Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen.

Von

Hermann Weyl in Göttingen.

Die vorliegende Arbeit verfolgt das Ziel, die Theorie der singulären Integralgleichungen, wie ich sie, auf die Untersuchungen von Hilbert und Hellinger über die beschränkten quadratischen Formen von unendlichvielen Variablen*) gestützt, in einer kürzlich in den Mathematischen Annalen erschienenen Abhandlung**) entwickelt habe, für die Theorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung nutzbar zu machen. Es handelt sich dabei um Differentialgleichungen, welche an dem einen Ende ihres reellen Integrationsintervalls eine Singularität von mehr oder minder kompliziertem Charakter aufweisen, und um die Aufstellung der aus solchen Differentialgleichungen entspringenden Entwicklungen willkürlicher Funktionen, wie sie in dem einfachsten Falle der Gleichung $\frac{d^2u}{ds^2} = 0$ als Fouriersche Reihe und Fouriersches Integraltheorem seit langem bekannt sind. Nachdem Herr Hilb***) durch Ausführung eines ähnlichen Grenzübergangs, wie ihn Hilbert in seiner 4. Mitteilung anwendet, zwei besondere Typen solcher singulären Differentialgleichungen erfolgreich behandelt hat, werde ich hier die gestellte Frage nach einer andern Methode in allgemeinster Weise in Angriff nehmen, d. h. ohne irgend eine beschränkende Voraussetzung über die Natur der Singularität, welche die Differentialgleichung darbietet, zu machen.

Im ersten Teil dieser Arbeit wird durch eine besondere Anwendung des Imaginären diejenige Funktion $G_2{}^l(s, t)$ aufgestellt, welche (als

*) Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, 4. Mitteilung, Göttinger Nachrichten (Math. phys. Klasse) 1906, pag. 157 ff.; Hellinger, Inauguraldissertation, Göttingen 1907. Hellinger, Neue Begründung der Theorie quadratischer Formen von unendlichvielen Veränderlichen (Habilitationsschrift), Crelles Journal, Bd. 136. (Diese letztgenannte Abhandlung erschien erst während des Druckes der vorliegenden Arbeit.)

**) Bd. 66, pag. 273 ff.

***) In den ersten drei Kapiteln seiner Habilitationsschrift, Math. Ann. Bd. 66, pag. 1.

Ersatz der Greenschen Funktion) den Übergang von der Differential- zur Integralgleichung ermöglicht, und zugleich eine für das Folgende fundamentale Unterscheidung aller in Betracht kommenden Differentialgleichungen in zwei Typen, den *Grenzkreis-* und den *Grenzpunkt-Typus*, vorgenommen. Darauf werden in Kapitel II und III diese beiden Typen, namentlich mit Rücksicht auf die zu ihnen gehörigen Reihenentwicklungen bezw. Integraldarstellungen, gesondert untersucht. Zum Schluß endlich gebe ich eine Methode an, wie man bei der Diskussion spezieller Differentialgleichungen (nach Art der von Wirtinger*) und Hilb**) betrachteten) zu einer genaueren Kenntnis der Lage und Natur des Punkt- und Streckenspektrums gelangen kann.***)

Als Intervall der Differentialgleichung wähle ich stets, indem ich die singuläre Stelle ins Unendliche verlege, $0 \leqq s < \infty$.

Kapitel I.

Diskussion der Differentialgleichung $L(u) + iu = 0$.

1. Ist $p(s)$ eine für $s \geqq 0$ definierte, stetige, *positive* Funktion†), $q(s)$ eine beliebige gleichfalls im Bereiche $s \geqq 0$ erklärte, stetige Funktion, so hat die lineare Differentialgleichung

$$L(u) \equiv \frac{d}{ds}\left(p(s)\,\frac{du}{ds}\right) - q(s)\,u(s) = 0$$

eine den Randbedingungen

(1) $$u^{(1)}(0) = 1, \quad \left[p(s)\,\frac{du^{(1)}}{ds}\right]_{s=0} = 0$$

genügende Lösung $u^{(1)}(s)$, welche durch die in jedem endlichen Intervall gleichmäßig konvergente Reihe

(2) $$u^{(1)}(s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \underset{\substack{(0 \leqq \tau_1 \leqq t_1 \leqq \cdots \\ \cdots \leqq \tau_n \leqq t_n \leqq s)}}{\iint\cdots\iint} \frac{q(\tau_1)\cdots q(\tau_n)}{p(t_1)\cdots p(t_n)}\, d\tau_1\, dt_1 \cdots d\tau_n\, dt_n$$

gegeben ist.††) Eine zweite, die Randbedingungen

(3) $$u^{(2)}(0) = 0, \quad \left[p(s)\,\frac{du^{(2)}}{ds}\right]_{s=0} = 1$$

---

*) Math. Ann. Bd. 48, pag. 387.

**) a. a. O., Kap. II und III.

***) Einen Teil der Resultate dieser Arbeit habe ich bereits in den Göttinger Nachrichten 1909, pag. 37 ff., jedoch in weniger allgemeiner Form, veröffentlicht.

†) In der Tat wird die meistens zugrunde gelegte Voraussetzung der stetigen Differenzierbarkeit von $p(s)$ im folgenden nirgends benötigt.

††) Diese Formel ergibt sich mittels der auf lineare Differentialgleichungen bereits von Caqué, L. Fuchs, Poincaré, Günther u. a. angewandten, in allge-

befriedigende Lösung $u^{(2)}(s)$ derselben Gleichung wird durch die analoge Formel

$$(4) \qquad u^{(2)}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \underset{\substack{(0 \leqq t \leqq \tau_1 \leqq t_1 \leqq \cdots \\ \cdots \leqq \tau_n \leqq t_n \leqq s)}}{\iiint \cdots \iint} \frac{q(\tau_1) \cdots q(\tau_n)}{p(t)\, p(t_1) \cdots p(t_n)}\, dt\, d\tau_1\, dt_1 \cdots d\tau_n\, dt_n$$

geliefert. Jede andere Lösung von $L(u) = 0$ läßt sich aus diesen beiden in linear-homogener Weise mittels konstanter Koeffizienten zusammensetzen.

Die der inhomogenen Gleichung

$$(5) \qquad L(u) = g(s),$$

in der $g(s)$ eine beliebige stetige Funktion bedeutet, und den Randbedingungen

$$(6) \qquad u(0) = 0, \quad \left[p(s)\frac{du}{ds}\right]_{s=0} = 0$$

genügende Funktion berechnet sich aus

$$(7) \qquad u(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \underset{\substack{(0 \leqq \tau \leqq t \leqq \tau_1 \leqq t_1 \leqq \cdots \\ \cdots \leqq \tau_n \leqq t_n \leqq s)}}{\iiiint \cdots \iint} \frac{g(\tau)\, q(\tau_1) \cdots q(\tau_n)}{p(t)\, p(t_1) \cdots p(t_n)}\, d\tau\, dt\, d\tau_1\, dt_1 \cdots d\tau_n\, dt_n.$$

2. Wir führen jetzt einen Parameter λ ein und betrachten die Differentialgleichung

$$(8) \qquad L(u) + \lambda u = 0.$$

Die den Randbedingungen (1), bezw. (3) genügenden Lösungen $u^{(1)}(s;\lambda)$, $u^{(2)}(s;\lambda)$ dieser Gleichung (8) erhalten wir aus (2) und (4), indem wir $q(s)$ durch $q(s) - \lambda$ ersetzen. Sie sind also, wenn wir λ als *komplexe Variable* auffassen, ganze transzendente Funktionen*) von λ; die bei der Potenzentwicklung dieser ganzen Funktionen nach λ auftretenden Koeffizienten sind stetige, reelle Funktionen der reellen Variablen $s \geqq 0$.

Mit Hilfe einer festen Zahl h bilden wir

$$(9) \qquad \varphi(s;\lambda) = -\sin h \cdot u^{(1)}(s;\lambda) + \cos h \cdot u^{(2)}(s;\lambda).$$

$\varphi(s;\lambda)$ ist nichts anderes als die in gewisser Weise normierte, der Anfangsbedingung**)

$$(10) \qquad \left[\cos h \cdot u(s) + \sin h \cdot p(s)\frac{du}{ds}\right]_{s=0} = 0$$

unterworfene Lösung von (8).

---

meinster Weise aber erst von É. Picard [vergl. Traité d'Analyse (2. Aufl.), Bd. II, pag. 340 ff.] entwickelten Methode der sukzessiven Approximation.

*) Siehe auch Picard, Traité d'Analyse, Bd. III, pag. 89.

**) Bei dieser Schreibweise sind die möglichen Randbedingungen den Durchmessern eines Kreises umkehrbar eindeutig zugeordnet, indem (10) dann und nur dann für zwei Werte h dieselbe Randbedingung bedeutet, falls die Differenz der beiden Werte h ein ganzzahliges Multiplum von π ist.

3. Wir untersuchen (8) zunächst für *nicht-reelle* Werte von λ; dazu wird es genügen, den speziellen Wert $\lambda = i = \sqrt{-1}$ einzusetzen. Wir bilden die beiden Partikularlösungen

$$\begin{aligned} \varphi(s; i) = -\sin h \cdot u^{(1)}(s; i) + \cos h \cdot u^{(2)}(s; i) &= \eta(s), \\ \cos h \cdot u^{(1)}(s; i) + \sin h \cdot u^{(2)}(s; i) &= \vartheta(s). \end{aligned}$$

Ferner bedienen wir uns konsequent der folgenden Bezeichnungen. Ist c eine komplexe Größe, so bedeutet c_1 den Real-, c_2 den Imaginärteil von c, so daß

$$c = c_1 + i c_2$$

ist; die konjugiert-imaginäre Größe $c_1 - i c_2$ wird mit $\bar{c}$, der absolute Betrag von c mit $|c|$ bezeichnet:

$$|c|^2 = c \cdot \bar{c} = c_1{}^2 + c_2{}^2.$$

Ist $u(s)$ eine differenzierbare (komplexwertige) Funktion des Arguments $s \geqq 0$, so bedeutet

$$u'(a) = \left(\frac{du}{ds}\right)_a$$

den Differentialquotienten von $u(s)$ an der Stelle $s = a$. Ferner werde

$$p(s)\left(u(s)\frac{dv}{ds} - v(s)\frac{du}{ds}\right) = (uv)$$

gesetzt; soll hierin dem Argument s ein spezieller Wert a erteilt werden, so wird dem Symbol (uv) der Buchstabe a als unterer Index angehängt. (uv) erfüllt die folgenden Rechenregeln:

I. $$(uv) + (vu) = 0; \qquad (uu) = 0.$$

II. Ist

$$v(s) = c^{(1)} v^{(1)}(s) + c^{(2)} v^{(2)}(s) \qquad [c^{(1)}, c^{(2)} \text{ konstant}],$$

so gilt das assoziative Gesetz

$$(uv) = c^{(1)}(uv^{(1)}) + c^{(2)}(uv^{(2)}).$$

III. Real- und Imaginärteil von (uv) sind, entsprechend der Regel für die gewöhnliche Multiplikation, durch

$$(u_1 v_1) - (u_2 v_2), \quad \text{bezw.} \quad (u_1 v_2) + (u_2 v_1)$$

gegeben.

IV. $$(u\bar{u}) = 2i(u_2 u_1).$$

V. Sind $u(s)$, $v(s)$ stetige Funktionen, für die $L(u)$, $L(v)$ existieren und gleichfalls stetig sind, so gilt die sogenannte Greensche Formel

$$\int_0^a \{uL(v) - vL(u)\}\, ds = (uv)_a - (uv)_0. \tag{11}$$

Setzen wir in dieser Formel insbesondere für u eine Lösung der Gleichung

$$L(u) + iu = 0$$

und für v die konjugiert-imaginäre Funktion $\bar{u}$, welche der Differentialgleichung

$$L(\bar{u}) - i\bar{u} = 0$$

genügt, so verwandelt sich (11) in

$$\int_0^a |u|^2\, ds = (u_2 u_1)_a - (u_2 u_1)_0. \tag{12}$$

4. Es ist offenbar

$$(\vartheta \eta)_0 = 1.$$

Aus der Greenschen Formel folgt, daß infolgedessen identisch in s

$$(\vartheta \eta) = 1$$

wird. Bilden wir mit Hilfe einer beliebigen komplexen Zahl l die lineare Kombination

$$\beta^l(s) = \vartheta(s) + l \cdot \eta(s),$$

so gilt also auch (wie die Rechenregeln I und II zeigen) die Identität

$$(\beta^l \eta) = 1,$$

welche sich (nach III) in die beiden folgenden

$$(\beta_1{}^l \eta_1) - (\beta_2{}^l \eta_2) = 1, \qquad (\beta_1{}^l \eta_2) + (\beta_2{}^l \eta_1) = 0 \tag{13}$$

zerlegen läßt.

Wir betrachten unsere Differentialgleichung

$$L(u) + iu = 0 \tag{14}$$

zunächst in dem endlichen Intervall $0 \leqq s \leqq a$. Ist j irgend ein reeller und l ein solcher Wert, daß $\beta^l(s)$ der Randbedingung

$$\left[\cos j \cdot u(s) + \sin j \cdot p(s)\, \frac{du}{ds}\right]_{s=a} = 0 \tag{15}$$

genügt, so werden wir die Funktion

$$G^l(s,t) \begin{cases} = \eta(s)\,\beta^l(t) & (s \leqq t) \\ = \eta(t)\,\beta^l(s) & (t < s) \end{cases} \qquad \left[0 \leqq {s \atop t} \leqq a\right] \tag{16}$$

die zu den Randbedingungen (10) und (15) gehörige *Greensche Funktion* der Differentialgleichung (14) im Intervall $0 \cdots a$ nennen. Wegen

$$G^l(s,t) = G^0(s,t) + l\,\eta(s)\,\eta(t) \tag{17}$$

hängt die durch (16) definierte Funktion $G^l(s,t)$ in linearer Weise von dem Parameter l ab.

Wir deuten l als Punkt in einer komplexen l-Ebene mit dem rechtwinkligen Koordinatensystem $l_1 l_2 = 0$, und fragen, welche Lage l haben muß, damit $\beta^l(s)$ an der Stelle $s = a > 0$ einer *reellen* Randbedingung genügt, d. h. damit eine Beziehung der Gestalt

$$\cos j \cdot \beta^l(a) + \sin j \cdot p(a) \left(\frac{d\beta^l}{ds}\right)_a = 0 \qquad [0 \leqq j < \pi] \tag{18}$$

besteht. (18) zerfällt in die beiden Gleichungen

$$\cos j \cdot \beta_1{}^l(a) + \sin j \cdot p(a) \left(\frac{d\beta_1{}^l}{ds}\right)_a = 0, \tag{19_1}$$

$$\cos j \cdot \beta_2{}^l(a) + \sin j \cdot p(a) \left(\frac{d\beta_2{}^l}{ds}\right)_a = 0 \tag{19_2}$$

Um sie geometrisch zu deuten, bemerken wir zunächst, daß es einen bestimmten Punkt l^* gibt, für den

$$\beta_1{}^{l^*}(a) = 0, \qquad p(a) \left(\frac{d\beta_1{}^{l^*}}{ds}\right)_a = 0 \tag{20}$$

ist. Wegen der aus (12) hergeleiteten Formel

$$(\eta_2 \eta_1)_a = \int_0^a |\eta|^2 ds > 0 \tag{21}$$

wird (20) erfüllt sein, falls wir l^* so bestimmen, daß

$$(\beta_1{}^{l^*} \eta_1)_a = 0, \qquad (\beta_1{}^{l^*} \eta_2)_a = 0$$

ist. Diese beiden Gleichungen können, nachdem die zweite gemäß (13) durch

$$(\beta_2{}^{l^*} \eta_1)_a = 0$$

ersetzt ist, in die eine

$$(\beta^{l^*} \eta_1)_a = 0$$

zusammengefaßt werden, welche

$$(\vartheta \eta_1)_a + l^* (\eta \eta_1)_a = 0, \qquad l^* = \frac{i(\vartheta \eta_1)_a}{(\eta_2 \eta_1)_a}$$

ergibt. Ebenso findet man, daß der Punkt

$$l_* = \frac{(\vartheta \eta_2)_a}{(\eta_2 \eta_1)_a}$$

den Relationen

$$\beta_2{}^{l_*}(a) = 0, \quad p(a) \left(\frac{d\beta_2{}^{l_*}}{ds}\right)_a = 0$$

Genüge tut.

