group G is not divisible by* $3^3 \cdot 5$, $3^3 \cdot 7$, 5^2, 7^2 *nor by* $5 \cdot 7$. *The order is therefore a factor of one of the numbers* $2^3 \cdot 3^3$, $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ or $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$.

V. Classification of the Primitive Groups.

A Primitive groups having invariant intransitive subgroups.

23. No such subgroup could be abelian (Theorem 2). If an intransitive group is not abelian, it has a single invariant point. This point must evidently be transformed into itself by any group G containing the given intransitive group invariantly, and such a group G could not be primitive (art. 2).

B. Primitive groups having invariant monomial subgroups.

Let G contain an invariant monomial subgroup K. This subgroup leaves invariant the triangle whose sides are $x=0$, $y=0$ and $z=0$. If this is the only triangle left invariant by K, then must G evidently leave that triangle invariant also. We therefore seek the form of a monomial group K leaving more than one triangle invariant, and yet not being intransitive. We readily find but one type for K, namely that generated by the substitutions:

$$\begin{cases} S: x'=y, \quad y'=z, \quad z'=x; \\ T: x'=x, \quad y'=\omega y, \quad z'=\omega^2 z, \qquad \omega^2+\omega+1=0. \end{cases}$$

This group is of order 9 (as a collineation-group) and leaves invariant each of the four triangles:

$$t_1 = (x=0,\ y=0,\ z=0),$$
$$t_2,\ t_3,\ t_4 = (x+y+\theta z=0,\ x+\omega y+\theta\omega^2 z=0,\ x+\omega^2 y+\theta\omega z=0);$$
$$\theta = 1,\ \omega,\ \omega^2.$$

The primitive groups permuting among themselves these four triangles are generated by the substitutions

$$U=(t_2t_3t_4): x'=\varphi x, \quad y'=\varphi y, \quad z'=\varphi\omega z, \quad \varphi^3=\omega^2;$$
$$V=(t_1t_2)(t_3t_4): x'=\varrho(x+y+z), \quad y'=\varrho(x+\omega y+\omega^2 z),$$
$$z'=\varrho(x+\omega^2 y+\omega z), \quad \varrho=\frac{1}{\omega-\omega^2};$$
$$UVU^{-1}=(t_1t_4)(t_2t_3): x'=\varrho(x+y+\omega^2 z), \quad y'=\varrho(x+\omega y+\omega z),$$
$$z'=\varrho(\omega x+y+\omega z);$$

as follows:

1°. The Hessian group of order 216*):

S and T of K, U and V.

2°. An invariant subgroup of the Hessian group, of order 72:

S, T, V and UVU^{-1}.

3°. An invariant subgroup of 2°, of order 36:

S, T and V.

These groups, when written as linear groups, all contain the group F of similarity-substitutions, and their orders as linear groups are therefore 648, 216 and 108 respectively.

---

*) Cf. Jordan, *Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algébrique,* Journal für die reine und angewandte Mathematik, 84 (1878), p. 209.

C. Primitive groups isomorphic with abstract simple groups.

24. We found that the order of a primitive collineation-group was a factor of one of the numbers: $2^3 \cdot 3^3$, $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ and $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ (art. 22). The greatest of these numbers being 504, the question is therefore to determine all the primitive groups isomorphic with the four simple groups whose orders are not greater than this number; viz. the well known simple groups of orders 60, 168, 360 and 504 (art. 3).

There can be no group in three variables isomorphic with the simple group of order 504. For, this has an abelian subgroup of order 8, formed of 7 distinct substitutions of order 2 and the identical substitution.*) Attempting to write this subgroup in canonical form, we find it impossible as a group in three variables.

There is one, and only one, type of a primitive group isomorphic with each of the simple groups of orders 60 and 360 respectively, as shown by Maschke in Mathematische Annalen, Bd. 51 (1899), pp. 264—267. He derives the following types:

4^0. A simple group of order 60, generated by the substitutions

$$E_1 : x' = y, \quad y' = z, \quad z' = x;$$

$$E_2 : x' = x, \quad y' = -y, \quad z' = -z;$$

$$E_3 : x' = \frac{1}{2}(-x + \mu_2 y + \mu_1 z), \quad y' = \frac{1}{2}(\mu_2 x + \mu_1 y - z),$$

$$z' = \frac{1}{2}(\mu_1 x - y + \mu_2 z),$$

$$\mu_1 = \alpha + \alpha^4 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}), \quad \mu_2 = \alpha^2 + \alpha^3 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{5}), \quad \alpha^5 = 1.$$

This group does not contain the group F of similarity-substitutions and is therefore of order 60 as a linear group. It is simply isomorphic with the alternating permutation-group in five letters a, b, c, d, e, and its generating substitutions can be identified with the following permutations:

$$E_1 = (abc), \quad E_2 = (ab)(cd), \quad E_3 = (ab)(de).$$

5^0. A simple group of order 360 generated by**)

$$E_1, E_2 \text{ and } E_3 \text{ of } 4^0;$$

$$E_4 : x' = -x, \quad y' = -\omega z, \quad z' = -\omega^2 y, \quad \omega^2 + \omega + 1 = 0.$$

This group contains F and is therefore of order 1080 as a linear

*) See Burnside, *Theory of Groups*, p. 373.

**) See also Valentiner, *De endelige Transformations-Gruppers Theori*, Copenhagen, Videnskabernes Selkabs Skrifter, 6. Rekke (1889), p. 192.

group.*) It is simply isomorphic with the alternating group in six letters a, b, c, d, e, f:

$$E_1 = (abc),\quad E_2 = (ab)(cd),\quad E_3 = (ab)(de),\quad E_4 = (ab)(ef).$$

There is one, and only one type of a collineation-group simply isomorphic with the simple group of order 168, as shown by Weber in his Algebra, Bd. II, pp. (497—502) 2nd edition, 1899).**) This group is generated by the substitutions:

$$6^0.\ S: x' = \varepsilon x,\quad y' = \varepsilon^2 y,\quad z' = \varepsilon^4 x,\quad \varepsilon^7 = 1,\quad \varepsilon \neq 1;$$
$$T: x' = z,\quad y' = x,\quad z' = y;$$
$$U: x' = h(\alpha x + \beta y + \gamma z),\quad y' = h(\beta x + \gamma y + \alpha z),\quad z' = h(\gamma x + \alpha y + \beta z),$$
$$\alpha = \varepsilon^4 - \varepsilon^{-4},\quad \beta = \varepsilon^2 - \varepsilon^{-2},\quad \gamma = \varepsilon - \varepsilon^{-1},$$
$$h = \frac{1}{7}(\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 - \varepsilon^{-1} - \varepsilon^{-2} - \varepsilon^{-4}) = \frac{1}{\sqrt{-7}}.$$

This group does not contain F and is therefore of order 168 as a linear group. We can represent the group as a permutation group in 7 letters a, b, c, d, e, f, g, in which case the generating substitutions given will appear in the forms

$$S_1 = (abcdefg),\quad T_1 = (abd)(cfe),\quad U_1 = (ab)(ce).$$

D. Primitive groups having primitive invariant subgroups.

We saw (art. 22) that the order of a primitive collineation group should be a factor of one of the numbers $2^3 \cdot 3^3$, $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ or $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$. The groups 1^0 and 5^0 can therefore not be contained as subgroups in larger groups. The groups 2^0 and 3^0 have each a single invariant subgroup of order 9, namely the group K (art. 23). A group containing either 2^0 or 3^0 invariantly should therefore also leave K invariant, and could be none other than either 1^0 or 2^0. We find that 1^0 contains 2^0 invariantly, and 2^0 contains 3^0 invariantly.

Consider the group 4^0, of order $2^2 \cdot 3 \cdot 5$. A group G containing 4^0 invariantly must be of order $2^{2+a} \cdot 3^{1+b} \cdot 5$. Now, 4^0 has 10 subgroups of order 3, which must be permuted among themselves by the substitutions of G. Accordingly, there is in G a subgroup of order $2^{2+a} \cdot 3^{1+b} \cdot 5 : 10 = 2^{1+a} \cdot 3^{1+b}$, which transforms a given subgroup of 4^0 of order 3 into itself. Therefore, if $a > 0$, G contains a substitution of

*) That the linear group cannot be written without similarity-substitutions, is seen in the following manner. The simple G_{360} has an abelian subgroup of order 9, containing 8 substitutions of order 3. No such subgroup can be written in three variables directly as a linear group.

**) Cf. Klein, Mathematische Annalen, 14 (1878), p. 444.

order 2 commutative with a substitution of 4^0 of order 3. This is impossible, by Theorem 8. Hence, $a = 0$. Again, 4^0 has 6 subgroups of order 5. If $b > 0$, we would find in G a substitution of order 3 commutative with a substitution of order 5, which is likewise impossible by Theorem 8. Thus, the order of G is $2^2 \cdot 3 \cdot 5$, and $G = 4^0$.

Consider the group 6^0 of order $2^3 \cdot 3 \cdot 7$. A group G leaving this invariant should be of order $2^3 \cdot 3^{1+b} \cdot 7$. Now, 6^0 has 8 subgroups of order 7, and a substitution of order 3 which transforms a given substitution of order 7 into its 2nd or 4th power. If $b > 0$, G must contain a substitution of order 3 which is commutative with a substitution in 6^0 of order 7. But this is impossible by Theorem 8.

Über Flächenscharen, deren orthogonale Trajektorien ebene Kurven sind.

Von

Erich Mosch in Charlottenburg.

