Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen.

I. Teil: Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener.*)

Von

Erhard Schmidt in Bonn.

Einleitung.

Fredholm**) hat eine Auflösungsformel der inhomogenen linearen Integralgleichung

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt$$

entdeckt, welche das Resultat enthielt, daß diese Gleichung nach $\varphi(s)$ stets aufgelöst werden kann, wenn λ nicht eine der Nullstellen einer gewissen ganzen Transzendenten $\delta(\lambda)$ ist. Für diese Werte von λ, in Hilbertscher Bezeichnung die sogenannten „*Eigenwerte des Kernes* $K(s, t)$“, und *nur* für diese läßt, wie Fredholm ferner zeigte, die homogene Gleichung

$$0 = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt$$

Lösungen zu, die nach Hilbert „*zum betreffenden Eigenwert des Kernes* $K(s, t)$ *gehörige Eigenfunktionen*“ genannt werden. Hilbert***) hat die in der Theorie der partiellen und gewöhnlichen Differentialgleichungen so wichtigen Fragen nach der Existenz sogenannter Normalfunktionen und der Entwickelbarkeit willkürlicher Funktionen nach ihnen durch Einführung der Greenschen Funktion auf das viel allgemeinere Problem zurückgeführt, die Existenz von Eigenfunktionen eines in s und t *sym-*

*) Dieser Teil ist bis auf das neu hinzugekommene IVte Kapitel, den § 13 und unwesentliche Änderungen in den übrigen Kapiteln ein Abdruck meiner im Juli 1905 erschienenen Göttinger Inauguraldissertation.

**) Acta Mathematica Bd. 27.

***) Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathem.-Phys. Cl. 1904 Heft 3.

metrischen Kernes $K(s, t)$ zu beweisen und die Gesetze der Entwickelbarkeit willkürlicher Funktionen nach ihnen aufzustellen. Die Greensche Funktion selbst wird durch eine Integralgleichung mit unsymmetrischem Kerne bestimmt, wobei die Fredholmschen Formeln zur Anwendung kommen. Indem nun Hilbert*) das für die willkürlichen stetigen Funktionen $x(s)$ und $y(t)$ gebildete Doppelintegral

$$\int_a^b\int_a^b K(s, t)\, x(s)\, y(t)\, ds\, dt$$

als quadratische Form von unendlich viel Variabelen betrachtet, erhält er durch Grenzübergang den der kanonischen Orthogonalzerlegung quadratischer Formen entsprechenden Zerlegungssatz

$$\int_a^b\int_a^b K(s, t)\, x(s)\, y(t)\, ds\, dt = \sum_\nu \frac{1}{\lambda_\nu} \int_a^b x(s)\, \varphi_\nu(s)\, ds \cdot \int_a^b y(t)\, \varphi_\nu(t)\, dt.$$

Hierbei durchläuft $\varphi_\nu(s)$ alle Eigenfunktionen des Kernes — jede mit einem solchen Faktor versehen, daß das Integral über ihr Quadrat 1 gibt — und λ_ν die zugehörigen Eigenwerte. Aus diesem Satze folgt zunächst unmittelbar, daß jeder symmetrische Kern Eigenfunktionen hat. Unter der Voraussetzung, daß der Kern ein „*allgemeiner*“ ist, d. h. daß es zu jeder stetigen Funktion $\alpha(s)$ und jeder beliebig kleinen positiven Größe ε eine stetige Funktion $\beta(s)$ gibt, so daß

$$\int_a^b \left\{\alpha(s) - \int_a^b K(s, t)\, \beta(t)\, dt\right\}^2 ds < \varepsilon$$

ist, leitet dann Hilbert den grundlegenden Entwicklungssatz ab, daß jede unter Vermittelung einer stetigen Funktion $h(s)$ durch das Integral

$$g(s) = \int_a^b K(s, t)\, h(t)\, dt$$

darstellbare Funktion $g(s)$ in eine absolut und gleichmäßig konvergente, nach Eigenfunktionen des Kernes $K(s, t)$ fortschreitende Reihe entwickelbar ist. Diese Sätze enthalten implicite auch die analogen für die Integralgleichung

$$0 = \psi(s) - \lambda \int_a^b G(s, t)\, p(t)\, \psi(t)\, dt$$

— wo $G(s, t)$ symmetrisch und $p(t) > 0$ ist —, welche durch die Substitution

$$\sqrt{p(s)} \cdot \psi(s) = \varphi(s), \quad \sqrt{p(s)} \cdot G(s, t) \cdot \sqrt{p(t)} = K(s, t)$$

*) Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathem.-Phys. Cl. 1904 Heft 1.

auf die obige Gleichung

$$0 = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

zurückgeführt wird. Eine Reihe verwandter und z. T. äquivalenter Theoreme hat Stekloff*) mit Hilfe der von ihm weit ausgebildeten Schwarz-Poincaréschen Methoden erhalten.

Nach Erledigung einiger Hilfssätze im ersten Kapitel der vorliegenden Arbeit finden im zweiten die Hilbertschen Sätze, unter Vermeidung des Grenzübergangs aus dem Algebraischen, sehr einfache Beweise. Zunächst wird die Existenz von Eigenwerten durch ein Verfahren bewiesen, das, einem berühmten Beweise von H. A. Schwarz nachgebildet**), in der Sprache der Fredholmschen Formeln darauf hinauskommen würde, daß die Gleichung

$$\delta(\lambda) = 0$$

nach der Bernoullischen Methode aufgelöst wird. Aus dem Existenzsatz ergeben sich die Entwicklungssätze in analoger Weise, wie aus dem Fundamentalsatz der Algebra die Entwicklung einer ganzen Funktion in ein Produkt von Linearfaktoren. Hierbei stellt sich die Gültigkeit des Hilbertschen Entwicklungssatzes als unbeschränkt heraus, postuliert also insbesondere nicht die von Hilbert gemachte Voraussetzung der „Allgemeinheit" des Kernes. Das erwähnte, der kanonischen Orthogonalzerlegung quadratischer Formen entsprechende Hilbertsche Zerlegungstheorem kann dann aus dem Entwicklungssatz durch Integration unmittelbar gewonnen werden. Die durch mehrfache Nullstellen der Funktion $\delta(\lambda)$ verursachten Komplikationen treten bei der hier gegebenen Beweisanordnung nicht auf. Die Fredholmschen Formeln werden nicht benutzt, vielmehr liefert die unbeschränkte Gültigkeit der Entwicklungssätze für den Fall des symmetrischen Kernes eine neue Gestaltung der Auflösung der inhomogenen linearen Integralgleichung.***) Jede *unsymmetrische* lineare Integralgleichung läßt sich aber, wie in § 13 gezeigt wird, durch eine einfache Substitution auf eine *symmetrische* zurückführen.

Indem im dritten Kapitel die Voraussetzung der Symmetrie des Kernes fallen gelassen wird, werden die Funktionen $\varphi_\nu(s)$ und $\psi_\nu(s)$ dann als

*) Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg 1904 p. 7 etc. Annales de la Fac. de Toulouse 2ᵉ S., VI 1905.

**) H. A. Schwarz, Gesammelte Abhandlungen Bd. 1, S. 241—262.

***) Vergl. noch die während des Druckes vorliegender Arbeit von Hilbert veröffentlichte umfassende Neubegründung der Theorie der Integralgleichungen auf Grund der von ihm geschaffenen Theorie der quadratischen Formen von unendlich viel Variabelen. Göttinger Nachrichten 1906, Vierte und Fünfte Mitteilung.

ein zum Eigenwerte λ_ν gehöriges Paar von adjungierten Eigenfunktionen des Kernes $K(s,t)$ definiert, wenn die Gleichungen

$$\varphi_\nu(s) = \lambda_\nu \int_a^b K(s,t)\,\psi_\nu(t)\,dt$$

$$\psi_\nu(s) = \lambda_\nu \int_a^b K(t,s)\,\varphi_\nu(t)\,dt$$

bestehen; $\varphi_\nu(s)$ möge eine Eigenfunktion der ersten, $\psi_\nu(s)$ eine der zweiten Art heißen. Es ergeben sich dann die Entwicklungssätze in folgender Gestalt: Ist die stetige Funktion $g(s)$ unter Vermittelung der stetigen Funktion $h(s)$ durch das Integral

$$g(s) = \int_a^b K(s,t)\,h(t)\,dt$$

darstellbar, so ist $g(s)$ in eine absolut und gleichmäßig konvergente nach Eigenfunktionen erster Art fortschreitende Reihe entwickelbar; ist

$$g(s) = \int_a^b K(t,s)\,h(t)\,dt,$$

so läßt sich $g(s)$ in gleicher Weise nach Eigenfunktionen zweiter Art entwickeln. Aus diesen Sätzen wird durch Integration der der kanonischen Orthogonalzerlegung bilinearer Formen entsprechende Zerlegungssatz gewonnen

$$\int_a^b\!\!\int_a^b K(s,t)\,x(s)\,y(t)\,ds\,dt = \sum_\nu \frac{1}{\lambda_\nu} \int_a^b x(s)\,\varphi_\nu(s)\,ds \int_a^b y(t)\,\psi_\nu(t)\,dt.$$

Die Sätze des dritten Kapitels sind meines Wissens bisher nicht bekannt.

Die Entwicklungen von Funktionen zweier Variabelen nach Potenzen, nach trigonometrischen, nach Kugel- und vielen anderen Funktionen lassen sich in Gestalt einer Reihe schreiben, welche nach Produkten einer Funktion der einen Variabelen mit einer Funktion der anderen fortschreitet.

Im Anschluß an diese Bemerkung entspringt für die Variationsrechnung folgende Frage, welche den Gegenstand des vierten Kapitels bildet: Gegeben sei eine stetige Funktion $K(s,t)$ von zwei Variabelen s und t. Gesucht wird ein System von höchstens m Paaren einer stetigen Funktion von s und einer stetigen Funktion von t, so daß die Summe ihrer Produkte die gegebene Funktion $K(s,t)$ möglichst gut approximiert. Das Maß der Approximation, dessen Minimum die Problemstellung fordert, soll wie gewöhnlich durch das Doppelintegral über das Fehlerquadrat definiert werden. Es wird bewiesen, daß die Lösung des Problems durch die m ersten Paare adjungierter Eigenfunktionen des unsymmetrischen

Kernes $K(s, t)$ gebildet wird. Für das Maß der besten Approximation M_m ergibt sich die Formel

$$M_m = \int_a^b\int_a^b (K(s, t))^2 ds\, dt - \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \frac{1}{\lambda_\nu^2},$$

wo λ_ν die m ersten Eigenwerte des Kernes $K(s, t)$ durchläuft, und es zeigt sich, daß das Maß der besten Approximation mit wachsendem m verschwindet.

Alle Sätze und Beweise der vier ersten Kapitel behalten ihre Gültigkeit, wenn s und t Punkte eines n-dimensionalen ganz im Endlichen liegenden, aus einer endlichen Anzahl analytischer Stücke bestehenden Gebildes in einem $(n+m)$-dimensionalen Raum bedeuten, und ds und dt die entsprechenden Elemente.

Das fünfte Kapitel setzt das zweite, dritte und vierte nicht voraus, sondern nur die im ersten bewiesenen Hilfssätze. Die Theorie der Entwicklung von Funktionen nach Potenzen und Polynomen, nach Fourierschen Reihen und unendlichen Reihen endlicher trigonometrischer Reihen, nach Kugelfunktionen und nach Normalfunktionen partieller und gewöhnlicher Differentialgleichungen legt die Frage nahe: Gegeben sei eine unendliche Reihe im Intervall $a \leqq x \leqq b$ definierter reeller stetiger Funktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_\nu(x), \cdots$. Was sind die Bedingungen dafür, daß jede im Intervall $a \leqq x \leqq b$ definierte stetige Funktion sich in eine gleichmäßig konvergente, nach den Funktionen $\varphi_\nu(x)$ oder endlichen linearen Aggregaten derselben fortschreitende Reihe entwickeln läßt? Oder mit andern Worten: Was sind die Bedingungen dafür, daß jede im Intervall $a \leqq x \leqq b$ definierte stetige Funktion durch Funktionen des Funktionenkörpers, welcher aus der Reihe der $\varphi_\nu(x)$ durch die Operationen der Multiplikation mit Konstanten und der Addition entsteht, gleichmäßig approximiert werden kann? Und wenn das der Fall ist, wie bestimmen sich die Koeffizienten einer solchen Entwicklung?

Nennt man nun das gegebene Funktionensystem der $\varphi_\nu(x)$ dann ein *abgeschlossenes*, wenn es keine von Null verschiedene stetige Funktion $f(x)$ gibt, so daß für jedes ν

$$\int_a^b f(x)\, \varphi_\nu(x)\, dx = 0$$

ist, so erhellt vorweg, daß die *Abgeschlossenheit* des Systems der $\varphi_\nu(x)$ eine notwendige Bedingung für unsere Forderung darstellt.*) Anderenfalls müssten nämlich alle entwickelbaren Funktionen der Bedingung genügen,

*) Diese Bemerkung ist schon von J. P. Gram, Crelles Journal Bd. 94, S. 58 gemacht worden.

daß ihr Produkt, mit $f(x)$ von a bis b integriert, Null ergibt, und diese Bedingung würde z. B. von der Funktion $f(x)$ selber und allen genügend wenig von ihr abweichenden nicht erfüllt werden.