Bei der durch die lineare Transformation

$$m = \cos j \cdot \beta^l(a) + \sin j \cdot p(a) \left(\frac{d\beta^l}{ds}\right)_a$$
$$= [\cos j \cdot \vartheta(a) + \sin j \cdot p(a)\, \vartheta'(a)]$$
$$+ l \cdot [\cos j \cdot \eta(a) + \sin j \cdot p(a)\, \eta'(a)]$$

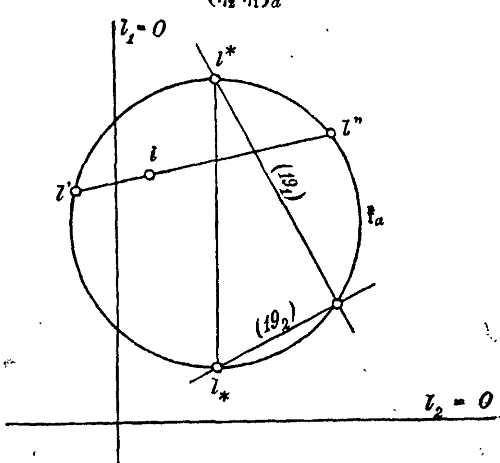

Fig. 1.

vermittelten ähnlichen Abbildung der l- auf eine komplexe m-Ebene gehen die Gleichungen (19) in

$$m_1 = 0, \qquad m_2 = 0$$

über. Infolgedessen stellt (19_1) eine durch l^*, (19_2) eine durch l_* gehende Gerade dar, welche sich *rechtwinklig* kreuzen. Durchläuft also j das Intervall $0 \cdots \pi$, so beschreibt der Schnittpunkt dieser beiden Geraden den über dem Durchmesser $l^* l_*$ errichteten Kreis $\mathfrak{k}_a$. *Dann und nur dann, wenn l auf diesem Kreise liegt, genügt $\beta^l(s)$ für $s = a$ einer reellen Randbedingung.* Da

$$l^* - l_* = \frac{i}{(\eta_2 \eta_1)_a}$$

ist, berechnet sich der Durchmesser $2r_a$ von $\mathfrak{k}_a$ aus

$$2 r_a \cdot \int_0^a |\eta|^2 ds = 1. \tag{22}$$

Orientieren wir die l_1- und l_2-Achse wie in Figur 1 (pag. 225), so sind l^*, l_* bezw. der höchste und der tiefste Punkt des Kreises $\mathfrak{k}_a$.

5. Es gilt der folgende grundlegende

Satz 1: *Jeder der Kreise $\mathfrak{k}_a$ $(a > 0)$ liegt in der oberen Halbebene $l_2 > 0$, und von zwei derartigen Kreisen umschließt stets der dem kleineren Werte von a entsprechende den anderen. Infolgedessen schrumpft $\mathfrak{k}_a$ mit unbegrenzt wachsendem a entweder auf einen innerhalb der sämtlichen $\mathfrak{k}_a$ gelegenen Punkt, den Grenzpunkt, zusammen oder konvergiert gegen einen Grenzkreis, der dann gleichfalls von allen $\mathfrak{k}_a$ umschlossen wird.*

Beweis: Da die Imaginärteile von

$$\eta(s), \quad p(s)\frac{d\eta}{ds}; \qquad \vartheta(s), \quad p(s)\frac{d\vartheta}{ds}$$

für $s = 0$ sämtlich verschwinden, ist

$$(\vartheta\bar{\vartheta})_0 = (\vartheta\vartheta)_0 = 0, \qquad (\eta\bar{\eta})_0 = 0;$$
$$(\vartheta\bar{\eta})_0 = (\vartheta\,\eta)_0 = 1, \qquad (\eta\bar{\vartheta})_0 = -1,$$

also

$$(\beta_2^l \beta_1^l)_0 = -\frac{i}{2}(\beta^l \bar{\beta}^l)_0 = -\frac{i}{2}(\bar{l} - l) = -l_2. \tag{23}$$

Als Gleichung des Kreises $\mathfrak{k}_a$ erhalten wir durch Elimination von j aus (19_1) und (19_2) die Relation

$$(\beta_2^l \beta_1^l)_a = 0,$$

welche sich unter Benutzung von (23) und der für $u = \beta^l$ gültigen Identität (12) in

$$\int_0^a |\beta^l|^2 ds = l_2 \tag{24}$$

verwandelt. Der Ungleichung

$$\int_0^a |\beta^l|^2 \, ds < l_2$$

werden also entweder alle innerhalb oder alle außerhalb des Kreises $\mathfrak{k}_a$ gelegenen Punkte genügen. Da aber zufolge (24) $\mathfrak{k}_a$ ganz in der oberen Halbebene, der Punkte $l = 0$ also außerhalb des Kreises $\mathfrak{k}_a$ liegt und für $l = 0$

$$\int_0^a |\beta^l|^2 \, ds > l_2 = 0$$

ist, wird

$$\int_0^a |\beta^l|^2 \, ds \leqq l_2 \tag{25}$$

diejenige Ungleichung sein, welche für die Punkte l der von $\mathfrak{k}_a$ begrenzten (abgeschlossenen) Kreisfläche $\mathfrak{K}_a$ charakteristisch ist. Daraus folgt sofort, daß $\mathfrak{k}_b$ ganz im Innern von $\mathfrak{K}_a$ liegt, falls $b > a$ ist.

Die Tatsache, daß der Grenzpunkt l bezw. jeder Punkt l der durch den Grenzkreis ausgeschnittenen Kreisscheibe $\mathfrak{K}$ innerhalb der sämtlichen $\mathfrak{K}_a$ liegt, drückt sich analytisch dadurch aus, daß für derartige Punkte die Ungleichung (25) identisch in a erfüllt, d. h.

$$\int_0^\infty |\beta^l|^2 \, ds \leqq l_2 \tag{26}$$

ist. Daraus folgt der

Satz 2: *Die Gleichung $L(u) + \lambda u = 0$ hat, wenn λ nicht reell ist, stets eine im Intervall $0 \cdots \infty$ absolut-quadratisch integrierbare Lösung.*

Aus (22) ergibt sich: $L(u) + iu = 0$ besitzt einen Grenzkreis oder einen Grenzpunkt, je nachdem $\eta(s)$ und damit überhaupt jede Lösung von $L(u) + iu = 0$ absolut-quadratisch integrierbar ist, oder nicht.

Im Grenzkreisfalle gilt offenbar für die Punkte l der Grenzkreisperipherie die Gleichung

$$\int_0^\infty |\beta^l|^2 \, ds = l_2, \tag{27}$$

welche auf

$$(\beta_2{}^l \beta_1{}^l)_\infty \equiv \lim_{s=\infty} (\beta_2{}^l \beta_1{}^l) = 0 \tag{28}$$

hinauskommt. Man kann sich auf folgende Weise davon überzeugen, daß auch im Grenzpunktfalle für den Grenzpunkt l die Beziehungen (27), (28) erfüllt sind.

Führen wir die Gleichung (24) des Kreises $\mathfrak{k}_a$ aus, so erhält das quadratische Glied $l\bar{l} = |l|^2$ den Koeffizienten $\int_0^a |\eta|^2 ds$. Infolgedessen ist, wenn l_a den Mittelpunkt von $\mathfrak{k}_a$ bedeutet, identisch in l

$$\begin{aligned}\int_0^a |\beta^l|^2 ds - l_2 &= \int_0^a |\eta|^2 ds \cdot \{|l - l_a|^2 - r_a^2\} \\ &\geqq - r_a^2 \int_0^a |\eta|^2 ds = -\frac{1}{2} r_a,\end{aligned} \tag{29}$$

und also wird im Grenzpunktfalle ($\lim\limits_{a=\infty} r_a = 0$) gewiß

$$\int_0^\infty |\beta^l|^2 ds \geqq l_2$$

sein. Hieraus und aus der für den Grenzpunkt gültigen Ungleichung (26) folgt die Behauptung.

Allgemein aber schließen wir aus (26) und (29), mag l nun den Grenzpunkt oder — im Grenzkreisfalle — irgend einen Punkt der Kreisfläche $\mathfrak{K}$ bedeuten,

$$\int_0^a |\beta^l|^2 ds \geqq l_2 - \frac{1}{2} r_a \geqq \int_0^\infty |\beta^l|^2 ds - \frac{1}{2} r_a,$$

d. i.

$$\int_a^\infty |\beta^l|^2 ds \leqq \frac{1}{2} r_a,$$

$$\int_0^a |\eta|^2 ds \int_a^\infty |\beta^l|^2 ds \leqq \frac{1}{4}.^{*)} \tag{30}$$

6. Die wichtigste Eigenschaft der Kreisfläche $\mathfrak{K}_a$ spricht sich in dem Satz aus:

Ist l irgend ein Punkt von $\mathfrak{K}_a$, so gelten für alle reellen, stetigen Funktionen $v(s)$, für welche

$$\int_0^a v^2 ds \leqq 1$$

ist, die Ungleichungen

$$-\frac{1}{2} \leqq \int_0^a \int_0^a G_1^l(s, t)\, v(s)\, v(t)\, ds\, dt \leqq \frac{1}{2}, \tag{31_1}$$

$$0 \leqq \int_0^a \int_0^a G_2^l(s, t)\, v(s)\, v(t)\, ds\, dt \leqq 1. \tag{31_2}$$

*) Vergl. die ganz analoge Beziehung für reelle λ in meiner oben erwähnten Note, Göttinger Nachrichten 1909, pag. 44.

Beweis: Ich beschränke mich auf den Beweis der zweiten Ungleichung, da die erste sich auf ganz entsprechende Art beweisen läßt, und nehme zunächst an, daß l ein Punkt *auf* dem Kreise $\mathfrak{k}_a$ ist, so daß $\beta^l(s)$ für $s = a$ einer reellen Randbedingung (15) genügt. Unsere Behauptung kommt dann darauf hinaus*), daß die sämtlichen Eigenwerte ν des Kernes

$$G_2{}^l(s, t) \qquad \left[0 \leqq {}^s_t \leqq a\right]$$

die Ungleichung $\nu \geqq 1$ befriedigen.

In der Tat: angenommen, ν wäre ein Eigenwert < 1 und $\varphi(s)$ eine zugehörige (reelle) Eigenfunktion, d. h.

$$\varphi(s) - \nu \int_0^a G_2{}^l(s, t)\, \varphi(t)\, dt = 0 \qquad [0 \leqq s \leqq a],$$

so setzen wir

$$\psi(s) = \nu \int_0^a G_1{}^l(s, t)\, \varphi(t)\, dt.$$

Dann wird

$$\psi(s) + i\varphi(s) = \int_0^a G^l(s, t)\, \nu\varphi(t)\, dt,$$

folglich

(32) $$L(\psi + i\varphi) + i(\psi + i\varphi) = -\nu\varphi$$

sein und $\psi + i\varphi$ den Randbedingungen (10) und (15) genügen. Da diese reell sind, so befriedigen auch die beiden Funktionen ψ, φ, jede für sich, jene Randbedingungen. Aus (32) schließen wir

$$L(\psi) = (1 - \nu)\varphi, \qquad L(\varphi) = -\psi,$$

durch deren Kombination

$$LL(\varphi) + (1 - \nu)\varphi = 0$$

hervorgeht. Setzt man

$$L(\varphi) - i\sqrt{1 - \nu} \cdot \varphi = -\psi - i\sqrt{1 - \nu}\, \varphi = u,$$

so genügt also u den Randbedingungen (10), (15) und der Gleichung

$$L(u) + i\sqrt{1 - \nu}\, u = 0.$$

Da die konjugiert-imaginäre Funktion $\bar{u}$ die gleichen Randbedingungen erfüllt, liefert die Greensche Formel

$$\int_0^a \{uL(\bar{u}) - \bar{u}L(u)\}\, ds = 2i\sqrt{1 - \nu} \int_0^a |u|^2 ds = 0.$$

Infolgedessen ist $u(s)$, also auch sein Imaginärteil, d. h. $\varphi(s)$ identisch $= 0$.

*) Hilbert, 5. Mitteilung, Göttinger Nachrichten 1906, pag. 460.

Damit ist die Annahme eines Eigenwertes $\nu < 1$ widerlegt und (31_2) für alle Punkte l *auf* $\mathfrak{k}_a$ bewiesen.

Sind l', l'' irgend zwei Punkte auf $\mathfrak{k}_a$ und bezeichnet (s. Fig. 1)

$$l = \tau l' + (1-\tau) l'' \qquad (0 \leqq \tau \leqq 1)$$

denjenigen Punkt der Sehne $l'l''$, welcher sie im Verhältnis $(1-\tau):\tau$ teilt, so gilt vermöge (17)

$$G_2{}^l(s,t) = \tau G_2{}^{l'}(s,t) + (1-\tau) G_2{}^{l''}(s,t).$$

Da für l' und l'' die Relation (31_2) bereits als zutreffend erkannt ist, folgt sie nach der letzten Gleichung auch für alle Punkte der Sehne $l'l''$ und damit für alle Punkte der Kreisfläche $\mathfrak{K}_a$ überhaupt.

7. Kehren wir zu dem Intervall $0 \leqq s < \infty$ zurück, so werden wir nur dann, falls l ein Punkt der Grenzkreisperipherie $\mathfrak{k}$, bezw. der Grenzpunkt ist,

$$G^l(s,t) \qquad \left[0 \leqq {s \atop t} < \infty\right]$$

eine, bezw. die *zu der Randbedingung* (10) *gehörige Greensche Funktion des Differentialausdrucks* $L(u) + iu$ *im Intervall* $0 \leqq s < \infty$ nennen. Ist die Gleichung vom Grenzkreistypus, so bedarf es zur eindeutigen Festlegung einer bestimmten Greenschen Funktion noch einer Randbedingung für $s=\infty$; da sich diese Gleichungen (s. das folgende Kapitel) auch in jeder anderen Hinsicht wie Gleichungen ohne Singularitäten verhalten*), hat man danach den Grenzkreisfall als den regulären aufzufassen. Im Grenzpunktfalle ist hingegen die Greensche Funktion durch die eine Randbedingung (10) für $s=0$ vollkommen festgelegt, so daß eine Randbedingung im Unendlichen gar nicht erst in Frage kommt: für dieses Verhalten liefern diejenigen Differentialgleichungen, für die $q(s)$ eine endliche untere Grenze besitzt, wie wir sogleich sehen werden, ein typisches Beispiel. Das geometrische Bild der ineinander geschachtelten Kreise $\mathfrak{k}_a$ gibt, wie mir scheint, eine gute Einsicht in die Gründe und Bedeutung der dargelegten Fallunterscheidung.

Da der Grenzpunkt, bezw. der Grenzkreis $\mathfrak{k}$ im Innern der sämtlichen $\mathfrak{K}_a$ liegt, liefert die im Absatz 6 bewiesene Tatsache, zusammen mit früheren Betrachtungen, den

Satz 3: *Ist* $G^l(s,t)$ *eine, bezw. die zu der Randbedingung* (10) *gehörige Greensche Funktion des Differentialausdrucks* $L(u)+iu$ *(im Intervalle* $0\cdots\infty$),

*) Transformiert man die Gleichungsprobleme, welche Hilbert (Gött. Nachr. 1904, pag. 213ff.), Kneser (Math. Ann. Bd. 58, pag. 81ff. und Bd. 63, pag. 477ff.) u. a. untersucht haben, auf das Intervall $0\cdots\infty$, so erhält man stets Gleichungen vom Grenzkreistypus.

so gelten für alle stetigen reellen Funktionen $v(s)$, *deren quadratisches Integral* $\int\limits_0^\infty v^2 ds \leqq 1$ *ist, und alle* $a > 0$ *die Beziehungen*

$$(33_1) \qquad -\frac{1}{2} \leqq \int\limits_0^a\int\limits_0^a G_1^l(s,t)\,v(s)\,v(t)\,ds\,dt \leqq \frac{1}{2},$$

$$(33_2) \qquad 0 \leqq \int\limits_0^a\int\limits_0^a G_2^l(s,t)\,v(s)\,v(t)\,ds\,dt \leqq 1.$$

Außerdem existieren die Integrale

$$\int\limits_0^\infty (G_1^l(s,t))^2\,dt, \qquad \int\limits_0^\infty (G_2^l(s,t))^2\,dt$$

und sind stetige Funktionen von s.

Den Hauptinhalt dieses Satzes können wir auch dahin zusammenfassen, daß *Real- und Imaginärteil der Greenschen Funktion beschränkte Kerne* [im Sinne der Theorie der singulären Integralgleichungen*)] *sind.*

Kapitel II.

Eigenfunktionen im Grenzkreisfalle.

8. Wir behandeln jetzt zunächst den *Grenzkreisfall* und wählen für l irgend einen Punkt des Grenzkreises $\mathfrak{k}$, so daß

$$(34) \qquad (\beta_2^l\beta_1^l)_\infty = \lim_{s=\infty}(\beta_2^l\beta_1^l) = 0$$

ist. Für den Kern

$$(35) \qquad G_2^l(s,t) \qquad \left[0 \leqq {s \atop t} < \infty\right]$$

gilt dann wegen

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty |G^l(s,t)|^2\,ds\,dt = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty (G_1^l(s,t))^2\,ds\,dt + \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty (G_2^l(s,t))^2\,ds\,dt$$

$$\leqq 2\int\limits_0^\infty |\eta|^2\,ds \cdot \int\limits_0^\infty |\beta^l|^2\,ds$$

ohne Abänderungen die Theorie der regulären Integralgleichungen, wie sie von Herrn Hilbert in seiner 5. Mitteilung**) entwickelt ist. Um die Eigenfunktionen des Kerns (35) festzustellen, fragen wir zunächst, wann

*) Math. Ann. Bd. 66, pag. 276.

**) Gött. Nachr. 1906, pag. 439 ff.

sich eine Funktion $f(s)$ mittels einer reellen, stetigen, im Intervall $0\cdots\infty$ quadratisch integrierbaren Funktion $g(s)$ in der Form

$$f(s)=\int_0^\infty G_2^l(s,t)\,g(t)\,dt \tag{36}$$

darstellen läßt.