Die Untersuchungen von Flächenscharen haben sich bisher meist auf die dreifach orthogonalen Systeme bezogen; im folgenden soll auf eine Aufgabe eingegangen werden, die zuerst 1899 von der Académie de Toulouse gestellt wurde — soweit mir bekannt, ohne eine Beantwortung zu finden —: Flächenscharen zu untersuchen, deren orthogonale Trajektorien eben sind. Anfang 1905, als der erste Teil dieser Arbeit schon abgeschlossen war, erschienen in den Comptes Rendus zwei Noten von Carrus und Darboux*), die darin zu Resultaten gelangen, wie sie auf anderem Wege auch in der vorliegenden Arbeit erhalten werden. In einer weiteren Note (C. R., Band CXLIII, 1906) erledigt Carrus den in vorliegender Arbeit nicht behandelten Fall, daß die Flächenschar einem dreifach orthogonalen System angehört und orthogonale Trajektorien hat, deren Ebenen alle durch einen Punkt gehen. Schließlich ist noch ganz kürzlich in den *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* (série 2, tome VIII, 1906) eine Arbeit von Goursat erschienen: *Sur les familles de surfaces à trajectoires orthogonales planes.* Leider habe ich mir diese Arbeit nicht verschaffen können.

In § 1 sollen einige allgemeine Resultate über die Trajektorien abgeleitet werden. Die dann erfolgende Wahl des Koordinatensystems nötigt zu einer Teilung, in § 2 wird die Theorie von Scharen nichtabwickelbarer Flächen in Angriff genommen, in § 3 werden einige einfache Beispiele dazu gegeben, worauf in § 4 auf die Theorie von Scharen abwickelbarer Flächen, insbesondere von Ebenen- und Kegelscharen eingegangen wird.

§ 1.

Allgemeines.

Es sei eine Schar von einfach unendlich vielen Flächen mit dem Flächenparameter ϱ gegeben durch

$$(1) \qquad x = x(uv\varrho), \quad y = y(uv\varrho), \quad z = z(uv\varrho).$$

---

*) C. R., Band CXL, 23. Janvier 1905.

Bezeichnet man die Richtungscosinusse der Flächennormalen mit XYZ, so lauten die Differentialgleichungen der orthogonalen Trajektorien von (1):

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = dT, \tag{2}$$

wo dT das Linienelement einer Trajektorie ist. Die Bedingung dafür, daß die Trajektorien eben sind, lautet dann bekanntlich:

$$\Sigma \pm X dY d^2 Z = 0, \tag{3}$$

wo die d Zuwüchse längs der Trajektorien bedeuten und mit Hilfe von (2) zu berechnen sind. Statt (3) kann man auch schreiben:

$$\Sigma dX\, d(YdZ - ZdY) = 0, \tag{4}$$

wo das Summenzeichen — wie stets im folgenden — eine durch zyklische Vertauschung entstehende Summe bedeutet. Nimmt man mit (4) zusammen:

$$\Sigma X\, d(YdZ - ZdY) \equiv 0,$$

so folgt weiter:

$$\begin{aligned} &d(YdZ - ZdY) : d(ZdX - XdZ) : d(XdY - YdX) \\ = \;&(YdZ - ZdY) : \;(ZdX - XdZ) : \;(XdY - YdX). \end{aligned}$$

Ist also keine der Größen der rechten Seite Null, so können wir die Gleichung des Problems auch erhalten, indem wir eines der drei Verhältnisse

$$(YdZ - ZdY) : (ZdX - XdZ) : (XdY - YdX) \tag{5}$$

nach T differenzieren und das Resultat gleich Null setzen. Die drei Größen (5) sind übrigens den Richtungscosinussen der Trajektorienebenen proportional. Außerdem folgt, daß die Größen

$$\frac{YdZ - ZdY}{XdY - YdX} = c_1, \quad \frac{ZdX - XdZ}{XdY - YdX} = c_2 \tag{6}$$

längs der Trajektorien konstant, die Gleichungen (6) also die Gleichungen der ∞^2 Trajektorien sind. Fassen wir die Kurve $YdZ - ZdY = 0$, $XdY - YdX = 0$ (woraus $ZdX - XdZ = 0$ folgt), oder, was dasselbe ist, die Kurve $dX = dY = dZ = 0$ ins Auge, so sehen wir, daß c_1 und c_2 längs dieser Kurve unbestimmt werden, d. h. alle Trajektorien treffen sie. Betrachten wir noch den Krümmungsradius R_T einer Trajektorie:

$$\frac{1}{R_T^2} = \sum \left(\frac{d^2x}{dT^2}\right)^2 = \sum \left(\frac{dX}{dT}\right)^2 \tag{7}$$

so sehen wir, daß er für die Punkte jener Kurve $= \infty$ wird, die Trajektorien haben hier also Wendepunkte. Fassen wir zusammen, so haben wir den

Satz. *Hat man eine Flächenschar, deren orthogonale Trajektorien eben sind, so erhält man die Gleichungen der Trajektorien durch Differentiation. Alle Trajektorien treffen eine bestimmte Kurve und haben hier Wendepunkte.*

§ 2.

Scharen von nichtabwickelbaren Flächen.

Wir wählen jetzt die krummlinigen Koordinaten u, v und setzen noch voraus:

$$\sum \pm \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial \varrho} \neq 0. \tag{8}$$

Ein Nullsetzen dieser Funktionaldeterminante liefert bekanntlich die Umhüllungsfläche der Schar (1). Wir wählen u und v so, daß diese beiden Kurvenscharen bei der Gaußschen Abbildung auf die Einheitskugel in die Schar der Meridiane und Parallelkreise übergehen, daß also das Linienelement auf der Einheitskugel die Form annimmt:

$$ds = du^2 + \sin^2 u\, dv^2. \tag{9}$$

Außerdem führen wir zur Bestimmung eines Flächenpunktes Weingartensche Ebenenkoordinaten ein, d. h. XYZ und den Abstand w der Tangentialebene vom Koordinatenanfang. Mit der Wahl dieser Koordinaten beschränken wir uns zunächst auf die Betrachtung von Scharen *nichtabwickelbarer* Flächen. Auf die *abwickelbaren* Flächen, die nicht mit Hilfe von Ebenenkoordinaten behandelt werden können, werden wir später (in § 4) eingehen. Dann genügen XYZ den folgenden Differentialgleichungen*):

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u^2} = -\vartheta, \quad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u\,\partial v} = \operatorname{ctg} u \frac{\partial \vartheta}{\partial v}, \quad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2} = -\sin u \cos u \frac{\partial \vartheta}{\partial u} - \sin^2 u \cdot \vartheta. \tag{10}$$

Als allgemeinste Werte für XYZ ergeben sich daraus folgende:

$$X = (\alpha_1 \sin v + \beta_1 \cos v) \sin u + \gamma_1 \cos u, \quad Y = \cdots, \quad Z = \cdots, \tag{11}$$

wo $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3\ \beta_1 \cdots \gamma_3$ Funktionen von ϱ sind und außerdem

$$\Sigma\alpha^2 = \Sigma\beta^2 = \Sigma\gamma^2 = 1, \quad \Sigma\alpha\beta = \Sigma\alpha\gamma = \Sigma\beta\gamma = 0 \text{ usw.}$$

ist. Weiter ist dann (Bianchi p. 140):

$$x = wX + \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v}, \quad y = \cdots, \quad z = \cdots. \tag{12}$$

Kennt man also auch noch w, so ist die Flächenschar bestimmt; das Problem wird demnach auf die Bestimmung dieser Funktion hinauskommen. Übrigens läßt sich leicht folgende geometrische Deutung der Koordinatenscharen u und v verifizieren:

Satz. *Schneidet man eine Fläche mit einer Schar paralleler Ebenen und verbindet immer solche Punkte, in denen die Fläche unter gleichem Winkel geschnitten wird, so erhält man ∞^1 Kurven auf der Fläche. Verbindet man jetzt weiter immer solche Punkte, in denen die Tangenten der Kurven der ersten Schar einander parallel sind, so liefert dies eine zweite*

*) S. z. B. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Deutsch von Lukat. p. 122.

Schar von ∞^1 Kurven. Bei der sphärischen Abbildung gehen diese beiden Scharen in die Scharen der Parallelkreise und der Meridiane über; es sind also unsere Kurven u und v.