Es wird nun gezeigt, *daß ebenso wie die Abgeschlossenheit des vorgeschriebenen Funktionensystems eine notwendige Bedingung für unsere Forderung darstellt, die Abgeschlossenheit des Systems seiner zweiten Ableitungen eine hinreichende ist,* wenn noch nötigenfalls die Funktionen 1 und x adjungiert werden. *Ist die darzustellende Funktion einmal stetig differenzierbar, so ergeben sich für die Koeffizienten der Darstellung ganz allgemein gültige einfache Formeln.*

In einer an die hier vorliegende sich unmittelbar anschließenden Abhandlung wird zunächst eine neue und sehr einfache Methode zur Auflösung der linearen unsymmetrischen Integralgleichung auseinandergesetzt werden. Die dieser Methode zugrunde liegenden Prinzipien ermöglichen auch eine Behandlung der nicht linearen Integralgleichungen, welche den Gegenstand des zweiten Teiles dieser Abhandlung bilden wird. Unter einer nicht linearen Integralgleichung verstehe ich eine Funktionalgleichung, welche eine solche Bestimmung der gesuchten Funktionen fordert, daß eine gegebene Funktion einer konvergenten unendlichen Reihe gleich wird, deren Glieder aus den gesuchten Funktionen und weiteren gegebenen Funktionen durch die Operationen der Integration und Multiplikation und also auch Potenzierung zu positiven ganzzahligen Exponenten entstehen. So ist z. B.

$$f(s) - \int\int K(s, t, r)\,(\varphi(t))^m\,(\varphi(r))^n\,dt\,dr = 0,$$

wo $\varphi(s)$ gesucht und $f(s)$ und $K(s, t, r)$ gegeben sind, eine solche nicht lineare Integralgleichung. Ebenso nun wie die gewöhnliche nicht lineare Gleichung

$$y = f(x)$$

in der Umgebung einer Lösung eine und nur eine Lösung zuläßt, wenn $f'(x)$ nicht verschwindet, im anderen Falle aber Verzweigungen eintreten, so hängt auch der Lösbarkeitscharakter einer nicht linearen Integralgleichung in der Umgebung einer Lösung von einer abgeleiteten linearen Integralgleichung ab. Verschwindet für diese der Fredholmsche Nenner $\delta(\lambda)$ nicht, so hat die nicht lineare Integralgleichung in der Umgebung eine und nur eine Lösung, verschwindet aber $\delta(\lambda)$, so treten *funktionale* Verzweigungen ein, für welche es gelingt die den Puiseuxschen entsprechenden Sätze aufzustellen.

Diese Theoreme ermöglichen es z. B. bei den nicht linearen elliptischen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung die Abhängigkeit der Lösungsflächen von den Randwerten zu verfolgen und zwar mit vollständiger

Beherrschung der Verzweigungen d. h. derjenigen Lösungen, in deren Umgebung es für willkürlich aber wenig veränderte Randwerte nicht mehr eine sondern mehrere Lösungsflächen gibt. Der Verzweigungscharakter hängt davon ab, ob die Jacobische derivierte lineare Differentialgleichung bei den Randwerten Null von Null verschiedene Lösungen hat oder nicht, was durch die Betrachtung einer linearen Integralgleichung zu entscheiden ist.

Auch die von Poincaré entdeckte Bifurkation in der Theorie der rotierenden Gleichgewichtsfiguren ist eine solche Verzweigung einer nicht linearen Integralgleichung. In einer dritten Abhandlung werde ich diese und noch mehrere andere Anwendungen ausführlich auseinandersetzen.

Erstes Kapitel.

Vorbereitende Sätze über orthogonale Funktionen.

§ 1.

Die Besselsche und die Schwarzsche Ungleichung.

Es seien $\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots, \psi_n(x)$ n stetige im Intervall $a \leqq x \leqq b$ definierte reelle Funktionen, welche sämtlich zueinander *orthogonal* sein, d. h. für jedes Paar voneinander verschiedener Indizes μ und ν der Gleichung

$$\int_a^b \psi_\mu(x)\,\psi_\nu(x)\,dx = 0$$

genügen mögen, und welche außerdem noch sämtlich *normiert* sein, d. h. für jedes ν der Gleichung

$$\int_a^b (\psi_\nu(x))^2 dx = 1$$

genügen mögen. Dann gilt für die beliebige reelle stetige Funktion $f(x)$ die *Besselsche Identität*

$$\int_a^b \Big(f(x) - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \psi_\nu(x) \int_a^b f(y)\,\psi_\nu(y)\,dy\Big)^2 dx = \int_a^b (f(x))^2\,dx - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \Big(\int_a^b f(y)\,\psi_\nu(y)\,dy\Big)^2$$

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \Big(\int_a^b f(y)\,\psi_\nu(y)\,dy\Big)^2 \leqq \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Ist die gegebene Reihe der zueinander orthogonalen und normierten Funktionen unendlich, so ergibt diese letzte Ungleichung wegen des positiven Vorzeichens aller Summanden die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \Big(\int_a^b f(y)\,\psi_\nu(y)\,dy\Big)^2.$$

Es seien nun $f(x)$ und $\varphi(x)$ zwei reelle stetige Funktionen. Setzt man $\psi_1(x) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{\int\limits_a^b (\varphi(y))^2 dy}}$, so ist $\psi_1(x)$ normiert, und die obige Besselsche Ungleichung für den Fall $n = 1$ ergibt

$$\left(\int\limits_a^b f(x)\,\psi_1(x)\,dx\right)^2 \leqq \int\limits_a^b (f(x))^2\,dx$$

$$\left(\int\limits_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx\right)^2 \leqq \int\limits_a^b (f(x))^2\,dx \cdot \int\limits_a^b (\varphi(x))^2\,dx.$$

Das ist die bekannte *Ungleichung von Schwarz.* Die Besselsche Identität und alle in diesem Paragraphen aus ihr gezogenen Folgerungen bleiben gültig, wenn $f(x)$ eine reelle integrabele Funktion ist, deren Quadrat von a bis b integriert auch einen endlichen Wert gibt, woraus wegen

$$f(x) \cdot \psi_\nu(x) \leqq (f(x))^2 + (\psi_\nu(x))^2$$

auch die Endlichkeit und Bestimmtheit von

$$\int\limits_a^b f(x)\,\psi_\nu(x)\,dx$$

folgt.

§ 2.

Ein Konvergenzsatz.

Es sei $Q(z, x)$ innerhalb des Gebietes $a \leqq x \leqq b$, $a \leqq z \leqq b$ als reelle nach x integrabele Funktion von z und x definiert, und es gelte für $a \leqq z \leqq b$ die Ungleichung

$$\int\limits_a^b (Q(z, x))^2\,dx \leqq A,$$

wo A eine Konstante bedeutet; es sei ferner $\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots, \psi_\nu(x), \cdots$ eine unendliche Reihe reeller stetiger Funktionen, welche in der Bezeichnungsweise der vorigen Paragraphen normiert und zueinander orthogonal sein mögen. Dann konvergiert, wenn $f(x)$ eine beliebige reelle integrabele Funktion bedeutet, deren Quadrat von a bis b integriert auch einen endlichen Wert ergibt, die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \int\limits_a^b f(y)\,\psi_\nu(y)\,dy \cdot \int\limits_a^b Q(z, x)\,\psi_\nu(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} U_\nu(z)$$

für $a \leqq z \leqq b$ absolut und gleichmäßig; und zwar ist

$$\sum_{\nu=n}^{\nu=\infty} |U_\nu(z)| \leqq 2\sqrt{A}\sqrt{\sum_{\nu=n}^{\nu=\infty}\left(\int_a^b f(y)\,\psi_\nu(y)\,dy\right)^2},$$

wo der Ausdruck auf der rechten Seite, wegen der im vorigen Paragraphen bewiesenen Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left(\int_a^b f(y)\,\psi_\nu(y)\,dy\right)^2$ mit wachsendem n verschwindet.

Beweis. Es ist

$$\sum_{\nu=n}^{\nu=n+m} |U_\nu(z)| = \sum_k U_k(z) - \sum_\varrho U_\varrho(z),$$

wo k diejenigen der Indizes $n, n+1, \cdots, n+m$ durchläuft, welche für den betrachteten Wert von z positiven Gliedern der Summe, und ϱ diejenigen, welche negativen entsprechen.

Vertauscht man auf der linken Seite das Summen- mit dem Integralzeichen, so ergibt sich gemäß der im vorigen Paragraphen gegebenen Ungleichung von Schwarz

$$\sum_k U_k(z) \leqq \sqrt{\int_a^b (Q(z,x))^2\,dx}\cdot\sqrt{\int_a^b\left(\sum_k \psi_k(x)\int_a^b f(y)\,\psi_k(y)\,dy\right)^2 dx}.$$

Da nun die Funktionen $\psi_k(x)$ zueinander orthogonal und normiert sind, so ist

$$\int_a^b\left(\sum_k \psi_k(x)\int_a^b f(y)\,\psi_k(y)\,dy\right)^2 dx = \sum_k\left(\int_a^b f(y)\,\psi_k(y)\,dy\right)^2$$

$$\leqq \sum_{\nu=n}^{\nu=\infty}\left(\int_a^b f(y)\,\psi_\nu(y)\,dy\right)^2$$

und mithin ist

$$\sum_k U_k(z) \leqq \sqrt{A}\sqrt{\sum_{\nu=n}^{\nu=\infty}\left(\int_a^b f(y)\,\psi_\nu(y)\,dy\right)^2}.$$

Dieselbe Ungleichung erhält man für

$$-\sum_\varrho U_\varrho(z),$$

und durch Addition dieser beiden Ungleichungen ergibt sich die zu beweisende.

Zusatz. Wählt man für $Q(z, x)$ diejenige unstetige Funktion, welche für $x \leqq z$ gleich $+1$ und für $x > z$ gleich 0 ist, so folgt, daß die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \int_a^b f(y)\,\psi_\nu(y)\,dy \cdot \int_a^z \psi_\nu(x)\,dx$$

für $a \leqq z \leqq b$ absolut und gleichmäßig konvergiert.

§ 3.

Ersetzung linear unabhängiger Funktionensysteme durch orthogonale.

Es seien $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$ n für $a \leqq x \leqq b$ definierte reelle stetige Funktionen, die als linear unabhängig vorausgesetzt werden. Dann konstruieren wir die Funktionen*)

$$\psi_1(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{\int_a^b (\varphi_1(y))^2\,dy}}$$

$$\psi_2(x) = \frac{\varphi_2(x) - \psi_1(x)\int_a^b \varphi_2(z)\,\psi_1(z)\,dz}{\sqrt{\int_a^b \left(\varphi_2(y) - \psi_1(y)\int_a^b \varphi_2(z)\,\psi_1(z)\,dz\right)^2 dy}}$$

$$\vdots$$

$$\psi_n(x) = \frac{\varphi_n(x) - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n-1} \psi_\varrho(x)\int_a^b \varphi_n(z)\,\psi_\varrho(z)\,dz}{\sqrt{\int_a^b \left(\varphi_n(y) - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n-1}\psi_\varrho(y)\int_a^b \varphi_n(z)\,\psi_\varrho(z)\,dz\right)^2 dy}}.$$

Durch diese Formeln ist für jedes ν $\psi_\nu(x)$ rekursiv durch $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_\nu(x)$ linear homogen mit konstanten Koeffizienten darstellbar und umgekehrt auch $\varphi_\nu(x)$ durch $\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots, \psi_\nu(x)$. In keiner der Formeln kann nämlich der Nenner verschwinden; denn wäre ν der erste Index, für welchen das geschähe, so müßte

$$\varphi_\nu(x) - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\nu-1} \psi_\varrho(x)\int_a^b \varphi_\nu(z)\,\psi_\varrho(z)\,dz = 0$$

sein, und da die $\psi_\varrho(x)$ aus den $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_{\nu-1}(x)$ linear homogen

*) Im wesentlichen dieselben Formeln sind von J. P. Gram in der Abhandlung „Ueber die Entwickelung reeller Functionen in Reihen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate", Crelles Journal Bd. 94, aufgestellt worden.

mit konstanten Koeffizienten zusammengesetzt werden können, so würde sich ein Widerspruch zur vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit der Funktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$ ergeben. *Die Funktionen $\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots, \psi_n(x)$ bilden ferner ein normiertes und orthogonales Funktionensystem* d. h. genügen den Gleichungen

$$\int_a^b \psi_\mu(x)\,\psi_\nu(x)\,dx = 0 \quad \text{oder} \quad 1,$$

je nachdem ν und μ verschieden oder gleich sind. Das ist zunächst klar für die Funktionen $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$; nehmen wir nun das Normiertsein und die Orthogonalität des Funktionensystems $\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots, \psi_{\nu-1}(x)$ an, so folgt dasselbe auch für das Funktionensystem $\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots, \psi_{\nu-1}(x), \psi_\nu(x)$, denn es ist

$$\int_a^b (\psi_\nu(x))^2 dx = 1 \quad \text{und} \quad \int_a^b \psi_\nu(x)\,\psi_\varrho(x) = 0 \quad \text{für} \quad \varrho \leqq \nu - 1.$$

Wenn die Funktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_{n-1}(x)$ zwar ein linear unabhängiges System bilden, aber nicht die Funktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$, dann ist die lineare Abhängigkeit der letzteren gegeben durch die Gleichung

$$\varphi_n(x) - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n-1} \psi_\varrho(x) \int_a^b \varphi_n(z)\,\psi_\varrho(z)\,dz = 0.$$

Denn verschwände dieser Ausdruck nicht identisch, so wären die Funktionen $\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots, \psi_n(x)$ linear homogen mit konstanten Koeffizienten darstellbar durch die Funktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$ und mithin auch wegen der vorausgesetzten linearen Abhängigkeit der letzteren durch die Funktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_{n-1}(x)$. Es müssen also die Funktionen $\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots, \psi_n(x)$ linear voneinander abhängig sein. Das ist aber unmöglich; denn in einem orthogonalen System kann keine Gleichung von der Form

$$\sum_\nu c_\nu \psi_\nu(x) = 0$$

bestehen, wo nicht sämtliche $c_\nu = 0$ sind, wie sich durch Multiplikation dieser Gleichung mit $\psi_\nu(x)\,dx$ und Integration von a bis b ergibt.

