Werk

Titel: Mathematische Annalen
Ort: Leipzig
Jahr: 1907
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN235181684_0063
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0063

LOG Id: LOG_0050
LOG Titel: Über Flächenscharen, deren orthogonale Trajektorien ebene Kurven sind
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684

Terms and Conditions

Contact

Über Flächenscharen, deren orthogonale Trajektorien ebene Kurven sind.

Von

Erich Mosch in Charlottenburg.

Die Untersuchungen von Flächenscharen haben sich bisher meist auf die dreifach orthogonalen Systeme bezogen; im folgenden soll auf eine Aufgabe eingegangen werden, die zuerst 1899 von der Académie de Toulouse gestellt wurde — soweit mir bekannt, ohne eine Beantwortung zu finden —: Flächenscharen zu untersuchen, deren orthogonale Trajektorien eben sind. Anfang 1905, als der erste Teil dieser Arbeit schon abgeschlossen war, erschienen in den Comptes Rendus zwei Noten von Carrus und Darboux*), die darin zu Resultaten gelangen, wie sie auf anderem Wege auch in der vorliegenden Arbeit erhalten werden. In einer weiteren Note (C. R., Band CXLIII, 1906) erledigt Carrus den in vorliegender Arbeit nicht behandelten Fall, daß die Flächenschar einem dreifach orthogonalen System angehört und orthogonale Trajektorien hat, deren Ebenen alle durch einen Punkt gehen. Schließlich ist noch ganz kürzlich in den *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* (série 2, tome VIII, 1906) eine Arbeit von Goursat erschienen: *Sur les familles de surfaces à trajectoires orthogonales planes.* Leider habe ich mir diese Arbeit nicht verschaffen können.

In § 1 sollen einige allgemeine Resultate über die Trajektorien abgeleitet werden. Die dann erfolgende Wahl des Koordinatensystems nötigt zu einer Teilung, in § 2 wird die Theorie von Scharen nichtabwickelbarer Flächen in Angriff genommen, in § 3 werden einige einfache Beispiele dazu gegeben, worauf in § 4 auf die Theorie von Scharen abwickelbarer Flächen, insbesondere von Ebenen- und Kegelscharen eingegangen wird.

§ 1.

Allgemeines.

Es sei eine Schar von einfach unendlich vielen Flächen mit dem Flächenparameter ϱ gegeben durch

$$(1) \qquad x = x(uv\varrho), \quad y = y(uv\varrho), \quad z = z(uv\varrho).$$

*) C. R., Band CXL, 23. Janvier 1905.

Bezeichnet man die Richtungscosinusse der Flächennormalen mit XYZ, so lauten die Differentialgleichungen der orthogonalen Trajektorien von (1):

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = dT, \tag{2}$$

wo dT das Linienelement einer Trajektorie ist. Die Bedingung dafür, daß die Trajektorien eben sind, lautet dann bekanntlich:

$$\Sigma \pm X dY d^2 Z = 0, \tag{3}$$

wo die d Zuwüchse längs der Trajektorien bedeuten und mit Hilfe von (2) zu berechnen sind. Statt (3) kann man auch schreiben:

$$\Sigma dX\, d(YdZ - ZdY) = 0, \tag{4}$$

wo das Summenzeichen — wie stets im folgenden — eine durch zyklische Vertauschung entstehende Summe bedeutet. Nimmt man mit (4) zusammen:

$$\Sigma X\, d(YdZ - ZdY) \equiv 0,$$

so folgt weiter:

$$\begin{aligned} & d(YdZ - ZdY) : d(ZdX - XdZ) : d(XdY - YdX) \\ = \ & (YdZ - ZdY) : \ (ZdX - XdZ) : \ (XdY - YdX). \end{aligned}$$

Ist also keine der Größen der rechten Seite Null, so können wir die Gleichung des Problems auch erhalten, indem wir eines der drei Verhältnisse

$$(YdZ - ZdY) : (ZdX - XdZ) : (XdY - YdX) \tag{5}$$

nach T differenzieren und das Resultat gleich Null setzen. Die drei Größen (5) sind übrigens den Richtungscosinussen der Trajektorienebenen proportional. Außerdem folgt, daß die Größen

$$\frac{YdZ - ZdY}{XdY - YdX} = c_1, \quad \frac{ZdX - XdZ}{XdY - YdX} = c_2 \tag{6}$$

längs der Trajektorien konstant, die Gleichungen (6) also die Gleichungen der ∞^2 Trajektorien sind. Fassen wir die Kurve $YdZ - ZdY = 0$, $XdY - YdX = 0$ (woraus $ZdX - XdZ = 0$ folgt), oder, was dasselbe ist, die Kurve $dX = dY = dZ = 0$ ins Auge, so sehen wir, daß c_1 und c_2 längs dieser Kurve unbestimmt werden, d. h. alle Trajektorien treffen sie. Betrachten wir noch den Krümmungsradius R_T einer Trajektorie:

$$\frac{1}{R_T^2} = \sum \left(\frac{d^2x}{dT^2}\right)^2 = \sum \left(\frac{dX}{dT}\right)^2 \tag{7}$$

so sehen wir, daß er für die Punkte jener Kurve $= \infty$ wird, die Trajektorien haben hier also Wendepunkte. Fassen wir zusammen, so haben wir den

Satz. *Hat man eine Flächenschar, deren orthogonale Trajektorien eben sind, so erhält man die Gleichungen der Trajektorien durch Differentiation. Alle Trajektorien treffen eine bestimmte Kurve und haben hier Wendepunkte.*

§ 2.

Scharen von nichtabwickelbaren Flächen.

Wir wählen jetzt die krummlinigen Koordinaten u, v und setzen noch voraus:

$$\sum \pm \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial \varrho} \neq 0. \tag{8}$$

Ein Nullsetzen dieser Funktionaldeterminante liefert bekanntlich die Umhüllungsfläche der Schar (1). Wir wählen u und v so, daß diese beiden Kurvenscharen bei der Gaußschen Abbildung auf die Einheitskugel in die Schar der Meridiane und Parallelkreise übergehen, daß also das Linienelement auf der Einheitskugel die Form annimmt:

$$ds = du^2 + \sin^2 u\, dv^2. \tag{9}$$

Außerdem führen wir zur Bestimmung eines Flächenpunktes Weingartensche Ebenenkoordinaten ein, d. h. XYZ und den Abstand w der Tangentialebene vom Koordinatenanfang. Mit der Wahl dieser Koordinaten beschränken wir uns zunächst auf die Betrachtung von Scharen *nichtabwickelbarer* Flächen. Auf die *abwickelbaren* Flächen, die nicht mit Hilfe von Ebenenkoordinaten behandelt werden können, werden wir später (in § 4) eingehen. Dann genügen XYZ den folgenden Differentialgleichungen*):