Wir spezialisieren unser Koordinatensystem noch, indem wir in (11):

$$\alpha_1 = 1,\quad \alpha_2 = \alpha_3 = 0,\quad \beta_2 = 1,\quad \beta_1 = \beta_3 = 0,\ \gamma_3 = 1,\quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0$$

setzen. Geometrisch bedeutet das, daß wir *alle* Flächen der Schar mit *derselben* Schar von Ebenen schneiden. Dann wird:

$$X = \sin u \sin v,\quad Y = \sin u \cos v,\quad Z = \cos u. \tag{13}$$

Ferner seien hier noch einige Formeln zusammengestellt, die später gebraucht werden. Sind EFG die Koeffizienten der ersten, $DD'D''$ die der zweiten Fundamentalform einer Fläche, r_1 und r_2 deren Hauptkrümmungsradien, so ist:

$$\begin{cases} D = -\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2} - w,\quad D' = -\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} + \operatorname{ctg} u\,\dfrac{\partial w}{\partial v}, \\ D'' = -\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2} - \sin u \cos u\,\dfrac{\partial w}{\partial u} - \sin^2 u \cdot w. \end{cases} \tag{14}$$

$$E = D^2 + \frac{D'^2}{\sin^2 u},\quad F = D'\left(D + \frac{D''}{\sin^2 u}\right),\quad G = D'^2 + \frac{D''^2}{\sin^2 u}, \tag{15}$$

$$r_1 + r_2 = -\left(D + \frac{D''}{\sin^2 u}\right),\quad r_1 \cdot r_2 = \frac{DD'' - D'^2}{\sin^2 u}, \tag{16}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = -D\,\dfrac{\partial X}{\partial u} - \dfrac{D'}{\sin^2 u}\,\dfrac{\partial X}{\partial v},\quad \dfrac{\partial x}{\partial v} = -D'\,\dfrac{\partial X}{\partial u} - \dfrac{D''}{\sin^2 u}\,\dfrac{\partial X}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial x}{\partial \varrho} = X\,\dfrac{\partial w}{\partial \varrho} + \dfrac{\partial X}{\partial u}\,\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial \varrho} + \dfrac{1}{\sin^2 u}\,\dfrac{\partial X}{\partial v}\,\dfrac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial \varrho}. \end{cases} \tag{17}$$

Wir betrachten jetzt die Gleichung (3) des Problems. Da XYZ nur von u und v abhängen, kann man (3) auch für die Einheitskugel deuten, deren Punkte ja durch XYZ gegeben sind. Hier bedeutet (3) nichts anderes als die Gleichung der ∞^2 größten Kreise, oder was dasselbe sagt, die Schar aller geodätischen Linien. Deren Gleichung lautet aber (Bianchi p. 154):

$$du\,d^2v - dv\,d^2u + 2\operatorname{ctg} u\,du^2\,dv + \sin u \cos u\,dv^3 = 0. \tag{18}$$

Das ist eine andere Form der Gleichung (3), zu der man auch durch Einsetzen der Werte $X\,dX\,d^2X\cdots$ in (3) hätte kommen können. Jetzt sind $du\ dv\ d^2u\ d^2v$ zu berechnen. Multipliziert man die drei Gleichungen:

$$\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv + \frac{\partial x}{\partial \varrho}\,d\varrho = X\,dT,\ \cdots,\ \cdots$$

der Reihe nach mit XYZ, $\dfrac{\partial X}{\partial u}\dfrac{\partial Y}{\partial u}\dfrac{\partial Z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial X}{\partial v}\dfrac{\partial Y}{\partial v}\dfrac{\partial Z}{\partial v}$ und addiert jedesmal, so erhält man wegen (17) und (9):

$$(19)\qquad \frac{\partial w}{\partial \varrho}\, d\varrho = dT,\quad D\,du + D'dv = \frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial \varrho}\, d\varrho,\quad D'du + D''dv = \frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial \varrho}\, d\varrho,$$

oder statt der zwei letzten Gleichungen:

$$(20)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial \varrho}(DD''-D'^2)\dfrac{du}{dT} = D''\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial \varrho} - D'\dfrac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial \varrho}, \\[2ex] \dfrac{\partial w}{\partial \varrho}(DD''-D'^2)\dfrac{dv}{dT} = -D'\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial \varrho} + D\dfrac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial \varrho}. \end{cases}$$

$d^2u\; d^2v$ werden für das Folgende nicht gebraucht. Man übersieht aber leicht, daß (18) eine partielle Differentialgleichung 3. Ordnung für w wird. Betrachten wir jetzt (18). Man kann diese Gleichung, vorausgesetzt, daß $du \neq 0$ ist, auch schreiben:

$$(21)\qquad \frac{d}{du}\frac{dv}{du} + 2\operatorname{ctg} u\,\frac{dv}{du} + \sin u \cos u \left(\frac{dv}{du}\right)^3 = 0$$

und hieraus folgt

$$(22)\qquad \frac{dv}{du} = \frac{1}{\sin u\sqrt{C\sin^2 u - 1}}$$

und weiter:

$$(23)\qquad v = -\frac{1}{2}\arcsin\left[\frac{2}{(C-1)\sin^2 u} - \frac{C+1}{C-1}\right] + C',$$

wo C und C' zwei Funktionen sind, die längs der einzelnen Trajektorien invariant bleiben. Für C und C' ergeben sich die Werte:

$$(24)\qquad C = \frac{du^2 + \sin^2 u\, dv^2}{\sin^4 u\, dv^2},\quad C' = v + \frac{1}{2}\arcsin\frac{\sin^2 u\cos^2 u\, dv^2 - du^2}{\sin^2 u \cos^2 u\, dv^2 + du^2}.$$

Setzt man für du und dv ihre Werte aus (20) ein, führt außerdem statt C und C' die Funktionen Θ und Λ ein durch:

$$(25)\qquad C = \frac{1}{\cos^2\Theta},\quad C' = \frac{\pi}{4} - \Lambda,$$

so erhält man für Θ und Λ die Ausdrücke:

$$(26)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2\Theta} = \dfrac{G\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial \varrho}\right)^2 - 2F\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial \varrho}\dfrac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial \varrho} + E\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial \varrho}\right)^2}{\sin^2 u\left(D\dfrac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial \varrho} - D'\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial \varrho}\right)^2}, \\[4ex] \operatorname{tg}(v+\Lambda) = \dfrac{D''\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial \varrho} - D'\dfrac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial \varrho}}{\sin u\cos u\left(-D'\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial \varrho} + D\dfrac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial \varrho}\right)}. \end{cases}$$

Wir hatten schon in (6) zwei Funktionen c_1 und c_2 gefunden, die längs der Trajektorien sich nicht änderten. c_1 und c_2 stehen mit Θ und Λ in dem folgenden Zusammenhang, den man leicht durch Rechnung verifiziert:

$$(27)\qquad \begin{cases} \operatorname{tg}\Lambda = -\dfrac{c_1}{c_2}, & c_1 = \sin\Lambda\operatorname{tg}\Theta, \\ \operatorname{tg}\Theta = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}; & c_2 = -\cos\Lambda\operatorname{tg}\Theta. \end{cases}$$

Da außerdem $c_1\,c_2\,1$ den Richtungscosinussen der Trajektorienebenen proportional sind, also $c_1 X + c_2 Y + Z = 0$ ist, so besteht die Relation:

$$(28)\qquad \operatorname{tg}\Theta\cos(v + \Lambda) = \cos u.$$

Aus der Form von (26) kann man wieder den in § 1 bewiesenen Satz ableiten, daß alle Trajektorien eine Kurve treffen, nämlich die durch die Gleichungen

$$(29)\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial\varrho} = \frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial\varrho} = 0$$

gegebene, und in den Punkten dieser Kurve Wendepunkte haben.

Wir gehen jetzt zu den Ebenen der ∞^2 Trajektorien über. Die Richtungscosinusse ihrer Normalen sind ja wegen (27) proportional

$$\sin\Lambda, \quad -\cos\Lambda, \quad \operatorname{ctg}\Theta.$$

Bedeutet also $\xi\eta\zeta$ den laufenden, xyz einen festen Punkt einer Trajektorienebene, so lautet die Gleichung dieser ∞^2 Ebenen:

$$(30)\qquad \xi\sin\Lambda - \eta\cos\Lambda + \zeta\operatorname{ctg}\Theta = x\sin\Lambda - y\cos\Lambda + z\operatorname{ctg}\Theta.$$

An sich enthalten xyz alle drei Variabeln $uv\varrho$; da es aber nur ∞^2 Ebenen geben darf — jede einzelne ist durch je einen Wert von Θ und Λ bestimmt — so muß die rechte Seite eine Funktion von Θ und Λ allein sein. Also:

$$(31)\qquad x\sin\Lambda - y\cos\Lambda + z\operatorname{ctg}\Theta = f(\Lambda\Theta).$$

Denkt man sich hierin für $\Theta\Lambda xyz$ ihre Werte eingesetzt, so kommen von w nur die Differentialquotienten bis zur 2. Ordnung vor; außerdem enthält die Gleichung eine willkürliche Funktion f. Wir haben damit den

Satz. *Die Gleichung* (31) *ist eine Integralgleichung 2. Ordnung der allgemeinen Gleichung 3. Ordnung des Problems.*

§ 3.

Beispiele.