Wir haben also in den Zählern der diskutierten Ausdrücke eine Reihe von linearen homogenen Formen der Funktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$, deren Eigenschaft es ist, im Falle einer linearen Abhängigkeit zwischen den letzteren dieselbe durch das identische Verschwinden einer der Formen nicht bloß als notwendiges und hinreichendes Kriterium anzuzeigen, sondern auch darzustellen.

Schlußbemerkung. Alle Formeln und Sätze dieses Kapitels mit Ausnahme des Zusatzes zu § 2 behalten ihre Gültigkeit, wenn x, y, z Punkte eines n-dimensionalen, ganz im Endlichen liegenden, aus einer endlichen Anzahl analytischer Stücke bestehenden Gebildes in einem $n+m$-dimensionalen Raum bedeuten, und dx, dy, dz die entsprechenden Elemente.

Zweites Kapitel.

Über die lineare symmetrische Integralgleichung.

§ 4.

Begriff der Eigenfunktion.

Es sei $K(s, t)$ eine für $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ definierte, reelle, stetige Funktion, die in s und t symmetrisch ist. Dann heißt jede stetige, nicht identisch verschwindende, reelle oder komplexe Funktion $\varphi(s)$, welche identisch in s der Gleichung

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

genügt, wo λ eine Konstante bedeutet, eine zu dem betreffenden *Eigenwerte* von λ gehörige *Eigenfunktion des Kernes* $K(s, t)$.

Zwei zu verschiedenen Werten von λ gehörige Eigenfunktionen $\varphi_\mu(s)$ und $\varphi_\nu(s)$ sind zueinander orthogonal, d. h. genügen der Gleichung

$$\int_a^b \varphi_\mu(s)\, \varphi_\nu(s)\, ds = 0.$$

Denn es sei

$$\varphi_\mu(s) = \lambda_\mu \int_a^b K(s, t)\, \varphi_\mu(t)\, dt,$$

$$\varphi_\nu(s) = \lambda_\nu \int_a^b K(s, t)\, \varphi_\nu(t)\, dt;$$

multipliziert man die erste dieser Gleichungen mit $\lambda_\nu \varphi_\nu(s)\, ds$, die zweite mit $\lambda_\mu \varphi_\mu(s)\, ds$, integriert von a bis b und subtrahiert, so ergibt sich bei Berücksichtigung der Symmetrie von $K(s, t)$

$$(\lambda_\nu - \lambda_\mu) \int_a^b \varphi_\mu(s)\, \varphi_\nu(s)\, ds = 0,$$

woraus die zu beweisende Gleichung folgt.

Wäre $\varphi_\nu(s)$ eine zu einem komplexen Eigenwerte von $K(s,t)$ gehörige Eigenfunktion, so würde die zu $\varphi_\nu(s)$ konjugierte Funktion zum konjugierten Eigenwerte gehören, wegen der Verschiedenheit dieser beiden Eigenwerte müßten dann $\varphi_\nu(s)$ und die zu $\varphi_\nu(s)$ konjugierte Funktion zueinander orthogonal sein, was unmöglich ist, da das Integral über das Produkt zweier konjugierter Funktionen stets größer als 0 ist. *Also sind alle Eigenwerte des Kernes $K(s,t)$ reell.*

Ist $\psi(s)$ eine komplexe Eigenfunktion, so folgt, weil, wie eben gezeigt, der zugehörige Eigenwert reell sein muß, daß $\psi(s) = \varphi(s) + i\bar{\varphi}(s)$, wo $\varphi(s)$ und $\bar{\varphi}(s)$ *reelle* Eigenfunktionen desselben Eigenwertes sind. Aus diesem Grunde sollen in allen folgenden Sätzen dieses Kapitels nur die *reellen Eigenfunktionen* betrachtet und unter der Bezeichnung „*Eigenfunktion*" verstanden sein.

§ 5.

Das vollständige normierte Orthogonalsystem.

Die Anzahl linear unabhängiger zu einem bestimmten Eigenwerte λ gehöriger Eigenfunktionen ist endlich.

Beweis: Da jedes aus zum selben Eigenwerte gehörigen Eigenfunktionen mit konstanten Koeffizienten gebildete lineare homogene Aggregat wieder eine zum betreffenden Eigenwerte gehörige Eigenfunktion liefert, so ergibt die Konstruktion des § 3 zu jedem System von n linear unabhängigen zum Eigenwerte λ gehörigen Eigenfunktionen ein System von ebensovielen Eigenfunktionen desselben Eigenwertes, welche *normiert und zueinander orthogonal* sind; dieselben mögen jetzt durch $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s), \cdots, \varphi_n(s)$ bezeichnet werden. Die im § 1 gegebene Besselsche Ungleichung liefert dann für jedes s

$$\int_a^b (K(s,t))^2\,dt \geqq \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \Big(\int_a^b K(s,t)\,\varphi_\nu(t)\,dt\Big)^2 = \frac{1}{\lambda^2}\sum_{\nu=1}^{\nu=n} (\varphi_\nu(s))^2;$$

multipliziert man diese Ungleichung mit ds und integriert von a bis b, so ergibt sich bei Berücksichtigung der Gleichungen

$$\int_a^b (\varphi_\nu(s))^2\,ds = 1$$

die Beziehung

$$n \leqq \lambda^2 \int_a^b\!\!\int_a^b (K(s,t))^2\,ds\,dt,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Ist die Anzahl der linear unabhängigen zu einem Eigenwert gehörigen Eigenfunktionen gleich m, so heißt der betreffende Eigenwert ein m-facher.

Ein *vollständiges normiertes Orthogonalsystem des Kernes* $K(s, t)$ soll ein solches System von normierten und zueinander orthogonalen Eigenfunktionen dieses Kernes heißen, daß jede Eigenfunktion dieses Kernes sich linear homogen mit konstanten Koeffizienten durch eine endliche Anzahl von Funktionen des Systems darstellen läßt.

Die in der Darstellung einer Eigenfunktion durch Funktionen des Systems vorkommenden Funktionen desselben müssen alle zum selben Eigenwerte gehören wie die darzustellende Funktion; denn es sei die Gleichung

$$\psi(s) = \sum_{\nu} c_\nu \varphi_\nu(s)$$

eine solche Darstellung für die Eigenfunktion $\psi(s)$ durch Funktionen des Systems; dann ist wegen der Orthogonalität der letzteren

$$c_\nu = \int_a^b \psi(s) \varphi_\nu(s)\, ds,$$

und dieser Ausdruck verschwindet, wenn $\psi(s)$ und $\varphi_\nu(s)$ zu verschiedenen Eigenwerten gehören, wie im vorigen Paragraphen gezeigt wurde.

Man erhält ein solches vollständiges normiertes Orthogonalsystem des Kernes $K(s, t)$, *indem man zu jedem Eigenwerte* λ *durch die Konstruktion des* § 3 *ein System von ebenso vielen normierten und zueinander orthogonalen Eigenfunktionen bildet, als die Vielfachheit des betreffenden Eigenwertes beträgt.*

Durchläuft $\varphi_\varrho(t)$ eine beliebige endliche Anzahl von Funktionen eines vollständigen normierten Orthogonalsystems des Kernes $K(s, t)$ und λ_ϱ die entsprechenden Eigenwerte, so folgt aus der Besselschen Ungleichung

$$\int_a^b (K(s, t))^2\, dt \geqq \sum_\varrho \left(\int_a^b K(s, t)\, \varphi_\varrho(t)\, dt\right)^2 = \sum_\varrho \frac{1}{\lambda_\varrho^2} (\varphi_\varrho(s))^2,$$

$$\int_a^b\int_a^b (K(s, t))^2\, ds\, dt \geqq \sum_\varrho \frac{1}{\lambda_\varrho^2}.$$

Hieraus ergibt sich, daß die Eigenwerte des Kernes $K(s, t)$, *jeder nach seiner Vielfachheit gezählt, keine Häufungspunkte im Endlichen haben können. Also lassen sie sich ihrem absoluten Betrage nach in eine Reihe anordnen, und wenn es ihrer unendlich viele gibt, so wachsen die absoluten Beträge über alle Grenzen.*

§ 6.

Die iterierten Kerne.*)

Wir definieren

$$K^1(s, t) = K(s, t),$$

$$K^2(s, t) = \int_a^b K(s, r)\, K^1(r, t)\, dr,$$

$$K^\nu(s, t) = \int_a^b K(s, r)\, K^{\nu-1}(r, t)\, dr.$$

Denkt man sich dann $K^{n+1}(s, t)$ als n-faches Integral über das Produkt von $n+1$ Kernen explizite ausgedrückt, so erhellt sofort

(1) $$K^{\mu+\nu}(s, t) = \int_a^b K^\mu(s, r)\, K^\nu(r, t)\, dr,$$

$$K^\nu(s, t) = K^\nu(t, s).$$

Ferner kann keine der Funktionen $K^n(s, t)$ identisch in s und t verschwinden. Denn wäre

$$K^n(s, t) = 0,$$

so wäre auch

$$K^{n+1}(s, t) = 0,$$

und gemäß (1) wäre auch

$$\int_a^b K^{n_1}(s, r)\, K^{n_1}(r, t)\, dr = 0,$$

wo n_1 die ganze unter den beiden Zahlen $\frac{n}{2}$ und $\frac{n+1}{2}$ bedeutet; mithin wäre auch

$$0 = \int_a^b K^{n_1}(s, r)\, K^{n_1}(r, s)\, dr = \int_a^b (K^{n_1}(s, r))^2\, dr,$$

woraus das in s und t identische Verschwinden von $K^{n_1}(s, t)$ folgen würde. Durch genügend häufige Wiederholung dieses Schlußverfahrens würde sich das identische Verschwinden von $K(s, t)$ im Widerspruch zur Voraussetzung ergeben.

Es sei

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt.$$

Dann ist

$$\varphi(s) = \lambda^n \int_a^b K^n(s, t)\, \varphi(t)\, dt.$$

*) Vergl. H. A. Schwarz l. c. Fredholm l. c. S. 384. Hilbert l. c. S. 244—247.

Es ist also jede Eigenfunktion des Kernes $K(s,t)$ *auch eine Eigenfunktion des Kernes* $K^n(s,t)$. Ist andererseits

$$\psi(s) = c\int_a^b K^n(s,t)\,\psi(t)\,dt,$$

so definiere man die Funktionen $\chi_\nu(s)$ durch die Gleichungen

$$n\chi_\nu(s) = \psi(s) + h_\nu\int_a^b K(s,t)\,\psi(t)\,dt + h_\nu^2\int_a^b K^2(s,t)\,\psi(t)\,dt + \cdots$$
$$+ h_\nu^{n-1}\int_a^b K^{n-1}(s,t)\,\psi(t)\,dt \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots, n),$$

wobei h_ν die n Wurzeln der Gleichung $h^n = c$ durchläuft. Dann ist, weil $\sum_{\nu=1}^{\nu=n} h_\nu^k$ nur dann von Null verschieden ist, wenn k durch n teilbar ist,

$$\psi(s) = \sum_{\nu=1}^{\nu=n}\chi_\nu(s). \tag{2}$$

Ferner erhält man

$$\chi_\nu(s) = h_\nu\int_a^b K(s,t)\,\chi_\nu(t)\,dt.$$

Also sind die $\chi_\nu(s)$, sofern sie nicht identisch verschwinden, was wegen (2) nicht für alle ν der Fall sein kann, Eigenfunktionen des Kernes $K(s,t)$. Da derselbe nach § 4 nur reelle Eigenwerte hat, muß $\chi_\nu(s)$ für alle nicht reellen h_ν identisch verschwinden. Ist folglich n ungerade, und bezeichnet man mit $h_1 = \sqrt[n]{c}$ die reelle Wurzel der Gleichung $h^n = c$, so ist

$$\psi(s) = \sqrt[n]{c}\int_a^b K(s,t)\,\psi(t)\,dt.$$

Ist aber n gerade, so muß $c > 0$ sein, und wenn dann $h_1 = +\sqrt[n]{c}$, $h_2 = -\sqrt[n]{c}$ die beiden reellen Wurzeln der Gleichung $h^n = c$ bezeichnen, so ist

$$\psi(s) = \chi_1(s) + \chi_2(s),$$

$$\chi_1(s) = +\sqrt[n]{c}\int_a^b K(s,t)\,\chi_1(t)\,dt,$$

$$\chi_2(s) = -\sqrt[n]{c}\int_a^b K(s,t)\,\chi_2(t)\,dt,$$

wobei noch eine der beiden Funktionen $\chi_1(s)$ und $\chi_2(s)$ identisch verschwinden kann. *Ist also* n *ungerade, so ist jede Eigenfunktion von*

$K^n(s, t)$ auch eine Eigenfunktion von $K(s, t)$; ist aber n gerade, so ist jede Eigenfunktion von $K^n(s, t)$ entweder eine Eigenfunktion von $K(s, t)$ oder die Summe zweier solcher.