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u^2} = -\vartheta, \quad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u\, \partial v} = \operatorname{ctg} u \frac{\partial \vartheta}{\partial v}, \quad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2} = -\sin u \cos u \frac{\partial \vartheta}{\partial u} - \sin^2 u \cdot \vartheta. \tag{10}$$

Als allgemeinste Werte für XYZ ergeben sich daraus folgende:

$$X = (\alpha_1 \sin v + \beta_1 \cos v) \sin u + \gamma_1 \cos u, \quad Y = \cdots, \quad Z = \cdots, \tag{11}$$

wo $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3\ \beta_1 \cdots \gamma_3$ Funktionen von ϱ sind und außerdem

$$\Sigma\alpha^2 = \Sigma\beta^2 = \Sigma\gamma^2 = 1, \quad \Sigma\alpha\beta = \Sigma\alpha\gamma = \Sigma\beta\gamma = 0 \text{ usw.}$$

ist. Weiter ist dann (Bianchi p. 140):

$$x = wX + \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v}, \quad y = \cdots, \quad z = \cdots. \tag{12}$$

Kennt man also auch noch w, so ist die Flächenschar bestimmt; das Problem wird demnach auf die Bestimmung dieser Funktion hinauskommen. Übrigens läßt sich leicht folgende geometrische Deutung der Koordinatenscharen u und v verifizieren:

Satz. *Schneidet man eine Fläche mit einer Schar paralleler Ebenen und verbindet immer solche Punkte, in denen die Fläche unter gleichem Winkel geschnitten wird, so erhält man ∞^1 Kurven auf der Fläche. Verbindet man jetzt weiter immer solche Punkte, in denen die Tangenten der Kurven der ersten Schar einander parallel sind, so liefert dies eine zweite*

---

*) S. z. B. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Deutsch von Lukat. p. 122.

Schar von ∞^1 *Kurven. Bei der sphärischen Abbildung gehen diese beiden Scharen in die Scharen der Parallelkreise und der Meridiane über; es sind also unsere Kurven* u *und* v.

Wir spezialisieren unser Koordinatensystem noch, indem wir in (11):

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \quad \beta_2 = 1, \quad \beta_1 = \beta_3 = 0, \; \gamma_3 = 1, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0$$

setzen. Geometrisch bedeutet das, daß wir *alle* Flächen der Schar mit *derselben* Schar von Ebenen schneiden. Dann wird:

$$X = \sin u \sin v, \quad Y = \sin u \cos v, \quad Z = \cos u. \tag{13}$$

Ferner seien hier noch einige Formeln zusammengestellt, die später gebraucht werden. Sind EFG die Koeffizienten der ersten, $DD'D''$ die der zweiten Fundamentalform einer Fläche, r_1 und r_2 deren Hauptkrümmungsradien, so ist:

$$\begin{cases} D = -\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2} - w, \quad D' = -\dfrac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \operatorname{ctg} u \dfrac{\partial w}{\partial v}, \\ D'' = -\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2} - \sin u \cos u \dfrac{\partial w}{\partial u} - \sin^2 u \cdot w. \end{cases} \tag{14}$$

$$E = D^2 + \frac{D'^2}{\sin^2 u}, \quad F = D'\left(D + \frac{D''}{\sin^2 u}\right), \quad G = D'^2 + \frac{D''^2}{\sin^2 u}, \tag{15}$$

$$r_1 + r_2 = -\left(D + \frac{D''}{\sin^2 u}\right), \quad r_1 \cdot r_2 = \frac{DD'' - D'^2}{\sin^2 u}, \tag{16}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = -D\dfrac{\partial X}{\partial u} - \dfrac{D'}{\sin^2 u}\dfrac{\partial X}{\partial v}, \quad \dfrac{\partial x}{\partial v} = -D'\dfrac{\partial X}{\partial u} - \dfrac{D''}{\sin^2 u}\dfrac{\partial X}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial x}{\partial \varrho} = X\dfrac{\partial w}{\partial \varrho} + \dfrac{\partial X}{\partial u}\dfrac{\partial^2 w}{\partial u \partial \varrho} + \dfrac{1}{\sin^2 u}\dfrac{\partial X}{\partial v}\dfrac{\partial^2 w}{\partial v \partial \varrho}. \end{cases} \tag{17}$$

Wir betrachten jetzt die Gleichung (3) des Problems. Da XYZ nur von u und v abhängen, kann man (3) auch für die Einheitskugel deuten, deren Punkte ja durch XYZ gegeben sind. Hier bedeutet (3) nichts anderes als die Gleichung der ∞^2 größten Kreise, oder was dasselbe sagt, die Schar aller geodätischen Linien. Deren Gleichung lautet aber (Bianchi p. 154):

$$du\, d^2v - dv\, d^2u + 2 \operatorname{ctg} u\, du^2\, dv + \sin u \cos u\, dv^3 = 0. \tag{18}$$

Das ist eine andere Form der Gleichung (3), zu der man auch durch Einsetzen der Werte $X\,dX\,d^2X \cdots$ in (3) hätte kommen können. Jetzt sind $du\; dv\; d^2u\; d^2v$ zu berechnen. Multipliziert man die drei Gleichungen:

$$\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + \frac{\partial x}{\partial \varrho} d\varrho = X\,dT, \; \cdots, \; \cdots$$

der Reihe nach mit XYZ, $\dfrac{\partial X}{\partial u}\dfrac{\partial Y}{\partial u}\dfrac{\partial Z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial X}{\partial v}\dfrac{\partial Y}{\partial v}\dfrac{\partial Z}{\partial v}$ und addiert jedesmal, so erhält man wegen (17) und (9):

$$(19)\quad \frac{\partial w}{\partial \varrho}\, d\varrho = dT,\quad D du + D' dv = \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial \varrho}\, d\varrho,\quad D' du + D'' dv = \frac{\partial^2 w}{\partial v \partial \varrho}\, d\varrho,$$

oder statt der zwei letzten Gleichungen:

$$(20)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial \varrho}(DD''-D'^2)\dfrac{du}{dT} = \quad D''\dfrac{\partial^2 w}{\partial u \partial \varrho} - D'\dfrac{\partial^2 w}{\partial v \partial \varrho}, \\ \dfrac{\partial w}{\partial \varrho}(DD''-D'^2)\dfrac{dv}{dT} = -D'\dfrac{\partial^2 w}{\partial u \partial \varrho} + D\dfrac{\partial^2 w}{\partial v \partial \varrho}. \end{cases}$$