Besteht eine solche Darstellung, so setze ich

$$f^*(s)=\int_0^\infty G_1^l(s,t)\,g(t)\,dt.$$

Für die komplexwertige Funktion

$$u(s)=f^*(s)+if(s)$$

findet man alsdann

$$\left\{\begin{aligned} u(s)&=\int_0^\infty G^l(s,t)\,g(t)\,dt\\ &=\beta^l(s)\int_0^s\eta(t)\,g(t)\,dt+\eta(s)\int_s^\infty\beta^l(t)\,g(t)\,dt,\\ p(s)\frac{du}{ds}&=p(s)\frac{d\beta^l}{ds}\int_0^s\eta(t)\,g(t)\,dt+p(s)\frac{d\eta}{ds}\int_s^\infty\beta^l(t)\,g(t)\,dt,\\ L(u)+iu&=-(\beta^l\eta)\cdot g(s)=-g(s). \end{aligned}\right. \tag{37}$$

Die letzte Gleichung zerfällt in

$$\left\{\begin{aligned} f^*&=-L(f),\\ g&=f-L(f^*). \end{aligned}\right. \tag{38}$$

Aus (37) folgt ferner, daß u, und mithin auch f und f^* gesondert, der Randbedingung (10) genügen müssen. Außerdem findet sich, da $(\beta^l\eta)=1$ ist,

$$(\beta^l u)_\infty=\lim_{s=\infty}(\beta^l u)=\lim_{s=\infty}\left\{(\beta^l\eta)\cdot\int_s^\infty\beta^l(t)\,g(t)\,dt\right\}=0. \tag{39}$$

Wegen (34), weil $\eta(s)$ absolut quadratisch integrierbar ist und $(\overline{\beta^l}\eta)$ für $0\leqq s<\infty$ zwischen endlichen Grenzen bleibt, muß aber auch

$$(\overline{\beta^l}u)_\infty=\lim_{s=\infty}\left\{(\overline{\beta^l}\beta^l)\cdot\int_0^s\eta(t)\,g(t)\,dt+(\overline{\beta^l}\eta)\cdot\int_s^\infty\beta^l(t)\,g(t)\,dt\right\}=0 \tag{40}$$

sein. Die Gleichungen (39), (40) ergeben, daß

$$(\beta_1^l u)_\infty=0,\qquad(\beta_2^l u)_\infty=0 \tag{41}$$

ist. Da $\beta_1^l(s)$, $\beta_2^l(s)$ reell sind, wird sowohl $f^*(s)$ als auch $f(s)$, für u

gesetzt, diesen Randbedingungen (41) Genüge leisten. Zusammenfassend können wir daher sagen, *daß f, $L(f)$, $LL(f)$ stetig und im Intervall* $0 \cdots \infty$ *quadratisch integrierbar sein, und ferner f sowie $L(f)$ der Randbedingung* (10) *für* $s = 0$ *und den Randbedingungen* (41) *für* $s = \infty$ *genügen müssen.*

Diese für die Existenz einer Darstellung (36) notwendigen Voraussetzungen sind auch hinreichend. Dabei genügt es sogar, falls nicht l gerade der höchste Punkt ($l_2 = \max.$) des Grenzkreises ist, von den Randbedingungen (41) allein die erste beizubehalten; und umgekehrt ist die erste von selbst mit erfüllt, falls f und $L(f)$ der zweiten genügen, vorausgesetzt, daß l nicht gerade den tiefsten Punkt des Grenzkreises bedeutet. Sind nämlich u, $L(u)$ stetig und absolut-quadratisch integrierbar und genügt u außerdem der Randbedingung (10) für $s = 0$, so ist die Differenz von $u(s)$ und

$$-\int_0^\infty G^l(s,t)\{L(u(t)) + iu(t)\}\,dt$$

eine Lösung von (14), für welche (10) erfüllt ist; diese Differenz stimmt also bis auf einen konstanten Faktor c mit $\eta(s)$ überein. Erfüllt u noch die erste der Randbedingungen (41), so muß, da

$$c_1\eta_1(s) - c_2\eta_2(s), \qquad c_1\eta_2(s) + c_2\eta_1(s)$$

der Real-, bezw. der Imaginärteil von $c\eta(s)$ ist,

$$c_1(\beta_1{}^l\eta_1)_\infty - c_2(\beta_1{}^l\eta_2)_\infty = 0,$$
$$c_1(\beta_1{}^l\eta_2)_\infty + c_2(\beta_1{}^l\eta_1)_\infty = 0$$

sein. Daraus folgt

$$c_1 = c_2 = 0,$$

außer wenn

$$(\beta_1{}^l\eta_1)_\infty = (\beta_1{}^l\eta_2)_\infty = 0$$

ist. Diese letzten beiden Gleichungen sind aber nur erfüllt, wenn l der höchste Punkt des Grenzkreises $\mathfrak{k}$ ist (s. pag. 225). Die Anwendung der obigen Überlegung auf

$$u = -L(f) + if$$

liefert die Richtigkeit unserer Behauptung.

9. Der reelle Wert λ wird ein *Eigenwert* der Differentialgleichung $L(u) = 0$ genannt werden, wenn $\varphi(s;\lambda)$ nach s im Intervall $0 \cdots \infty$ quadratisch integrierbar und

$$(\beta_1{}^l\varphi)_\infty = (\beta_2{}^l\varphi)_\infty = 0$$

ist.

$$\varphi(s) = \frac{\varphi(s;\lambda)}{\sqrt{\int_0^\infty (\varphi(s;\lambda))^2\,ds}} \tag{42}$$

heißt dann die zugehörige *normierte Eigenfunktion.* Die Eigenfunktionen der Differentialgleichung sind nach 8. zugleich Eigenfunktionen des Kerns $G_2^l(s,t)$, indem, falls λ Eigenwert ist, die Funktion (42) der Gleichung

$$\varphi(s) = (1+\lambda^2)\int_0^\infty G_2^l(s,t)\,\varphi(t)\,dt$$

genügen wird. Infolgedessen besitzt $L(u)=0$ höchstens abzählbarviele, sich im Endlichen nirgends häufende Eigenwerte, die wir mit $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ bezeichnen wollen; $\varphi_p(s)$ sei die zu λ_p gehörige normierte Eigenfunktion. Das System

(43) $$\varphi_1(s),\ \varphi_2(s), \cdots$$

besteht aus lauter zueinander *orthogonalen* Funktionen, wie mittels der Gleichung

$$\varphi_p(s) = (\lambda_p - i)\int_0^\infty G^l(s,t)\,\varphi_p(t)\,dt$$

in bekannter Weise geschlossen werden kann. Es soll aber weiter gezeigt werden, daß wir in (43) ein *volles* System von Eigenfunktionen des Kerns $G_2^l(s,t)$ besitzen, indem sich jede Eigenfunktion desselben aus höchstens zwei der Funktionen (43) linear mittels konstanter Koeffizienten zusammensetzen läßt.

Ist nämlich $\varphi(s)$ eine stetige, quadratisch integrierbare Funktion, welche nicht identisch verschwindet und für welche

(44) $$\varphi(s) - \nu\int_0^\infty G_2^l(s,t)\,\varphi(t)\,dt = 0$$

ist, so muß nach Satz 3

$$\nu \geqq 1$$

sein. Nehmen wir zunächst an, daß $\nu > 1$ ist, und setzen wir*)

$$\sqrt{\nu-1} = \lambda^+, \qquad -\sqrt{\nu-1} = \lambda^-.$$

Aus (44) folgt

(45) $$LL(\varphi) - (\nu-1)\,\varphi = 0.$$

Außerdem genügen φ und $L(\varphi)$ den Randbedingungen (10) und (41). Da nun (45) lehrt, daß die Funktion

$$\psi = L(\varphi) + \lambda^-\varphi$$

der Gleichung

$$L(\psi) + \lambda^+\psi = 0$$

genügt, so muß

(46) $$\psi = L(\varphi) + \lambda^-\varphi = c^+\,\varphi(s;\lambda^+)$$

---

*) Ist a eine positive Zahl, so bedeutet $\sqrt{a}$ stets die positive Quadratwurzel.

sein, wo c^+ eine Konstante ist, die sicher dann verschwindet, wenn λ^+ keiner der Eigenwerte λ_p ist. Ebenso folgt

$$L(\varphi) + \lambda^+ \varphi = c^- \varphi(s;\, \lambda^-), \tag{47}$$

und es ist wiederum $c^- = 0$, falls λ^- unter den λ_p nicht vorkommt. Die Gleichungen (46) und (47) ergeben

$$\varphi(s) = \frac{-c^+ \varphi(s;\lambda^+) + c^- \varphi(s;\lambda^-)}{2\lambda^+}.$$

Damit ist $\varphi(s)$ im Falle $\nu > 1$ als lineare Kombination höchstens zweier der Funktionen (43) dargestellt.

Ist $\nu = 1$, so folgt aus (44)

$$LL(\varphi) = 0.$$

Kommt 0 nicht unter den λ_p vor, so muß dann erstens, da $L(\varphi)$ den Randbedingungen (10), (41) genügt,

$$L(\varphi) = 0$$

sein, und da zweitens auch φ dieselben Randbedingungen befriedigt, ergibt sich hieraus

$$\varphi(s) = 0.$$

Ist hingegen etwa $\lambda_h = 0$, so folgt zunächst

$$L(\varphi) = c_h \varphi_h(s), \tag{48}$$

wo c_h ein konstanter Faktor ist. Wir zeigen, daß notwendig $c_h = 0$ ist. Denn aus (48) schließt man

$$L(\varphi) + i\varphi = i\varphi + c_h\varphi_h;$$

$$-\varphi(s) = \int_0^\infty G^1(s,t)\,[i\varphi(t) + c_h\varphi_h(t)]\,dt,$$

und da

$$-\varphi_h(s) = i\int_0^\infty G^1(s,t)\,\varphi_h(t)\,dt \tag{49}$$

gilt,

$$-\varphi(s) = i\int_0^\infty G^1(s,t)\,\varphi(t)\,dt + ic_h\,\varphi_h(s).$$

Multiplizieren wir diese Relation mit $\varphi_h(s)$, integrieren nach s zwischen 0 und ∞ und vertauschen in dem auftretenden Doppelintegral die Reihenfolge der Integration, so ergibt sich vermöge (49) in der Tat $c_h = 0$. Also ist

$$L(\varphi) = 0, \qquad \varphi(s) = \text{const.}\ \varphi_h(s).$$

Damit ist bewiesen, daß (43) ein volles System normierter, zueinander orthogonaler Eigenfunktionen des Kerns $G_2{}^1(s,t)$ repräsentiert, und die Theorie der Integralgleichungen zeigt nun*), daß, wenn $g(s)$ eine reelle, stetige, quadratisch integrierbare Funktion bedeutet, die in endlichen Intervallen gleichmäßig konvergente Entwicklung statthat:

$$(50) \qquad \int_0^\infty G_2^l(s,t)\, g(t)\, dt = \sum_{p=1}^\infty \frac{g_p\, \varphi_p(s)}{1+\lambda_p^2}. \qquad \left[g_p = \int_0^\infty g(s)\, \varphi_p(s)\, ds\right].$$

Da die $\varphi_p(s)$ ein Orthogonalsystem bilden, konvergiert auch die Reihe

$$\sum_{p=1}^\infty g_p \int_0^\infty G_1^l(s,t)\, \varphi_p(t)\, dt = \sum_{p=1}^\infty \frac{\lambda_p\, g_p\, \varphi_p(s)}{1+\lambda_p^2} = -\sum_{p=1}^\infty L\left(\frac{g_p\, \varphi_p(s)}{1+\lambda_p^2}\right)$$

gleichmäßig in jedem endlichen Intervall und stimmt folglich nach bekannten Sätzen über gliedweise Differentiation unendlicher Summen mit

$$-L\left(\sum_{p=1}^\infty \frac{g_p\, \varphi_p(s)}{1+\lambda_p^2}\right) = -L\left(\int_0^\infty G_2^l(s,t)\, g(t)\, dt\right) = \int_0^\infty G_1^l(s,t)\, g(t)\, dt$$

überein. Daraus ergibt sich durch Addition von (50)

$$(51) \qquad f(s) \equiv \int_0^\infty G^l(s,t)\, g(t)\, dt$$

$$= \sum_{p=1}^\infty \frac{g_p\, \varphi_p(s)}{\lambda_p - i} = \sum_{p=1}^\infty \varphi_p(s) \int_0^\infty f(t)\, \varphi_p(t)\, dt.$$

Diese Entwicklung überträgt sich von reellen sofort auf komplexwertige Funktionen $g(t)$, falls wir diese als stetig und absolut-quadratisch integrierbar voraussetzen.

Satz 4: *Im Grenzkreisfalle ist eine jede (reelle) stetige, im Intervall* $0 \cdots \infty$ *quadratisch integrierbare, den Randbedingungen* (10) *und* (41) *genügende Funktion* $f(s)$, *für welche auch* $L(f)$ *stetig und quadratisch integrierbar ist, in absolut und gleichmäßig konvergenter Weise nach den oben definierten Eigenfunktionen* $\varphi_p(s)$ *der Differentialgleichung* $L(u) = 0$ *entwickelbar.*

Dabei ist das Erfülltsein der zweiten Randbedingung (41) *eine Folge der übrigen Voraussetzungen, falls* l *nicht gerade der höchste Punkt des Grenzkreises ist; und umgekehrt kann von der ersten Randbedingung* (41) *abgesehen werden, falls* l *nicht der tiefste Punkt jenes Kreises ist.*

10. Ist $\lambda \neq \lambda_p$ $(p = 1, 2, \cdots)$, so können wir**) die Integralgleichung

*) Hilbert, 5. Mitteilung, Gött. Nachr. 1906, pag. 457. E. Schmidt, Math. Ann. Bd. 63, pag. 452.

**) Vergl. E. Schmidt, Math. Ann. Bd. 63, pag. 453f.

$$\eta(s) = \varphi(s) - (\lambda - i)\int_0^\infty G^l(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

in folgender Weise auflösen:

Da $\eta(s)$ absolut-quadratisch integrierbar ist, konvergiert [s. Formel (51)]

$$\int_0^\infty G^l(s, t)\, \eta(t)\, dt = \sum_{(p)} \frac{\eta_p\, \varphi_p(s)}{\lambda_p - i},$$

also auch, falls $\lambda \neq \lambda_1, \lambda_2, \cdots$ ist, die Reihe

$$\psi(s) = \sum_{(p)} \frac{\eta_p\, \varphi_p(s)}{\lambda - \lambda_p}$$

in jedem endlichen Intervall gleichmäßig und absolut. Aus

$$\int_0^a \left| \sum_1^n \frac{\eta_p\, \varphi_p(s)}{\lambda - \lambda_p} \right|^2 ds \leqq \int_0^\infty \left| \sum_1^n \frac{\eta_p\, \varphi_p(s)}{\lambda - \lambda_p} \right|^2 ds = \sum_1^n \left| \frac{\eta_p}{\lambda - \lambda_p} \right|^2$$

folgt durch Grenzübergang zu $n = \infty$

$$\int_0^a |\psi|^2 ds \leqq \sum_{p=1}^\infty \left| \frac{\eta_p}{\lambda - \lambda_p} \right|^2;$$

mithin ist $\psi(s)$ absolut-quadratisch integrierbar.

$$\int_0^a \psi(s)\, \varphi_p(s)\, ds = \sum_{(q)} \frac{\eta_q}{\lambda - \lambda_q} \int_0^a \varphi_p(s)\, \varphi_q(s)\, ds$$

ergibt wegen der Vollstetigkeit beschränkter Linearformen*)

$$\int_0^\infty \psi(s)\, \varphi_p(s)\, ds = \frac{\eta_p}{\lambda - \lambda_p}.$$

Die Fourierkoeffizienten von

(52) $$\varphi(s) = \eta(s) - (\lambda - i)\, \psi(s)$$

lauten also

$$\int_0^\infty \varphi(s)\, \varphi_p(s)\, ds = \eta_p \left(1 - \frac{\lambda - i}{\lambda - \lambda_p}\right) = \eta_p\, \frac{\lambda_p - i}{\lambda_p - \lambda}.$$

Aus (51) schließen wir dann

(53) $$\int_0^\infty G^l(s, t)\, \varphi(t)\, dt - \sum_{(p)} \frac{\eta_p\, \varphi_p(s)}{\lambda_p - \lambda} = -\, \psi(s),$$

und aus (52), (53)

$$\eta(s) = \varphi(s) - (\lambda - i)\int_0^\infty G^l(s, t)\, \varphi(t)\, dt.$$

*) Hilbert, 4. Mitteilung, Gött. Nachr. 1906, pag. 200.

Diese Gleichung ergibt erstens, daß $\varphi(s) - \eta(s)$ und also auch $\varphi(s)$ der Randbedingung (10) genügt, und zweitens, daß

$$L(\eta - \varphi) + i(\eta - \varphi) = (\lambda - i)\,\varphi,$$

d. h.

$$L(\varphi) + \lambda\varphi = 0$$

ist. Mithin stimmt $\varphi(s)$ bis auf einen von s unabhängigen (nicht verschwindenden) Faktor mit $\varphi(s;\lambda)$ überein, und auf diese Art erweist sich $\varphi(s;\lambda)$ für $\lambda \neq \lambda_p$ als eine absolut-quadratisch nach s integrierbare Funktion. Da die gleiche Tatsache für $\lambda = \lambda_p$ bereits feststeht und ferner die am Beginn dieser Untersuchung zugrunde gelegte Randbedingung (10) ganz willkürlich ist, sind folglich im Grenzkreisfalle für jeden (reellen oder komplexen) Wert von λ die Lösungen von

$$L(u) + \lambda u = 0 \tag{8}$$

sämtlich absolut-quadratisch integrierbar.