I) Wir stellen uns zunächst die Aufgabe, alle Kugelscharen zu finden, deren orthogonale Trajektorien eben sind. Aus der geometrischen Bedeutung von u und v folgt, daß diese Kurvenscharen in unserem Fall Krümmungslinien sind, daß also, wenn durch $R(\varrho)$ die Kugelradien gegeben sind, $D' = 0$, ferner wegen (16)

$$D = -R(\varrho), \qquad D'' = -R\sin^2 u$$

ist. Aus (14) und (12) folgt dann für w, xyz:

$$(32)\quad \begin{cases} w = R + [\alpha(\varrho)\sin v + \beta(\varrho)\cos v]\sin u + \gamma(\varrho)\cos u, \\ x = \alpha(\varrho) + R\sin u \sin v, \\ y = \beta(\varrho) + R\sin u\cos v, \\ z = \gamma(\varrho) + R\cos u. \end{cases}$$

Aus (20) ergibt sich durch Einsetzen der Werte von $DD'D''$:

$$\frac{du}{dv} = \sin^2 u\,\frac{\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial\varrho}}{\dfrac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial\varrho}}$$

und hieraus:

$$dv\,d^2u - du\,d^2v = 2\operatorname{ctg} u\,du^2\,dv + \sin^2 u\,dv^2\,d\,\frac{\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial\varrho}}{\dfrac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial\varrho}}.$$

Die Differentialgleichung (18) wird damit zu

$$dv^2\left[d\,\frac{\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial\varrho}}{\dfrac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial\varrho}} - \operatorname{ctg} u\,dv\right] = 0.$$

Lassen wir zunächst den Fall $dv = 0$ beiseite, so vereinfacht sich die entstandene Gleichung nach der Differentiation und durch Einsetzen der sich aus (14) ergebenden dritten Differentialquotienten:

$$\frac{\partial^3 w}{\partial u^2\,\partial\varrho} = R' - \frac{\partial w}{\partial\varrho}, \qquad \frac{\partial^3 w}{\partial u\,\partial v\,\partial\varrho} = \operatorname{ctg} u\,\frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial\varrho},$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial v^2\,\partial\varrho} = R'\sin^2 u - \sin u\cos u\,\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial\varrho} - \sin^2 u\,\frac{\partial w}{\partial\varrho}$$

zu:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial\varrho}\,\frac{\partial^3 w}{\partial u\,\partial\varrho^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial\varrho}\,\frac{\partial^3 w}{\partial v\,\partial\varrho^2} = 0.$$

Diese Gleichung sagt aus, daß das Verhältnis $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial\varrho} : \dfrac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial\varrho}$ frei von ϱ sein muß, d. h. wegen (32), daß

$$\frac{(\alpha'\sin v + \beta'\cos v)\cos u - \gamma'\sin u}{(\alpha'\cos v - \beta'\sin v)\sin u}$$

ϱ nicht enthalten darf. Dies führt auf folgende Werte für $\alpha\beta\gamma$:

$$\alpha = a_1\varepsilon(\varrho) + a_2, \quad \beta = b_1\varepsilon(\varrho) + b_2, \quad \gamma = c_1\varepsilon(\varrho) + c_2,$$

wo die abc Konstanten sind. Die Gleichungen der *Kurve der Mittelpunkte*

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = \gamma$$

zeigen dann, daß diese Kurve *eine Gerade* ist. — Der vorhin ausgeschlossene Fall $dv = 0$ ergibt wegen (20) $\frac{\partial^2 w}{\partial v \, \partial \varrho} = 0$ und wegen (32)

$$\alpha' \sin v + \beta' \cos v = 0$$

d. h. $\alpha' = \beta' = 0$. α und β müssen Konstante sein. Die Kurve der Kugelmittelpunkte ist eine der z-Achse parallele Gerade. Wir haben also den

Satz. *Eine Kugelschar hat nur dann ebene orthogonale Trajektorien, wenn die Kugelmittelpunkte auf einer Geraden liegen; die Größe des Kugelradius kann sich dabei nach einem willkürlichen Gesetze ändern.*

Die Gestalt der Trajektorien ist in diesem Falle besonders einfach. Um sie zu übersehen, nehme man eine Schar von Kreisen, deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen, und konstruiere deren orthogonale Trajektorien. Man erhält Kurven, deren jede auf der Umhüllungskurve der Kreisschar eine Spitze hat, deren Verlauf im übrigen von der Funktion $R(\varrho)$ abhängt und die die Gerade der Kreismittelpunkte als Asymptote haben. Im Falle gleich großer Radien ist jede Trajektorie eine Tractrix.

II) Als zweites Beispiel wählen wir den Fall, in dem die Trajektorienebenen alle einer festen Geraden, etwa der z-Achse, parallel sind. Dann ist Θ wegen seiner geometrischen Bedeutung $= \frac{\pi}{2}$ (vgl. (30)), außerdem wegen (28) $\Lambda = \frac{\pi}{2} - v$ und wegen (26):

$$D' \frac{\partial^2 w}{\partial u \, \partial \varrho} - D \frac{\partial^2 w}{\partial v \, \partial \varrho} = 0. \tag{33}$$

Statt (33) kann man wegen (20) auch schreiben $dv = 0$, d. h. v ist längs der Trajektorien konstant. Die Hauptgleichung (18) ist mit $dv = 0$ erfüllt, so daß wir es nur mit (33) zu tun haben. Diese Gleichung wandelt man mit Benutzung von (17) und (12) leicht in die folgende um:

$$w \cos u - \frac{\partial w}{\partial u} \sin u = \Phi\left(\frac{\partial w}{\partial \varrho}, \varrho\right), \tag{34}$$

wo Φ eine willkürliche Funktion ihrer Argumente ist. Von der Integration dieser Gleichung 1. Ordnung hängt die Lösung des Problems ab. Die Gleichung ist allgemein nicht integrierbar. Es seien aber noch einige Eigenschaften der betreffenden Flächenscharen angezeigt. Zunächst können auch hier, wenn auch die Größen Θ und Λ versagen, die Gleichungen der Trajektorien in endlicher Form gegeben werden. Erstens ist für dieselben $v = c_1$, zweitens folgt aus der Gleichung der Trajektorien, die in diesem Fall, wie leicht zu übersehen,

$$\xi \cos v - \eta \sin v = x \cos v - y \sin v \tag{35}$$

heißt, durch Einsetzen der Werte aus (12) und unter Berücksichtigung des Umstandes, daß es nur ∞^2 Trajektorienebenen gibt, daß

(36) $$v = c_1, \quad \frac{1}{\sin u}\frac{\partial w}{\partial v} = c_2$$

die gesuchten Gleichungen der Trajektorien sind.

Eine andere nicht ganz einfache Eigenschaft, die leicht zu verifizieren ist, ist die folgende: Die Flächenschar $v = c_1$ schneidet jede der Flächen ϱ in ∞^1 Kurven $\delta v = 0$. Die ∞^2 Trajektorienebenen andererseits bestimmen in jedem Flächenpunkte eine Fortschreitungsrichtung und man erhält so ∞^1 Kurven $D'\delta u + D''\delta v = 0$. Bezeichnet man den Winkel, unter dem sich zwei Kurven dieser beiden Scharen in einem Flächenpunkte treffen, mit ϑ, die beiden Normalkrümmungen der beiden Kurven mit $\frac{1}{\varrho_1}$ und $\frac{1}{\varrho_2}$, die Totalkrümmung und mittlere Krümmung der Fläche in jenem Punkte mit K und H, so besteht die Beziehung:

$$(H - K\varrho_1 \cos^2\vartheta)\varrho_2 = 1.$$

Schließlich kann man leicht folgende Eigenschaft ableiten:

Satz. *Die Umhüllungsfläche der Flächen ϱ berührt die Flächen nach ebenen Kurven, deren Ebenen senkrecht auf der z-Achse stehen.*

In einem Falle läßt sich die eben behandelte Aufgabe ganz durchführen: wenn die Schar der Trajektorienebenen sich auf eine einfach unendliche reduziert. Dann ist offenbar wegen (36), wenn φ eine willkürliche Funktion von v ist:

(37) $$\frac{1}{\sin u}\frac{\partial w}{\partial v} = \varphi(v).$$

Hieraus folgt durch Differentiation nach ϱ und u:

(38) $$\frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial \varrho} = 0, \qquad \operatorname{ctg} u \frac{\partial w}{\partial v} - \frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} = D' = 0,$$

Aus $D' = 0$ folgt wegen (15) noch $F = 0$, d. h. die Kurven u und v sind Krümmungslinien. Andererseits sind die Schnitte der Ebenen senkrecht zur z-Achse mit den Flächen ϱ gegeben durch $\delta z = 0$, oder, entwickelt, wegen (17) $\delta u = 0$, das sind aber die Krümmungslinien der einen Schar. *Die Flächen haben also eine Schar Krümmungslinien in parallelen Ebenen.* Aus (37) folgt noch:

(39) $$w = \psi(v)\sin u + \chi(u\varrho),$$

wo $\psi(v) = \int \varphi(v)\,dv$ gesetzt ist. Um die Form und Lage der Trajektorien zu untersuchen, beachten wir, daß deren Ebenen

(40) $$\xi\cos v - \eta\sin v = \psi'(v)$$

einen Zylinder umhüllen, dessen Gleichungen aus (40) sich in der Form ergeben:

(41) $$\begin{cases} \xi = \quad \psi'\cos v - \psi''\sin v, \\ \eta = -\psi'\sin v - \psi''\cos v. \end{cases}$$

Diese Gleichungen geben zugleich die Form der Leitkurve des Zylinders in der $\xi\eta$-Ebene an. Das Linienelement $d\sigma$ dieser Kurve ist:

$$d\sigma = -(\psi' + \psi''')dv. \tag{42}$$

Die Flächen der Schar sind dargestellt durch:

$$\left\{\begin{aligned} x &= \psi \sin v + \psi' \cos v + \left(\chi \sin u + \frac{\partial \chi}{\partial u} \cos u\right) \sin v,\\ y &= \psi \cos v - \psi' \sin v - \left(\chi \sin u + \frac{\partial \chi}{\partial u} \cos u\right) \cos v,\\ z &= \chi \cos u - \frac{\partial \chi}{\partial u} \sin u, \end{aligned}\right. \tag{43}$$

wo ψ und χ beliebige Funktionen ihrer Argumente sind. Andererseits kann man (43) auch als die Gleichungen der Trajektorien betrachten, jeder Wert $v = c_1$ liefert eine Trajektorie. Um darüber Aufschluß zu gewinnen, wie die Trajektorien in den Ebenen verteilt sind, greifen wir eine solche Ebene heraus und führen ein neues Koordinatensystem ein. Als $\mathfrak{z}$-Achse wählen wir die Gerade, längs deren die Ebene den Zylinder (41) berührt, als $\mathfrak{y}\mathfrak{z}$-Ebene die Trajektorienebene selbst. Nach der Transformation erhält man die Gleichungen der Trajektorien in der Form:

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} &= 0,\\ \mathfrak{y} &= \psi + \psi'' + \chi \sin u + \frac{\partial \chi}{\partial u} \cos u,\\ \mathfrak{z} &= \chi \cos u - \frac{\partial \chi}{\partial u} \sin u. \end{aligned}$$

Beachtet man, daß $\mathfrak{z}$ für alle Trajektorienebenen dieselbe Funktion von u und ϱ ist, da es von v unabhängig ist, beachtet man weiter, daß $\mathfrak{y} + \sigma$ wegen (42) auch von v frei ist, so erhält man das Resultat, daß die Kurven aller Ebenen kongruent sind, sowie, daß die Kurven einer Ebene mit denen aller andern dadurch zur Deckung gebracht werden können, daß man ihre Ebene auf dem Zylinder rollen läßt. Wendet man jetzt noch einen bekannten Satz von Ribaucour über die Umhüllungsfläche der Trajektorienebenen an*), so kann man den umhüllenden Zylinder durch eine beliebige abwickelbare Fläche ersetzen und hat damit den

Satz. *Nimmt man eine beliebige abwickelbare Fläche, konstruiert in einer ihrer Tangentialebenen eine einfach unendliche Kurvenschar und läßt die Tangentialebene samt der Kurvenschar auf der Abwickelbaren rollen, so sind die so erzeugten doppelt unendlich vielen Kurven die orthogonalen Trajektorien einer Flächenschar.*

---

*) s. z. B. von Lilienthal, „Grundlagen einer Krümmungstheorie der Kurvenscharen", p. 58.

§ 4.

Scharen von abwickelbaren Flächen.

Im vorhergehenden konnten infolge der Benutzung von Ebenenkoordinaten nur *nichtabwickelbare* Flächen betrachtet werden. Die dadurch entstandene Lücke wollen wir jetzt ausfüllen und nach Scharen von *Abwickelbaren* fragen, deren orthogonale Trajektorien eben sind.

I) *Ebenenscharen.* Die orthogonalen Trajektorien einer Ebenenschar

$$a_1(\varrho)x + a_2(\varrho)y + a_3(\varrho)z = a_4(\varrho), \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$$

sind gegeben durch

$$\frac{dx}{a_1} = \frac{dy}{a_2} = \frac{dz}{a_3} = dT.$$

Damit die Trajektorien eben sind, muß $\sum \pm \frac{dx}{dT}\frac{d^2y}{dT^2}\frac{d^3z}{dT^3} = 0$ sein. Die Bedingung kommt, wie leicht einzusehen, auf die folgende hinaus:

$$\Sigma \pm a_1 a_2' a_3'' = 0.$$

Setzt man

$$a_1 = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2+\mu^2}}, \quad a_2 = \frac{\mu}{\sqrt{1+\lambda^2+\mu^2}}, \quad a_3 = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2+\mu^2}},$$

so nimmt obige Determinantengleichung die Form an:

$$\lambda'\mu'' - \mu'\lambda'' = 0$$

und liefert

$$\lambda = c_1\nu(\varrho) + k_1, \qquad \mu = c_2\nu(\varrho) + k_2.$$

Die Gleichung der Ebenenschar wird damit

$$(c_1\nu + k_1)x + (c_2\nu + k_2)y + z = a_4\sqrt{1 + (c_1\nu + k_1)^2 + (c_2\nu + k_2)^2}.$$

Als Umhüllungsfläche dieser Ebenenschar findet man einen Zylinder. Da auch umgekehrt klar ist, daß eine Ebenenschar, die einen Zylinder umhüllt, ebene orthogonale Trajektorien hat, haben wir den

Satz. *Eine Ebenenschar hat dann und nur dann ebene orthogonale Trajektorien, wenn die Ebenen der Schar einen Zylinder umhüllen.*

II) *Kegelscharen.* Eine Schar von Kegelflächen sei durch die Gleichungen gegeben:

$$(1)\qquad \begin{cases} x = p(\varrho) + ul(v\varrho), \\ y = q(\varrho) + um(v\varrho), \\ z = r(\varrho) + un(v\varrho). \end{cases}$$

Die Funktionen $pl \cdots$ können unbeschadet der Allgemeinheit so gewählt werden, daß

$$(2)\qquad \Sigma p'^2 = 1, \quad \Sigma l^2 = 1, \quad \Sigma L^2 = 1$$

ist, wo $L = \frac{\partial l}{\partial v} \cdots$ gesetzt ist. Dann bedeuten die Gleichungen

$$(3)\qquad x = p(\varrho), \quad y = q(\varrho), \quad z = r(\varrho)$$

die Kurve der Kegelspitzen, ϱ den Bogen dieser Kurve, $l\,m\,n$ die Richtungscosinusse der Erzeugenden der Kegel; endlich liefert $u = 1$ für jeden bestimmten Kegel ϱ die Kurve, deren Punkte um die Einheit von der Kegelspitze entfernt auf den erzeugenden Geraden liegen, v ist der Bogen dieser Kurve.

Für die Richtungscosinusse der Kegelnormalen hat man

$$X = mN - nM, \quad \cdots, \quad \cdots, \tag{4}$$

und die Bedingungsgleichung dafür, daß wir es mit ebenen orthogonalen Trajektorien zu tun haben:

$$\Sigma dX\, d(YdZ - ZdY) = 0,$$

nimmt nach Einsetzen der Werte von XdX usw. und gehöriger Vereinfachung unter Berücksichtigung von (2) und den sich aus (2) durch Differentiation ergebenden Formeln die Gestalt an:

$$\Sigma(dl\, d^2L - dL\, d^2l) + \Sigma L\,dl[3(\Sigma dL^2 + \Sigma dl^2) - 4(\Sigma L\,dl)^2] = 0. \tag{5}$$

Führt man die Differentiationen weiter aus, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$F_0(d\varrho\, d^2v - dv\, d^2\varrho) + F_1 dv^3 + F_2 dv^2 d\varrho + F_3 dv\, d\varrho^2 + F_4 d\varrho^3 = 0, \tag{6}$$

worin

$$\left\{\begin{aligned}
F_0 &= \sum \frac{\partial L}{\partial v}\frac{\partial l}{\partial \varrho}, \qquad F_1 = \sum\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2 - 1,\\
F_2 &= \sum \frac{\partial l}{\partial \varrho}\frac{\partial^2 L}{\partial v^2} + \sum \frac{\partial L}{\partial v}\frac{\partial L}{\partial \varrho} + 3\sum L\frac{\partial l}{\partial \varrho}\left[\sum\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2 - 1\right],\\
F_3 &= 2\sum \frac{\partial l}{\partial \varrho}\frac{\partial^2 L}{\partial v\,\partial \varrho} - \sum \frac{\partial L}{\partial v}\frac{\partial^2 l}{\partial \varrho^2} + 6\sum L\frac{\partial l}{\partial \varrho}\sum \frac{\partial L}{\partial v}\frac{\partial L}{\partial \varrho}\\
&\qquad - 6\left(\sum L\frac{\partial l}{\partial \varrho}\right)^2 + 3\sum\left(\frac{\partial l}{\partial \varrho}\right)^2,\\
F_4 &= \sum \frac{\partial l}{\partial \varrho}\frac{\partial^2 L}{\partial \varrho^2} - \sum \frac{\partial L}{\partial \varrho}\frac{\partial^2 l}{\partial \varrho^2} + \sum L\frac{\partial l}{\partial \varrho}\left[3\sum\left(\frac{\partial L}{\partial \varrho}\right)^2 + 3\sum\left(\frac{\partial l}{\partial \varrho}\right)^2\right.\\
&\qquad \left. - 4\left(\sum L\frac{\partial l}{\partial \varrho}\right)^2\right]
\end{aligned}\right. \tag{7}$$

zu setzen ist.

Für $du\, dv\, d\varrho$ findet man aus den Gleichungen

$$dx = (mN - nM)dT \text{ usw.},$$

da

$$\frac{\partial x}{\partial u} = l, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = uL, \quad \frac{\partial x}{\partial \varrho} = p' + u\frac{\partial l}{\partial \varrho} \tag{8}$$

ist:

$$du = -\Sigma l p'\, d\varrho, \qquad dv = -\left(\frac{1}{u}\sum L p' + \sum L\frac{\partial l}{\partial \varrho}\right) d\varrho \tag{9}$$

und hieraus:

$$(10)\ \begin{cases} d\varrho\, d^2v - dv\, d^2\varrho = -\frac{1}{u^2}\sum Lp'\sum lp'\, d\varrho^3 - \frac{1}{u}\Big(\sum p'\frac{\partial L}{\partial v}dv + \sum p'\frac{\partial L}{\partial \varrho}d\varrho \\ \quad + \sum Lp''\, d\varrho\Big)d\varrho^2 - \Big(\sum L\frac{\partial^2 l}{\partial \varrho^2}d\varrho + \sum \frac{\partial l}{\partial \varrho}\frac{\partial L}{\partial v}dv + \sum \frac{\partial l}{\partial \varrho}\frac{\partial L}{\partial \varrho}d\varrho\Big)d\varrho^2. \end{cases}$$