$d^2u\; d^2v$ werden für das Folgende nicht gebraucht. Man übersieht aber leicht, daß (18) eine partielle Differentialgleichung 3. Ordnung für w wird. Betrachten wir jetzt (18). Man kann diese Gleichung, vorausgesetzt, daß $du \neq 0$ ist, auch schreiben:

$$(21)\quad \frac{d}{du}\frac{dv}{du} + 2 \operatorname{ctg} u \frac{dv}{du} + \sin u \cos u \left(\frac{dv}{du}\right)^3 = 0$$

und hieraus folgt

$$(22)\quad \frac{dv}{du} = \frac{1}{\sin u \sqrt{C \sin^2 u - 1}}$$

und weiter:

$$(23)\quad v = -\frac{1}{2} \arcsin\left[\frac{2}{(C-1)\sin^2 u} - \frac{C+1}{C-1}\right] + C',$$

wo C und C' zwei Funktionen sind, die längs der einzelnen Trajektorien invariant bleiben. Für C und C' ergeben sich die Werte:

$$(24)\quad C = \frac{du^2 + \sin^2 u\, dv^2}{\sin^4 u\, dv^2},\quad C' = v + \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sin^2 u \cos^2 u\, dv^2 - du^2}{\sin^2 u \cos^2 u\, dv^2 + du^2}.$$

Setzt man für du und dv ihre Werte aus (20) ein, führt außerdem statt C und C' die Funktionen Θ und Λ ein durch:

$$(25)\quad C = \frac{1}{\cos^2 \Theta},\quad C' = \frac{\pi}{4} - \Lambda,$$

so erhält man für Θ und Λ die Ausdrücke:

$$(26)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2\Theta} = \dfrac{G\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial u \partial \varrho}\right)^2 - 2F\dfrac{\partial^2 w}{\partial u \partial \varrho}\dfrac{\partial^2 w}{\partial v \partial \varrho} + E\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial v \partial \varrho}\right)^2}{\sin^2 u\left(D\dfrac{\partial^2 w}{\partial v \partial \varrho} - D'\dfrac{\partial^2 w}{\partial u \partial \varrho}\right)^2}, \\ \operatorname{tg}(v+\Lambda) = \dfrac{D''\dfrac{\partial^2 w}{\partial u \partial \varrho} - D'\dfrac{\partial^2 w}{\partial v \partial \varrho}}{\sin u \cos u\left(-D'\dfrac{\partial^2 w}{\partial u \partial \varrho} + D\dfrac{\partial^2 w}{\partial v \partial \varrho}\right)}. \end{cases}$$

Wir hatten schon in (6) zwei Funktionen c_1 und c_2 gefunden, die längs der Trajektorien sich nicht änderten. c_1 und c_2 stehen mit Θ und Λ in dem folgenden Zusammenhang, den man leicht durch Rechnung verifiziert:

$$(27)\quad \begin{cases} \operatorname{tg} \Lambda = -\dfrac{c_1}{c_2}, & c_1 = \quad \sin \Lambda \operatorname{tg} \Theta, \\ \operatorname{tg} \Theta = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}; & c_2 = -\cos \Lambda \operatorname{tg} \Theta. \end{cases}$$

Da außerdem $c_1 c_2 1$ den Richtungscosinussen der Trajektorienebenen proportional sind, also $c_1 X + c_2 Y + Z = 0$ ist, so besteht die Relation:

$$(28)\quad \operatorname{tg} \Theta \cos (v + \Lambda) = \cos u.$$

Aus der Form von (26) kann man wieder den in § 1 bewiesenen Satz ableiten, daß alle Trajektorien eine Kurve treffen, nämlich die durch die Gleichungen

$$(29)\quad \frac{\partial^2 w}{\partial u \, \partial \varrho} = \frac{\partial^2 w}{\partial v \, \partial \varrho} = 0$$

gegebene, und in den Punkten dieser Kurve Wendepunkte haben.

Wir gehen jetzt zu den Ebenen der ∞^2 Trajektorien über. Die Richtungscosinusse ihrer Normalen sind ja wegen (27) proportional

$$\sin \Lambda, \quad -\cos \Lambda, \quad \operatorname{ctg} \Theta.$$

Bedeutet also $\xi \eta \zeta$ den laufenden, xyz einen festen Punkt einer Trajektorienebene, so lautet die Gleichung dieser ∞^2 Ebenen:

$$(30)\quad \xi \sin \Lambda - \eta \cos \Lambda + \zeta \operatorname{ctg} \Theta = x \sin \Lambda - y \cos \Lambda + z \operatorname{ctg} \Theta.$$

An sich enthalten xyz alle drei Variabeln $uv\varrho$; da es aber nur ∞^2 Ebenen geben darf — jede einzelne ist durch je einen Wert von Θ und Λ bestimmt — so muß die rechte Seite eine Funktion von Θ und Λ allein sein. Also:

$$(31)\quad x \sin \Lambda - y \cos \Lambda + z \operatorname{ctg} \Theta = f(\Lambda \Theta).$$

Denkt man sich hierin für $\Theta \Lambda x y z$ ihre Werte eingesetzt, so kommen von w nur die Differentialquotienten bis zur 2. Ordnung vor; außerdem enthält die Gleichung eine willkürliche Funktion f. Wir haben damit den

Satz. *Die Gleichung* (31) *ist eine Integralgleichung 2. Ordnung der allgemeinen Gleichung 3. Ordnung des Problems.*

§ 3.

Beispiele.

I) Wir stellen uns zunächst die Aufgabe, alle Kugelscharen zu finden, deren orthogonale Trajektorien eben sind. Aus der geometrischen Bedeutung von u und v folgt, daß diese Kurvenscharen in unserem Fall Krümmungslinien sind, daß also, wenn durch $R(\varrho)$ die Kugelradien gegeben sind, $D' = 0$, ferner wegen (16)

$$D = -R(\varrho), \qquad D'' = -R \sin^2 u$$

ist. Aus (14) und (12) folgt dann für w, xyz:

$$
(32)\qquad \begin{cases} w = R + [\alpha(\varrho)\sin v + \beta(\varrho)\cos v]\sin u + \gamma(\varrho)\cos u, \\ x = \alpha(\varrho) + R\sin u \sin v, \\ y = \beta(\varrho) + R \sin u \cos v, \\ z = \gamma(\varrho) + R\cos u. \end{cases}
$$

Aus (20) ergibt sich durch Einsetzen der Werte von $DD'D''$:

$$
\frac{du}{dv} = \sin^2 u \frac{\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial\varrho}}{\dfrac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial\varrho}}
$$

und hieraus:

$$
dv\,d^2u - du\,d^2v = 2\operatorname{ctg} u\,du^2\,dv + \sin^2 u\,dv^2\,d\frac{\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial\varrho}}{\dfrac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial\varrho}}.
$$

Die Differentialgleichung (18) wird damit zu

$$
dv^2\left[d\frac{\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial\varrho}}{\dfrac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial\varrho}} - \operatorname{ctg} u\,dv\right] = 0.
$$