Um also zu zeigen, daß alle Lösungen von (8), welchen Wert auch λ haben mag, von diesem Charakter sind, genügt es, dies allein für $\lambda = i$ *oder, wenn man will, für irgend einen andern speziellen Wert von* λ nachzuweisen. Denn für jeden solchen λ-Wert, selbst wenn derselbe reell ist, kann man ganz entsprechend verfahren, wie in diesem Absatz 10 für $\lambda = i$ geschehen ist. Man hat also den

Satz 5: *Im Grenzkreisfalle hat die Gleichung* $L(u) + \lambda u = 0$ *für jedes* λ *lauter absolut-quadratisch integrierbare Lösungen; im Grenzpunktfalle hingegen hat diese Gleichung für keinen einzigen Wert von* λ *zwei voneinander unabhängige derartige Lösungen.*

Als einfaches Korollar dieses Satzes ergibt sich, daß die Differentialgleichung $L(u) = 0$ sicher dann zum Grenzpunkttypus gehört, wenn die Funktion $q(s)$ für $0 \leqq s < \infty$ eine endliche untere Grenze c besitzt. Denn in diesem Fall zeigt die auf $L(u) + \lambda u = 0$ anzuwendende Auflösungsformel (2), daß für reelle $\lambda \leqq c$ identisch in s die Ungleichung

$$u^{(1)}(s;\lambda) \geqq 1$$

statthat.

Kapitel III.

Eigenfunktionen und Eigendifferentiale im Grenzpunktfalle.

11. Im *Grenzpunktfalle*, zu dem wir uns jetzt wenden, haben wir die dem Grenzpunkte l zugehörige Funktion

$$G_2^l(s,t) \qquad \left[0 \leqq {s \atop t} < \infty\right]$$

als Kern der mit unserer Differentialgleichung verknüpften Integralgleichung zugrunde zu legen.

Ist im Grenzpunktfalle $\varphi(s;\lambda)$ für einen reellen Wert λ quadratisch nach s integrierbar, so werden wir λ einen *Eigenwert*, ferner die Gesamtheit der Eigenwerte das *Punktspektrum* der Differentialgleichung $L(u)=0$ nennen. Eine reelle, stetige Funktion $\Xi(s;\lambda)$ der beiden Argumente $s \geqq 0$, $\lambda \gtreqless 0$*), für welche $\Xi(s;0)=0$ ist und

$$\int_0^\infty (\Xi(s;\lambda))^2\, ds = \operatorname{sgn}\lambda \cdot \omega(\lambda) \tag{54}$$

als stetige Funktion von λ existiert, welche außerdem der Identität

$$L(\Xi(s;\lambda)) + \int_0^\lambda \mu \cdot d_\mu\, \Xi(s;\mu) = 0 \tag{55}$$

und der Randbedingung

$$\left[\cos h \cdot \Xi(s;\lambda) + \sin h \cdot p(s)\, \frac{\partial \Xi(s;\lambda)}{\partial s}\right]_{s=0} = 0$$

genügt, heiße vorübergehend eine *zulässige Lösung von* (55). Dabei ist unter

$$\int_0^\lambda \mu\, d_\mu\, \Xi(s;\mu)$$

natürlich die Differenz

$$[\mu\, \Xi(s;\mu)]_{\mu=0}^{\mu=\lambda} - \int_0^\lambda \Xi(s;\mu)\, d\mu$$

zu verstehen. — Der Wert λ soll dann und nur dann dem *Streckenspektrum* der Differentialgleichung $L(u)=0$ zugerechnet werden, falls es eine zulässige Lösung $\Xi(s;\lambda)$ von (55) gibt, für welche die durch (54) erklärte Funktion $\omega(\lambda)$ in der Umgebung des in Rede stehenden Wertes λ nicht konstant ist**).

12. Um die allgemeinsten aus Differentialgleichungen vom Grenzpunkttypus entspringenden Entwicklungen willkürlicher Funktionen zu erhalten, beweisen wir, zunächst noch ohne Benutzung der Theorie der singulären Integralgleichungen, den wichtigen

Satz 6: *Es gibt eine stetige, monoton wachsende Funktion $\varrho(\lambda)$ von der folgenden Beschaffenheit: $\Xi(s;\lambda)$ ist dann und nur dann eine zulässige Lösung von* (55), *falls es sich mittels einer stetigen Funktion $\xi(\lambda)$, für welche $\frac{(d\xi)^2}{d\varrho}$ im Hellingerschen Sinne stetig integrierbar ist***), in der Form*

*) Von jetzt ab bedeutet λ stets eine *reelle* Variable.

**) Diese Definition entspricht der von Herrn Hellinger im Falle quadratischer Formen von unendlichvielen Variablen gegebenen Definition des Streckenspektrums (Dissertation, pag. 22; Crelles Journal, Bd. 136, pag. 242).

***) Hellinger, Dissertation, pag. 26 ff.; Crelles Journal, Bd. 136, pag. 237.

$$(56) \qquad \Xi(s;\lambda) = \int_0^\lambda \varphi(s;\mu)\,d\xi(\mu)$$

darstellen läßt, und in diesem Falle gilt für jedes Intervall Δ der Variablen λ)*

$$\int_0^\infty (\Delta\Xi)^2\,ds = \int_{(\Delta)} \frac{(d\xi)^2}{d\varrho}.$$

Durch die angegebenen Eigenschaften ist $\varrho(\lambda)$ bis auf eine additive Konstante, die durch $\varrho(0)=0$ festgelegt werde, eindeutig bestimmt.

Zum Beweise bedienen wir uns der folgenden Hilfssätze.

Hilfssatz 1: Jede zulässige Lösung Ξ von (55) läßt sich mit Hilfe einer stetigen Funktion $\xi(\lambda)$ in der Form (56) darstellen.

Beweis: Aus (55) folgt für das Intervall $\Delta = (\lambda, \lambda+\varepsilon)$

$$-L(\Delta\Xi(s;\lambda)) = [\mu\,\Xi(s;\mu)]_\lambda^{\lambda+\varepsilon} - \int_\lambda^{\lambda+\varepsilon} \Xi(s;\mu)\,d\mu$$
$$= \lambda\cdot\Delta\Xi(s;\lambda) + \Delta\lambda\{\Xi(s;\lambda+\varepsilon) - \Xi(s;\lambda_s')\},$$

wo λ_s' ein gewisser von s abhängiger, aber jedenfalls dem Intervall $\lambda\cdots\lambda+\varepsilon$ angehöriger Wert ist. Mithin konvergiert der Ausdruck

$$L\left(\frac{\Delta\Xi}{\Delta\lambda}\right) + \lambda\,\frac{\Delta\Xi}{\Delta\lambda},$$

wenn wir λ festhalten, dagegen ε nach 0 streben lassen, gleichmäßig in der Variablen s (falls diese auf irgendein endliches Intervall beschränkt wird) gegen 0.

Andererseits ist, falls

$$\xi(\lambda) = \left[-\sin h\cdot\Xi(s;\lambda) + \cos h\cdot p(s)\,\frac{\partial\Xi(s;\lambda)}{\partial s}\right]_{s=0}$$

gesetzt wird,

$$L\left(\frac{1}{\Delta\lambda}\int_{(\Delta)}\varphi(s;\mu)\,d\xi(\mu)\right) + \lambda\cdot\frac{1}{\Delta\lambda}\int_{(\Delta)}\varphi(s;\mu)\,d\xi(\mu) = \frac{1}{\Delta\lambda}\int_{(\Delta)}(\lambda-\mu)\varphi(s;\mu)\,d\xi(\mu)$$
$$= \left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_\lambda^{\lambda+\varepsilon}\varphi(s;\mu)\,\xi(\mu)\,d\mu - \varphi(s;\lambda+\varepsilon)\,\xi(\lambda+\varepsilon)\right\} + \int_\lambda^{\lambda+\varepsilon}\frac{\mu-\lambda}{\varepsilon}\,\xi(\mu)\,\frac{\partial\varphi(s;\mu)}{\partial\mu}\,d\mu.$$

Die rechte Seite konvergiert aber wiederum mit abnehmendem ε gleichmäßig für $0 \leqq s \leqq a$ gegen 0. Das gleiche gilt demnach auch für

$$(57) \qquad L\left(\frac{\Delta\Upsilon}{\Delta\lambda}\right) + \lambda\cdot\frac{\Delta\Upsilon}{\Delta\lambda},$$

wenn

$$\Upsilon(s;\lambda) = \Xi(s;\lambda) - \int_0^\lambda \varphi(s;\mu)\,d\xi(\mu)$$

*) Δ bedeutet zugleich das sich auf dieses Intervall beziehende Differenzsymbol; vgl. Math. Ann. Bd. 66, pag. 288 u. 294.

gesetzt wird. Υ erfüllt die Randbedingungen

$$\left[\cos h \cdot \Upsilon + \sin h \cdot p(s) \frac{\partial \Upsilon}{\partial s}\right]_{s=0} = 0,$$

$$\left[- \sin h \cdot \Upsilon + \cos h \cdot p(s) \frac{\partial \Upsilon}{\partial s}\right]_{s=0} = \xi(\lambda) - \int_0^\lambda d\xi(\mu) = 0,$$

aus denen

$$\Upsilon_{s=0} = \left(p(s) \frac{\partial \Upsilon}{\partial s}\right)_{s=0} = 0$$

folgt. Die gleichen Randbedingungen erfüllt also auch $\frac{\Delta \Upsilon}{\Delta \lambda}$. Daraus und weil der Ausdruck (57) gleichmäßig in s gegen 0 geht, ergibt sich, daß

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta \Upsilon}{\Delta \lambda} = 0, \quad \text{d. i.} \quad \frac{\partial \Upsilon(s;\lambda)}{\partial \lambda} = 0$$

sein muß. In der Tat: bezeichnet man im Intervall $0 \leqq s \leqq a$ mit Q das Maximum von $|q(s) - \lambda|$, mit δ das absolute Maximum des Ausdrucks (57), mit P das Minimum von $p(s)$, so liefert (7), auf $L(u) + \lambda u$ statt auf $L(u)$ angewandt, für $0 \leqq s \leqq a$ die Ungleichung

$$\left|\frac{\Delta \Upsilon}{\Delta \lambda}\right| \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta Q^n}{P^{n+1}} \underset{\substack{(0 \leqq \tau \leqq t \leqq \cdots \\ \cdots \leqq \tau_n \leqq t_n \leqq s)}}{\iint \cdots \iint} d\tau\, dt \cdots d\tau_n\, dt_n$$

$$= \frac{\delta}{Q} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q^{n+1}}{P^{n+1}} \frac{s^{2n+2}}{(2n+2)!} = \frac{\delta}{2Q}\left(e^{s\sqrt{\frac{Q}{P}}} + e^{-s\sqrt{\frac{Q}{P}}} - 2\right).$$

Damit ist unsere Behauptung erwiesen, und wegen $\Xi(s;0) = 0$ folgt aus ihr die Gleichung (56).

Hilfsatz 2: Sind

$$\Xi^{(1)}(s;\lambda) = \int_0^\lambda \varphi(s;\mu)\, d\xi^{(1)}(\mu), \qquad \Xi^{(2)}(s;\lambda) = \int_0^\lambda \varphi(s;\mu)\, d\xi^{(2)}(\mu)$$

zwei zulässige Lösungen von (55) und $\Delta_1 = (\lambda_0 \lambda_1)$, $\Delta_2 = (\mu_0 \mu_1)$ zwei getrennt liegende Intervalle auf der reellen λ-Achse (die höchstens mit ihren Endpunkten zusammenstoßen), so ist

$$\int_0^\infty \Delta_1 \Xi^{(1)} \cdot \Delta_2 \Xi^{(2)}\, ds = 0. \tag{58}$$

Zum Beweise dieser Behauptung bemerke man zunächst, daß, wenn u, v zwei stetige (reelle), quadratisch integrierbare, die Randbedingung (10) befriedigende Funktionen von $s \geqq 0$ sind, für welche auch $L(u)$,

$L(v)$ stetig und quadratisch integrierbar sind, die Greensche Formel in der Gestalt

$$\int_0^\infty \{u\,L(v) - v\,L(u)\}\,ds = 0$$

gültig ist. Denn unter den angegebenen Umständen ist im Grenzpunktfalle, wenn wir

$$x(s) = -(L(u) + iu), \quad y(s) = -(L(v) + iv)$$

setzen,

$$u(s) = \int_0^\infty G^l(s,t)\,x(t)\,dt, \quad v(s) = \int_0^\infty G^l(s,t)\,y(t)\,dt,$$

$$\int_0^\infty uL(v)\,ds = -\int_0^\infty\int_0^\infty G^l(s,t)\,y(s)\,x(t)\,dt\,ds - i\int_0^\infty uv\,ds$$

$$= -i\int_0^\infty uv\,ds - \int_0^\infty\int_0^\infty G^l(s,t)\,x(s)\,y(t)\,dt\,ds\,^{*)} = \int_0^\infty vL(u)\,ds.$$

Verstehen wir unter Δ_λ das Intervall $\lambda_0\,\lambda$, unter Δ_μ das Intervall $\mu_0\,\mu$, so liefert die Anwendung dieser Formel auf

$$u = \Delta_\lambda\,\Xi^{(1)}, \quad v = \Delta_\mu\,\Xi^{(2)}$$

für

$$V(\lambda,\mu) = \int_0^\infty \Delta_\lambda\,\Xi^{(1)}\cdot\Delta_\mu\,\Xi^{(2)}\,ds$$

die Gleichung

$$(\mu-\lambda)\,V(\lambda,\mu) = \int_{\mu_0}^{\mu} V(\lambda,\mu)\,d\mu - \int_{\lambda_0}^{\lambda} V(\lambda,\mu)\,d\lambda,$$

aus der in der Tat durch die auf pag. 298 meiner Arbeit über singuläre Integralgleichungen (Math. Ann. Bd. 66) angegebene Schlußweise

$$V(\lambda,\mu) = 0 \quad \text{für} \quad \begin{matrix} \lambda_0 \leqq \lambda \leqq \lambda_1, \\ \mu_0 \leqq \mu \leqq \mu_1, \end{matrix}$$

mithin (58) hervorgeht.

Wählen wir $\Xi^{(1)} = \Xi^{(2)} = \Xi$, so gilt demnach, wenn $\omega(\lambda)$ durch (54) definiert wird, für jedes Intervall Δ

$$\int_0^\infty (\Delta\,\Xi)^2\,ds = \Delta\omega; \tag{59}$$

$\omega(\lambda)$ ist also eine nirgends abnehmende Funktion von λ.

---

*) Zur Rechtfertigung der vorgenommenen Integrationsvertauschung s. Math. Ann. Bd. 66, pag. 286.

Natürlich ist umgekehrt, falls für ein stetiges $\xi(\lambda)$ das nach s genommene quadratische Integral von

$$\Xi(s;\lambda) = \int_0^\lambda \varphi(s;\mu)\, d\xi(\mu)$$

existiert und gleichfalls stetig ist, $\Xi(s;\lambda)$ eine zulässige Lösung von (55).

13. Stehen zwei stetige Funktionen $\xi(\lambda)$, $\omega(\lambda)$ in dem Zusammenhang miteinander, daß für jedes Intervall Δ

$$(60) \qquad \int_0^\infty \Big(\int_{(\Delta)} \varphi(s;\mu)\, d\xi(\mu)\Big)^2 ds = \Delta\omega$$

ist, so nennen wir sie kurz ein ξ, ω-Paar. Definieren wir dann $\Xi(s;\lambda)$ durch (56), so ist

$$\xi(\lambda) - \xi(0) = \Big[-\sin h \cdot \Xi(s;\lambda) + \cos h \cdot p(s)\, \frac{\partial \Xi(s;\lambda)}{\partial s}\Big]_{s=0}.$$

Führen wir

$$X(s;\lambda) = \int_0^\infty G^l(s,t)\, \Xi(t;\lambda)\, dt$$

ein, so gilt, wie leicht zu zeigen ist,

$$\Xi(s;\lambda) = \int_0^\lambda (\mu - i)\, d_\mu X(s;\mu)$$

und folglich

$$\xi(\lambda) - \xi(0) = \int_0^\lambda (\mu - i)\, d\chi(\mu),$$

wenn

$$\chi(\lambda) = \Big[-\sin h \cdot X(s;\lambda) + \cos h \cdot p(s)\, \frac{\partial X(s;\lambda)}{\partial s}\Big]_{s=0} = \int_0^\infty \beta^l(t)\, \Xi(t;\lambda)\, dt$$

gesetzt wird.