Jedes vollständige normierte Orthogonalsystem des Kernes $K(s, t)$ ist auch ein solches für den Kern $K^n(s, t)$.

§ 7.

Fundamentalsatz.

Zu jedem nicht identisch verschwindenden Kerne $K(s, t)$ gibt es mindestens eine Eigenfunktion. Den Beweis dieses Fundamentalsatzes lasse ich, um hier den Ideengang nicht zu unterbrechen, in § 11 nachfolgen.

§ 8.

Entwicklung des Kernes und seiner Iterationen.*)

Es mögen die Funktionen $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \cdots, \varphi_\nu(s), \cdots$ ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem des Kernes $K(s, t)$ bilden, denen die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\nu, \cdots$ der absoluten Größe nach geordnet entsprechen mögen. *Wenn dann die Reihe*

$$\sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu}$$

gleichmäßig für $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ konvergiert, so ist

$$K(s, t) = \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu}; \tag{3}$$

insbesondere ergibt sich hieraus, daß diese Gleichung stets gültig ist, wenn die Anzahl der Eigenfunktionen des vollständigen normierten Orthogonalsystems endlich ist.

Beweis: Wir setzen:

$$K(s, t) - \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu} = Q(s, t).$$

Dann ist $Q(s, t)$ auch eine stetige symmetrische Funktion von s und t, und es ist

$$\int_a^b Q(s, t)\,\varphi_\nu(t)\,dt = 0 \tag{4}$$

für alle Werte von ν. Wäre nun $Q(s, t)$ nicht identisch Null, so müßte

*) Vergl. Hilbert l. c. S. 69—72. — Stekloff l. c. S. 404—425.

es nach dem Fundamentalsatz des vorhergehenden Paragraphen eine stetige Funktion $\psi(s)$ geben, so daß

$$\psi(s) = c\int_a^b Q(s, t)\,\psi(t)\,dt$$

ist. Aus (4) folgt, daß für alle Werte von ν

$$\int_a^b \psi(s)\,\varphi_\nu(s)\,ds = 0, \tag{5}$$

mithin ist auch

$$\int_a^b Q(s, t)\,\psi(t)\,dt = \int_a^b K(s, t)\,\psi(t)\,dt,$$

also ist

$$\psi(s) = c\int_a^b K(s, t)\,\psi(t)\,dt,$$

$\psi(s)$ wäre also eine Eigenfunktion des Kernes $K(s, t)$, welche wegen ihrer durch Gleichung (5) gegebenen Orthogonalität zu allen Funktionen $\varphi_\nu(s)$ sich nicht durch eine endliche Anzahl von ihnen linear homogen mit konstanten Koeffizienten darstellen ließe — im Widerspruch zur Voraussetzung, daß die Funktionen $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \cdots, \varphi_\nu(s), \cdots$ ein *vollständiges* normiertes Orthogonalsystem des Kernes $K(s, t)$ bilden. Also ist $Q(s, t)$ identisch gleich Null, was zu beweisen war.

Hieraus schließen wir: *es ist stets*

$$K^4(s, t) = \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu^4} \tag{6}$$

und die Reihe auf der rechten Seite konvergiert absolut und gleichmäßig. Denn da nach § 6 die Funktionen $\varphi_\nu(s)$ auch ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem des Kernes $K^4(s, t)$ bilden, denen die Eigenwerte λ_ν^4 entsprechen, so folgt unsere Behauptung aus der eben bewiesenen, wenn nur die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihe rechts dargetan werden kann. Es ist aber

$$\sum_{\nu=n}^{\nu=n+m} \left|\frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu^4}\right| \leqq \frac{1}{2\lambda_n^2}\left(\sum_{\nu=n}^{\nu=n+m} \frac{(\varphi_\nu(s))^2}{\lambda_\nu^2} + \sum_{\nu=n}^{n=n+m} \frac{(\varphi_\nu(t))^2}{\lambda_\nu^2}\right)$$

und da nach der Besselschen Ungleichung

$$\int_a^b (K(s, t))^2\,dt \geqq \sum_{\nu=n}^{\nu=n+m} \left(\int_a^b K(s, t)\,\varphi_\nu(t)\,dt\right)^2 = \sum_{\nu=n}^{\nu=n+m} \frac{(\varphi_\nu(s))^2}{\lambda_\nu^2},$$

so folgt

$$\sum_{\nu=n}^{\nu=n+m} \left| \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu^4} \right| \leqq \frac{1}{\lambda_n^2} \int_a^b (K(s,t))^2\,dt,$$

woraus die zu beweisende absolute und gleichmäßige Konvergenz sich ergibt.

§ 9.

Entwicklung willkürlicher Funktionen.*)

Es mögen wie im vorigen Paragraphen die Funktionen $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \cdots, \varphi_\nu(s), \cdots$ ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem des Kernes $K(s,t)$ bilden, denen die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\nu, \cdots$ dem absoluten Betrage nach geordnet entsprechen mögen. Ist dann $h(s)$ eine stetige Funktion, so daß

$$\int_a^b K(s,t)\,h(t)\,dt = 0$$

ist, dann ergibt sich durch Multiplikation dieser Gleichung mit $\varphi_\nu(s)\,ds$ und Integration von a bis b die für alle ν gültige Gleichung

$$\int_a^b h(s)\,\varphi_\nu(s)\,ds = 0.$$

Umgekehrt folgt aber auch aus dem Bestehen dieser Gleichungen für alle ν die Gleichung

$$\int_a^b K(s,t)\,h(t)\,dt = 0.$$

Beweis. Multipliziert man die im vorigen Paragraphen bewiesene Gleichung

$$K^4(s,t) = \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu^4}$$

mit $h(s)\,h(t)\,ds\,dt$ und integriert nach s und t von a bis b, so folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b\!\!\int_a^b K^4(s,t)\,h(s)\,h(t)\,ds\,dt \\ &= \int_a^b dr \int_a^b K^2(s,r)\,h(s)\,ds \int_a^b K^2(t,r)\,h(t)\,dt \\ &= \int_a^b dr \left(\int_a^b K^2(s,r)\,h(s)\,ds\right)^2; \end{aligned}$$

*) Vergl. Hilbert l. c. S. 72—78. Stekloff l. c. S. 404—425.

mithin ist identisch in r

$$\int_a^b K^2(s, r)\, h(s)\, ds = 0;$$

daher ist auch

$$0 = \int_a^b \int_a^b K^2(s, t)\, h(s)\, h(t)\, ds\, dt,$$

und durch Wiederholung des eben angewandten Schlußverfahrens ergibt sich identisch in r

$$\int_a^b K(r, s)\, h(s)\, ds = 0,$$

was zu beweisen war.

Es sei die stetige Funktion $g(s)$ darstellbar durch die Gleichung

$$g(s) = \int_a^b K(s, t)\, p(t)\, dt,$$

wo $p(t)$ eine stetige Funktion bedeutet, dann ist

$$g(s) = \sum_\nu \varphi_\nu(s) \int_a^b g(t)\, \varphi_\nu(t)\, dt = \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu} \int_a^b p(t)\, \varphi_\nu(t)\, dt$$

$$= \sum_\nu \int_a^b K(s, t)\, \varphi_\nu(t)\, dt \int_a^b p(t)\, \varphi_\nu(t)\, dt,$$

und die Reihe rechts konvergiert absolut und gleichmäßig.

Beweis. Aus der dritten Darstellungsform ihres allgemeinen Gliedes erlaubt uns der in § 2 bewiesene Konvergenzsatz die behauptete absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihe abzulesen.

Setzt man

$$g(s) - \sum_\nu \varphi_\nu(s) \int_a^b g(t)\, \varphi_\nu(t)\, dt = h(s),$$

so ist für alle ν

$$\int_a^b h(s)\, \varphi_\nu(s)\, ds = 0 \tag{7}$$

und mithin nach dem eben bewiesenen Theorem

$$\int_a^b K(s, t)\, h(t)\, dt = 0. \tag{8}$$

Nun ist

$$\int_a^b (h(s))^2\, ds = \int_a^b h(s)\, g(s)\, ds - \sum_\nu \int_a^b h(s)\, \varphi_\nu(s)\, ds \int_a^b g(t)\, \varphi_\nu(t)\, dt$$

und da wegen der Gleichungen (7) die Summe rechts verschwindet, so ist

$$\int_a^b (h(s))^2\,ds = \int_a^b h(s)\,g(s)\,ds = \int_a^b p(r)\,dr \int_a^b K(s,r)\,h(s)\,ds = 0$$

wegen Gleichung (8). Also ist $h(s)$ identisch gleich Null, was zu beweisen war.

Es mögen $p(s)$ und $q(s)$ zwei stetige Funktionen bedeuten; dann ergibt sich durch Multiplikation der eben bewiesenen Gleichung mit $q(s)ds$ und Integration von a bis b

$$\int_a^b \int_a^b K(s,t)\,q(s)\,p(t)\,ds\,dt = \sum_\nu \frac{1}{\lambda_\nu} \int_a^b q(s)\,\varphi_\nu(s)\,ds \int_a^b p(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt.$$

Dies ist die Fundamentalformel von Hilbert, welche er aus der kanonischen Zerlegung einer quadratischen Form durch Grenzübergang gewinnt, und aus welcher er dann die Sätze des § 8 und das erste Theorem des § 9 für alle Kerne und das Entwicklungstheorem für „allgemeine" Kerne ableitet.

§ 10.

Die inhomogene lineare Integralgleichung.

Es sei $f(s)$ eine gegebene stetige Funktion; es soll eine stetige Funktion $\varphi(s)$ bestimmt werden, so daß

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt \tag{9}$$

ist. Wir setzen

$$\varphi(s) = f(s) + g(s).$$

Dann ist

$$g(s) = \lambda \int_a^b K(s,t)\,(f(t) + g(t))\,dt, \tag{10}$$

es ist folglich nach dem Entwicklungssatze des vorigen Paragraphen

$$g(s) = \sum_\nu \varphi_\nu(s) \int_a^b g(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt, \tag{11}$$

wo $\varphi_\nu(s)$ ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem des Kernes $K(s,t)$ durchläuft, und die Reihe rechts absolut und gleichmäßig konvergiert. Multipliziert man (10) mit $\varphi_\nu(s)\,ds$ und integriert, so folgt

$$\int_a^b g(s)\,\varphi_\nu(s)\,ds = \lambda \int_a^b (f(t)+g(t))\,dt \int_a^b K(s,t)\,\varphi_\nu(s)\,ds,$$

$$(12) \qquad \int_a^b g(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt = \frac{\lambda}{\lambda_\nu}\int_a^b f(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt + \frac{\lambda}{\lambda_\nu}\int_a^b g(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt,$$

$$\int_a^b g(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt = \frac{\lambda}{\lambda_\nu - \lambda}\int_a^b f(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt,$$

und also gemäß (11)

$$(13) \qquad \varphi(s) = f(s) + \lambda \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu - \lambda}\int_a^b f(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt.$$

Umgekehrt konvergiert aber auch, wenn λ von allen λ_ν verschieden ist, die letzte Reihe nach § 2 absolut und gleichmäßig, weil

$$\frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu - \lambda}\int_a^b f(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt = \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\lambda_\nu}}\int_a^b K(s,t)\,\varphi_\nu(t)\,dt \int_a^b f(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt$$

ist, und es stellt die rechte Seite der Gleichung (13) eine Lösung der Gleichung (9) dar, wie sich durch Einführung derselben in Gleichung (9) bei Berücksichtigung der aus dem Entwicklungssatz des vorigen Paragraphen folgenden Gleichung

$$\int_a^b K(s,t)\,f(t)\,dt = \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu}\int_a^b f(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt$$

ergibt. *Wir sehen also, daß, wenn λ kein Eigenwert des Kernes $K(s,t)$ ist, die Gleichung* (9) *immer eine und nur eine durch die Gleichung* (13) *gegebene Lösung hat. Ist aber λ ein k-facher Eigenwert, so ergibt die Gleichung* (12), *daß, damit die Gleichung* (9) *eine Lösung hat, $f(s)$ den k Gleichungen*

$$\int_a^b f(t)\,\varphi_{n+\nu}(t)\,dt = 0$$

genügen muß, wo $n+1, n+2, \cdots, n+k$ die Indizes der zum betreffenden k-fachen Eigenwerte gehörigen Eigenfunktionen des vollständigen normierten Orthogonalsystems bedeuten; dann ist, wie die Einführung in die Gleichung (9) *zeigt,*

$$\varphi(s) = f(s) + a_1\varphi_{n+1}(s) + a_2\varphi_{n+2}(s) + \cdots + a_k\varphi_{n+k}(s)$$
$$+ \lambda \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu - \lambda}\int_a^b f(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt,$$

wo v alle Indizes des Orthogonalsystems mit Ausnahme von $n+1, n+2, \cdots, n+k$ durchläuft, und $a_1, a_2, \cdots, a_k$ beliebige Konstanten bedeuten. Dies sind für den symmetrischen Kern die wesentlichsten derjenigen Sätze, welche von Fredholm durch seine Reihen bewiesen worden sind.

§ 11.

Beweis des Fundamentalsatzes.*)

Jetzt gehen wir zu dem in § 7 schuldig gebliebenen Beweise des Fundamentalsatzes über, daß es zu jedem Kerne mindestens eine Eigenfunktion gibt.