Lassen wir zunächst den Fall $dv = 0$ beiseite, so vereinfacht sich die entstandene Gleichung nach der Differentiation und durch Einsetzen der sich aus (14) ergebenden dritten Differentialquotienten:

$$
\frac{\partial^3 w}{\partial u^2\,\partial\varrho} = R' - \frac{\partial w}{\partial\varrho}, \qquad \frac{\partial^3 w}{\partial u\,\partial v\,\partial\varrho} = \operatorname{ctg} u\frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial\varrho},
$$

$$
\frac{\partial^3 w}{\partial v^2\,\partial\varrho} = R'\sin^2 u - \sin u\cos u\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial\varrho} - \sin^2 u\frac{\partial w}{\partial\varrho}
$$

zu:

$$
\frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial\varrho}\,\frac{\partial^3 w}{\partial u\,\partial\varrho^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial\varrho}\,\frac{\partial^3 w}{\partial v\,\partial\varrho^2} = 0.
$$

Diese Gleichung sagt aus, daß das Verhältnis $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial\varrho} : \dfrac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial\varrho}$ frei von ϱ sein muß, d. h. wegen (32), daß

$$
\frac{(\alpha'\sin v + \beta'\cos v)\cos u - \gamma'\sin u}{(\alpha'\cos v - \beta'\sin v)\sin u}
$$

ϱ nicht enthalten darf. Dies führt auf folgende Werte für $\alpha\beta\gamma$:

$$
\alpha = a_1\varepsilon(\varrho) + a_2, \qquad \beta = b_1\varepsilon(\varrho) + b_2, \qquad \gamma = c_1\varepsilon(\varrho) + c_2,
$$

wo die abc Konstanten sind. Die Gleichungen der *Kurve der Mittelpunkte*

$$
x = \alpha, \qquad y = \beta, \qquad z = \gamma
$$

zeigen dann, daß diese Kurve *eine Gerade* ist. — Der vorhin ausgeschlossene Fall $dv = 0$ ergibt wegen (20) $\frac{\partial^2 w}{\partial v \partial \varrho} = 0$ und wegen (32)

$$\alpha' \sin v + \beta' \cos v = 0$$

d. h. $\alpha' = \beta' = 0$. α und β müssen Konstante sein. Die Kurve der Kugelmittelpunkte ist eine der z-Achse parallele Gerade. Wir haben also den

Satz. *Eine Kugelschar hat nur dann ebene orthogonale Trajektorien, wenn die Kugelmittelpunkte auf einer Geraden liegen; die Größe des Kugelradius kann sich dabei nach einem willkürlichen Gesetze ändern.*

Die Gestalt der Trajektorien ist in diesem Falle besonders einfach. Um sie zu übersehen, nehme man eine Schar von Kreisen, deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen, und konstruiere deren orthogonale Trajektorien. Man erhält Kurven, deren jede auf der Umhüllungskurve der Kreisschar eine Spitze hat, deren Verlauf im übrigen von der Funktion $R(\varrho)$ abhängt und die die Gerade der Kreismittelpunkte als Asymptote haben. Im Falle gleich großer Radien ist jede Trajektorie eine Tractrix.

II) Als zweites Beispiel wählen wir den Fall, in dem die Trajektorienebenen alle einer festen Geraden, etwa der z-Achse, parallel sind. Dann ist Θ wegen seiner geometrischen Bedeutung $= \frac{\pi}{2}$ (vgl. (30)), außerdem wegen (28) $\Lambda = \frac{\pi}{2} - v$ und wegen (26):

$$D' \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial \varrho} - D \frac{\partial^2 w}{\partial v \partial \varrho} = 0. \tag{33}$$

Statt (33) kann man wegen (20) auch schreiben $dv = 0$, d. h. v ist längs der Trajektorien konstant. Die Hauptgleichung (18) ist mit $dv = 0$ erfüllt, so daß wir es nur mit (33) zu tun haben. Diese Gleichung wandelt man mit Benutzung von (17) und (12) leicht in die folgende um:

$$w \cos u - \frac{\partial w}{\partial u} \sin u = \Phi\left(\frac{\partial w}{\partial \varrho}, \varrho\right), \tag{34}$$

wo Φ eine willkürliche Funktion ihrer Argumente ist. Von der Integration dieser Gleichung 1. Ordnung hängt die Lösung des Problems ab. Die Gleichung ist allgemein nicht integrierbar. Es seien aber noch einige Eigenschaften der betreffenden Flächenscharen angezeigt. Zunächst können auch hier, wenn auch die Größen Θ und Λ versagen, die Gleichungen der Trajektorien in endlicher Form gegeben werden. Erstens ist für dieselben $v = c_1$, zweitens folgt aus der Gleichung der Trajektorien, die in diesem Fall, wie leicht zu übersehen,

$$\xi \cos v - \eta \sin v = x \cos v - y \sin v \tag{35}$$

heißt, durch Einsetzen der Werte aus (12) und unter Berücksichtigung des Umstandes, daß es nur ∞^2 Trajektorienebenen gibt, daß

(36) $$v = c_1, \quad \frac{1}{\sin u}\frac{\partial w}{\partial v} = c_2$$

die gesuchten Gleichungen der Trajektorien sind.

Eine andere nicht ganz einfache Eigenschaft, die leicht zu verifizieren ist, ist die folgende: Die Flächenschar $v = c_1$ schneidet jede der Flächen ϱ in ∞^1 Kurven $\delta v = 0$. Die ∞^2 Trajektorienebenen andererseits bestimmen in jedem Flächenpunkte eine Fortschreitungsrichtung und man erhält so ∞^1 Kurven $D'\delta u + D''\delta v = 0$. Bezeichnet man den Winkel, unter dem sich zwei Kurven dieser beiden Scharen in einem Flächenpunkte treffen, mit ϑ, die beiden Normalkrümmungen der beiden Kurven mit $\frac{1}{\varrho_1}$ und $\frac{1}{\varrho_2}$, die Totalkrümmung und mittlere Krümmung der Fläche in jenem Punkte mit K und H, so besteht die Beziehung:

$$(H - K\varrho_1 \cos^2\vartheta)\varrho_2 = 1.$$

Schließlich kann man leicht folgende Eigenschaft ableiten:

Satz. *Die Umhüllungsfläche der Flächen ϱ berührt die Flächen nach ebenen Kurven, deren Ebenen senkrecht auf der z-Achse stehen.*

In einem Falle läßt sich die eben behandelte Aufgabe ganz durchführen: wenn die Schar der Trajektorienebenen sich auf eine einfach unendliche reduziert. Dann ist offenbar wegen (36), wenn φ eine willkürliche Funktion von v ist:

(37) $$\frac{1}{\sin u}\frac{\partial w}{\partial v} = \varphi(v).$$

Hieraus folgt durch Differentiation nach ϱ und u:

(38) $$\frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial \varrho} = 0, \qquad \operatorname{ctg} u \frac{\partial w}{\partial v} - \frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} = D' = 0,$$

Aus $D' = 0$ folgt wegen (15) noch $F = 0$, d. h. die Kurven u und v sind Krümmungslinien. Andererseits sind die Schnitte der Ebenen senkrecht zur z-Achse mit den Flächen ϱ gegeben durch $\delta z = 0$, oder, entwickelt, wegen (17) $\delta u = 0$, das sind aber die Krümmungslinien der einen Schar. *Die Flächen haben also eine Schar Krümmungslinien in parallelen Ebenen.* Aus (37) folgt noch:

(39) $$w = \psi(v)\sin u + \chi(u\varrho),$$

wo $\psi(v) = \int \varphi(v)\,dv$ gesetzt ist. Um die Form und Lage der Trajektorien zu untersuchen, beachten wir, daß deren Ebenen

(40) $$\xi \cos v - \eta \sin v = \psi'(v)$$

einen Zylinder umhüllen, dessen Gleichungen aus (40) sich in der Form ergeben:

(41) $$\begin{cases} \xi = \quad \psi' \cos v - \psi'' \sin v, \\ \eta = -\psi' \sin v - \psi'' \cos v. \end{cases}$$

Diese Gleichungen geben zugleich die Form der Leitkurve des Zylinders in der $\xi\eta$-Ebene an. Das Linienelement $d\sigma$ dieser Kurve ist:

$$(42) \qquad d\sigma = -(\psi' + \psi''')dv.$$

Die Flächen der Schar sind dargestellt durch:

$$(43) \qquad \begin{cases} x = \psi \sin v + \psi' \cos v + \left(\chi \sin u + \dfrac{\partial \chi}{\partial u} \cos u\right) \sin v, \\ y = \psi \cos v - \psi' \sin v - \left(\chi \sin u + \dfrac{\partial \chi}{\partial u} \cos u\right) \cos v, \\ z = \chi \cos u - \dfrac{\partial \chi}{\partial u} \sin u, \end{cases}$$

wo ψ und χ beliebige Funktionen ihrer Argumente sind. Andererseits kann man (43) auch als die Gleichungen der Trajektorien betrachten, jeder Wert $v = c_1$ liefert eine Trajektorie. Um darüber Aufschluß zu gewinnen, wie die Trajektorien in den Ebenen verteilt sind, greifen wir eine solche Ebene heraus und führen ein neues Koordinatensystem ein. Als $\mathfrak{z}$-Achse wählen wir die Gerade, längs deren die Ebene den Zylinder (41) berührt, als $\mathfrak{y}\mathfrak{z}$-Ebene die Trajektorienebene selbst. Nach der Transformation erhält man die Gleichungen der Trajektorien in der Form:

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} &= 0, \\ \mathfrak{y} &= \psi + \psi'' + \chi \sin u + \frac{\partial \chi}{\partial u} \cos u, \\ \mathfrak{z} &= \chi \cos u - \frac{\partial \chi}{\partial u} \sin u. \end{aligned}$$

Beachtet man, daß $\mathfrak{z}$ für alle Trajektorienebenen dieselbe Funktion von u und ϱ ist, da es von v unabhängig ist, beachtet man weiter, daß $\mathfrak{y} + \sigma$ wegen (42) auch von v frei ist, so erhält man das Resultat, daß die Kurven aller Ebenen kongruent sind, sowie, daß die Kurven einer Ebene mit denen aller andern dadurch zur Deckung gebracht werden können, daß man ihre Ebene auf dem Zylinder rollen läßt. Wendet man jetzt noch einen bekannten Satz von Ribaucour über die Umhüllungsfläche der Trajektorienebenen an*), so kann man den umhüllenden Zylinder durch eine beliebige abwickelbare Fläche ersetzen und hat damit den

Satz. *Nimmt man eine beliebige abwickelbare Fläche, konstruiert in einer ihrer Tangentialebenen eine einfach unendliche Kurvenschar und läßt die Tangentialebene samt der Kurvenschar auf der Abwickelbaren rollen, so sind die so erzeugten doppelt unendlich vielen Kurven die orthogonalen Trajektorien einer Flächenschar.*

---

*) s. z. B. von Lilienthal, „Grundlagen einer Krümmungstheorie der Kurvenscharen", p. 58.

§ 4.

Scharen von abwickelbaren Flächen.

Im vorhergehenden konnten infolge der Benutzung von Ebenenkoordinaten nur *nichtabwickelbare* Flächen betrachtet werden. Die dadurch entstandene Lücke wollen wir jetzt ausfüllen und nach Scharen von *Abwickelbaren* fragen, deren orthogonale Trajektorien eben sind.

I) *Ebenenscharen.* Die orthogonalen Trajektorien einer Ebenenschar

$$a_1(\varrho)x + a_2(\varrho)y + a_3(\varrho)z = a_4(\varrho), \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$$

sind gegeben durch

$$\frac{dx}{a_1} = \frac{dy}{a_2} = \frac{dz}{a_3} = dT.$$

Damit die Trajektorien eben sind, muß $\sum \pm \frac{dx}{dT}\frac{d^2y}{dT^2}\frac{d^3z}{dT^3} = 0$ sein. Die Bedingung kommt, wie leicht einzusehen, auf die folgende hinaus:

$$\Sigma \pm a_1 a_2' a_3'' = 0.$$

Setzt man

$$a_1 = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2+\mu^2}}, \quad a_2 = \frac{\mu}{\sqrt{1+\lambda^2+\mu^2}}, \quad a_3 = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2+\mu^2}},$$

so nimmt obige Determinantengleichung die Form an:

$$\lambda'\mu'' - \mu'\lambda'' = 0$$

und liefert

$$\lambda = c_1\nu(\varrho) + k_1, \qquad \mu = c_2\nu(\varrho) + k_2.$$

Die Gleichung der Ebenenschar wird damit

$$(c_1\nu + k_1)x + (c_2\nu + k_2)y + z = a_4\sqrt{1 + (c_1\nu + k_1)^2 + (c_2\nu + k_2)^2}.$$

Als Umhüllungsfläche dieser Ebenenschar findet man einen Zylinder. Da auch umgekehrt klar ist, daß eine Ebenenschar, die einen Zylinder umhüllt, ebene orthogonale Trajektorien hat, haben wir den

Satz. *Eine Ebenenschar hat dann und nur dann ebene orthogonale Trajektorien, wenn die Ebenen der Schar einen Zylinder umhüllen.*

II) *Kegelscharen.* Eine Schar von Kegelflächen sei durch die Gleichungen gegeben:

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} x = p(\varrho) + ul(v\varrho), \\ y = q(\varrho) + um(v\varrho), \\ z = r(\varrho) + un(v\varrho). \end{cases}$$

Die Funktionen $pl\cdots$ können unbeschadet der Allgemeinheit so gewählt werden, daß

$$\text{(2)} \qquad \Sigma p'^2 = 1, \quad \Sigma l^2 = 1, \quad \Sigma L^2 = 1$$

ist, wo $L = \frac{\partial l}{\partial v}\cdots$ gesetzt ist. Dann bedeuten die Gleichungen

$$\text{(3)} \qquad x = p(\varrho), \quad y = q(\varrho), \quad z = r(\varrho)$$

die Kurve der Kegelspitzen, ϱ den Bogen dieser Kurve, $l\,m\,n$ die Richtungscosinusse der Erzeugenden der Kegel; endlich liefert $u = 1$ für jeden bestimmten Kegel ϱ die Kurve, deren Punkte um die Einheit von der Kegelspitze entfernt auf den erzeugenden Geraden liegen, v ist der Bogen dieser Kurve.