Ist Δ ein festes Intervall, das irgendwie in endlichviele Teilintervalle $\Delta_1, \cdots, \Delta_m$ zerlegt ist, so wird*)

$$\sum_{h=1}^m \frac{|\Delta_h \chi|^2}{\Delta_h \omega} = \sum_{h=1}^m \left| \int_0^\infty \beta^l(t)\, \frac{\Delta_h \Xi(t;\lambda)}{\sqrt{\Delta_h \omega}}\, dt \right|^2,$$

und da die m Funktionen

$$\frac{\Delta_h \Xi(t;\lambda)}{\sqrt{\Delta_h \omega}} \qquad (h = 1, \cdots, m)$$

*) Glieder, für welche $\Delta_h \omega = 0$ ist, sind in dieser Summe überhaupt fortzulassen.

nach (58), (59) normiert und zueinander orthogonal sind, folgt

$$\sum_{h=1}^{m} \frac{|\Delta_h \chi|^2}{\Delta_h \omega} \leqq \int_0^\infty |\beta^l(t)|^2 \, dt.$$

Ist $\Delta_h = (\lambda_{h-1}, \lambda_h)$, so ergibt sich hieraus, wenn der größte Wert von $\sqrt{1+\lambda^2}$ im Intervall Δ mit m_Δ bezeichnet wird,

$$\left| \sum_1^m (\lambda_h - i)\, \Delta_h \chi \right| \leqq m_\Delta \cdot \sum |\Delta_h \chi| \leqq m_\Delta \cdot \sqrt{\sum \frac{|\Delta_h \chi|^2}{\Delta_h \omega} \cdot \sum \Delta_h \omega}$$

$$\leqq m_\Delta \cdot \sqrt{\Delta\omega \cdot \int_0^\infty |\beta^l(t)|^2 \, dt},$$

und daraus, wenn wir die Teilung in Intervalle Δ_h dichter und dichter werden lassen,

$$\frac{(\Delta \xi)^2}{\Delta \omega} \leqq m_\Delta^2 \cdot \int_0^\infty |\beta^l(t)|^2 \, dt.$$

Es gilt also der

Hilfssatz 3: Der Quotient $\frac{(\Delta \xi)^2}{\Delta \omega}$ bleibt für alle ξ, ω-Paare unterhalb einer nur von Δ abhängigen, festen Grenze.

Die präzise obere Grenze desselben, d. h. die kleinste Zahl, welche für kein ξ, ω-Paar von dem Wert des Quotienten $\frac{(\Delta \xi)^2}{\Delta \omega}$ überschritten wird, werde mit $E(\Delta)$ bezeichnet. Ist für *jedes* ξ, ω-Paar $\Delta\omega = 0$, also auch $\Delta\xi = 0$, so soll $E(\Delta) = 0$ gesetzt werden.

14. Hilfssatz 4: Sind Δ_1, Δ_2 zwei mit ihren Endpunkten aneinanderstoßende Intervalle, so ist

$$E(\Delta_1 + \Delta_2) = E(\Delta_1) + E(\Delta_2). \tag{61}$$

Beweis: Wir nehmen etwa an, daß Δ_1 links von Δ_2 liegt, d. h. daß

$$\Delta_1 = (\lambda_0 \lambda_1), \quad \Delta_2 = (\lambda_1 \lambda_2); \quad \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$$

ist, und setzen

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = (\lambda_0 \lambda_2).$$

Bedeutet dann $\xi(\lambda), \omega(\lambda)$ irgend ein ξ, ω-Paar, so ist

$$\frac{(\Delta \xi)^2}{\Delta \omega} \leqq \frac{(\Delta_1 \xi)^2}{\Delta_1 \omega} + \frac{(\Delta_2 \xi)^2}{\Delta_2 \omega} \leqq E(\Delta_1) + E(\Delta_2),$$

mithin

$$E(\Delta) \leqq E(\Delta_1) + E(\Delta_2). \tag{62}$$

Aus irgend zwei ξ, ω-Paaren

$$\xi^{(1)}(\lambda), \ \omega^{(1)}(\lambda); \qquad \xi^{(2)}(\lambda), \ \omega^{(2)}(\lambda)$$

bilden wir zwei neue derartige Paare, indem wir unter Benutzung zweier Konstanten $c^{(1)}$, $c^{(2)}$

$$\xi_*^{(1)}(\lambda) = c^{(1)}\xi^{(1)}(\lambda), \qquad \omega_*^{(1)}(\lambda) = [c^{(1)}]^2\omega^{(1)}(\lambda);$$
$$\xi_*^{(2)}(\lambda) = c^{(2)}\xi^{(2)}(\lambda), \qquad \omega_*^{(2)}(\lambda) = [c^{(2)}]^2\omega^{(2)}(\lambda)$$

setzen; wir wählen insbesondere

$$c^{(1)} = \frac{\Delta_1\xi^{(1)}}{\Delta_1\omega^{(1)}}; \qquad c^{(2)} = \frac{\Delta_2\xi^{(2)}}{\Delta_2\omega^{(2)}}.$$

Nehmen wir ferner in den Definitionsgleichungen

$$\begin{array}{ll|ll} \xi_*(\lambda) = \xi_*^{(1)}(\lambda) & (\lambda \leqq \lambda_1) & \omega_*(\lambda) = \omega_*^{(1)}(\lambda) & (\lambda \leqq \lambda_1), \\ \quad = \xi_*^{(2)}(\lambda) - d & (\lambda > \lambda_1) & \quad = \omega_*^{(2)}(\lambda) - e & (\lambda > \lambda_1) \end{array}$$

für d, e solche Konstante, daß ξ_*, ω_* für $\lambda = \lambda_1$ stetig ausfallen, d. h.

$$d = \xi_*^{(2)}(\lambda_1) - \xi_*^{(1)}(\lambda_1), \qquad e = \omega_*^{(2)}(\lambda_1) - \omega_*^{(1)}(\lambda_1),$$

so stellt, wie aus (58) zu schließen ist, $\xi_*(\lambda)$, $\omega_*(\lambda)$ gleichfalls ein ξ, ω-Paar vor. Für dieses ist aber offenbar

$$\Delta\xi_* = \Delta_1\xi_* + \Delta_2\xi_* = c^{(1)}\Delta_1\xi^{(1)} + c^{(2)}\Delta_2\xi^{(2)} = \frac{(\Delta_1\xi^{(1)})^2}{\Delta_1\omega^{(1)}} + \frac{(\Delta_2\xi^{(2)})^2}{\Delta_2\omega^{(2)}},$$

$$\Delta\omega_* = \Delta_1\omega_* + \Delta_2\omega_* = [c^{(1)}]^2\Delta_1\omega^{(1)} + [c^{(2)}]^2\Delta_2\omega^{(2)} = \frac{(\Delta_1\xi^{(1)})^2}{\Delta_1\omega^{(1)}} + \frac{(\Delta_2\xi^{(2)})^2}{\Delta_2\omega^{(2)}},$$

mithin auch

$$\frac{(\Delta_1\xi^{(1)})^2}{\Delta_1\omega^{(1)}} + \frac{(\Delta_2\xi^{(2)})^2}{\Delta_2\omega^{(2)}} = \frac{(\Delta\xi_*)^2}{\Delta\omega_*} \leqq E(\Delta).$$

Da hierin $\xi^{(1)}$, $\omega^{(1)}$; $\xi^{(2)}$, $\omega^{(2)}$ zwei willkürliche ξ, ω-Paare bedeuten, muß

(63) $$E(\Delta_1) + E(\Delta_2) \leqq E(\Delta)$$

sein. Aus (62), (63) ergibt sich die Richtigkeit des Hilfssatzes.

Dieser zeigt, daß es eine Funktion $\varrho(\lambda)$ gibt von der Art, daß für jedes Intervall Δ

$$\Delta\varrho = E(\Delta)$$

gilt. Wegen $E(\Delta) \geqq 0$ ist $\varrho(\lambda)$ eine monoton wachsende Funktion. Für jedes Intervall Δ und jedes ξ, ω-Paar besteht die Relation

(64) $$(\Delta\xi)^2 \leqq \Delta\omega\,\Delta\varrho.$$

Es ist des weiteren von Wichtigkeit zu bemerken, daß $\varrho(\lambda)$ stetig ist. Bedeutet $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ eine wachsende Folge von Zahlen, welche gegen λ konvergieren, und setzen wir

$$\Delta_h = (\lambda_{h-1}, \lambda_h), \quad \Delta^* = (\lambda_0, \lambda_h), \quad \Delta = (\lambda_0\,\lambda),$$

so ist für ein beliebiges ξ, ω-Paar

$$\frac{(\Delta_n^* \xi)^2}{\Delta_n^* \omega} \leqq \Delta_n^* \varrho = \sum_{h=1}^{n} \Delta_h \varrho \leqq \sum_{h=1}^{\infty} \Delta_h \varrho \leqq \Delta \varrho$$

und wegen der Stetigkeit von ξ, ω also auch

$$\frac{(\Delta \xi)^2}{\Delta \omega} \leqq \sum_{h=1}^{\infty} \Delta_h \varrho \leqq \Delta \varrho.$$

Die präzise obere nur von Δ abhängige Grenze des links stehenden Quotienten ist aber $E(\Delta) = \Delta \varrho$; also muß

$$\Delta \varrho \leqq \sum_{h=1}^{\infty} \Delta_h \varrho \leqq \Delta \varrho, \quad \text{d. h.} \quad \varrho(\lambda) = \lim_{h=\infty} \varrho(\lambda_h)$$

sein. Da das gleiche für jede abnehmende, gegen λ konvergierende Zahlenfolge λ_h auf dieselbe Art bewiesen werden kann, ist $\varrho(\lambda)$ in der Tat stetig, und (64) zeigt*), daß $\xi(\lambda)$ eine Funktion von beschränkter Schwankung ist, daß für

$$\tilde{\xi}(\lambda) = \int_0^\lambda |d\xi(\mu)|$$

die Ungleichung

$$(\Delta \tilde{\xi})^2 \leqq \Delta \omega \, \Delta \varrho \tag{65}$$

statthat, schließlich, daß $\frac{(d\xi)^2}{d\varrho}$ stetig integrierbar und

$$\int_{(\Delta)} \frac{(d\xi)^2}{d\varrho} \leqq \Delta \omega \tag{66}$$

ist.

15. Ich setze

$$\mathsf{P}(s; \lambda) = \int_0^\lambda \varphi(s; \mu) \, d\varrho(\mu).$$

Δ sei ein festes Intervall, a, ε positive Zahlen, und es gelte

$$|\varphi(s; \lambda)| \leqq H_a,$$

solange $0 \leqq s \leqq a$ ist und λ im Intervall Δ liegt. Man kann dann eine Einteilung von Δ in Teilintervalle $\Delta_h = (\lambda_{h-1}, \lambda_h)$ $[h = 1, 2, \cdots, m]$ derart angeben, daß für $\lambda_{h-1} \leqq \lambda \leqq \lambda_h$, $0 \leqq s \leqq a$

$$|\varphi(s; \lambda) - \varphi(s; \lambda_h)| < \varepsilon \qquad [h = 1, 2, \cdots, m]$$

ist, und ferner zu jedem der Intervalle Δ_h ein ξ, ω-Paar $\xi_h(\lambda)$, $\omega_h(\lambda)$ finden, für welches

*) Hellinger, Dissertation, pag. 26 und pag. 30.

$$(\Delta_h \xi_h)^2 \geqq (1-\varepsilon)\, \Delta_h \omega_h \cdot \Delta_h \varrho$$

gilt. Dann ist für $0 \leqq s \leqq a$

$$(67)\left\{\begin{aligned}
&\left|\int\limits_{(\Delta)} \varphi(s;\mu)\, d\varrho(\mu) - \sum_{h=1}^{m} \varphi(s;\lambda_h)\, \Delta_h \varrho\right| \leqq \varepsilon \cdot \Delta\varrho,\\
&\left|\sum_{h=1}^{m} \varphi(s;\lambda_h)\, \Delta_h \varrho - \sum_{h=1}^{m} \varphi(s;\lambda_h) \frac{(\Delta_h \xi_h)^2}{\Delta_h \omega_h}\right| \leqq H_a\, \varepsilon \cdot \Delta\varrho,\\
&\left|\sum_{h=1}^{m} \varphi(s;\lambda_h) \frac{(\Delta_h \xi_h)^2}{\Delta_h \omega_h} - \sum_{h=1}^{m} \frac{\Delta_h \xi_h}{\Delta_h \omega_h} \int\limits_{(\Delta_h)} \varphi(s;\mu)\, d\xi_h(\mu)\right| \leqq \varepsilon \sum_{h=1}^{m} \left|\frac{\Delta_h \xi_h}{\Delta_h \omega_h}\right| \Delta_h \tilde{\xi}_h\\
&\qquad\qquad \leqq \varepsilon \cdot \sum_{h=1}^{m} \frac{(\Delta_h \tilde{\xi}_h)^2}{\Delta_h \omega_h} \leqq \varepsilon \cdot \sum_{h=1}^{m} \Delta_h \varrho = \varepsilon \cdot \Delta\varrho.
\end{aligned}\right.$$

Dabei ist

$$\tilde{\xi}_h(\lambda) = \int_0^{\lambda} |d\xi_h(\mu)|$$

gesetzt und von der Ungleichung (65) für $\xi = \xi_h$ Gebrauch gemacht.

Nach (58), (59) ist

$$\int_0^{\infty} \left\{\sum_{h=1}^{m} \frac{\Delta_h \xi_h}{\Delta_h \omega_h} \int\limits_{(\Delta_h)} \varphi(s;\mu)\, d\xi_h(\mu)\right\}^2 ds = \sum_{h=1}^{m} \left(\frac{\Delta_h \xi_h}{\Delta_h \omega_h}\right)^2 \Delta_h \omega_h$$

$$= \sum_{h=1}^{m} \frac{(\Delta_h \xi_h)^2}{\Delta_h \omega_h} \leqq \sum_{h=1}^{m} \Delta_h \varrho = \Delta\varrho.$$

Wir verkleinern die linke Seite dieser Ungleichung, wenn wir die obere Grenze ∞ des Integrals durch a ersetzen. Die Abschätzungen (67) ergeben folglich

$$\int_0^a (\Delta \mathrm{P})^2 ds \leqq \Delta\varrho + 2\varepsilon\left(2 + H_a\right)\sqrt{a}\,(\Delta\varrho)^{\frac{3}{2}} + \left[\varepsilon\left(2 + H_a\right)\Delta\varrho\right]^2 \cdot a.$$

Da ε eine beliebige positive Zahl ist, muß

$$\int_0^a (\Delta \mathrm{P})^2 ds \leqq \Delta\varrho,$$

mithin

$$\int_0^{\infty} (\Delta \mathrm{P})^2 ds = \Delta\sigma \leqq \Delta\varrho$$

sein. Da hiernach ϱ, σ ein ξ, ω-Paar ist, wird

$$\frac{(\Delta\varrho)^2}{\Delta\sigma} \leqq \Delta\varrho, \quad \text{d. i.} \quad \Delta\varrho \leqq \Delta\sigma,$$

folglich $\Delta\varrho = \Delta\sigma$ ausfallen. *Die Funktionen* $\varrho(\lambda)$, $\varrho(\lambda)$ *bilden also ein* ξ, ω-*Paar, und* $\mathsf{P}(s;\lambda)$ *ist eine zulässige Lösung von* (55).

Daraus kann allgemeiner geschlossen werden, daß

$$\Xi(s;\lambda) = \int_0^\lambda \varphi(s;\mu)\, d\xi(\mu)$$

eine zulässige Lösung ist, falls $\frac{(d\xi)^2}{d\varrho}$ stetig integrierbar ist. Man findet nämlich

$$\int_0^\infty \left\{ \sum_{h=1}^m \frac{\Delta_h \mathsf{P}(s;\lambda)\, \Delta_h\xi}{\Delta_h\varrho} \right\}^2 ds = \sum_{h=1}^m \left(\frac{\Delta_h\xi}{\Delta_h\varrho}\right)^2 \Delta_h\varrho \leqq \int_{(\Delta)} \frac{(d\xi)^2}{d\varrho}. \tag{68}$$

Andererseits wird für $0 \leqq s \leqq a$

$$\left[\sum_{h=1}^m \frac{\Delta_h \mathsf{P}(s;\lambda)\, \Delta_h\xi}{\Delta_h\varrho} - \int_{(\Delta)} \frac{d\mathsf{P}(s;\lambda)\, d\xi}{d\varrho}\right]^2 \leqq H_a^2\, \Delta\varrho \left[\int_{(\Delta)} \frac{(d\xi)^2}{d\varrho} - \sum_{h=1}^m \frac{(\Delta_h\xi)^2}{\Delta_h\varrho}\right].$$

Ersetzen wir in der Ungleichung (68) die obere Grenze ∞ in dem links auftretenden Integral zunächst durch a und gehen dann zu dichteren und dichteren Teilungen des Intervalls Δ über, so folgt demnach, da bei diesem Prozeß

$$\int_{(\Delta)} \frac{(d\xi)^2}{d\varrho} - \sum_{h=1}^m \frac{(\Delta_h\xi)^2}{\Delta_h\varrho}$$

gegen 0 konvergiert und

$$\Xi(s;\lambda) = \int_0^\lambda \frac{d\mathsf{P}(s;\mu)\, d\xi(\mu)}{d\varrho(\mu)}$$

ist,

$$\int_0^a (\Delta\Xi)^2 ds \leqq \int_{(\Delta)} \frac{(d\xi)^2}{d\varrho},$$

mithin auch

$$\Delta\omega = \int_0^\infty (\Delta\Xi)^2 ds \leqq \int_{(\Delta)} \frac{(d\xi)^2}{d\varrho}.$$

Wegen (66) muß in dieser Beziehung notwendig das Gleichheitszeichen gelten, und damit ist dann schließlich der Satz 6 in allen seinen Teilen bewiesen.

