Über das Anwachsen analytischer Funktionen.*)

Von

GEORG FABER in Karlsruhe.

Unter $\mathsf{M}(r)$ verstehe ich, wie üblich, den Maximalwert, den der absolute Betrag der im Kreise $|x| \leqq r$ regulären analytischen Funktion $f(x) = \sum_0^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu$ auf der Peripherie dieses Kreises annimmt. Die Funktion $\mathsf{M}(r)$ spielt bekanntlich bei funktionentheoretischen Überlegungen, besonders auch in der neueren Theorie der ganzen Funktionen eine große Rolle. Es ist allgemein bekannt, daß $\mathsf{M}(r)$ mit r monoton zunimmt, und es ist leicht zu beweisen, daß $\mathsf{M}(r)$ eine stetige Funktion von r ist; ferner ist unschwer einzusehen, daß nicht zu jeder stetigen monoton zunehmenden Funktion $\vartheta(r)$ eine analytische Funktion $f(x)$ gehört, deren $\mathsf{M}(r) = \vartheta(r)$ wäre. Es erhebt sich daher die Frage: welchen weiteren Einschränkungen unterliegen die Funktionen $\mathsf{M}(r)$? Diese Frage, deren Lösung auch Herr Borel**) als wünschenswert bezeichnet, scheint nicht näher untersucht zu sein; einen kleinen Beitrag hierzu liefere ich im folgenden, indem ich zeige, daß in einem rechtwinklgen (ξ, η)-Koordinatensystem die Kurven $\eta = \lg \mathsf{M}(e^\xi)$ — wo also $r = e^\xi$ gesetzt ist — nirgends konvex sind.

Die Funktion der zwei komplexen Veränderlichen x, y:

$$F(x, y) = \frac{1}{1 - y \cdot f(x)} = \sum_0^\infty {}^\nu y^\nu (f(x))^\nu$$

---

*) Nachdem ich die vorliegende Note der Annalenredaktion eingereicht hatte, teilte mir Herr Blumenthal mit, daß er schon im August d. J. von einer ganz andern Seite her zu dem gleichen Satz gelangt ist und denselben in den Jahresberichten der D. Math.-Ver. zu veröffentlichen gedenkt (vgl. Bd. 6, Heft 2).

**) Leçons sur les fonctions entières p. 120.

ist regulär, solange $|x| < r$, $|y| < \frac{1}{\mathsf{M}(r)}$ bleibt (denn in diesem Gebiete ist $|y \cdot f(x)| < 1$); dagegen hat die Funktion sicher eine singuläre Stelle für $|x| = r$, $|y| = \frac{1}{\mathsf{M}(r)}$; denn für mindestens einen Wert $x = r \cdot e^{i\vartheta}$ des Kreises $|x| = r$ wird $|f(x)| = \mathsf{M}(r)$, also $f(x) = \mathsf{M}(r) e^{i\vartheta_1}$, dann wird für $x = r \cdot e^{i\vartheta}$, $y = \frac{1}{\mathsf{M}(r)} \cdot e^{-i\vartheta_1}$ die Funktion $F(x, y) = \infty$.

r und $\frac{1}{\mathsf{M}(r)}$ sind demnach zusammengehörige Konvergenzradien der Potenzreihe $F(x, y) = \sum_0^\infty {}^{\mu, \nu} a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$; daraus folgt*) zunächst, daß $\mathsf{M}(r)$ differenzierbar ist (wenigstens in dem Sinne, daß die zwei vorwärts und rückwärts genommenen Differentialquotienten

$$\left(\frac{d\mathsf{M}(r)}{dr}\right)_+ \quad \text{und} \quad \left(\frac{d\mathsf{M}(r)}{dr}\right)_-$$

existieren, ob sie voneinander verschieden sein können, bleibe dahingestellt); sodann, daß $R = \frac{1}{\mathsf{M}(r)}$ der Differentialungleichung genügt:

$$\left(\frac{d^2 R}{dr^2}\right)_+ \leqq \frac{1}{R}\left(\frac{dR}{dr}\right)_+^2 - \frac{1}{r}\left(\frac{dR}{dr}\right)_+,$$

wo unter $\left(\frac{d^2 R}{dr^2}\right)_+$, solange die Existenz des zweiten Differentialquotienten nicht feststeht, der obere oder untere Limes für $h = 0$ von

$$\frac{\left(\frac{d(\mathsf{M}(r+h))^{-1}}{dr}\right)_+ - \left(\frac{d(\mathsf{M}(r))^{-1}}{dr}\right)_+}{h}$$

verstanden werden, und der Index $+$ durchweg durch den Index $-$ ersetzt werden darf.

Setzt man nun $\lg r = \xi$, $\lg \mathsf{M}(r) = \eta$, so geht nach einer ganz elementaren Rechnung die obige Differentialungleichung, abgesehen von dem stets positiven Faktor $e^\eta \cdot e^{-2\xi}$, über in $\left(\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\right)_+ \geqq 0$, womit die Behauptung bewiesen ist. Die so gefundene notwendige Beschränkung für die Funktionen $\mathsf{M}(r)$ ist nicht hinreichend, um dieselben vollständig zu charakterisieren.

Zum Schlusse will ich noch bemerken, daß die bekannte Lemairesche Grenzbeziehung zwischen den zusammengehörigen Konvergenzradien nun

---

*) S. Fabry C. R. Bd. 134 (1902), p. 1190—1192. — Faber, Math. Ann. Bd. 61 (1905), p. 300. — Hartogs, Math. Ann. Bd. 62 (1905), p. 77.

auch einen Grenzausdruck für die Funktion $\mathsf{M}(r)$ liefert: Bedeutet wieder $a_{\mu\nu}$ den Koeffizienten von x^{μ} in $(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)^{\nu}$, so ist:

$$\overline{\lim_{\mu+\nu=\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}| \cdot \frac{r^{\mu}}{(\mathsf{M}(r))^{\nu}}} = 1.$$

Statt der hier benutzten Hilfsfunktion $F(x, y)$ hätten natürlich auch beliebig viele andere dem gleichen Zweck dienen können; diese Bemerkung läßt sich vielleicht verwerten zur Herstellung anderer Grenzausdrücke für $\mathsf{M}(r)$, die zu weiteren Folgerungen geeigneter sind als der obige.

Karlsruhe, den 14. Oktober 1906.