Durch Einsetzen von (9) und (10) in (6) erhält diese Gleichung die Gestalt:

$$(11)\qquad \frac{f_0}{u^3} + \frac{f_1}{u^2} + \frac{f_2}{u} + f_3 = 0,$$

worin

$$f_0 = -F_1(\Sigma Lp')^3,$$

$$f_1 = \sum Lp'\Big[F_0\Big(\sum p'\frac{\partial L}{\partial v} - \sum Lp'\Big) - 3F_1\sum Lp'\sum L\frac{\partial l}{\partial \varrho} + F_2\sum Lp'\Big],$$

$$f_2 = F_0\Big(\sum L\frac{\partial l}{\partial \varrho}\sum p'\frac{\partial L}{\partial v} - \sum p'\frac{\partial L}{\partial \varrho} - \sum Lp'' + \sum Lp'\sum\frac{\partial l}{\partial \varrho}\frac{\partial L}{\partial v}\Big)$$
$$- 3F_1\sum Lp'\Big(\sum L\frac{\partial l}{\partial \varrho}\Big)^2 + 2F_2\sum Lp'\sum L\frac{\partial l}{\partial \varrho} - F_3\sum Lp',$$

$$f_3 = F_0\Big(-\sum L\frac{\partial^2 l}{\partial \varrho^2} + \sum L\frac{\partial l}{\partial \varrho}\sum\frac{\partial l}{\partial \varrho}\frac{\partial L}{\partial v} - \sum\frac{\partial l}{\partial \varrho}\frac{\partial L}{\partial \varrho}\Big) - F_1\Big(\sum L\frac{\partial l}{\partial \varrho}\Big)^3$$
$$+ F_2\Big(\sum L\frac{\partial l}{\partial \varrho}\Big)^2 - F_3\sum L\frac{\partial l}{\partial \varrho} + F_4$$

ist. Da die Funktionen f die Variable u gar nicht enthalten, muß wegen (11) einzeln:

$$f_0 = f_1 = f_2 = f_3 = 0$$

sein. Betrachten wir zunächst $f_0 = 0$. Das bedeutet entweder $F_1 = 0$ oder $\Sigma Lp' = 0$.

A) $F_1 = 0$. Aus (7) folgt dann $\sum\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2 = 1$. Dann ist aber, da $\Sigma lL = 0$, also

$$\sum l\frac{\partial L}{\partial v} = -\sum L^2 = -1$$

ist:

$$\sum\Big(m\frac{\partial N}{\partial v} - n\frac{\partial M}{\partial v}\Big)^2 = \sum l^2\sum\Big(\frac{\partial L}{\partial v}\Big)^2 - \Big(\sum l\frac{\partial L}{\partial v}\Big)^2 = 0,$$

d. h.:

$$(12)\qquad l = -\frac{\partial L}{\partial v}, \quad \cdots, \quad \cdots.$$

Betrachten wir nun eine Kurve $u = \text{const.}$ eines Kegels ϱ, also eine Leitlinie. Für sie ist:

$$x = p + ul, \quad \cdots, \quad \cdots$$

ferner

$$x' = L, \quad x'' = \frac{1}{u}\frac{\partial L}{\partial v}, \quad x''' = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 L}{\partial v^2},$$

und wir erhalten für ihren Krümmungsradius k und ihre Torsion T:

$$(13)\qquad \frac{1}{k^2} = \frac{1}{u^2}\sum\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2 = \frac{1}{u^2}, \qquad T = \frac{\left| L\ \frac{\partial L}{\partial v}\ \frac{\partial^2 L}{\partial v^2} \right|}{u\sum\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2}.$$

k ist konstant, T ist wegen (12) Null; wir haben es also mit einer Schar gerader Kreiskegel zu tun. Den halben Öffnungswinkel σ eines dieser Kegel erhält man aus:

$$(14)\qquad \sin\sigma = \frac{k}{u}.$$

Also ist wegen (13) $\sigma = \frac{\pi}{2}$; *die Kegel arten in Ebenen aus*, wir kommen auf den oben schon erledigten Fall der Ebenenschar.

B) $\sum Lp' = 0$. Da dann auch $\sum p'\frac{\partial L}{\partial v} = 0$ und $\sum Lp'' + \sum p'\frac{\partial L}{\partial \varrho} = 0$ ist, so werden f_1 und f_2 identisch Null; es bleibt nur noch

$$f_3 = 0$$

zu betrachten übrig. Zunächst sei noch folgendes bemerkt: Aus

$$\sum Lp' = 0, \qquad \sum \frac{\partial L}{\partial v}p' = 0$$

folgt:

$$(15)\qquad p' = \frac{M\frac{\partial N}{\partial v} - N\frac{\partial M}{\partial v}}{\sqrt{\sum\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2}}, \ \cdots, \ \cdots.$$

Andrerseits folgt aus $\sum Ll = 0$, $\sum L\frac{\partial L}{\partial v} = 0$:

$$L = \frac{m\frac{\partial N}{\partial v} - n\frac{\partial M}{\partial v}}{\sqrt{\sum\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2 - 1}}, \ \cdots, \ \cdots$$

und hieraus nach Multiplikation mit LMN und Addition:

$$(16)\qquad \left| l\ L\ \frac{\partial L}{\partial v} \right| = -\sqrt{\sum\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2 - 1}.$$

Aus $\Sigma Lp' = 0$ folgt weiter $\Sigma lp' = \varphi(\varrho)$, also mit Rücksicht auf (15), (16):

$$-\sqrt{\sum\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2 - 1} = \varphi(\varrho)\sqrt{\sum\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2}$$

oder:

$$(17)\qquad \sum\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2 = \frac{1}{1-\varphi^2(\varrho)} = \psi^2(\varrho).$$

Aus (15) ergibt sich dann durch Differentiation nach v, wie leicht zu übersehen:

$$(18)\qquad L = \frac{\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}}{\sqrt{\sum\left(\frac{\partial^2 L}{\partial^2 v}\right)^2}}, \ \cdots, \ \cdots.$$

Durch Multiplikation dieser Werte mit LMN und Addition erhält man, da $\sum L \frac{\partial^2 L}{\partial v^2} = -\sum\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2$ ist:

$$\sqrt{\sum\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}\right)^2} = -\psi^2,$$

und wegen (18) sind also LMN durch die Differentialgleichungen bestimmt:

$$L\psi^2(\varrho) + \frac{\partial^2 L}{\partial v^2} = 0, \quad \cdot\cdot\cdot, \quad \cdot\cdot\cdot. \tag{19}$$

Die allgemeinsten Lösungen derselben sind:

$$l = -\frac{A_1}{\psi}\cos(\psi v) + \frac{B_1}{\psi}\sin(\psi v) + C_1, \quad \cdot\cdot\cdot, \quad \cdot\cdot\cdot. \tag{20}$$

Die ABC, die Funktionen von ϱ sind, genügen dabei wegen der zwischen l und seinen Ableitungen bestehenden Formeln den Beziehungen:

$$\Sigma A^2 = \Sigma B^2 = 1, \quad \Sigma AB = \Sigma AC = \Sigma BC = 0, \quad \Sigma C^2 = \frac{\psi^2 - 1}{\psi^2}. \tag{21}$$

Setzt man jetzt die Werte für lmn in die Gleichung $f_3 = 0$ ein, vereinfacht gehörig und führt zur Abkürzung noch die Funktionen $\varphi\chi\omega$ ein durch:

$$\Sigma A'B = \varphi(\varrho), \quad \Sigma A'C = \chi(\varrho), \quad \Sigma B'C = \omega(\varrho), \tag{22}$$

so erhält man eine Gleichung von der Form:

$$a_1\sin^3(\psi v) + a_2\cos^3(\psi v) + a_3\sin^2(\psi v)\cos(\psi v) + \cdots + a_9\cos(\psi v) + a_{10} = 0. \tag{23}$$

In den Koeffizienten a kommt der Winkel ψv nicht vor, es sind Funktionen von ϱ allein. (23) muß also identisch verschwinden: Dies liefert, wenn durch $\mathfrak{K}$ der Koeffizient des betr. Arguments bezeichnet wird, die Relationen:

$$\begin{cases} \mathfrak{K}(\sin^3) = \mathfrak{K}(\cos^2\sin) = -\mathfrak{K}(\sin), \\ \mathfrak{K}(\cos^3) = \mathfrak{K}(\sin^2\cos) = -\mathfrak{K}(\cos), \\ \mathfrak{K}(\sin^2) = \mathfrak{K}(\cos^2) \quad = -\mathfrak{K}(1), \\ \mathfrak{K}(\sin\cos) = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Führt man die Rechnung durch, so erhält man als Ergebnis nur die beiden Gleichungen:

$$\begin{cases} \omega\psi^4(\omega^2+\chi^2) - \varphi\chi\psi\psi' - 3\omega\psi'^2 + \psi(\omega\psi'' - \omega'\psi') = 0, \\ \chi\psi^4(\omega^2+\chi^2) - \varphi\omega\psi\psi' - 3\chi\psi'^2 + \psi(\chi\psi'' - \chi'\psi') = 0, \end{cases} \tag{25}$$

denen man auch die Form geben kann:

$$(26)\quad \begin{cases} \omega\chi' - \chi\omega' = \varphi(\chi^2+\omega^2), \\ \psi^4(\omega^2+\chi^2)^2 - 3\psi'^2(\omega^2+\chi^2) + \psi\psi''(\omega^2+\chi^2) - \psi\psi'(\omega\omega'+\chi\chi') = 0. \end{cases}$$

Wir gehen zur Deutung dieser Gleichungen über. Aus (13) ergibt sich für Krümmungsradius und Torsion einer Leitlinie $u = \text{const.}$ eines Kegels ϱ:

$$\frac{1}{k} = \frac{\psi(\varrho)}{u},$$

d. h. längs der Leitlinie ist k konstant,

$$T = \frac{\left| L \frac{\partial L}{\partial v} \frac{\partial^2 L}{\partial v^2} \right|}{u \sum \left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2} = 0 \text{ wegen (19).}$$

Die Kegelschar besteht demnach aus geraden Kreiskegeln. Bezeichnen wir weiter Krümmungsradius und Torsion der Kurve (3), die von den Kegelspitzen gebildet wird, mit k_s und T_s, so erhält man mit Berücksichtigung von (15) und (20) und nach Einführung der Funktionen $\varphi\chi\omega$ die Ausdrücke:

$$(27)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{k_s^2} = \dfrac{(\chi^2+\omega^2)\psi^2}{\psi^2-1}, \\ \dfrac{1}{T_s} = \dfrac{1}{\chi^2+\omega^2}[\omega\chi' - \chi\omega' - \varphi(\chi^2+\omega^2)]. \end{cases}$$

Aus der ersten Gleichung (26) ergibt sich sofort, daß die *Kurve der Kegelspitzen eben* ist.