Wir setzen

$$U_1 = \int_a^b K^1(s,s)\,ds,\quad U_2 = \int_a^b K^2(s,s)\,ds, \cdots, U_n = \int_a^b K^n(s,s)\,ds, \cdots.$$

Dann folgt aus § 6 (1)

$$U_{\mu+\nu} = \int_a^b\int_a^b K^\mu(s,r)\,K^\nu(s,r)\,dr\,ds, \tag{14}$$

$$U_{2\nu} = \int_a^b\int_a^b (K^\nu(s,r))^2\,dr\,ds. \tag{15}$$

Da nun $K^\nu(s,t)$, wie in § 6 gezeigt, nicht identisch verschwinden kann, so folgt, daß alle $U_{2\nu}$ von Null verschieden und positiv sind. Es sei $n \geqq 2$; setzt man dann in (14) $n+1$ für μ und $n-1$ für ν und wendet die in § 1 gegebene Schwarzsche Ungleichung an, welche gemäß der Schlußbemerkung des ersten Kapitels auch für vielfache Integrale ihre Gültigkeit behält, so folgt

$$U_{2n}^2 \leqq U_{2n-2}\cdot U_{2n+2},$$

$$\frac{U_{2n}}{U_{2n-2}} \leqq \frac{U_{2n+2}}{U_{2n}}.$$

Setzt man nun

$$\frac{U_{2n+2}}{U_{2n}} = c_n, \tag{16}$$

so ist also

$$c_{n-1} \leqq c_n. \tag{17}$$

Nun ist nach § 6 Gleichung (1)

*) Vergl. H. A. Schwarz l. c.

$$K^{\mu+\nu}(s, t) = \int_a^b K^{\mu}(s, r) K^{\nu}(r, t) \, dr,$$

$$(K^{\mu+\nu}(s, t))^2 \leqq \int_a^b (K^{\mu}(s, r))^2 \, dr \int_a^b (K^{\nu}(t, r))^2 \, dr,$$

$$\int_a^b \int_a^b (K^{\mu+\nu}(s, t))^2 ds\, dt \leqq \int_a^b \int_a^b (K^{\mu}(s, r))^2 dr\, ds \cdot \int_a^b \int_a^b (K^{\nu}(t, r))^2 dr\, dt.$$

Also nach (15)

$$U_{2\mu+2\nu} \leqq U_{2\mu} \cdot U_{2\nu},$$

$$U_{2\nu} \geqq \frac{U_{2\mu+2\nu}}{U_{2\mu}}$$

und wegen (16) und (17)

(18) $$U_{2\nu} \geqq c_{\mu}^{\nu}.$$

Bei Berücksichtigung von (17) ergibt sich hieraus, daß

$$\operatorname*{Lim}_{\mu=\infty} c_{\mu} = c,$$

wo c eine endliche positive Größe bedeutet und

(19) $$\frac{U_{2\nu}}{c^{\nu}} \geqq 1$$

ist.

Aus (16) folgt, weil $c_n \leqq c$ ist, daß

(20) $$\frac{U_{2n+2}}{c^{n+1}} \leqq \frac{U_{2n}}{c^{n}}.$$

Aus (19) und (20) folgt, daß

(21) $$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \frac{U_{2n}}{c^{n}} = U$$

ist, wo U eine endliche Zahl $\geqq 1$ ist.

Nun ist

$$\frac{K^{2n+2m}(s, t)}{c^{n+m}} - \frac{K^{2n}(s, t)}{c^{n}}$$

$$= \frac{1}{c} \int_a^b \int_a^b K(s, r_1) \left\{ \frac{K^{2n+2m-2}(r_1, r_2)}{c^{n+m-1}} - \frac{K^{2n-2}(r_1, r_2)}{c^{n-1}} \right\} K(r_2, t) \, dr_1 \, dr_2,$$

$$\left(\frac{K^{2n+2m}(s,t)}{c^{n+m}} - \frac{K^{2n}(s, t)}{c^{n}} \right)^2 \leqq \frac{1}{c^2} \int_a^b \int_a^b (K(s, r_1) K(r_2, t))^2 dr_1 \, dr_2 \times$$

$$\times \int_a^b \int_a^b dr_1 \, dr_2 \left\{ \left(\frac{K^{2n+2m-2}(r_1, r_2)}{c^{n+m-1}} \right)^2 - 2 \frac{K^{2n+2m-2}(r_1, r_2) K^{2n-2}(r_1, r_2)}{c^{2n+m-2}} + \left(\frac{K^{2n-2}(r_1, r_2)}{c^{n-1}} \right)^2 \right\}.$$

Bei Berücksichtigung von (14) und (15) ergibt sich hieraus

$$\left(\frac{K^{2n+2m}(s,t)}{c^{n+m}} - \frac{K^{2n}(s,t)}{c^n}\right)^2 \leqq \frac{1}{c^2}\int_a^b (K(s,r_1))^2 dr_1 \int_a^b (K(t,r_2))^2 dr_2 \times$$
$$\times \left\{\frac{U_{4n+4m-4}}{c^{2n+2m-2}} - 2\,\frac{U_{4n+2m-4}}{c^{2n+m-2}} + \frac{U_{4n-4}}{c^{2n-2}}\right\}.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite wird aber wegen (21) mit wachsendem n, unabhängig von m, s und t, unendlich klein. Hieraus folgt, daß $\frac{K^{2n}(s,t)}{c^n}$ mit wachsendem n gleichmäßig gegen eine mithin stetige Funktion $u(s,t)$ konvergiert, welche wegen

$$\int_a^b u(s,s)\,ds = \lim_{n=\infty}\int_a^b \frac{K^{2n}(s,s)\,ds}{c^n} = \lim_{n=\infty}\frac{U_{2n}}{c^n} = U \geqq 1$$

nicht identisch in s und t verschwinden kann. Ferner folgt aus

$$\frac{K^{2n+2}(s,t)}{c^{n+1}} = \frac{1}{c}\int_a^b K^2(s,r)\,\frac{K^{2n}(r,t)}{c^n}\,dr$$

$$u(s,t) = \frac{1}{c}\int_a^b K^2(s,r)\,u(r,t)\,dr.$$

Wählt man nun für t einen solchen Wert t_1, daß $u(s,t_1)$ nicht identisch in s verschwindet, so ist gemäß der letzten Gleichung $u(s,t_1)$ eine Eigenfunktion des Kernes $K^2(s,t)$. Daraus folgt aber nach § 6, daß auch $K(s,t)$ eine Eigenfunktion haben muß, was zu beweisen war.

§ 12.

Erweiterung der Voraussetzungen.

Auch Unstetigkeiten des symmetrischen Kernes können in einem durch folgende Voraussetzungen beschränkten Umfange zugelassen werden.

I. Die Punktmenge in der s, t-Ebene, welche aus den Unstetigkeitsstellen von $K(s,t)$ gebildet wird und daher in der s, t-Ebene abgeschlossen ist, soll auf jeder Geraden $s = \text{const.}$ den äußeren Inhalt Null haben.

II. $\int_a^b (K(s,t))^2 dt$ soll für $a \leqq s \leqq b$ endlich und bestimmt sein und eine stetige Funktion von s darstellen.

Man teile das quadratische Definitionsgebiet von $K(s,t)$ durch Parallelen zu den Seiten in 2^{2n} gleiche Quadrate und bezeichne mit Q_n

das aus der Gesamtheit derjenigen Quadrate gebildete Gebiet, welche im Inneren oder auf der Umgrenzung Unstetigkeitsstellen von $K(s,t)$ enthalten. Dann kann aus I und II ohne Schwierigkeit das Ergebnis bewiesen werden: zu jeder beliebig kleinen positiven Größe ε gibt es eine Zahl n, so daß für alle Geraden $s = \text{const.}$ sowohl die Gesamtlänge der auf ihnen von Q_n überdeckten Gebiete als auch der Wert des über die Gesamtheit dieser Gebiete erstreckten Integrals

$$\int_{Q_n} (K(s,t))^2\, dt^{*)}$$

$< \varepsilon$ sind.

Hieraus folgt zunächst, daß auch für alle Geraden $s = \text{const.}$

$$\int_{Q_n} |K(s,t)|\, dt < \varepsilon$$

ist; denn gemäß der Schwarzschen Ungleichung ist

$$\left(\int_{Q_n} |K(s,t)|\, dt\right)^2 \leqq \int_{Q_n} (K(s,t))^2 dt \cdot \int_{Q_n} dt \leqq \varepsilon^2.$$

Aus den bewiesenen Ungleichungen ergibt sich leicht: Der planare Inhalt der aus den Unstetigkeitsstellen von $K(s,t)$ bestehenden Punktmenge ist gleich Null. Für jede stetige Funktion $m(t)$ sind $\int_a^b (K(s,t))\, m(t)\, dt$ und $\int_a^b (K(s,t))^2 m(t)\, dt$ für $a \leqq s \leqq b$ endlich und bestimmt und stellen eine stetige Funktion von s dar. Ähnlich beweist man leicht bei Anwendung der Schwarzschen Ungleichung auf das Integral über das Produkt der beiden Kerne, daß auch

$$K^2(s,t) = \int_a^b K(s,r)\, K(r,t)\, dr$$

für $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ endlich und bestimmt ist und eine stetige Funktion von s und t darstellt, welche wegen

$$K^2(s,s) = \int_a^b (K(s,r))^2\, dr$$

nur dann identisch verschwinden kann, wenn $K(s,t)$ in seinem ganzen Stetigkeitsbereich identisch verschwindet.

Diese aus den Voraussetzungen I und II gewonnenen Folgerungen gestatten leicht alle in den §§ 4, 5, 6 vorkommenden Operationen wie namentlich die häufigen Vertauschungen der Integrationsordnung auch für

*) Es kann statt der Voraussetzungen I und II auch I und die Gültigkeit dieser Ungleichung gefordert werden, aus welchen Voraussetzungen sich leicht II ergibt.

den Fall des unstetigen Kernes zu legitimieren.*) Die Sätze und Beweise der §§ 4, 5, 6 bleiben daher ungeändert gültig. Der in § 7 ausgesprochene Fundamentalsatz bleibt bestehen, weil $K^2(s, t)$ als stetiger Kern Eigenfunktionen haben muß und hieraus gemäß § 6 die Existenz von Eigenfunktionen von $K(s, t)$ folgt.

Im § 8 muß die Gültigkeit der Gleichung (3) auf den Stetigkeitsbereich des Kernes beschränkt werden, während die Gleichung (6) unverändert gültig bleibt. In den §§ 9 und 10 bleiben alle Sätze und Beweise unverändert bestehen.

Es ist auch zulässig, daß I und II längs einer endlichen Anzahl von Geraden $s = \text{const.}$ unerfüllt sind, indem der Kern auf beiden Rändern dieser verschiedene Wertefolgen annimmt, I und II müssen dann aber in jedem der Rechtecke, in welche das Definitionsquadrat des Kernes durch die genannten Geraden zerlegt wird, *einschließlich* der Ränder postuliert werden, und es müssen an den betreffenden Werten von s beiden Eigenfunktionen sowie der Lösungsfunktionen der inhomogenen Integralgleichung Sprünge zugelassen werden.

Ferner kann der Gültigkeitsbereich des in § 9 erhaltenen Entwicklungssatzes noch dahin erweitert werden, daß die Voraussetzung der Stetigkeit der Funktion $p(t)$ durch die Voraussetzung der Integrabilität und der Integrabilität ihres Quadrates ersetzt wird.

Ebenso ändert sich nichts in den Sätzen und Beweisen dieses Kapitels, wenn $s, t, r, \cdots,$ Punkte eines n-dimensionalen, ganz im Endlichen liegenden, aus einer endlichen Anzahl analytischer Stücke bestehenden Gebildes in einem $(n+m)$-dimensionalen Raum bedeuten und $ds, dt, dr, \cdots$ die entsprechenden Elemente.

Auch in diesem Fall bestimmen die Bedingungen I und II einen Bereich der Zulässigkeit von Unstetigkeiten.

Drittes Kapitel.

Über die lineare unsymmetrische Integralgleichung.

§ 13.

Die inhomogene Integralgleichung.

Es seien der nicht mehr als symmetrisch vorausgesetzte Kern $K(s, t)$ und $f(s)$ für $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ als reelle stetige Funktionen definiert. Gesucht wird eine reelle stetige Funktion $\varphi(s)$, welche die Integralgleichung

*) Siehe z. B. Jordan, Cours d'Analyse Bd. II, Cap. II, II.

$$f(s) = \varphi(s) - \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt \tag{22}$$

erfüllt.

Setzt man

$$g(t) = \chi(t) - \int_a^b K(s, t)\, \chi(s)\, ds, \tag{23}$$

so ergeben sich die Identitäten

$$g(s) - \int_a^b K(s, t) g(t) dt = \chi(s) - \int_a^b Q(s, t)\, \chi(t)\, dt, \tag{24}$$

$$\int_a^b (g(s))^2 ds = \int_a^b \chi(s) \left(\chi(s) - \int_a^b Q(s, t)\, \chi(t)\, dt\right) ds, \tag{25}$$

wo

$$Q(s, t) = K(s, t) + K(t, s) - \int_a^b K(s, r)\, K(t, r)\, dr$$

und mithin *symmetrisch* ist.