Für die Richtungscosinusse der Kegelnormalen hat man

$$X = mN - nM, \quad \cdot\cdot\cdot, \quad \cdot\cdot\cdot, \tag{4}$$

und die Bedingungsgleichung dafür, daß wir es mit ebenen orthogonalen Trajektorien zu tun haben:

$$\Sigma dX\, d(YdZ - ZdY) = 0,$$

nimmt nach Einsetzen der Werte von XdX usw. und gehöriger Vereinfachung unter Berücksichtigung von (2) und den sich aus (2) durch Differentiation ergebenden Formeln die Gestalt an:

$$\Sigma(dl\, d^2L - dL\, d^2l) + \Sigma L dl[3(\Sigma dL^2 + \Sigma dl^2) - 4(\Sigma L dl)^2] = 0. \tag{5}$$

Führt man die Differentiationen weiter aus, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$F_0(d\varrho\, d^2v - dv\, d^2\varrho) + F_1 dv^3 + F_2 dv^2 d\varrho + F_3 dv\, d\varrho^2 + F_4 d\varrho^3 = 0, \tag{6}$$

worin

$$\left\{\begin{aligned}
F_0 &= \sum \frac{\partial L}{\partial v}\frac{\partial l}{\partial \varrho}, \qquad F_1 = \sum\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2 - 1,\\
F_2 &= \sum \frac{\partial l}{\partial \varrho}\frac{\partial^2 L}{\partial v^2} + \sum \frac{\partial L}{\partial v}\frac{\partial L}{\partial \varrho} + 3\sum L\frac{\partial l}{\partial \varrho}\left[\sum\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2 - 1\right],\\
F_3 &= 2\sum \frac{\partial l}{\partial \varrho}\frac{\partial^2 L}{\partial v\,\partial \varrho} - \sum \frac{\partial L}{\partial v}\frac{\partial^2 l}{\partial \varrho^2} + 6\sum L\frac{\partial l}{\partial \varrho}\sum\frac{\partial L}{\partial v}\frac{\partial L}{\partial \varrho}\\
&\qquad - 6\left(\sum L\frac{\partial l}{\partial \varrho}\right)^2 + 3\sum\left(\frac{\partial l}{\partial \varrho}\right)^2,\\
F_4 &= \sum \frac{\partial l}{\partial \varrho}\frac{\partial^2 L}{\partial \varrho^2} - \sum \frac{\partial L}{\partial \varrho}\frac{\partial^2 l}{\partial \varrho^2} + \sum L\frac{\partial l}{\partial \varrho}\left[3\sum\left(\frac{\partial L}{\partial \varrho}\right)^2 + 3\sum\left(\frac{\partial l}{\partial \varrho}\right)^2\right.\\
&\qquad \left. - 4\left(\sum L\frac{\partial l}{\partial \varrho}\right)^2\right]
\end{aligned}\right. \tag{7}$$

zu setzen ist.

Für $du\, dv\, d\varrho$ findet man aus den Gleichungen

$$dx = (mN - nM)dT \text{ usw.},$$

da

$$\frac{\partial x}{\partial u} = l, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = uL, \quad \frac{\partial x}{\partial \varrho} = p' + u\frac{\partial l}{\partial \varrho} \tag{8}$$

ist:

$$du = -\Sigma l p'\, d\varrho, \qquad dv = -\left(\frac{1}{u}\sum L p' + \sum L\frac{\partial l}{\partial \varrho}\right) d\varrho \tag{9}$$

und hieraus:

$$(10)\begin{cases} d\varrho\, d^2 v - dv\, d^2\varrho = -\frac{1}{u^2}\sum L p' \sum l p' d\varrho^3 - \frac{1}{u}\Big(\sum p' \frac{\partial L}{\partial v} dv + \sum p' \frac{\partial L}{\partial \varrho} d\varrho \\ \quad + \sum L p'' d\varrho\Big) d\varrho^2 - \Big(\sum L \frac{\partial^2 l}{\partial \varrho^2} d\varrho + \sum \frac{\partial l}{\partial \varrho}\frac{\partial L}{\partial v} dv + \sum \frac{\partial l}{\partial \varrho}\frac{\partial L}{\partial \varrho} d\varrho\Big) d\varrho^2. \end{cases}$$

Durch Einsetzen von (9) und (10) in (6) erhält diese Gleichung die Gestalt:

$$(11)\qquad \frac{f_0}{u^3} + \frac{f_1}{u^2} + \frac{f_2}{u} + f_3 = 0,$$

worin

$$f_0 = -F_1(\Sigma L p')^3,$$

$$f_1 = \sum L p'\Big[F_0\Big(\sum p' \frac{\partial L}{\partial v} - \sum L p'\Big) - 3F_1 \sum L p' \sum L \frac{\partial l}{\partial \varrho} + F_2 \sum L p'\Big],$$

$$f_2 = F_0\Big(\sum L \frac{\partial l}{\partial \varrho} \sum p' \frac{\partial L}{\partial v} - \sum p' \frac{\partial L}{\partial \varrho} - \sum L p'' + \sum L p' \sum \frac{\partial l}{\partial \varrho}\frac{\partial L}{\partial v}\Big)$$
$$- 3F_1 \sum L p' \Big(\sum L \frac{\partial l}{\partial \varrho}\Big)^2 + 2F_2 \sum L p' \sum L \frac{\partial l}{\partial \varrho} - F_3 \sum L p',$$

$$f_3 = F_0\Big(-\sum L \frac{\partial^2 l}{\partial \varrho^2} + \sum L \frac{\partial l}{\partial \varrho} \sum \frac{\partial l}{\partial \varrho}\frac{\partial L}{\partial v} - \sum \frac{\partial l}{\partial \varrho}\frac{\partial L}{\partial \varrho}\Big) - F_1\Big(\sum L \frac{\partial l}{\partial \varrho}\Big)^3$$
$$+ F_2\Big(\sum L \frac{\partial l}{\partial \varrho}\Big)^2 - F_3 \sum L \frac{\partial l}{\partial \varrho} + F_4$$

ist. Da die Funktionen f die Variable u gar nicht enthalten, muß wegen (11) einzeln:

$$f_0 = f_1 = f_2 = f_3 = 0$$

sein. Betrachten wir zunächst $f_0 = 0$. Das bedeutet entweder $F_1 = 0$ oder $\Sigma L p' = 0$.