Um die Kegelschar konstruieren zu können, müssen wir noch für jeden Punkt der Kegelspitzenkurve den Öffnungswinkel des zugehörigen Kegels kennen. Diesen liefert uns die zweite Gleichung (26). Der halbe Öffnungswinkel λ ist ja bestimmt durch:

$$(28)\quad \sin\lambda = \frac{k}{u} = \frac{1}{\psi}, \qquad \psi = \frac{1}{\sin\lambda}.$$

Aus der ersten Gleichung (27) folgt dann:

$$(29)\quad \chi^2 + \omega^2 = \frac{\cos^2\lambda}{k_s^2}.$$

Setzt man die Werte (29) und (28) in die zweite Gleichung (26) ein, so kommt:

$$(30)\quad 1 - k_s^2\lambda'^2 - kk_s'\lambda' \operatorname{tg}\lambda - k_s^2\lambda'' \operatorname{tg}\lambda = 0.$$

Aus dieser Gleichung findet man durch zwei Quadraturen:

$$\cos\lambda = C \sin\left(\int \frac{d\varrho}{k_s} + C'\right) \tag{31}$$

und *diese Formel liefert für jeden Punkt der Kegelspitzenkurve die Öffnung des zugehörigen Kegels.*

Wie liegen schließlich die Kegelachsen? Die Tangenten der Kegelspitzenkurve:

$$\frac{\xi - p}{p'} = \frac{\eta - q}{q'} = \frac{\zeta - r}{r'}$$

bilden im Punkte pqr mit den Erzeugenden des Kegels, deren Richtungscosinusse ja lmn sind, einen Winkel, dessen Cosinus gleich $\sum lp' = \frac{\sqrt{\psi^2 - 1}}{\psi}$ also $= \cos\lambda$, d. h. der gleich dem halben Öffnungswinkel ist. *Die Kegelachsen sind demnach die Tangenten der Kegelspitzenkurve.* Wir haben damit folgende Konstruktion der Kegelschar:

Satz. *Man gibt sich eine beliebige ebene Kurve, konstruiert in allen Punkten die Tangenten an diese Kurve und benutzt sie als Achsen, die Berührungspunkte als Spitzen der zu konstruierenden Kegel. Als halben Öffnungswinkel nimmt man den Winkel* λ, *der sich aus der Formel* (31) *ergibt, worin* CC' *willkürliche Konstanten sind und* k_s *den Krümmungsradius der gewählten Kurve in dem betreffenden Punkte bedeutet.*

Wählt man, um eine einfache Konstruktion zu erzielen, $C = 1$, $C' = 0$, so daß

$$\cos\lambda = \sin\int \frac{d\varrho}{k_s}$$

wird, so bemerkt man, daß das Integral den Winkel darstellt, den eine Tangente der Kegelspitzenkurve mit einer festen Tangente bildet. Dies führt zu dem

Satz. *Man gibt sich eine beliebige ebene Kurve und auf ihr eine feste Tangente. Von jedem Punkte der Kurve aus fällt man das Lot auf die feste Tangente. Durch Rotation dieser Lote um die Tangenten in den zugehörigen Kurvenpunkten erhält man die Kegel der Schar.*

III) Scharen von Zylinderflächen und von beliebigen Abwickelbaren.

Für diese Flächenscharen seien hier nur die Resultate angegeben. Geht man von ähnlichen Parameterdarstellungen aus wie in dem eben behandelten Beispiel, so erhält man in beiden Fällen ähnliche, nur noch weit kompliziertere Rechnungen als im Beispiel der Kegelscharen. Die Diskussion der dadurch erhaltenen Gleichungen führt zu einfachen Ergebnissen, die in keinem Verhältnisse zur Langwierigkeit der Rechnungen stehen, so daß die Hoffnung besteht, es werde gelingen, diese Resultate auch auf einfachem Wege abzuleiten. — Man gelangt zu folgenden Sätzen:

Eine Schar von Zylinderflächen hat nur dann ebene orthogonale Trajektorien, wenn die erzeugenden Geraden der Zylinder sämtlich einander parallel sind.

Um zur allgemeinsten Schar abwickelbarer Flächen zu gelangen, deren orthogonale Trajektorien ebene Kurven sind, geht man von einer Fläche aus, deren Krümmungslinien der einen Schar eben sind. Die Abwickelbaren längs der Krümmungslinien der zweiten Schar bilden dann die verlangte Flächenschar.

Einladung zum 4. Internationalen Mathematiker-Kongreß in Rom 1908.

Der Organisationsausschuß des Kongresses hat folgende Einladung erlassen und um ihre Verbreitung durch die mathematischen Zeitschriften gebeten:

Hochgeehrter Herr!

Der Organisationsausschuß hat die Ehre, Sie zur Teilnahme an dem vierten internationalen Mathematiker-Kongresse einzuladen, der

vom 6. bis zum 11. April 1908 in Rom

stattfinden soll. Wie Ihnen bekannt, fanden die früheren Kongresse in Zürich (1897), in Paris (1900) und in Heidelberg (1904) statt; bei dieser letzten Versammlung wurde Rom zum Sitze des nächsten Kongresses gewählt.

Unser Ausschuß hat den Kongreß unter die Leitung einer zahlreichen internationalen Vertretung der «R. Accademia dei Lincei» und des «Circolo Matematico di Palermo» gestellt*), und wird sein möglichstes tun, damit der Kongreß der hervorragenden Gelehrten, die an ihm teilnehmen, würdig ausfalle und der Wissenschaft gute Dienste leiste.

Im Hinblick auf die Zwecke, für welche diese internationalen Kongresse ins Leben gerufen wurden, glaubt der Ausschuß, daß, bei dem gegenwärtigen Stande der mathematischen Wissenschaften nach einem Jahrhundert unermüdlicher Forschung, es nützlich und willkommen sein wird, einen Überblick über die hauptsächlichsten bis jetzt erreichten Resultate zu geben und zugleich die wichtigsten Fragen zu beleuchten, die heute im Vordergrunde stehen.

Wir haben uns daher bemüht, eine Reihe von Vorträgen anzuregen, die einen Überblick über den gegenwärtigen Stand der mathematischen Wissenschaften und deren Anwendungen zu geben bestimmt sind. Zu unserer Freude können wir Ihnen mitteilen, daß, unseren Absichten freundlich

*) Zur Teilnahme am internationalen Ausschuß sind, vom Präsidenten der «R. Accademia dei Lincei», alle italienischen und auswärtigen Mitglieder der mathematischen und mechanischen Sektion der genannten Akademie eingeladen worden, außerdem der Präsident und die Mitglieder des «Consiglio Direttivo» des «Circolo Matematico di Palermo».

entgegenkommend, die Herren G. Darboux, A. R. Forsyth, D. Hilbert, F. Klein, H. A. Lorentz, G. Mittag-Leffler, S. Newcomb, E. Picard, H. Poincaré geneigt sind in den allgemeinen Sitzungen Vorträge zu halten, deren Themata später angezeigt werden sollen.

Der Organisationsausschuß:
P. Blaserna, *Präsident.*
G. Castelnuovo, *Generalsekretär.*
V. Reina, *Kassierer.*
V. Cerruti.
A. Di Legge.
G. Pittarelli.
A. Sella.
A. Tonelli.
V. Volterra.

Für alle auf den Kongreß bezüglichen Auskünfte wende man sich an
Prof. G. Castelnuovo,
5 Piazza S. Pietro in Vincoli, Rom (Italien).

Ahrens, Dr. W., in Magdeburg, C. G. J. Jacobi als Politiker. Ein Beitrag zu seiner Biographie. (Erweiterter Sonderabdruck aus „Bibliotheca Mathematica". 3. Folge. VII. Band.) [45 S.] gr. 8. 1907. geh. n. *M.* 1.20.

Blaschke, Dr. E., Professor an der Technischen Hochschule zu Wien, Vorlesungen über mathematische Statistik. Die Lehre von den statistischen Maßzahlen. Mit 17 Textfiguren und 5 Tafeln. [VIII u. 268 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. *M.* 7.40.