Man bezeichne jede von Null verschiedene reelle stetige Funktion, welche, für $\varphi(s)$ substituiert, die rechte Seite der Gleichung (22) identisch verschwinden läßt, als *Nulllösung in s des Kernes* und jede von Null verschiedene reelle stetige Funktion, welche für $\chi(t)$ substituiert die rechte Seite der Gleichung (23) identisch verschwinden läßt, als *Nulllösung in t*. Gemäß dem ersten Theorem des § 5 für $\lambda = 1$, bei dessen Beweis von der Voraussetzung der Symmetrie des Kernes kein Gebrauch gemacht wird, sind die Anzahlen der *linearunabhängigen* Nulllösungen in s sowie in t *endlich*. Ist $\chi(t)$ eine Nulllösung in t, so folgt aus (23) und (24), daß $\chi(t)$ eine zum Eigenwerte $\lambda = 1$ gehörige Eigenfunktion des symmetrischen Kernes $Q(s, t)$ ist; aus (25) und (23) folgt das umgekehrte. Mithin erhält man die Gesamtheit der ersteren Funktionen, indem man die mit ihr als *identisch* erwiesene Gesamtheit der letzteren bildet.

Nun ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit der Gleichung (22) *die Orthogonalität von $f(s)$ zu allen eventuell vorhandenen Nulllösungen in t, und aus einer Lösung ergeben sich dann alle durch additive Hinzufügung aller Nulllösungen in s**).

Denn die Notwendigkeit dieser Bedingung erhellt vorweg bei Multiplikation der Gleichung (22) mit einer Nulllösung in t und Integration; und daß die Bedingung hinreichend ist, zeigt die unmittelbare Anwendung der Auflösungstheoreme des § 10 auf die symmetrische Integralgleichung

*) Dieses Theorem ist auch zuerst von Fredholm l. c. bewiesen worden.

$$f(s) = \chi(s) - \int_a^b Q(s,t)\,\chi(t)\,dt,$$

auf welche gemäß (24) die Gleichung (22) durch die Substitution

$$\varphi(t) = \chi(t) - \int_a^b K(s,t)\,\chi(s)\,ds$$

zurückgeführt wird.

§ 14.

Begriff der Eigenfunktion.

Es sei $K(s, t)$ eine für $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ definierte reelle stetige Funktion, die nicht als symmetrisch vorausgesetzt werden soll. Wenn dann die beiden reellen oder komplexen stetigen nicht identisch verschwindenden Funktionen $\varphi(s)$ und $\psi(s)$ den Gleichungen

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s,t)\,\psi(t)\,dt \tag{26}$$

$$\psi(s) = \lambda \int_a^b K(t,s)\,\varphi(t)\,dt \tag{27}$$

genügen, so sollen sie als ein *Paar zum betreffenden Eigenwert λ gehöriger adjungierter Eigenfunktionen des Kernes* $K(s, t)$ bezeichnet werden.

Wir definieren nun

$$\overline{K}(s,t) = \int_a^b K(s,r)\,K(t,r)\,dr \tag{28}$$

$$\underline{K}(s,t) = \int_a^b K(r,s)\,K(r,t)\,dr. \tag{29}$$

Dann sind $\overline{K}(s,t)$ und $\underline{K}(s,t)$ symmetrisch.

Führt man (27) in (26) und (26) in (27) ein, so ergeben sich die Gleichungen

$$\varphi(s) = \lambda^2 \int_a^b \overline{K}(s,t)\,\varphi(t)\,dt \tag{30}$$

$$\psi(s) = \lambda^2 \int_a^b \underline{K}(s,t)\,\psi(t)\,dt. \tag{31}$$

Wäre nun

$$\varphi(s) = \varphi_1(s) + i\varphi_2(s) \quad \text{und} \quad \psi(s) = \psi_1(s) + i\psi_2(s),$$

so würde, da λ^2 als Eigenwert des symmetrischen Kernes $\overline{K}(s,t)$, wie in § 4 gezeigt, reell sein muß, aus (30) folgen

$$\varphi_1(s) = \lambda^2 \int_a^b \overline{K}(s,t)\,\varphi_1(t)\,dt$$

$$\int_a^b (\varphi_1(s))^2\,ds = \lambda^2 \int_a^b\int_a^b \varphi_1(s)\,\overline{K}(s,t)\,\varphi_1(t)\,ds\,dt$$

$$= \lambda^2 \int_a^b dr \int_a^b K(s,r)\,\varphi_1(s)\,ds \int_a^b K(t,r)\,\varphi_1(t)\,dt$$

$$\int_a^b (\varphi_1(s))^2 ds = \lambda^2 \int_a^b dr \left(\int_a^b K(s,r)\,\varphi_1(s)\,ds\right)^2.$$

Ebenso ergibt sich

$$\int_a^b (\varphi_2(s))^2\,ds = \lambda^2 \int_a^b dr \left(\int_a^b K(s,r)\,\varphi_2(s)\,ds\right)^2.$$

Da nun in mindestens einer dieser beiden Gleichungen nicht beide Seiten identisch verschwinden können, so folgt, *daß λ^2 positiv und mithin λ reell ist.* Es müßten mithin $\varphi_1(s)$ und $\psi_1(s)$, $\varphi_2(s)$ und $\psi_2(s)$ je ein Paar zum Eigenwerte λ gehöriger adjungierter Eigenfunktionen des Kernes $K(s,t)$ bilden. Aus diesem Grunde sollen im folgenden nur *reelle* Paare von adjungierten Eigenfunktionen betrachtet und unter dieser Bezeichnung verstanden werden. Indem wir über das Vorzeichen von $\psi(s)$ geeignet verfügen, können wir die Eigenwerte eines unsymmetrischen Kernes sämtlich als *positiv* voraussetzen.

Aus (30) folgt, wenn $\psi(s)$ durch (27) definiert wird, (26) und durch Einführung von (26) in (27) (31); ebenso folgt aus (31), wenn $\varphi(s)$ durch (26) definiert wird, (27) und durch Einführung von (27) in (26) (30). *Es entspricht also jeder Eigenfunktion des symmetrischen Kernes $\overline{K}(s,t)$ eine Eigenfunktion des symmetrischen Kernes $\underline{K}(s,t)$ und umgekehrt — und zwar so, daß das betreffende Funktionenpaar ein Paar adjungierter Eigenfunktionen des unsymmetrischen Kernes $K(s,t)$ bildet.*

§ 15.

Das vollständige normierte Orthogonalsystem eines unsymmetrischen Kernes.

Die adjungierten Funktionen eines vollständigen normierten Orthogonalsystems des Kernes $\overline{K}(s,t)$ bilden wieder ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem des Kernes $\underline{K}(s,t)$ und umgekehrt.

Beweis.

$$\int_a^b \psi_\mu(r)\,\psi_\nu(r)\,dr = \int_a^b dr\,\lambda_\mu \int_a^b K(t,r)\,\varphi_\mu(t)\,dt\,\lambda_\nu \int_a^b K(s,r)\,\varphi_\nu(s)\,ds$$

$$= \lambda_\mu \lambda_\nu \int_a^b \overline{K}(s,t)\,\varphi_\mu(t)\,\varphi_\nu(s)\,ds\,dt;$$

wegen (30) ergibt sich hieraus

$$\int_a^b \psi_\mu(s)\,\psi_\nu(s)\,ds = \frac{\lambda_\nu}{\lambda_\mu}\int_a^b \varphi_\mu(s)\,\varphi_\nu(s)\,ds.$$

Bilden also die Funktionen $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \cdots, \varphi_n(s), \cdots$ ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem des Kernes $\overline{K}(s,t)$, so folgt aus der letzten Gleichung, daß auch die adjungierten Funktionen $\psi_1(s), \psi_2(s), \cdots, \psi_n(s), \cdots$ sämtlich normiert und zueinander orthogonal sind. Es sei nun $\psi(s)$ eine Eigenfunktion von $\underline{K}(s,t)$ und $\varphi(s)$ ihre adjungierte, also eine Eigenfunktion von $\overline{K}(s,t)$. Dann ist gemäß Voraussetzung

$$\varphi(s) = \sum_\varrho c_\varrho \varphi_\varrho(s),$$

wo ϱ eine endliche Anzahl von Indizes durchläuft, und nach § 5 sämtliche $\varphi_\varrho(s)$ zum selben Eigenwerte gehören wie $\varphi(s)$. Dann folgt wegen der Gleichungen

$$\psi_\varrho(s) = \lambda \int_a^b K(t,s)\,\varphi_\varrho(t)\,dt,$$

$$\psi(s) = \lambda \int_a^b K(t,s)\,\varphi(t)\,dt$$

das Resultat

$$\psi(s) = \sum_\varrho c_\varrho \psi_\varrho(s).$$

Also bilden die Funktionen $\psi_1(s), \psi_2(s), \cdots, \psi_n(s), \cdots$ auch ein *vollständiges* normiertes Orthogonalsystem des Kernes $\underline{K}(s,t)$, was zu beweisen war; die Umkehrung ergibt sich in analoger Weise. Unter einem *vollständigen normierten Orthogonalsystem des unsymmetrischen Kernes $K(s,t)$ wollen wir das Paar zweier solcher adjungierter vollständiger normierter Orthogonalsysteme der Kerne $\overline{K}(s,t)$ und $\underline{K}(s,t)$ verstehen.*

§ 16.

Entwicklung willkürlicher Funktionen.

Es mögen die Funktionen

$$\varphi_1(s),\ \varphi_2(s), \cdots, \varphi_n(s), \cdots$$
$$\psi_1(s),\ \psi_2(s), \cdots, \psi_n(s), \cdots,$$

denen die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$ der Größe nach geordnet entsprechen mögen, ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem des unsymmetrischen Kernes $K(s, t)$ in der Definition des vorigen Paragraphen bilden. Dann gelten folgende Sätze:

Wenn identisch in s

$$\int_a^b K(t, s)\, h(t)\, dt = 0$$

ist, wo $h(s)$ *eine stetige Funktion bedeutet, so ist auch für jedes* ν

$$\int_a^b h(s)\, \varphi_\nu(s)\, ds = 0,$$

wie die Multiplikation der Gleichung (26) *mit* $h(s)\, ds$ *und Integration von a bis b ergibt; ebenso ist, wenn identisch in s*

$$\int_a^b K(s, t)\, h(t)\, dt = 0$$

ist, für jedes ν

$$\int_a^b h(s)\, \psi_\nu(s)\, ds = 0.$$

Umgekehrt gilt aber auch, wenn für jedes ν

$$\int_a^b h(s)\, \varphi_\nu(s)\, ds = 0$$

ist, die Gleichung

$$\int_x^b K(t, s)\, h(t)\, dt = 0,$$

und wenn für jedes ν

$$\int_a^b h(s)\, \psi_\nu(s)\, ds = 0$$

ist, die Gleichung

$$\int_a^b K(s, t)\, h(t)\, dt = 0.$$

Beweis. Wir beweisen nur die erste Behauptung, da der Beweis der zweiten derselbe ist. Da $h(s)$ gemäß Voraussetzung zu allen Funktionen eines vollständigen normierten Orthogonalsystems des symmetrischen Kernes $\overline{K}(s,t)$ orthogonal ist, so folgt nach § 9, daß

$$\int_a^b \overline{K}(s,t)\,h(t)\,dt = 0,$$

$$0 = \int_a^b \overline{K}(s,t)\,h(s)\,h(t)\,ds\,dt = \int_a^b dr \int_a^b K(s,r)\,h(s)\,ds \int_a^b K(t,r)\,h(t)\,dt$$

$$= \int_a^b dr\left(\int_a^b K(s,r)\,h(s)\,ds\right)^2;$$

folglich ist identisch in r

$$\int_a^b K(s,r)\,h(s)\,ds = 0,$$

was zu beweisen war.

Wenn

$$g(s) = \int_a^b K(s,t)\,h(t)\,dt$$

ist, wo $h(t)$ eine stetige Funktion bedeutet, so ist

$$g(s) = \sum_\nu \varphi_\nu(s)\int_a^b g(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt = \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu}\int_a^b h(t)\,\psi_\nu(t)\,dt$$

$$= \sum_\nu \int_a^b K(s,t)\,\psi_\nu(t)\,dt \int_a^b h(t)\,\psi_\nu(t)\,dt;$$

wenn

$$g(s) = \int_a^b K(t,s)\,h(t)\,dt$$

ist, so ist

$$g(s) = \sum_\nu \psi_\nu(s)\int_a^b g(t)\,\psi_\nu(t)\,dt = \sum_\nu \frac{\psi_\nu(s)}{\lambda_\nu}\int_a^b h(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt$$

$$= \sum_\nu \int_a^b K(t,s)\,\varphi_\nu(t)\,dt \int_a^b h(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt,$$

und die Reihen rechts konvergieren in beiden Gleichungen absolut und gleichmäßig.

Beweis. Wir wollen nur die erste Behauptung beweisen, da der Beweis der zweiten derselbe ist. Aus der dritten Darstellungsform ihres allgemeinen Gliedes gestattet der im § 2 bewiesene Konvergenzsatz die behauptete absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihe abzulesen. Setzt man nun

$$g(s) - \sum_\nu \varphi_\nu(s) \int_a^b g(t)\, \varphi_\nu(t)\, dt = f(s),$$

so folgt

$$\int_a^b f(s)\, \varphi_\nu(s)\, ds = 0, \tag{32}$$

und hieraus ergibt sich nach dem eben bewiesenen Theorem

$$\int_a^b K(t, s) f(t)\, dt = 0. \tag{33}$$

Nun ist

$$\int_a^b (f(s))^2\, ds = \int_a^b f(s)\, g(s)\, ds = \int_a^b h(t)\, dt \int_a^b K(s, t) f(s)\, ds = 0$$

wegen (33). Folglich ist $f(s) = 0$, was zu beweisen war.