16. Die Basisfunktion $\varrho(\lambda)$, welche in der Umgebung eines Wertes λ dann und nur dann konstant ist, falls dieser Wert nicht zum Streckenspektrum gehört, oder besser das System der Differentiale von $\varrho(\lambda)$ besitzt für das Punktspektrum sein Analogon in derjenigen Funktion $r(\lambda)$, welche für alle von den abzählbarvielen Stellen λ_p des Punktspektrums verschiedenen λ den Wert 0, und für λ_p den Wert

$$r(\lambda_p) = \frac{1}{\int\limits_0^\infty (\varphi(s;\lambda_p))^2 ds}$$

hat. Wir kommen überein,

$$R(s;\lambda) = \varphi(s;\lambda)\, r(\lambda)$$

als die *Eigenfunktionen* [ohne den Zusatz „normiert"],

$$d\mathsf{P}(s;\lambda) = \varphi(s;\lambda)\, d\varrho(\lambda)$$

als die *Eigendifferentiale* der Gleichung $L(u) = 0$ zu bezeichnen.

Indem wir, wie in Satz 6, $\varrho(0) = 0$ annehmen, setzen wir vorübergehend

$$\begin{aligned} \varrho^+(\nu) &= 0 && \text{für } \nu < 1, \\ &= \varrho(\sqrt{\nu - 1}) && \text{für } \nu \geqq 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \varrho^-(\nu) &= 0 && \text{für } \nu < 1, \\ &= -\varrho(-\sqrt{\nu - 1}) && \text{für } \nu \geqq 1 \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} \mathsf{P}^+(s;\nu) &= 0 && \text{für } \nu < 1, \\ &= \mathsf{P}(s;\sqrt{\nu - 1}) && \text{für } \nu \geqq 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathsf{P}^-(s;\nu) &= 0 && \text{für } \nu < 1, \\ &= -\mathsf{P}(s;-\sqrt{\nu - 1}) && \text{für } \nu \geqq 1. \end{aligned}$$

Dann erfüllen P^+, P^-, für A gesetzt, in jedem Intervall Δ_ν der Variablen ν die Gleichung

$$\Delta_\nu \mathsf{A}(s;\nu) = \int\limits_{(\Delta_\nu)} \nu \cdot d_\nu \int\limits_0^\infty G_2{}^l(s,t)\, \mathsf{A}(t;\nu)\, dt. \tag{69}$$

Außerdem ist

$$\int\limits_0^\infty (\Delta_\nu \mathsf{P}^+)^2 ds = \Delta_\nu \varrho^+, \qquad \int\limits_0^\infty (\Delta_\nu \mathsf{P}^-)^2 ds = \Delta_\nu \varrho^-,$$

und wenn Δ_ν^1, Δ_ν^2 irgend zwei Intervalle sind, die sich auch teilweise oder ganz überdecken dürfen,

$$\int\limits_0^\infty \Delta_\nu^1 \mathsf{P}^+ \cdot \Delta_\nu^2 \mathsf{P}^- \, ds = 0.$$

Bilden wir mittels irgend zweier stetiger Funktionen $c^+(\nu)$, $c^-(\nu)$, für welche $\frac{(dc^+)^2}{d\varrho^+}$, $\frac{(dc^-)^2}{d\varrho^-}$ stetig integrierbar sind, die Funktion

$$\mathsf{A}(s;\nu) = \int\limits_{-\infty}^{\nu} \frac{d_\nu \mathsf{P}^+(s;\nu)\, dc^+}{d\varrho^+} + \int\limits_{-\infty}^{\nu} \frac{d_\nu \mathsf{P}^-(s;\nu)\, dc^-}{d\varrho^-}, \tag{70}$$

so ist dieselbe stetig in s und ν, genügt der Gleichung (69), und es gilt für jedes Intervall Δ_ν nach dem in 15. Bewiesenen

$$\int\limits_0^\infty (\Delta_\nu \mathsf{A})^2 ds = \int\limits_{(\Delta_\nu)} \frac{(dc^+)^2}{d\varrho^+} + \int\limits_{(\Delta_\nu)} \frac{(dc^-)^2}{d\varrho^-}.$$

Wie aus Satz 6 und dem Zusammenhang, in dem der Kern $G_2^l(s,t)$ mit dem Differentialausdruck $L(u)$ steht, hervorgeht, läßt sich aber auch jede stetige Funktion $\mathsf{A}(s;\nu)$, für welche (69) erfüllt und $\int\limits_0^\infty \mathsf{A}^2\,ds$ eine stetige Funktion von ν ist, in der Form (70) mittels zweier stetiger Funktionen $c^+(\nu)$, $c^-(\nu)$ darstellen, welche die Eigenschaft besitzen, daß $\frac{(dc^+)^2}{d\varrho^+}$, $\frac{(dc^-)^2}{d\varrho^-}$ stetig integrierbar sind. Die nach ν genommenen Differentiale von P^+ und P^- bilden demnach, wenn wir uns so ausdrücken wollen, *ein volles System zueinander orthogonaler Eigendifferentiale des Kerns* $G_2^l(s,t)$. Die Theorie der singulären Integralgleichungen liefert deshalb, wenn wir den vom Punktspektrum herrührenden Anteil wie in Kapitel II bestimmen, die für jede reelle, stetige, quadratisch integrierbare Funktion $g(s)$ gültige, absolut und gleichmäßig konvergente Entwicklung

$$\int\limits_0^\infty G_2^l(s,t)\,g(t)\,dt = \sum_{(p)} \frac{\varphi(s;\lambda_p)\int\limits_0^\infty g(t)\,\varphi(t;\lambda_p)\,dt}{(1+\lambda_p^2)\int\limits_0^\infty (\varphi(t;\lambda_p))^2\,dt}$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d_\nu \mathsf{P}^+(s;\nu)\, d_\nu \int\limits_0^\infty g(t)\,\mathsf{P}^+(t;\nu)\,dt}{\nu\cdot d\varrho^+(\nu)} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d_\nu \mathsf{P}^-(s;\nu)\, d_\nu \int\limits_0^\infty g(t)\,\mathsf{P}^-(t;\nu)\,dt}{\nu\cdot d\varrho^-(\nu)}.$$

Die Summe der beiden letzten Integrale läßt sich zu

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(s;\lambda)}{1+\lambda^2}\, d_\lambda \int\limits_0^\infty g(t)\,\mathsf{P}(t;\lambda)\,dt$$

zusammenfassen. Wenden wir auf die erhaltene Entwicklung den Differentiationsprozeß L an und verfahren analog wie in 9., so resultiert schließlich der [in meiner Note (Göttinger Nachrichten 1909) nur für den Fall, daß $q(s)$ eine endliche untere Grenze besitzt, bewiesene]

Satz 7: *Im Grenzpunktfalle ist jede (reelle) stetige, der Randbedingung (10) genügende, im Intervall* $0\cdots\infty$ *quadratisch integrierbare Funktion* $f(s)$, *für welche auch* $L(f)$ *stetig und quadratisch integrierbar ist, in absolut und gleichmäßig konvergenter Weise in der Form*

$$f(s) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s;\lambda)\,C(\lambda) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s;\lambda)\,d\Gamma(\lambda)$$

darstellbar; dabei berechnet sich das Koeffizientensystem C, $d\Gamma$ *aus den*

Eigenfunktionen $R(s;\lambda)$, *bezw. Eigendifferentialen* $d\mathrm{P}(s;\lambda)$ *der Gleichung* $L(u)=0$ *mittels der Formeln*

$$C(\lambda)=\int_0^\infty f(s)\,R(s;\lambda)\,ds, \qquad \Delta\Gamma(\lambda)=\int_0^\infty f(s)\,\Delta\mathrm{P}(s;\lambda)\,ds.$$

Dieses Theorem, welches zeigt, daß sich die „willkürliche“ Funktion $f(s)$ als lineare Kombination der den Werten λ des Punkt- und Streckenspektrums korrespondierenden Lösungen $\varphi(s;\lambda)$ darstellen läßt, darf als das Hauptziel der vorliegenden Arbeit betrachtet werden.

Kapitel IV.

Über das Spektrum der Differentialgleichung $L(u)=0$.

17. Die aus dem Punktspektrum, den Häufungspunkten desselben und dem Streckenspektrum bestehende abgeschlossene Punktmenge auf der reellen λ-Achse bezeichnen wir, der Hilbertschen Terminologie entsprechend, als *Spektrum* der Differentialgleichung $L(u)=0$. Handelt es sich nach wie vor um den Grenzpunktfall, so sind die nicht zum Spektrum gehörigen reellen Werte von λ dadurch charakterisiert, daß für sie die inhomogene Gleichung

$$L(u)+\lambda u=g(s)$$

stets eine der Randbedingung (10) genügende, im Intervall $0\cdots\infty$ quadratisch integrierbare Lösung besitzt, falls wir nur voraussetzen, daß $g(s)$ stetig und quadratisch integrierbar ist. Außerdem hat für derartige λ-Werte auch die homogene Gleichung $L(u)+\lambda u=0$ eine (und bis auf eine multiplikative Konstante natürlich auch nur eine) quadratisch integrierbare Lösung.

Da sich die zwei *verschiedenen* Randbedingungen von der Form (10) zugehörigen Greenschen Funktionen des Differentialausdrucks $L(u)+iu$ (im Intervall $0\cdots\infty$) nur um ein konstantes Vielfaches des für den Grenzpunkt l zu bildenden Produktes $\beta^l(s)\,\beta^l(t)$ unterscheiden, liefert Satz 5 und ein in der Arbeit „Über beschränkte quadratische Formen, deren Differenz vollstetig ist“ (Rend. d. Circ. Mat. di Palermo Bd. XXVII, pag. 378) von mir aufgestelltes Theorem das folgende Resultat:

Satz 8: *Während die zwei verschiedenen Randbedingungen für* $s=0$ *zugehörigen Punktspektra der Differentialgleichung* $L(u)=0$ *keinen einzigen Punkt miteinander gemein haben, ist die aus den Häufungspunkten des Punktspektrums und dem Streckenspektrum gebildete Vereinigungsmenge im Gegenteil von der speziellen Wahl der Randbedingung* (10) *ganz unabhängig.**)

*) Dieser Satz gilt auch für den Grenzkreisfall, in dem Häufungspunkte der Eigenwerte und Punkte des Streckenspektrums gar nicht vorhanden sind.

Die auf den ersten Blick plausible Vermutung, daß auch das Streckenspektrum, für sich genommen, durch Abänderung der Randbedingung (10) nicht alteriert wird, vermag ich nicht zu bestätigen. In der soeben zitierten Arbeit habe ich gezeigt, daß das Streckenspektrum einer quadratischen Form von unendlichvielen Variablen gegenüber der Addition vollstetiger Formen keineswegs invariant ist (l. c., pag. 392).

18. Satz 9:*) *Ist* $\lim\limits_{s=\infty} q(s) = +\infty$, *so besteht das Spektrum von* $L(u) = 0$ *ausschließlich aus isolierten* (d. h. sich nirgends im Endlichen verdichtenden) *Eigenwerten, und zu jeder ganzen Zahl* $m \geqq 0$ *gibt es einen einzigen Eigenwert* λ_m, *dessen zugehörige Eigenfunktion für* $0 < s < \infty$ *genau* m *Nullstellen besitzt. Dabei ist* $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$, *und es gibt keinen Eigenwert, der nicht unter den* λ_m *enthalten wäre.*

Ist $\liminf\limits_{s=\infty} q(s) = c$ *endlich, so gehören dem Gebiet* $\lambda < c$ *keine Punkte des Strecken- und genau soviele Punkte des Punktspektrums an, als die der Randbedingung* (10) *genügende Lösung von*

$$L(u) + cu = 0$$

Nullstellen besitzt. Heißt diese Anzahl (die natürlich auch ∞ sein kann) n, *so gibt es zu jeder ganzen Zahl* m, *welche* $\geqq 0$ *und* $\leqq n-1$ *ist, einen und nur einen Eigenwert* $\lambda_m < c$, *dessen zugehörige Eigenfunktion für* $0 < s < \infty$ *genau* m *Nullstellen besitzt. Es gilt wiederum*

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < c,$$

und jeder Eigenwert $\lambda < c$ *ist mit einem der* n *Werte* λ_m *identisch.*

Um diesen Satz zu beweisen, orientieren wir uns zunächst über die Lösungen einer Differentialgleichung

$$L^*(u) \equiv \frac{d}{ds}\left(p(s)\frac{du}{ds}\right) - q^*(s)\,u = 0,$$

in welcher $q^*(s)$ für $s \geqq 0$ oberhalb einer festen *positiven* Grenze g liegt. Für jede Lösung $u(s)$ einer solchen Gleichung, die eine Nullstelle $s_0 > 0$ hat (und nicht identisch verschwindet), besitzt $p(s)\frac{du}{ds}$ im ganzen Intervall $0 \leqq s < \infty$ ein konstantes Vorzeichen, und es kann also $u(s)$ sicher nicht noch eine weitere Nullstelle besitzen. Ebenso hat, wenn $u(s)$ irgend eine Lösung jener Gleichung ist, $p(s)\frac{du}{ds}$ für $s \geqq 0$ höchstens eine einzige Nullstelle. — Hat eine Lösung $\beta(s)$ die Eigenschaft, daß $\beta(s)$,

*) Oszillationsbetrachtungen für Differentialgleichungen mit Singularitäten findet man namentlich bei Bôcher (Bulletin of the Am. Math. Soc., Okt. 1898, pag. 22 und Transactions of the Am. Math. Soc., Jan. 1900, pag. 40; vergl. auch Encyklopädie II A 7a).

$p(s)\frac{d\beta}{ds}$ beide für $s \geqq 0$ ein konstantes und zwar entgegengesetztes Vorzeichen haben, etwa $\beta(s) > 0$, $p(s)\frac{d\beta}{ds} < 0$, — ob es solche Lösungen gibt, kommt hier nicht in Betracht —, so ist für alle s

$$\left(p(s)\frac{d\beta}{ds}\right)_{s=0} + \int\limits_0^s q^*(t)\,\beta(t)\,dt = p(s)\frac{d\beta}{ds} < 0,$$

also

$$0 \leqq g\int\limits_0^s \beta(t)\,dt \leqq -\left(p(s)\frac{d\beta}{ds}\right)_0.$$

Da $\beta(s)$ positiv ist, konvergiert mithin $\int\limits_0^\infty \beta(t)\,dt$ und (wegen der Monotonität von $\beta(s)$) a fortiori $\int\limits_0^\infty (\beta(t))^2\,dt$. Daraus folgt u. a., daß es bis auf einen konstanten Faktor nur eine einzige Lösung von der Art $\beta(s)$ gibt.

Nachdem wir dies vorausgeschickt haben, kehren wir zu unserer ursprünglichen Gleichung $L(u) + \lambda u = 0$ zurück. Ist $\lambda < c$, so gibt es eine Zahl a_λ derart, daß für $s \geqq a_\lambda$

$$q(s) - \lambda \geqq 0$$

wird. Alsdann hat $\varphi(s;\lambda)$ im Gebiet $s \geqq a_\lambda$ höchstens *eine* Nullstelle, und folglich ist die Anzahl der Nullstellen von $\varphi(s;\lambda)$ im Bereich $0 < s < \infty$ gewiß endlich; wir bezeichnen sie mit $n(\lambda)$. Man überzeugt sich leicht, daß in unserem Falle, in welchem $q(s)$ für alle s oberhalb einer festen (positiven oder negativen) Grenze bleibt,

$$\lim_{\lambda=-\infty} n(\lambda) = 0$$

wird.

Sind $a_1 < a_2 < \cdots a_{n(\lambda)}$ die Nullstellen von $\varphi(s;\lambda)$ $(0 < s < \infty)$, der Größe nach geordnet, so hat, wenn $\mu > \lambda$ ist, $\varphi(s;\mu)$ mindestens eine Nullstelle in jedem der folgenden Intervalle

$$0 < s < a_1, \quad a_1 < s < a_2, \cdots, a_{n(\lambda)-1} < s < a_{n(\lambda)},$$

und es ist also

$$n(\mu) \geqq n(\lambda) \quad \text{für} \quad \mu \geqq \lambda.$$

Es sei λ eine feste Zahl $< c$. Wir betrachten eine unendliche Folge von Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$, welche *wachsend* gegen λ konvergieren. Es wird dann

$$n(\lambda_1) \leqq n(\lambda_2) \leqq \cdots \leqq n(\lambda)$$

sein und also

$$\lim_{p=\infty} n(\lambda_p) = n(\lambda - 0)$$

einen bestimmten Wert $\leqq n(\lambda)$ besitzen. Man beweist ohne Mühe, daß stets

$$n(\lambda - 0) = n(\lambda)$$

wird.