Bopp, Dr. Karl, Privatdozent an der Universität Heidelberg, die Kegelschnitte des Gregorius a St. Vincentio in vergleichender Bearbeitung. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. XX. Heft. 2. Stück. Mit 39 Textfiguren. [III u. 228 S.] gr. 8. 1907. geh. n. *M.* 10.—

Bruns, Dr. Heinrich, Professor der Astronomie an der Universität Leipzig, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre. [VIII u. 310 S. u. Anhang 18 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. *M.* 8.40.

Cantor, Moritz, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. In 4 Bänden. I. Band. Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr. 3. Auflage. Mit 114 Figuren im Text und 1 lithogr. Tafel. [VI u. 941 S.] gr. 8. 1907. geh. n. *M.* 24.—, in Halbfranz geb. n. *M.* 26.—

——— ——— IV. Band. Von 1759 bis 1799. 1. Lieferung. [S. 1—198.] gr. 8. 1907. *M.* 5.60.

Inhalt: Abschnitt XIX. Geschichte der Mathematik. Von S. Günther.
Abschnitt XX. Arithmetik. Gleichungslehre. Zahlentheorie. Von F. Cajori.

Czuber, Dr. Emanuel, Professor an der Technischen Hochschule zu Wien, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. 2 Bände. 2., sorgfältig durchgesehene Auflage. gr. 8.

I. Band. Mit 115 Figuren im Text. [XIV u. 560 S.] 1906. In Leinw. geb. n. *M.* 12.—
II. — Mit 87 Figuren im Text. [VIII u. 532 S.] 1906. In Leinw. geb. n. *M.* 12.—

Durège, Dr. H., weil. Professor an der Universität Prag, Elemente der Theorie der Funktionen einer komplexen veränderlichen Größe. In 5. Auflage neu bearbeitet von Dr. L. Maurer, Professor an der Universität Tübingen. Mit 41 Figuren im Text. [X u. 397 S.] gr. 8. 1906. geh. n. *M.* 9.—, in Leinw. geb. n. *M.* 10.—

Felgentraeger, Dr. W., technischer Hilfsarbeiter bei der Kaiserl. Normal-Eichungs-Kommission, Theorie, Konstruktion und Gebrauch der feineren Hebelwage. Mit 125 Figuren im Text. [VI u. 310 S.] gr. 8. 1907. In Leinw. geb. n. *M.* 8.—

Fischer, Dr. Otto, Professor an der Universität Leipzig, theoretische Grundlagen für eine Mechanik der lebenden Körper mit speziellen Anwendungen auf den Menschen, sowie auf einige Bewegungsvorgänge an Maschinen. In möglichst elementarer und anschaulicher Weise dargestellt. Mit 67 in den Text gedruckten Figuren und 4 Tafeln. [X u. 372 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. *M.* 14.—

Fleming, J. A., Professor der Elektrotechnik am University College zu London, elektrische Wellen-Telegraphie. 4 Vorlesungen. Autorisierte deutsche Ausgabe von Professor Dr. E. Aschkinaß, Privatdozent an der Universität Berlin. Mit 53 Abbildungen. [IV u. 185 S.] gr. 8. 1906. geh. n. *M.* 4.20, in Leinw. geb. n. *M.* 5.—

Gans, Dr. Richard, Privatdozent an der Universität Tübingen, Einführung in die Vektoranalysis. Mit Anwendungen auf die mathematische Physik. Mit 31 Figuren im Text. [X u. 98 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. *M.* 2.80.

Gauss', C. F., Werke. Weiterführung der von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen veranstalteten Gesamtausgabe von Gauss' Werken.

VII. Band: Theoria motus und Theoretisch-Astronomischer Nachlaß. (Parabolische Bewegung, Störungen der Ceres und der Pallas, Theorie des Mondes.) [680 S.] 4. 1906. kart. n. *M.* 30.—

Hering, K., Ingenieur in Darmstadt, das 200jährige Jubiläum der Dampfmaschine 1706—1906. Eine historisch-technisch-wirtschaftliche Betrachtung. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. XXIII. Heft. Mit 13 Figuren im Text. gr. 8. 1907. geh.

Jacobi, C. G. J., und M. H. Jacobi, Briefwechsel. Herausgegeben von Dr. W. Ahrens in Magdeburg. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. XXII. Heft. Mit 2 Bildnissen. [XX u. 282 S.] gr. 8. 1907. geh n. *M.* 6.90, in Leinw. geb. n. *M.* 7.50.

Lorentz, Dr. H. A., Professor an der Universität Leiden, Abhandlungen über theoretische Physik. In 2 Bänden. I. Band, 1. Lieferung. Mit 8 Figuren im Text. [298 S.] gr. 8. 1906. geh. n. *M.* 10.—

[Die 2. (Schluß-)Lieferung des I. Bandes erscheint im Frühjahr 1907.]

——— Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern. Unveränderter Abdruck der 1895 bei J. Brill in Leiden erschienenen 1. Auflage. [III u. 138 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. *M.* 3.20.

Love, A. E. H., M. A., D. Sc., F. R. S., Professor an der Universität Oxford, Lehrbuch der Elastizität. Autorisierte deutsche Ausgabe unter Mitwirkung des Verfassers besorgt von Dr. A. Timpe, Assistent an der Technischen Hochschule zu Danzig. Mit 75 Abbildungen im Text. [XVI u. 664 S.] gr. 8. 1907. In Leinw. geb. n. *M.* 16.—

Meyerhoffer, Dr. W., weil. Professor an der Universität Berlin, Gleichgewichte der Stereomeren. Mit einem Begleitwort von Professor Dr. J. H. van t'Hoff in Berlin. Mit 28 Figuren im Text. [IV u. 71 S.] gr. 8. 1906. geh. n. *M.* 2.40.

Neumann, Franz, gesammelte Werke. In 3 Bänden. II. Band. Bei der Herausgabe dieses Bandes sind tätig gewesen die Herren: E. Dorn (Halle), O. E. Meyer (Breslau), C. Neumann (Leipzig), C. Pape (früher in Königsberg), L. Saalschütz (Königsberg), K. Von der Mühll (Basel), A. Wangerin (Halle), H. Weber (Straßburg). Mit einem Bildnis Franz Neumanns aus dem 86. Lebensjahre in Heliogravüre. [XVI u. 620 S.] gr. 4. 1906. geh. n. *M.* 36.—

Nielsen, Dr. Niels, Dozent der reinen Mathematik an der Universität Kopenhagen, Handbuch der Theorie der Gammafunktion. [X u. 326 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. *M.* 12.—

——— Theorie des Integrallogarithmus und verwandter Transzendenten. [VI u. 106 S.] gr. 8. 1906. geh. n. *M.* 3.60.

Osgood, Dr. W. F., Professor an der Harvard-Universität, Cambridge, Mass., V. St. A., Lehrbuch der Funktionentheorie. In 2 Bänden. I. Band. Mit 150 Figuren im Text. [XII u. 642 S.] gr. 8. 1907. In Leinw. geb. n. *M.* 15.60.

Pockels, Dr. F., Professor an der Universität Heidelberg, Lehrbuch der Kristalloptik. Mit 168 Figuren im Text und 6 Doppeltafeln. [X u. 519 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. *M.* 16.—

Poincaré, Henri, Membre de l'Institut, Wissenschaft und Hypothese. Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. und L. Lindemann. 2., verbesserte Auflage. [XVI u. 346 S.] 8. 1906. In Leinw. geb. n. *M.* 4.80.

——— der Wert der Wissenschaft. Mit Genehmigung des Verfassers ins Deutsche übertragen von E. Weber. Mit Anmerkungen und Zusätzen von H. Weber, Professor in Straßburg i. E., und einem Bildnis des Verfassers. [V u. 252 S.] 8. 1906. In Leinw. geb. n. *M.* 3.60.

Stolz, Dr. Otto, weil. Professor an der Universität Innsbruck, und **Dr. J. Anton Gmeiner**, Professor an der Universität Innsbruck, Einleitung in die Funktionentheorie. Zweite, umgearbeitete und vermehrte Auflage der von den Verfassern in der „Theoretischen Arithmetik“ nicht berücksichtigten Abschnitte der „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik“ von O. Stolz. Mit 21 Figuren im Text. [X u. 598 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. *M.* 15.—

Thomson, J. J., D. Sc. Lld. Ph. D. Er. S. Fellow etc., Elektrizitäts-Durchgang in Gasen. Deutsche autor. Ausgabe unter Mitwirkung des Autors besorgt und ergänzt von Dr. E. Marx, Privatdozent an der Universität Leipzig. Mit 187 Figuren im Text. [VII u. 587 S.] gr. 8. 1906. geh. n. *M.* 18.—, in Leinw. geb. n. *M.* 19.—

Wilczynski, E. J., A. M., Ph. D., Research Associate of the Carnegie Institution of Washington, Assistant Professor of Mathematics at the University of California, projektive differential geometry of curves and ruled surfaces. [VIII u. 298 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. *M.* 10.—

INHALT.

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exakten Ausführung stets **auf besonderen Blättern**, wenn möglich **in der gewünschten Größe** und in tunlichst **präziser Zeichnung** dem Manuskripte beilegen zu wollen. Außerdem wird um möglichst genaue Angabe der Adresse gebeten.

Die Redaktion.

☞ **Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heften und umfaßt ca. 36 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.**

Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 20 Mark; jährlich erscheinen etwa 4—6 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Verantwortl. Redaktion: **F. Klein,** Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 3, **W. v. Dyck,** München, Hildegardstr. $1^1/_2$, **David Hilbert,** Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 29, **Otto Blumenthal,** Aachen, Rütscherstraße 37.

Zusendungen sind zu richten an die Mitglieder der auf der Titelseite genannten Gesamtredaktion.