A) $F_1 = 0$. Aus (7) folgt dann $\sum\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2 = 1$. Dann ist aber, da $\Sigma l L = 0$, also

$$\sum l \frac{\partial L}{\partial v} = -\sum L^2 = -1$$

ist:

$$\sum\Big(m\frac{\partial N}{\partial v} - n\frac{\partial M}{\partial v}\Big)^2 = \sum l^2 \sum\Big(\frac{\partial L}{\partial v}\Big)^2 - \Big(\sum l \frac{\partial L}{\partial v}\Big)^2 = 0,$$

d. h.:

$$(12)\qquad l = -\frac{\partial L}{\partial v},\ \cdots,\quad \cdots.$$

Betrachten wir nun eine Kurve $u = \text{const.}$ eines Kegels ϱ, also eine Leitlinie. Für sie ist:

$$x = p + ul,\ \cdots,\quad \cdots$$

ferner

$$x' = L,\quad x'' = \frac{1}{u}\frac{\partial L}{\partial v},\quad x''' = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 L}{\partial v^2},$$

und wir erhalten für ihren Krümmungsradius k und ihre Torsion T:

$$(13)\qquad \frac{1}{k^2}=\frac{1}{u^2}\sum\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2=\frac{1}{u^2},\qquad T=\frac{\left|L\ \frac{\partial L}{\partial v}\ \frac{\partial^2 L}{\partial v^2}\right|}{u\sum\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2}.$$

k ist konstant, T ist wegen (12) Null; wir haben es also mit einer Schar gerader Kreiskegel zu tun. Den halben Öffnungswinkel σ eines dieser Kegel erhält man aus:

$$(14)\qquad \sin\sigma=\frac{k}{u}.$$

Also ist wegen (13) $\sigma=\frac{\pi}{2}$; *die Kegel arten in Ebenen aus*, wir kommen auf den oben schon erledigten Fall der Ebenenschar.

B) $\sum Lp'=0$. Da dann auch $\sum p'\frac{\partial L}{\partial v}=0$ und $\sum Lp''+\sum p'\frac{\partial L}{\partial\varrho}=0$ ist, so werden f_1 und f_2 identisch Null; es bleibt nur noch

$$f_3=0$$

zu betrachten übrig. Zunächst sei noch folgendes bemerkt: Aus

$$\sum Lp'=0,\qquad \sum\frac{\partial L}{\partial v}p'=0$$

folgt:

$$(15)\qquad p'=\frac{M\frac{\partial N}{\partial v}-N\frac{\partial M}{\partial v}}{\sqrt{\sum\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2}},\ \cdots,\ \cdots.$$

Andrerseits folgt aus $\sum Ll=0,\quad \sum L\frac{\partial L}{\partial v}=0$:

$$L=\frac{m\frac{\partial N}{\partial v}-n\frac{\partial M}{\partial v}}{\sqrt{\sum\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2-1}},\ \cdots,\ \cdots$$

und hieraus nach Multiplikation mit LMN und Addition:

$$(16)\qquad \left|l\ L\ \frac{\partial L}{\partial v}\right|=-\sqrt{\sum\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2-1}.$$

Aus $\Sigma Lp'=0$ folgt weiter $\Sigma lp'=\varphi(\varrho)$, also mit Rücksicht auf (15), (16):

$$-\sqrt{\sum\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2-1}=\varphi(\varrho)\sqrt{\sum\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2}$$

oder:

$$(17)\qquad \sum\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2=\frac{1}{1-\varphi^2(\varrho)}=\psi^2(\varrho).$$

Aus (15) ergibt sich dann durch Differentiation nach v, wie leicht zu übersehen:

$$(18)\qquad L=\frac{\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}}{\sqrt{\sum\left(\frac{\partial^2 L}{\partial^2 v}\right)^2}},\ \cdots,\ \cdots.$$

Durch Multiplikation dieser Werte mit LMN und Addition erhält man, da $\sum L \frac{\partial^2 L}{\partial v^2} = -\sum \left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2$ ist:

$$\sqrt{\sum \left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}\right)^2} = -\psi^2,$$

und wegen (18) sind also LMN durch die Differentialgleichungen bestimmt:

$$L\psi^2(\varrho) + \frac{\partial^2 L}{\partial v^2} = 0, \cdots, \cdots. \tag{19}$$

Die allgemeinsten Lösungen derselben sind:

$$l = -\frac{A_1}{\psi} \cos(\psi v) + \frac{B_1}{\psi} \sin(\psi v) + C_1, \cdots, \cdots. \tag{20}$$

Die ABC, die Funktionen von ϱ sind, genügen dabei wegen der zwischen l und seinen Ableitungen bestehenden Formeln den Beziehungen:

$$\Sigma A^2 = \Sigma B^2 = 1, \quad \Sigma AB = \Sigma AC = \Sigma BC = 0, \quad \Sigma C^2 = \frac{\psi^2 - 1}{\psi^2}. \tag{21}$$

Setzt man jetzt die Werte für lmn in die Gleichung $f_3 = 0$ ein, vereinfacht gehörig und führt zur Abkürzung noch die Funktionen $\varphi\chi\omega$ ein durch:

$$\Sigma A'B = \varphi(\varrho), \quad \Sigma A'C = \chi(\varrho), \quad \Sigma B'C = \omega(\varrho), \tag{22}$$

so erhält man eine Gleichung von der Form:

$$a_1 \sin^3(\psi v) + a_2 \cos^3(\psi v) + a_3 \sin^2(\psi v)\cos(\psi v) + \cdots + a_9 \cos(\psi v) + a_{10} = 0. \tag{23}$$