Es seien $p(s)$ und $q(s)$ zwei stetige Funktionen. Der eben bewiesene Satz liefert dann

$$\int_a^b K(s, t)\, q(t)\, dt = \sum \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu} \int_a^b q(t)\, \psi_\nu(t)\, dt$$

und nach Multiplikation dieser Gleichung mit $p(s)\, ds$ und Integration von a bis b erhält man

$$\int_a^b \int_a^b K(s, t)\, p(s)\, q(t)\, ds\, dt = \sum_a \frac{1}{\lambda_\nu} \int_a^b p(s)\, \varphi_\nu(s)\, ds \int_a^b q(t)\, \psi_\nu(t)\, dt.$$

Dieser Satz entspricht der kanonischen Zerlegung einer bilinearen Form.

Aus der eben bewiesenen Gleichung ergibt sich, daß, wenn $\sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)\, \psi_\nu(t)}{\lambda_\nu}$ gleichmäßig konvergiert,

$$K(s, t) = \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)\, \psi_\nu(t)}{\lambda_\nu} \tag{34}$$

ist, und daß also insbesondere *diese Gleichung stets gültig ist, wenn das vollständige normierte Orthogonalsystem des Kernes $K(s, t)$ nur aus einer endlichen Anzahl von Funktionenpaaren besteht.*

§ 17.

Erweiterung der Voraussetzungen.

Wie eine der in § 13 auseinandergesetzten völlig analoge Schlußweise zeigt, können auch Unstetigkeiten des unsymmetrischen Kernes in einem durch folgende Voraussetzungen beschränkten Umfange zugelassen werden.

I. Die Punktmenge in der s, t-Ebene, welche aus den Unstetigkeitsstellen von $K(s,t)$ gebildet wird, soll auf jeder Geraden $s = \text{const.}$, $t = \text{const.}$ den äußeren Inhalt Null haben.

II. $\int\limits_a^b (K(s,t))^2\,dt$ und $\int\limits_a^b (K(t,s))^2\,dt$ sollen für $a \leqq s \leqq b$ endlich und bestimmt sein und stetige, nicht identisch verschwindende Funktionen von s darstellen.

Dann bleiben alle Sätze und Beweise dieses Kapitels bestehen, nur muß die Gültigkeit der Gleichung (34) auf den Stetigkeitsbereich von $K(s,t)$ beschränkt werden.

Ebenso ändert sich nichts in den Sätzen und Beweisen dieses Kapitels, wenn $s, t, r, \cdots$ Punkte eines n-dimensionalen, ganz im Endlichen liegenden, aus einer endlichen Anzahl analytischer Stücke bestehenden Gebildes in einem $(n+m)$-dimensionalen Raum bedeuten und $ds, dt, dr, \cdots$ die entsprechenden Elemente. Auch in diesem Fall bestimmen die Bedingungen I und II einen Bereich der Zulässigkeit von Unstetigkeiten.

Viertes Kapitel.

Über die beste Approximation von Funktionen zweier Variabeler durch Produktsummen von Funktionen einer Variabelen.

§ 18.

Das Approximationstheorem.

Es sei $K(s,t)$ eine gegebene, für $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ definierte reelle stetige Funktion. *Es werde verlangt, sie durch eine Summe von höchstens m Produkten einer stetigen Funktion von s mit einer stetigen Funktion von t möglichst gut zu approximieren*, wobei, wie gewöhnlich, als Maß der Approximation das über das Definitionsgebiet der gegebenen Funktion erstreckte Doppelintegral des Fehlerquadrates betrachtet wird.

Es mögen die Funktionen

$$\varphi_1(s),\ \varphi_2(s), \cdots, \varphi_\nu(s), \cdots;$$
$$\psi_1(s),\ \psi_2(s), \cdots, \psi_\nu(s), \cdots,$$

denen die positiven Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\nu, \cdots$ der wachsenden Größe nach geordnet entsprechen, ein *vollständiges normiertes Orthogonalsystem des unsymmetrischen Kernes* $K(s, t)$ in der Definition des § 15 bilden. Im speziellen Falle, daß die Anzahl der vom Index ν durchlaufenen Paare adjungierter Eigenfunktionen $\varphi_\nu(s), \psi_\nu(s) \leqq m$ ist, liefert die Gleichung (34) eine unmittelbare und triviale Lösung des gestellten Problems. Ist aber jene Anzahl unendlich oder endlich und $\geqq m$, *so wird die Lösung durch die Produktsumme*

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=m} \frac{\varphi_\nu(s)\,\psi_\nu(t)}{\lambda_\nu}$$

gegeben.

Beweis. Das Maß der Approximation M_m, dessen Minimum die Problemstellung fordert, wird gemäß Voraussetzung durch die Gleichung

$$M_m = \int_a^b\!\!\int_a^b \left(K(s, t) - \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \frac{\varphi_\nu(s)\,\psi_\nu(t)}{\lambda_\nu} \right)^2 ds\,dt$$

definiert.

Dieser Ausdruck reduziert sich bei Heranziehung der Definitionsgleichungen (26), (27) und bei Berücksichtigung der Orthogonalität und des Normiertseins des Systems der Funktionen $\varphi_\nu(s)$ und des Systems der Funktionen $\psi_\nu(s)$ leicht auf die Formel

$$(35) \qquad M_m = \int_a^b\!\!\int_a^b (K(s, t))^2 ds\,dt - \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \frac{1}{\lambda_\nu^2}.$$

Wir haben also zu zeigen, daß

$$(36) \quad \int_a^b\!\!\int_a^b \left(K(s, t) - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \alpha_\nu \beta_\nu \right)^2 ds\,dt \geqq \int_a^b\!\!\int_a^b (K(s, t))^2 ds\,dt - \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \frac{1}{\lambda_\nu^2}$$

ist für alle Systeme von n stetigen Funktionenpaaren

$$\alpha_1(s),\ \alpha_2(s), \cdots, \alpha_n(s);$$
$$\beta_1(t),\ \beta_2(t), \cdots, \beta_n(t),$$

wo $n \leqq m$ ist, und α_ν statt $\alpha_\nu(s)$ und β_ν statt $\beta_\nu(t)$ geschrieben wird. Wir können voraussetzen, daß die Funktionen $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ normiert und zueinander orthogonal sind; denn wäre das nicht der Fall, so könnten wir sie nach § 3 durch ein System von höchstens n solchen linear homogen mit konstanten Koeffizienten ausdrücken und dann die Produktsumme nach diesen ordnen. Dann ist

$$(37)\quad \int_a^b\int_a^b \Big(K(s,t)-\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\alpha_\nu\beta_\nu\Big)^2 ds\,dt = \int_a^b\int_a^b (K(s,t))^2 ds\,dt$$
$$+\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\int_a^b\Big(\alpha_\nu^2-2\alpha_\nu\int_a^b K(s,t)\,\beta_\nu\,dt\Big)ds$$
$$=\int_a^b\int_a^b (K(s,t))^2 ds\,dt+\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\int_a^b\Big(\alpha_\nu-\int_a^b K(s,t)\,\beta_\nu\,dt\Big)^2 ds$$
$$-\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\int_a^b\Big(\int_a^b K(s,t)\,\beta_\nu\,dt\Big)^2 ds.$$

Die zu beweisende Ungleichung (36) folgt also a fortiori aus der Ungleichung

$$0\leqq\sum_{\nu=1}^{\nu=m}\frac{1}{\lambda_\nu^2}-\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\int_a^b\Big(\int_a^b K(s,t)\,\beta_\nu\,dt\Big)^2 ds$$

und diese, weil $n\leqq m$ ist, wieder a fortiori aus der Ungleichung

$$(38)\qquad 0\leqq\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\frac{1}{\lambda_\nu^2}-\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\int_a^b\Big(\int_a^b K(s,t)\,\beta_\nu\,dt\Big)^2 ds,$$

welche wir jetzt beweisen wollen.

Gemäß dem in § 16 gegebenen Entwicklungssatze ist

$$(39)\qquad \int_a^b K(s,t)\,\beta_\nu\,dt=\sum_\varrho\frac{\varphi_\varrho(s)}{\lambda_\varrho}\int_a^b\beta_\nu\psi_\varrho(t)\,dt,$$

wo die Summe über alle Paare adjungierter Eigenfunktionen $\varphi_\varrho(s)$, $\psi_\varrho(t)$ des vollständigen normierten Orthogonalsystems zu erstrecken ist. Bei Berücksichtigung des Normiertseins und der Orthogonalität des Systems der Funktionen $\varphi_\varrho(s)$ folgt aus der Gleichung (39) leicht

$$(40)\qquad \int_a^b\Big(\int_a^b K(s,t)\,\beta_\nu\,dt\Big)^2 ds=\sum_\varrho\frac{1}{\lambda_\varrho^2}\Big(\int_a^b\beta_\nu\psi_\varrho(t)\,dt\Big)^2.$$

Da nun gemäß der Besselschen Ungleichung § 1

$$(41)\qquad 1=\int_a^b\beta_\nu^2\,dt\geqq\sum_\varrho\Big(\int_a^b\beta_\nu\psi_\varrho(t)\,dt\Big)^2$$

ist, und mithin letztere Summe konvergiert, so ergibt eine leichte identische Umformung der rechten Seite der Gleichung (40)

$$(42)\qquad \int_a^b\left(\int_a^b K(s,t)\,\beta_\nu\,dt\right)^2 ds = \frac{1}{\lambda_n^2} + \sum_{\mu=1}^{\mu=n}\left(\frac{1}{\lambda_\mu^2}-\frac{1}{\lambda_n^2}\right)\left(\int_a^b \beta_\nu\psi_\mu(t)\,dt\right)^2$$

$$-\sum_k\left(\frac{1}{\lambda_n^2}-\frac{1}{\lambda_k^2}\right)\left(\int_a^b \beta_\nu\,\psi_k(t)\,dt\right)^2 - \frac{1}{\lambda_n^2}\left[1-\sum_\varrho\left(\int_a^b \beta_\nu\,\psi_\varrho(t)\,dt\right)^2\right],$$

wo k alle Indizes $> n$ des vollständigen Orthogonalsystems durchläuft. Die für alle Werte von k gemäß Voraussetzung gültige Ungleichung

$$\lambda_k \geqq \lambda_n$$

und die Ungleichung (41) zeigen, daß

$$\sum_k\left(\frac{1}{\lambda_n^2}-\frac{1}{\lambda_k^2}\right)\left(\int_a^b \beta_\nu\,\psi_k(t)\,dt\right)^2 \geqq 0$$

und

$$\frac{1}{\lambda_n^2}\left[1-\sum_\varrho\left(\int_a^b \beta_\nu\,\psi_\varrho(t)\,dt\right)^2\right] \geqq 0$$

ist. Mithin folgt die zu beweisende Ungleichung (38) a fortiori aus der Ungleichung

$$0 \leqq \sum_{\nu=1}^{\nu=n}\frac{1}{\lambda_\nu^2} - \frac{n}{\lambda_n^2} - \sum_{\nu=1}^{\nu=n}\sum_{\mu=1}^{\mu=n}\left(\frac{1}{\lambda_\mu^2}-\frac{1}{\lambda_n^2}\right)\left(\int_a^b \beta_\nu\,\psi_\mu(t)\,dt\right)^2$$

$$= \sum_{\mu=1}^{\mu=n}\left(\frac{1}{\lambda_\mu^2}-\frac{1}{\lambda_n^2}\right)\left[1-\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\left(\int_a^b \psi_\mu(t)\,\beta_\nu\,dt\right)^2\right].$$

Daß aber dieser letzte Ausdruck $\geqq 0$ ist, folgt aus den gemäß Voraussetzung bestehenden Ungleichungen

$$\lambda_\mu \leqq \lambda_n$$

und aus der wegen der Orthogonalität und des Normiertseins des Systems der Funktionen β_ν gültigen Besselschen Ungleichung

$$1 = \int_a^b (\psi_\mu(t))^2\,dt \geqq \sum_{\nu=1}^{\nu=n}\left(\int_a^b \psi_\mu(t)\,\beta_\nu(t)\,dt\right)^2.$$

§ 19.

Das Maß der besten Approximation.

Das im vorigen Paragraphen definierte Maß der besten Approximation M_m einer Funktion $K(s,t)$ durch eine Summe von höchstens m Produkten einer Funktion von s mit einer Funktion von t verschwindet bei unbegrenzt wachsendem m.

Beweis. Gemäß der Gleichung (35) kann die zu beweisende Behauptung durch die Gleichung

$$\sum_{\varrho} \frac{1}{\lambda_\varrho^2} = \int_a^b\int_a^b (K(s,t))^2\, ds\, dt \tag{43}$$

ausgedrückt werden, wo λ_ϱ alle Eigenwerte des unsymmetrischen Kernes $K(s,t)$, jeden nach seiner Vielfachheit gezählt, durchläuft.