Darauf betrachten wir eine Folge von Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$, die sämtlich $< c$ sind und welche *abnehmend* gegen λ konvergieren, und setzen

$$\lim_{p=\infty} n(\lambda_p) = n(\lambda + 0) = k.$$

Da die $n(\lambda_p)$ von einem gewissen p ab alle $= n(\lambda + 0)$ sein werden, können wir von vornherein annehmen, daß

$$n(\lambda_1) = n(\lambda_2) = \cdots = k$$

ist, und können demnach allgemein die Nullstellen von $\varphi(s; \lambda_p)$, der Größe nach geordnet, mit

$$a_1^{(p)}, a_2^{(p)}, \cdots, a_k^{(p)}$$

bezeichnen. Dann ist (für jedes $m \leqq k$)

$$a_m^{(1)} < a_m^{(2)} < \cdots < a_m^{(p)} < \cdots \text{ in inf.}$$

Ist die Konstante b so gewählt, daß für $s \geqq b$

$$q(s) - \lambda_1 \geqq 0$$

ausfällt, so bleiben die Nullstellen

$$a_1^{(p)}, a_2^{(p)}, \cdots, a_{k-1}^{(p)}$$

für alle p unterhalb der Grenze b, da oberhalb derselben $\varphi(s; \lambda_p)$ nach früheren Betrachtungen nur eine einzige Nullstelle besitzen kann. Infolgedessen existiert

$$\lim_{p=\infty} a_m^{(p)} = a_m \leqq b \qquad (\text{für } m = 1, 2, \cdots, k-1),$$

und die so erhaltenen Nullstellen $a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}$ von $\varphi(s; \lambda)$ sind sämtlich voneinander verschieden. Würden nämlich etwa $a_1^{(p)}$ und $a_2^{(p)}$ gegen dieselbe Grenze $a_1 = a_2$ konvergieren, so müßte für $s = a_1 = a_2$

$$\varphi(s; \lambda) = 0, \qquad \frac{\partial \varphi(s; \lambda)}{\partial s} = 0$$

sein, was offenbar nicht möglich ist. Da jede Nullstelle von $\varphi(s; \lambda)$ Häufungspunkt von Nullstellen der Funktionen $\varphi(s; \lambda_p)$ $(p = 1, 2, \cdots)$ sein muß, werden mit den Zahlen $a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}$ die sämtlichen Nullstellen von $\varphi(s; \lambda)$ erschöpft sein oder nicht, je nachdem $\lim\limits_{p=\infty} a_k^{(p)}$ unendlich oder endlich ist.

Das Vorzeichen von $\dfrac{\partial \varphi(s; \lambda_p)}{\partial s}$ an der Stelle $a_k^{(p)}$ wird für alle p dasselbe, etwa $\delta (= \pm 1)$, sein. Ist nun

$$\lim_{p=\infty} a_k^{(p)} = \infty,$$

so muß von einem gewissen p ab $a_k^{(p)}$ die Grenze b überschreiten und dann nach früherem

$$\operatorname{sgn} \varphi(s; \lambda_p) = -\delta \quad \text{für} \quad b \leqq s < a_k^{(p)},$$
$$\operatorname{sgn} \frac{d\varphi(s; \lambda_p)}{ds} = +\delta \quad \text{für} \quad b \leqq s$$

sein. Daraus folgt durch Grenzübergang

$$\operatorname{sgn} \varphi(s; \lambda) = -\delta \quad \text{für} \quad s > b,$$
$$\operatorname{sgn} \frac{d\varphi(s; \lambda)}{ds} = +\delta \quad \text{für} \quad s > b.$$

Mithin ist (s. oben) $\varphi(s; \lambda)$ quadratisch nach s im Intervall $b \leqq s < \infty$ integrierbar, also $\varphi(s; \lambda)$ eine Eigenfunktion und λ ein Eigenwert. Wir fassen diese Betrachtungen zusammen in den Hilfssatz:

Im Gebiet $\lambda < c$ ist entweder

$$n(\lambda) = n(\lambda + 0) \quad \textit{oder} \quad n(\lambda) + 1 = n(\lambda + 0).$$

Der zweite Fall kann nur dann eintreten, wenn λ Eigenwert ist.

Wir zeigen umgekehrt:

Ist λ ein Eigenwert $< c$, so gilt $n(\lambda) + 1 = n(\lambda + 0)$.

Ich setze für den Eigenwert λ kurz $\varphi(s; \lambda) = \varphi(s)$, $n(\lambda) = k - 1$ und habe dann zu zeigen, daß, wenn λ' irgend eine Zahl $> \lambda$ und $< c$ ist, $\varphi(s; \lambda')$ mindestens k Nullstellen im Gebiet $0 < s < \infty$ besitzt.

a_{k-1} sei die größte Nullstelle von $\varphi(s)$. Ich will zunächst beweisen, daß jede Lösung von $L(u) + \lambda u = 0$, die sich von $\varphi(s)$ nicht bloß durch einen konstanten Faktor unterscheidet, mindestens eine Nullstelle $> a_{k-1}$ besitzt. Für eine solche Lösung $u(s)$ besteht die Identität

$$(71) \qquad p(s)\left(u(s)\frac{d\varphi}{ds} - \varphi(s)\frac{du}{ds}\right) = p(a_{k-1})\, u(a_{k-1}) \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_{a_{k-1}}.$$

Hätte nun $u(s)$ für $s \geqq a_{k-1}$ ein konstantes Vorzeichen δ, und bezeichnet ferner δ_1 das konstante Vorzeichen von $\varphi(s)$ für $s > a_{k-1}$, so wäre nach früherem für hinreichend großes s

$$\operatorname{sgn} \frac{d\varphi}{ds} = -\delta_1, \quad \operatorname{sgn} \frac{du}{ds} = \delta.$$

Da außerdem $\operatorname{sgn} \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_{a_{k-1}} = +\delta_1$ ist, so würde die linke Seite von (71) das Vorzeichen $-\delta\delta_1$, die rechte das Vorzeichen $+\delta\delta_1$ erhalten, was nicht möglich ist.

Denken wir uns nun in der Randbedingung (10) den nur bis auf ganzzahlige Vielfache von π bestimmten Winkel h so gewählt, daß $0 < h \leqq \pi$ ist, und verstehen unter j irgend einen Wert > 0 und $< h$, bezeichnen ferner mit $u_j(s)$, $v_j(s)$ die durch

$$[u(s)]_{s=0} = -\sin j, \quad \left[p(s)\frac{du}{ds}\right]_{s=0} = \cos j$$

bestimmten Lösungen von

$$L(u) + \lambda u = 0, \quad \text{bezw.} \quad L(u) + \lambda' u = 0,$$

so hat $u_j(s)$ gewiß je eine Nullstelle zwischen denen von $\varphi(s)$, ferner eine, welche $> a_{k-1}$ ist, und schließlich, wie leicht zu sehen, auch eine solche, die zwischen 0 und der kleinsten Nullstelle von $\varphi(s)$ liegt. Die Anzahl der Nullstellen von $u_j(s)$, also a fortiori von $v_j(s)$ ist demnach $\geqq k$. Numerieren wir die letzteren nach ihrer Größe, so wird allgemein die m^{te} Nullstelle von $v_j(s)$ mit wachsend gegen h konvergierendem j gleichfalls wachsend gegen die m^{te} Nullstelle von $v_h(s) = \varphi(s; \lambda')$ konvergieren, und $\varphi(s; \lambda')$ könnte nur dann weniger als k Nullstellen besitzen, wenn bei diesem Prozeß die k^{te} Nullstelle von $v_j(s)$ gegen $+\infty$ konvergierte. Dies hätte aber wie oben zur Folge, daß $v_h(s)$; $\frac{dv_h}{ds}$ für $s \geqq b$ konstantes und zwar entgegengesetztes Vorzeichen besäßen, so daß also λ' ein Eigenwert wäre. Wenn aber die Anzahl der Nullstellen von $\varphi(s; \lambda')$ nur $= k - 1$ ist, so haben auch sämtliche Funktionen $\varphi(s; \mu)$, welche Werten $\mu \geqq \lambda$ und $\leqq \lambda'$ korrespondieren, genau $k - 1$ Nullstellen, und alle diese Werte μ müßten aus demselben Grunde wie λ' Eigenwerte sein. Da dies nicht zutreffen kann, ist in der Tat, wenn $\lambda < c$ ein Eigenwert ist, $n(\mu) \geqq n(\lambda) + 1$, sobald $\mu > \lambda$ genommen wird.

Aus dem Bewiesenen folgen alle Tatsachen des Satzes 9, soweit sie das Punktspektrum im Falle eines endlichen c betreffen. Ist $c = +\infty$, so haben wir nur noch die Bemerkung, daß

$$\lim_{\lambda = +\infty} n(\lambda) = \infty$$

ist, hinzuzufügen, welche ohne weiteres daraus einleuchtet, daß sogar die Anzahl der Nullstellen, welche $\varphi(s; \lambda)$ in irgend einem festen endlichen Intervall $0 < s < a$ darbietet, gegen ∞ konvergiert, falls λ positiv über alle Grenzen wächst.

Die Aussage über das Streckenspektrum beweisen wir so: Ist $\Delta = (\lambda_0 \lambda_1)$ irgend ein abgeschlossenes, ganz im Gebiet $\lambda < c$ gelegenes Intervall, welches keinen Eigenwert enthält, so zeigen unsere Betrachtungen über die Differentialgleichung $L^*(u) = 0$ sogleich, daß es zwei positive Konstante a, A gibt, so daß

$$|\varphi(s; \lambda)| > A \quad \text{für} \quad s \geqq a, \quad \lambda_0 \leqq \lambda \leqq \lambda_1$$

ist. Hat $\varrho(\lambda)$ die Bedeutung wie in Satz 6, so ist demnach

$$\left| \int_{(\Delta)} \varphi(s; \lambda)\, d\varrho \right| \geqq A \Delta \varrho \quad \text{für} \quad s \geqq a,$$

und da die linke Seite dieser Ungleichung quadratisch nach s im Intervall $0 \leqq s < \infty$ integrierbar sein muß, ist notwendig $\Delta\varrho = 0$, d. h. das Intervall Δ von Punkten des Streckenspektrums frei. Infolgedessen liegt überhaupt kein einziger Punkt des Streckenspektrums im Gebiet $\lambda < c$.

Haben wir es z. B. mit einer Differentialgleichung

$$L(u) \equiv \frac{d^2 u}{ds^2} - q(s)\, u = 0$$

zu tun, für welche $\lim\limits_{s=\infty} q(s) = c$ existiert, so hängt die Entscheidung darüber, ob dieselbe unendlich- oder endlichviele Eigenwerte $< c$ besitzt, davon ab, ob die Integrale der Gleichung

$$\frac{d^2 u}{ds^2} + (c - q(s))\, u = 0$$

oszillatorisch sind, d. h. unendlichviele Nullstellen besitzen, oder nicht. Nach einem bekannten Kriterium*) tritt der erste Fall sicher dann ein, wenn

$$\liminf_{s=\infty}\, s^2 (c - q(s)) > \frac{1}{4}$$

ist, der zweite sicher dann, wenn

$$\limsup_{s=\infty}\, s^2 (c - q(s)) < \frac{1}{4}$$

ausfällt. *Wörtlich dasselbe Kriterium hat für die Differentialgleichung*

$$\frac{d}{ds}\left(p(s)\frac{du}{ds}\right) + (c - q(s))\, u = 0$$

statt, wenn nicht wie soeben $p(s)$ *identisch* $= 1$, *sondern nur* $\lim\limits_{s=\infty} p(s) = 1$ *vorausgesetzt wird.***)

19. Es gilt allgemein der

Satz 10: *Der Wert* $\lambda = \infty$ *gehört für jeden beschränkten symmetrischen Kern dem Spektrum an.*

Wäre in der Tat

$$K(s, t) \qquad \left[0 \leqq {s \atop t} < \infty\right]$$

---

*) Kneser, Math. Ann. Bd. 42, pag. 415f.

**) Man könnte daran denken, durch die bekannte Liouvillesche (oder eine ähnliche) Transformation unsere Differentialgleichung auf eine solche Form zu bringen, daß $p(s) = 1$ wird. Aber abgesehen davon, daß dieses Verfahren die zweimalige Differenzierbarkeit von $p(s)$ voraussetzt, würden dabei die in diesem Absatz 18 und in 20. besprochenen einfachen Gesetzmäßigkeiten völlig verwischt werden. Deshalb erscheint mir die in 20. angegebene Methode, welche derartige Transformationen wie die Liouvillesche zu umgehen gestattet und die auch zum Beweis der im Text aufgestellten Behauptung heranzuziehen ist, nicht ohne Bedeutung.

ein beschränkter symmetrischer Kern, für den diese Aussage nicht zuträfe, so müßte die mittels des iterierten Kerns

$$KK(s,t)=\int_0^\infty K(s,r)\,K(t,r)\,dr$$

gebildete quadratische Integralform

$$\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty KK(s,t)\,v(s)\,v(t)\,ds\,dt$$

für alle stückweise stetigen Funktionen $v(s)$, deren quadratisches Integral $\int_0^\infty v^2\,ds=1$ ist, oberhalb einer festen positiven Grenze liegen. Daß dies aber nicht der Fall ist, erkennt man, wenn man mit Hilfe einer hinreichend kleinen positiven Konstanten δ die Funktion

$$v(s)=\frac{1}{\sqrt{\delta}}\quad \text{für}\quad 0\leqq s\leqq\delta,\qquad v(s)=0\quad\text{für}\quad s>\delta$$

bildet und in jene Integralform einsetzt.

Für eine beliebige Differentialgleichung $L(u)=0$ (vom Grenzkreis- oder Grenzpunkttypus) besagt dieser Satz, da ∞ kein Eigenwert des Kerns $G_2^{\,l}(s,t)$ ist, daß das Spektrum der Differentialgleichung Werte λ von beliebig großem absoluten Betrag enthält, oder, wie man sich ausdrücken kann, *daß das Spektrum von $L(u)=0$ ins Unendliche reicht.*

20. Indem wir uns jetzt der Behandlung einer speziellen Klasse von Differentialgleichungen zuwenden, beweisen wir den

Satz 11*): *Konvergiert $p(s)$ mit unbegrenzt wachsendem s gegen eine positive Grenze, die wir $=1$ nehmen wollen, $q(s)$ gegen eine Grenze, die ohne Beschränkung der Allgemeinheit $=0$ angenommen werden darf, und zwar so stark, daß die Integrale*

$$\int_0^\infty |p(t)-1|\,dt,\qquad \int_0^\infty |q(t)|\,dt \tag{72}$$

existieren, so haben die Lösungen $u^{(1)}(s;\lambda)$, $u^{(2)}(s;\lambda)$ für $\lambda>0$ die Form

$$u^{(1)}(s;\lambda)=m_{11}(\lambda)\cos(s\sqrt{\lambda})+m_{12}(\lambda)\sin(s\sqrt{\lambda})+E_1(s;\lambda),$$
$$u^{(2)}(s;\lambda)=m_{21}(\lambda)\cos(s\sqrt{\lambda})+m_{22}(\lambda)\sin(s\sqrt{\lambda})+E_2(s;\lambda);$$

die vier Funktionen $m(\lambda)$ sind stetig in λ und

$$E_1(s;\lambda),\ \frac{\partial E_1(s;\lambda)}{\partial s};\qquad E_2(s;\lambda),\ \frac{\partial E_2(s;\lambda)}{\partial s}$$

*) Einen Teil dieses Satzes hat im Falle $p(s)\equiv 1$ bereits Herr Kneser (Crelles Journal Bd. 117, pag. 84) bewiesen.

konvergieren mit unbegrenzt wachsendem s gleichmäßig gegen 0, *wenn wir die Variable* λ *auf ein endliches Intervall* $\lambda_0 \leqq \lambda \leqq \lambda_1$ *beschränken, dessen unterer Endpunkt* λ_0 *positiv ist.*

Konvergieren nicht bloß die Integrale (72), *sondern sogar die folgenden*

$$\int_0^\infty t\,|p(t) - 1|\,dt, \qquad \int_0^\infty t\,|q(t)|\,dt \tag{73}$$

und ist

$$\lim_{s=\infty} s(p(s) - 1) = 0, \qquad \lim_{s=\infty} s\,q(s) = 0,$$

so sind die vier Funktionen $m(\lambda)$ *stetig differenzierbar, und*

$$sE_i(s;\lambda), \quad s\frac{\partial E_i(s;\lambda)}{\partial s}; \quad \frac{\partial E_i(s;\lambda)}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial^2 E_i(s;\lambda)}{\partial s\,\partial\lambda} \qquad (i=1,2)$$

konvergieren mit wachsendem s gleichmäßig für $\lambda_0 \leqq \lambda \leqq \lambda_1$ *gegen* 0.