In den Koeffizienten a kommt der Winkel ψv nicht vor, es sind Funktionen von ϱ allein. (23) muß also identisch verschwinden: Dies liefert, wenn durch $\mathfrak{K}$ der Koeffizient des betr. Arguments bezeichnet wird, die Relationen:

$$\begin{cases} \mathfrak{K}(\sin^3) = \mathfrak{K}(\cos^2 \sin) = -\mathfrak{K}(\sin), \\ \mathfrak{K}(\cos^3) = \mathfrak{K}(\sin^2 \cos) = -\mathfrak{K}(\cos), \\ \mathfrak{K}(\sin^2) = \mathfrak{K}(\cos^2) \quad = -\mathfrak{K}(1), \\ \mathfrak{K}(\sin \cos) = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Führt man die Rechnung durch, so erhält man als Ergebnis nur die beiden Gleichungen:

$$\begin{cases} \omega\psi^4(\omega^2 + \chi^2) - \varphi\chi\psi\psi' - 3\omega\psi'^2 + \psi(\omega\psi'' - \omega'\psi') = 0, \\ \chi\psi^4(\omega^2 + \chi^2) - \varphi\omega\psi\psi' - 3\chi\psi'^2 + \psi(\chi\psi'' - \chi'\psi') = 0, \end{cases} \tag{25}$$

denen man auch die Form geben kann:

$$(26)\quad \begin{cases} \omega\chi' - \chi\omega' = \varphi(\chi^2+\omega^2), \\ \psi^4(\omega^2+\chi^2)^2 - 3\psi'^2(\omega^2+\chi^2) + \psi\psi''(\omega^2+\chi^2) - \psi\psi'(\omega\omega'+\chi\chi') = 0. \end{cases}$$

Wir gehen zur Deutung dieser Gleichungen über. Aus (13) ergibt sich für Krümmungsradius und Torsion einer Leitlinie $u = \text{const.}$ eines Kegels ϱ:

$$\frac{1}{k} = \frac{\psi(\varrho)}{u},$$

d. h. längs der Leitlinie ist k konstant,

$$T = \frac{\left| L \ \frac{\partial L}{\partial v} \ \frac{\partial^2 L}{\partial v^2} \right|}{u \sum \left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2} = 0 \text{ wegen (19).}$$

Die Kegelschar besteht demnach aus geraden Kreiskegeln. Bezeichnen wir weiter Krümmungsradius und Torsion der Kurve (3), die von den Kegelspitzen gebildet wird, mit k_s und T_s, so erhält man mit Berücksichtigung von (15) und (20) und nach Einführung der Funktionen $\varphi\chi\omega$ die Ausdrücke:

$$(27)\quad \begin{cases} \frac{1}{k_s^2} = \frac{(\chi^2+\omega^2)\psi^2}{\psi^2-1}, \\ \frac{1}{T_s} = \frac{1}{\chi^2+\omega^2}[\omega\chi' - \chi\omega' - \varphi(\chi^2+\omega^2)]. \end{cases}$$

Aus der ersten Gleichung (26) ergibt sich sofort, daß die *Kurve der Kegelspitzen eben* ist.

Um die Kegelschar konstruieren zu können, müssen wir noch für jeden Punkt der Kegelspitzenkurve den Öffnungswinkel des zugehörigen Kegels kennen. Diesen liefert uns die zweite Gleichung (26). Der halbe Öffnungswinkel λ ist ja bestimmt durch:

$$(28)\quad \sin\lambda = \frac{k}{u} = \frac{1}{\psi}, \qquad \psi = \frac{1}{\sin\lambda}.$$

Aus der ersten Gleichung (27) folgt dann:

$$(29)\quad \chi^2 + \omega^2 = \frac{\cos^2\lambda}{k_s^2}.$$

Setzt man die Werte (29) und (28) in die zweite Gleichung (26) ein, so kommt:

$$(30)\quad 1 - k_s^2\lambda'^2 - kk_s'\lambda' \operatorname{tg}\lambda - k_s^2\lambda'' \operatorname{tg}\lambda = 0.$$

Aus dieser Gleichung findet man durch zwei Quadraturen:

$$\cos\lambda = C \sin\left(\int \frac{d\varrho}{k_s} + C'\right) \tag{31}$$

und *diese Formel liefert für jeden Punkt der Kegelspitzenkurve die Öffnung des zugehörigen Kegels.*

Wie liegen schließlich die Kegelachsen? Die Tangenten der Kegelspitzenkurve:

$$\frac{\xi - p}{p'} = \frac{\eta - q}{q'} = \frac{\zeta - r}{r'}$$

bilden im Punkte pqr mit den Erzeugenden des Kegels, deren Richtungscosinusse ja lmn sind, einen Winkel, dessen Cosinus gleich $\sum lp' = \frac{\sqrt{\psi^2 - 1}}{\psi}$ also $= \cos\lambda$, d. h. der gleich dem halben Öffnungswinkel ist. *Die Kegelachsen sind demnach die Tangenten der Kegelspitzenkurve.* Wir haben damit folgende Konstruktion der Kegelschar:

Satz. *Man gibt sich eine beliebige ebene Kurve, konstruiert in allen Punkten die Tangenten an diese Kurve und benutzt sie als Achsen, die Berührungspunkte als Spitzen der zu konstruierenden Kegel. Als halben Öffnungswinkel nimmt man den Winkel λ, der sich aus der Formel* (31) *ergibt, worin CC' willkürliche Konstanten sind und k_s den Krümmungsradius der gewählten Kurve in dem betreffenden Punkte bedeutet.*

Wählt man, um eine einfache Konstruktion zu erzielen, $C = 1$, $C' = 0$, so daß

$$\cos\lambda = \sin \int \frac{d\varrho}{k_s}$$

wird, so bemerkt man, daß das Integral den Winkel darstellt, den eine Tangente der Kegelspitzenkurve mit einer festen Tangente bildet. Dies führt zu dem

Satz. *Man gibt sich eine beliebige ebene Kurve und auf ihr eine feste Tangente. Von jedem Punkte der Kurve aus fällt man das Lot auf die feste Tangente. Durch Rotation dieser Lote um die Tangenten in den zugehörigen Kurvenpunkten erhält man die Kegel der Schar.*

III) Scharen von Zylinderflächen und von beliebigen Abwickelbaren.

Für diese Flächenscharen seien hier nur die Resultate angegeben. Geht man von ähnlichen Parameterdarstellungen aus wie in dem eben behandelten Beispiel, so erhält man in beiden Fällen ähnliche, nur noch weit kompliziertere Rechnungen als im Beispiel der Kegelscharen. Die Diskussion der dadurch erhaltenen Gleichungen führt zu einfachen Ergebnissen, die in keinem Verhältnisse zur Langwierigkeit der Rechnungen stehen, so daß die Hoffnung besteht, es werde gelingen, diese Resultate auch auf einfachem Wege abzuleiten. — Man gelangt zu folgenden Sätzen:

Eine Schar von Zylinderflächen hat nur dann ebene orthogonale Trajektorien, wenn die erzeugenden Geraden der Zylinder sämtlich einander parallel sind.

Um zur allgemeinsten Schar abwickelbarer Flächen zu gelangen, deren orthogonale Trajektorien ebene Kurven sind, geht man von einer Fläche aus, deren Krümmungslinien der einen Schar eben sind. Die Abwickelbaren längs der Krümmungslinien der zweiten Schar bilden dann die verlangte Flächenschar.