Nach dem Entwicklungssatz § 16 ist

$$\int_a^b K(s,t)\, K(r,t)\, dt = \sum_{\varrho} \frac{\varphi_\varrho(s)}{\lambda_\varrho} \int_a^b K(r,t)\, \psi_\varrho(t)\, dt = \sum_{\varrho} \frac{\varphi_\varrho(s)\, \varphi_\varrho(r)}{\lambda_\varrho^2}, \tag{44}$$

wobei die Summe bei festem s gleichmäßig in r und bei festem r gleichmäßig in s konvergiert. Wenn $r = s$ gesetzt wird, erhält man

$$\int_a^b (K(s,t))^2\, dt = \sum_{\varrho} \frac{(\varphi_\varrho(s))^2}{\lambda_\varrho^2}. \tag{45}$$

Aus der Gleichung (45) ergibt sich die zu beweisende Gleichung (43) durch eine nach s von a bis b erstreckte Integration, wenn diese auf der rechten Seite *gliedweise* ausgeführt werden darf; also insbesondere, wenn die Reihe auf der rechten Seite der Gleichung (45) *gleichmäßig* konvergiert. Den zur Schließung des Beweises allein noch erforderlichen Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (45), aus welcher übrigens wegen

$$\frac{\varphi_\varrho(s)\, \varphi_\varrho(r)}{\lambda_\varrho^2} \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{(\varphi_\varrho(s))^2}{\lambda_\varrho^2} + \frac{(\varphi_\varrho(r))^2}{\lambda_\varrho^2}\right)$$

auch die in s *und* r gleichmäßige Konvergenz der Reihe (44) folgt, leistet nun ein Theorem von Dini*), welches lautet:

Wenn eine Reihe positiver, stetiger, für $a \leqq s \leqq b$ definierter Funktionen der Variablen s so konvergiert, daß die Summe eine stetige Funktion von s darstellt, so ist die Konvergenz auch gleichmäßig.

Beweis. Es sei

$$v(s) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} u_\nu(s), \tag{46}$$

und es seien $v(s)$ und alle $u_\nu(s)$ für $a \leqq s \leqq b$ stetig und $\geqq 0$.

Es bezeichne P_n die aus allen denjenigen Punkten gebildete Punktmenge, für welche die stetige Funktion

$$R_n(s) = v(s) - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} u_\nu(s)$$

*) Dini „Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali", Pisa 1878, § 99.

ihr Maximum erreicht, das wir mit Max. (R_n) bezeichnen wollen. Dann wähle man aus jeder Punktmenge P_n einen Punkt α_n aus, und es sei α einer der Häufungspunkte der aus den Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots$ bestehenden Punktmenge. Es sei nun ε eine beliebig kleine, positive, von Null verschiedene Größe. Da gemäß der vorausgesetzten Konvergenz der Reihe (46)

$$\lim_{n=\infty} R_n(\alpha) = 0$$

ist, so gibt es einen Index p, so daß

$$R_p(\alpha) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{47}$$

ist. Wegen der Stetigkeit von $R_p(s)$, und weil α ein Häufungspunkt der Punktmenge $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots$ ist, läßt sich ein Index $q > p$ so bestimmen, daß

$$|R_p(\alpha_q) - R_p(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{48}$$

ist. Aus (47) und (48) folgt

$$R_p(\alpha_q) < \varepsilon.$$

Da nun wegen der vorausgesetzten Positivität der Funktionen $u_\nu(s)$ $R_n(s)$ nicht negativ sein kann und bei festem s mit wachsendem n nicht wachsen kann, so ergibt sich für $m > q > p$

$$0 \leqq \text{Max.}(R_m) = R_m(\alpha_m) \leqq R_q(\alpha_m) \leqq \text{Max.}(R_q) = R_q(\alpha_q) \leqq R_p(\alpha_q) < \varepsilon.$$

Also ist

$$\lim_{n=\infty} \text{Max.}(R_n) = 0,$$

was zu beweisen war.

Schlußbemerkung.

Auch Unstetigkeiten des Kernes können in dem in § 17 präzisierten Umfange zugelassen werden.

Ebenso ändert sich nichts in den Sätzen und Beweisen dieses Kapitels, wenn $s, t, r, \cdots$ Punkte eines n-dimensionalen, ganz im Endlichen liegenden, aus einer endlichen Anzahl analytischer Stücke bestehenden Gebildes in einem $(n+m)$-dimensionalen Raum bedeuten und $ds, dt, dr, \cdots$ die entsprechenden Elemente.

Fünftes Kapitel.

Über die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener.

§ 20.

Das vorgeschriebene Funktionensystem verschwindet in den Endpunkten des Definitionsintervalles.

Es sei $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_\nu(x), \cdots$ eine unendliche Reihe im Intervall $a \leqq x \leqq b$ definierter, reeller, stetiger und zweimal stetig differenzierbarer Funktionen, die außerdem noch für $x = a$ und $x = b$ sämtlich verschwinden mögen. Es sei ferner das System

$$\varphi_1''(x), \varphi_2''(x), \cdots, \varphi_\nu''(x), \cdots, \quad \text{wo} \quad \varphi_\nu''(x) \quad \text{für} \quad \frac{d^2\varphi_\nu(x)}{dx^2} \quad \text{geschrieben ist,}$$

ein *abgeschlossenes* d. h., wie schon in der Einleitung erklärt, ein solches, daß es keine von Null verschiedene stetige Funktion $f(x)$ gibt, welche für jedes ν der Gleichung

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_\nu''(x)\,dx = 0$$

genügt. Wir bilden dann

$$\psi_1(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{\int_a^b (\varphi_1'(y))^2\,dy}}$$

$$\psi_2(x) = \frac{\varphi_2(x) - \psi_1(x)\int_a^b \varphi_2'(z)\,\psi_1'(z)\,dz}{\sqrt{\int_a^b \left(\varphi_2'(y) - \psi_1'(y)\int_a^b \varphi_2'(z)\,\psi_1'(z)\,dz\right)^2 dy}}$$

$$\cdot$$
$$\cdot$$

$$\psi_\nu(x) = \frac{\varphi_\nu(x) - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\nu-1}\psi_\varrho(x)\int_a^b \varphi_\nu'(z)\,\psi_\varrho'(z)\,dz}{\sqrt{\int_a^b \left(\varphi_\nu'(y) - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\nu-1}\psi_\varrho'(y)\int_a^b \varphi_\nu'(z)\,\psi_\varrho'(z)\right)^2 dy}}$$

$$\cdot$$
$$\cdot$$

wobei $\varphi_\nu'(x)$, $\psi_\nu'(x)$ bezüglich für $\frac{d\varphi_\nu(x)}{dx}$ und $\frac{d\psi_\nu(x)}{dx}$ geschrieben sind.

Wir beachten ferner noch folgendes. Wie in § 3 gezeigt, verschwindet einer der Nenner in den obigen Ausdrücken dann und nur dann, wenn die entsprechende Funktion $\varphi_\nu'(x)$ linear homogen mit konstanten

Koeffizienten durch die vorhergehenden darstellbar ist. Da aber wegen der Gleichungen

$$\varphi_\nu(a) = 0$$

jede solche lineare homogene Relation zwischen den $\varphi'_\nu(x)$ auch zwischen den $\varphi_\nu(x)$ gültig bleibt und umgekehrt, so folgt, daß einer der Nenner dann und nur dann verschwindet, wenn die betreffende Funktion $\varphi_n(x)$ von den vorhergehenden linear abhängig ist. In diesem Fall ignorieren wir die betreffende Funktion $\varphi_n(x)$ und fahren in der Bildung der Funktionen $\psi_\nu(x)$ so fort, als ob in der gegebenen Reihe der $\varphi_\nu(x)$ die Funktion $\varphi_n(x)$ überhaupt nicht vorkäme. *Durch die obigen Formeln sind dann alle $\psi_\nu(x)$ als lineare homogene Aggregate der $\varphi_\nu(x)$ gegeben und umgekehrt.*

Es sei nun $g(x)$ eine beliebige im Intervall $a \leqq x \leqq b$ definierte einmal stetig differenzierbare Funktion, welche für $x = a$ und $x = b$ verschwinde. Dann ist

$$g(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \psi_\nu(x) \int_a^b g'(y)\, \psi'_\nu(y)\, dy,$$

und die Summe auf der rechten Seite konvergiert absolut und gleichmäßig.

Beweis. Nach § 3 bestehen die Gleichungen

$$\int_a^b \psi'_\mu(x)\, \psi'_\nu(x)\, dx = 1 \quad \text{oder} \quad 0,$$

je nachdem μ und ν gleich oder verschieden sind. Hieraus folgt gemäß dem Zusatz zu § 2 die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihe auf der rechten Seite der zu beweisenden Gleichung. Setzen wir nun

$$g(x) - \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \psi_\nu(x) \int_a^b g'(y)\, \psi'_\nu(y)\, dy = f(x),$$

so ergibt sich wegen

$$\int_a^b g(x)\, \psi''_\varrho(x)\, dx = -\int_a^b g'(x)\, \psi'_\varrho(x)\, dx$$

und

$$\int_a^b \psi_\nu(x)\, \psi''_\varrho(x)\, dx = -\int_a^b \psi'_\nu(x)\, \psi'_\varrho(x)\, dx = -1 \quad \text{oder} \quad 0,$$

je nachdem ν und ϱ gleich oder verschieden sind, für jedes ϱ

$$\int_a^b f(x)\, \psi''_\varrho(x)\, dx = 0;$$

da aber jede Funktion $\varphi''_\nu(x)$ sich linear homogen mit konstanten Koef fizienten durch eine endliche Anzahl der $\psi_\nu''(x)$ darstellen läßt, so folgt für jedes ν

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_\nu''(x)\,dx = 0,$$

und hieraus erlaubt uns die vorausgesetzte Abgeschlossenheit des Systemes der $\varphi_\nu''(x)$ zu schließen, daß $f(x)$ identisch verschwindet, was zu beweisen war.

§ 21.

Der allgemeine Fall.

Es sei $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_\nu(x), \cdots$ eine unendliche Reihe im Intervall $a \leqq x \leqq b$ definierter, reeller, stetiger, zweimal stetig differenzierbarer Funktionen, die jedoch keinerlei Grenzbedingungen unterworfen seien. Es sei ferner das System $\varphi_1''(x), \varphi_2''(x), \cdots, \varphi_\nu''(x), \cdots$ ein abgeschlossenes. Wir bilden dann für jeden Index ν

$$\overline{\varphi}_\nu(x) = \varphi_\nu(x) - \varphi_\nu(a) - \frac{x-a}{b-a}(\varphi_\nu(b) - \varphi_\nu(a));$$

dann gelten die Gleichungen

$$\overline{\varphi}_\nu(a) = \overline{\varphi}_\nu(b) = 0$$
$$\overline{\varphi}_\nu''(x) = \varphi_\nu''(x),$$

und es ist daher das System $\overline{\varphi}_1''(x), \overline{\varphi}_2''(x), \cdots, \overline{\varphi}_\nu''(x), \cdots$ auch ein abgeschlossenes. Nun konstruieren wir, wie im vorigen Paragraphen, die Funktionenreihe

$$\psi_1(x) = \frac{\overline{\varphi}(x)}{\sqrt{\int_a^b (\overline{\varphi}_1'(y))^2\,dy}}$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\psi_\nu(x) = \frac{\overline{\varphi}_\nu(x) - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\nu-1} \psi_\varrho(x) \int_a^b \overline{\varphi}_\nu'(z)\,\psi_\varrho'(z)\,dz}{\sqrt{\int_a^b \left(\overline{\varphi}_\nu'(y) - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\nu-1} \psi_\varrho'(y) \int_a^b \overline{\varphi}_\nu'(z)\,\psi_\varrho'(z)\,dz\right)^2 dy}}$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$

Ist dann $g(x)$ eine beliebige im Intervall $a \leqq x \leqq b$ definierte stetige und einmal stetig differenzierbare Funktion und setzt man

$$\overline{g}(x) = g(x) - g(a) - \frac{x-a}{b-a}(g(b) - g(a)),$$
$$\overline{g}(a) = \overline{g}(b) = 0,$$

so liefert das im vorigen Paragraphen bewiesene Entwicklungstheorem

$$\bar{g}(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \psi_\nu(x) \int_a^b \bar{g}'(y)\, \psi'_\nu(y)\, dy,$$

$$g(x) = \frac{b\,g(a) - a\,g(b)}{b-a} + x\,\frac{g(b)-g(a)}{b-a} + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \psi_\nu(x) \int_a^b g'(y)\, \psi'_\nu(y)\, dy,$$

und die Reihen rechts konvergieren absolut und gleichmäßig.

Wir haben beim Beweise der Entwicklungssätze dieses und des vorigen Paragraphen vorausgesetzt, daß das System der $\varphi''_\nu(x)$ ein abgeschlossenes ist; es hätte aber genügt etwas weniger vorauszusetzen, nämlich bloß, daß jede Funktion, welche zu allen $\varphi''_\nu(x)$ orthogonal ist, linear ist; denn das für den im vorigen Paragraphen gegebenen Beweis erforderliche identische Verschwinden von $f(x)$ ergibt sich wegen des Verschwindens von $f(x)$ in den Endpunkten des Intervalls aus der Tatsache, daß $f(x)$ linear sein muß.

Da jede stetige Funktion durch einmal stetig differenzierbare gleichmäßig approximiert werden kann, so ergibt sich aus dem letzten Entwicklungstheorem: *Es sei $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_\nu(x), \cdots$ eine unendliche Reihe für $a \leqq x \leqq b$ definierter, reeller, zweimal stetig differenzierbarer Funktionen, deren zweite Ableitungen ein abgeschlossenes System bilden; dann läßt sich jede für $a \leqq x \leqq b$ definierte stetige Funktion in eine Reihe endlicher linearer homogener Aggregate der Funktionen $1, x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_\nu(x), \cdots$ gleichmäßig konvergent entwickeln.*