Wir erledigen den Beweis in zwei Stufen, indem wir nämlich die vorgelegte Differentialgleichung $L(u) + \lambda u = 0$ auf

$$\frac{d}{ds}\left(p(s)\frac{dv}{ds}\right) + \lambda v = 0 \tag{74}$$

und diese auf

$$\frac{d^2 w}{ds^2} + \lambda w = 0 \tag{75}$$

zurückführen. Es sei $v = v(s;\lambda)$ diejenige Lösung von (74), für welche

$$v_{s=0} = -\sin h, \qquad \left(p(s)\frac{dv}{ds}\right)_{s=0} = \cos h$$

ist; h sei ein beliebiger, von λ unabhängiger Wert, so daß $v(s;\lambda)$ in bezug auf die Variable λ regulär-analytisch ist. Das gleiche gilt dann von

$$p(s)\frac{\partial v(s;\lambda)}{\partial s} = \tilde{v}(s;\lambda);$$

diese Funktion genügt der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\tilde{v}}{ds^2} + \frac{\lambda}{p(s)}\tilde{v} = 0, \tag{76}$$

welche für den Vergleich mit der Differentialgleichung (75) geeigneter ist als (74). Aus (75), (76) folgt nämlich

$$\left[\tilde{v}\frac{dw}{ds} - w\frac{d\tilde{v}}{ds}\right]_a^s = \lambda\int_a^s \tilde{v}\,w\left(\frac{1}{p} - 1\right)dt.$$

Setzen wir hierin zunächst $w = \cos(s\sqrt{\lambda})$, dann $w = \sin(s\sqrt{\lambda})$, so ergibt sich

$$
(77)\begin{cases}
-\tilde{v}\cdot\sin(s\sqrt{\lambda})-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{d\tilde{v}}{ds}\cdot\cos(s\sqrt{\lambda})=A_a+\sqrt{\lambda}\int\limits_a^s\tilde{v}\left(\frac{1}{p}-1\right)\cos(t\sqrt{\lambda})dt,\\
\tilde{v}\cdot\cos(s\sqrt{\lambda})-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{d\tilde{v}}{ds}\cdot\sin(s\sqrt{\lambda})=B_a+\sqrt{\lambda}\int\limits_a^s\tilde{v}\left(\frac{1}{p}-1\right)\sin(t\sqrt{\lambda})dt,
\end{cases}
$$

wo

$$
A_a=\left[-\tilde{v}\cdot\sin(s\sqrt{\lambda})-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{d\tilde{v}}{ds}\cdot\cos(s\sqrt{\lambda})\right]_{s=a},
$$

$$
B_a=\left[\ \tilde{v}\cdot\cos(s\sqrt{\lambda})-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{d\tilde{v}}{ds}\cdot\sin(s\sqrt{\lambda})\right]_{s=a}
$$

ist. Durch Elimination erhalten wir

$$
(78)\qquad \tilde{v}=[B_a\cos(s\sqrt{\lambda})-A_a\sin(s\sqrt{\lambda})]
+\sqrt{\lambda}\int\limits_a^s\tilde{v}\left(\frac{1}{p}-1\right)\sin\{(t-s)\sqrt{\lambda}\}\,dt.
$$

Wir beschränken jetzt λ auf ein ganz dem Gebiet $\lambda>0$ angehöriges endliches Intervall $\lambda_0\leqq\lambda\leqq\lambda_1$. Wir können dann, da

$$
\int\limits_0^\infty\left|\frac{1}{p(t)}-1\right|dt
$$

konvergiert, eine Zahl a so bestimmen, daß

$$
\sqrt{\lambda_1}\int\limits_a^\infty\left|\frac{1}{p}-1\right|dt<\frac{1}{2}
$$

ist. Haben wir die Konstante H so gewählt, daß

$$
|\tilde{v}(s;\lambda)|\leqq\frac{H}{4},\qquad\left|\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{\partial\tilde{v}(s;\lambda)}{\partial s}\right|\leqq\frac{H}{4}
$$

für $0\leqq s\leqq a$, $\lambda_0\leqq\lambda\leqq\lambda_1$ ausfällt, so ist

$$
|B_a\cos(s\sqrt{\lambda})-A_a\sin(s\sqrt{\lambda})|\leqq\frac{H}{2}\qquad(\text{für } s\geqq 0,\ \lambda_0\leqq\lambda\leqq\lambda_1),
$$

und ferner, wie jetzt gezeigt werden soll,

$$
(79)\qquad |\tilde{v}(s;\lambda)|\leqq H\quad\text{für}\quad 0\leqq s<\infty,\ \lambda_0\leqq\lambda\leqq\lambda_1.
$$

In der Tat, wäre H^* ein Wert $>H$, den $|\tilde{v}|$ in dem besagten Gebiet, etwa für $s=s'$, $\lambda=\lambda'$, annähme und wäre s' [unter Festhaltung von λ'] sogleich als der kleinste Wert des Arguments s gewählt, für den

$$
|\tilde{v}(s;\lambda')|=H^*
$$

wird, so liefert (78), da s' gewiß $>a$ ist,

$$H^* \leqq \frac{H}{2} + H^* \sqrt{\lambda_1} \left| \int_a^{s'} \left(\frac{1}{p} - 1\right) \sin\left\{(t - s')\sqrt{\lambda'}\right\} dt \right|$$

$$\leqq \frac{H}{2} + H^* \sqrt{\lambda_1} \int_a^{\infty} \left| \frac{1}{p} - 1 \right| dt \leqq \frac{H}{2} + \frac{H^*}{2},$$

mithin entgegen unserer Annahme

$$H^* \leqq H.$$

Nachdem so die Ungleichung (79) bewiesen ist*), folgt die gleichmäßige Konvergenz der Integrale

$$\widetilde{m}_1(\lambda) = -\sin h + \int_0^{\infty} \widetilde{v}(t; \lambda) \left(\frac{1}{p(t)} - 1\right) \cos\left(t\sqrt{\lambda}\right) dt,$$

$$\widetilde{m}_2(\lambda) = \frac{\cos h}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^{\infty} \widetilde{v}(t; \lambda) \left(\frac{1}{p(t)} - 1\right) \sin\left(t\sqrt{\lambda}\right) dt.$$

Durch eine leichte Rechnung schließen wir aus (77), indem wir $a = 0$ nehmen und statt $\widetilde{v}$ wieder die Funktion $v = -\frac{1}{\lambda} \frac{d\tilde{v}}{ds}$ einführen,

(80) $$v(s; \lambda) = \widetilde{m}_1(\lambda) \cos\left(s\sqrt{\lambda}\right) + \widetilde{m}_2(\lambda) \sin\left(s\sqrt{\lambda}\right) + \widetilde{E}(s; \lambda),$$

wobei

$$\widetilde{E}(s; \lambda) = -\int_s^{\infty} \cos\left\{(s - t)\sqrt{\lambda}\right\} \widetilde{v}(t; \lambda) \left(\frac{1}{p(t)} - 1\right) dt$$

---

*) Ein anderer Beweis von (79) läßt sich auf Grund des folgenden *Majorantensatzes* führen: Sind $x(s)$, $y(s)$ die Lösungen zweier Integralgleichungen von der Form

$$f(s) = x(s) - \int_0^s K(s, t)\, x(t)\, dt, \qquad g(s) = y(s) - \int_0^s L(s, t)\, y(t)\, dt$$

und ist

$$|f(s)| \leqq g(s), \qquad |K(s, t)| \leqq L(s, t)$$

so gilt auch

$$|x(s)| \leqq y(s).$$

Wählen wir in (78) von vornherein $a = 0$, so ist

$$\sqrt{1 + \lambda} = V(s) - \sqrt{\lambda} \int_0^s \left| \frac{1}{p(t)} - 1 \right| V(t)\, dt$$

eine zu (78) „majorante" Integralgleichung, und wir bekommen daher

$$|\tilde{v}(s; \lambda)| < \sqrt{1 + \lambda} \cdot e^{\sqrt{\lambda} P(s)}; \qquad P(s) = \int_0^s \left| \frac{1}{p(t)} - 1 \right| dt.$$

gesetzt ist. $\widetilde{m}_1$, $\widetilde{m}_2$ sind also stetige Funktionen von λ, und es gelten, wie man sieht, gleichmäßig für $\lambda_0 \leqq \lambda \leqq \lambda_1$ die Limesgleichungen

$$\lim_{s=\infty} \widetilde{E}(s;\lambda) = 0, \qquad \lim_{s=\infty} \frac{\partial \widetilde{E}(s;\lambda)}{\partial s} = 0.$$

Wählen wir in den die Lösung v bestimmenden Randbedingungen den Winkel h einmal $= -\frac{\pi}{2}$ und ein andermal $= 0$, so erhalten wir für v zwei unabhängige Lösungen $v^{(1)}(s;\lambda)$, $v^{(2)}(s;\lambda)$ der Gleichung (74), welche sich in der Form

$$(81)\quad \begin{cases} v^{(1)}(s;\lambda) = \widetilde{m}_{11}(\lambda)\cos\left(s\sqrt{\lambda}\right) + \widetilde{m}_{12}(\lambda)\sin\left(s\sqrt{\lambda}\right) + \widetilde{E}_1(s;\lambda), \\ v^{(2)}(s;\lambda) = \widetilde{m}_{21}(\lambda)\cos\left(s\sqrt{\lambda}\right) + \widetilde{m}_{22}(\lambda)\sin\left(s\sqrt{\lambda}\right) + \widetilde{E}_2(s;\lambda) \end{cases}$$

darstellen, wo die $\widetilde{m}$ stetig sind und die $\widetilde{E}$ samt ihren ersten Differentialquotienten nach s mit wachsendem s gleichmäßig gegen 0 konvergieren.

Sind die schärferen Voraussetzungen

$$\lim_{s=\infty} s\,(p(s) - 1) = 0, \qquad \int_0^\infty t\,|p(t) - 1|\,dt \quad \textit{endlich}$$

erfüllt, so fallen die Funktionen $\widetilde{m}_1(\lambda)$, $\widetilde{m}_2(\lambda)$ in (80) stetig differenzierbar aus. Wir zeigen dies folgendermaßen: Aus (74) folgt für die Funktion $v_\lambda = \frac{\partial v(s;\lambda)}{\partial \lambda}$ die Differentialgleichung

$$\frac{d}{ds}\left(p(s)\,\frac{dv_\lambda}{ds}\right) + \lambda v_\lambda = -v.$$

Setzen wir also

$$F(s,t;\lambda) = \{v^{(1)}(s;\lambda)\,v^{(2)}(t;\lambda) - v^{(2)}(s;\lambda)\,v^{(1)}(t;\lambda)\},$$

so gilt, da

$$(v_\lambda)_{s=0} = 0, \qquad \left(p(s)\,\frac{dv_\lambda}{ds}\right)_{s=0} = 0$$

ist,

$$v_\lambda(s;\lambda) = \int_0^s F(s,t;\lambda)\,v(t;\lambda)\,dt.$$

Durch Differentiation nach s gewinnen wir daraus, wenn wir noch

$$\widetilde{F}(s,t;\lambda) = p(s)\,\frac{\partial F(s,t;\lambda)}{\partial s}$$

einführen, die Gleichung

$$\frac{\partial \tilde{v}(s;\lambda)}{\partial \lambda} = \int_0^s \widetilde{F}(s,t;\lambda)\,v(t;\lambda)\,dt.$$

Demnach ergeben die Formeln (80), (81) eine Konstante H_1, so daß

$$\left|\frac{\partial \tilde{v}(s;\lambda)}{\partial \lambda}\right| \leqq H_1 s \quad \text{für} \quad s \geqq 0,\ \lambda_0 \leqq \lambda \leqq \lambda_1$$

ist. Existiert also das Integral $\int\limits_0^\infty t|p(t)-1|\,dt$, so wird

$$\int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{p(t)}-1\right)\cdot\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{\widetilde{v}\,(t;\lambda)\cos\left(t\sqrt{\lambda}\right)\right\}dt$$

absolut und gleichmäßig konvergieren, und infolgedessen zeigt der Ausdruck, den wir für $\widetilde{m}_1(\lambda)$ gewonnen haben, daß diese Funktion ebenso wie $\widetilde{m}_2(\lambda)$ stetig differenzierbar ist. Auch erkennen wir, daß bei den gegenwärtigen engeren Voraussetzungen die Funktionen

$$s\widetilde{E},\quad s\frac{\partial\widetilde{E}}{\partial s},\quad \frac{\partial\widetilde{E}}{\partial\lambda},\quad \frac{\partial^2\widetilde{E}}{\partial s\,\partial\lambda}$$

mit wachsendem s gleichmäßig in λ gegen 0 konvergieren.

Damit sind nun die Aussagen unseres Satzes zunächst nicht für die Funktionen $u^{(1)}(s;\lambda)$, $u^{(2)}(s;\lambda)$, sondern für die Lösungen $v^{(1)}(s;\lambda)$, $v^{(2)}(s;\lambda)$ der Gleichung (74) bewiesen. Vergleichen wir aber in derselben Weise, wie es soeben mit

$$\frac{d^2\tilde{v}}{ds^2}+\frac{\lambda}{p(s)}\widetilde{v}=0 \quad\text{und}\quad \frac{d^2w}{ds^2}+\lambda w=0$$

geschehen ist, jetzt die Gleichungen

$$\frac{d}{ds}\left(p(s)\frac{du}{ds}\right)+(\lambda-q(s))\,u=0$$

und

$$\frac{d}{ds}\left(p(s)\frac{dv}{ds}\right)+\lambda v=0$$

miteinander, so gewinnen wir, falls das Integral $\int\limits_0^\infty|q(t)|\,dt$ existiert, die Formeln

$$u^{(1)}(s;\lambda)=m_{11}^*(\lambda)\,v^{(1)}(s;\lambda)+m_{12}^*(\lambda)\,v^{(2)}(s;\lambda)+E_1^*(s;\lambda),$$
$$u^{(2)}(s;\lambda)=m_{21}^*(\lambda)\,v^{(1)}(s;\lambda)+m_{22}^*(\lambda)\,v^{(2)}(s;\lambda)+E_2^*(s;\lambda).$$

Hierin sind die m^* stetige Funktionen von λ allein, und die vier Größen

$$E_1^*,\ \frac{\partial E_1^*}{\partial s};\qquad E_2^*,\ \frac{\partial E_2^*}{\partial s}$$

konvergieren mit unbegrenzt wachsendem s gleichmäßig für $\lambda_0\leqq\lambda\leqq\lambda_1$ gegen 0. Ist sogar $\int\limits_0^\infty t|q(t)|\,dt$ endlich, so sind die m^* stetig differenzierbar, und es konvergieren

$$sE_i^*,\qquad s\frac{\partial E_i^*}{\partial s},\qquad \frac{\partial E_i^*}{\partial\lambda},\qquad \frac{\partial^2E_i^*}{\partial s\,\partial\lambda}\qquad\qquad (i=1,2)$$

mit $\frac{1}{s}$ gleichmäßig für $\lambda_0\leqq\lambda\leqq\lambda_1$ gegen 0. Drücken wir in den so gewonnenen Formeln $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ mittels der Relationen (81) aus, so erhalten wir diejenigen Gleichungen, deren Gültigkeit unser Satz behauptete.

Aus $\lim\limits_{s=\infty} (u^{(1)}, u^{(2)}) = 1$ ergibt sich, daß stets

$$\begin{vmatrix} m_{11}(\lambda), & m_{12}(\lambda) \\ m_{21}(\lambda), & m_{22}(\lambda) \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

sein muß.

21. Die soeben angestellten Betrachtungen ermöglichen uns, in dem Falle, daß

$$\lim_{s=\infty} s(p(s)-1) = 0, \qquad \lim_{s=\infty} sq(s) = 0$$

ist und die Integrale

$$\int_0^\infty t|p(t)-1|\,dt \quad \text{sowie} \quad \int_0^\infty t|q(t)|\,dt$$

endlich sind, die Bestimmung des Streckenspektrums und der durch Satz 6 charakterisierten Funktion $\varrho(\lambda)$ vollständig durchzuführen. *Unter den angegebenen Voraussetzungen besteht nämlich das Spektrum der Differentialgleichung aus endlichvielen Eigenwerten < 0 und einem sich von 0 bis $+\infty$ lückenlos hinziehenden Streckenspektrum. Hat $\varphi(s; \lambda)$ [s. Formel (9)] für $\lambda > 0$ die Form*

$$\varphi(s;\lambda) = m_1(\lambda)\cos\left(s\sqrt{\lambda}\right) + m_2(\lambda)\sin\left(s\sqrt{\lambda}\right) + E(s;\lambda), \tag{82}$$
$$\left[\lim_{s=\infty} E(s;\lambda) = 0\right]$$

so ist

$$\begin{aligned} \varrho(\lambda) &= 0 && \textit{für} \quad \lambda \leqq 0, \\ &= \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\pi\sqrt{\lambda}\,[m_1^{\,2}(\lambda) + m_2^{\,2}(\lambda)]} && \textit{für} \quad \lambda > 0. \end{aligned}$$

Um zu zeigen, daß jeder Punkt $\lambda > 0$ zum Streckenspektrum gehört, beweise ich, daß, wenn Δ irgend ein ganz im Gebiet $\lambda > 0$ gelegenes Intervall bedeutet, das quadratische Integral $\int_0^\infty (\Delta Z(s;\lambda))^2\,ds$ von

$$\Delta Z(s;\lambda) = \int_{(\Delta)} \varphi(s;\mu)\,d\sqrt{\mu}$$

existiert und eine stetige Funktion der Endpunkte von Δ ist. In der Tat gilt

$$\int_0^a (\Delta Z)^2\,ds = \int_{(\Delta)}\int_{(\Delta)} V_a(\lambda,\mu)\,d\sqrt{\lambda}\,d\sqrt{\mu},$$

wenn

$$V_a(\lambda,\mu) = \int_0^a \varphi(s;\lambda)\,\varphi(s;\mu)\,ds = \frac{\left[p(s)\left(\varphi(s;\lambda)\,\dfrac{\partial\varphi(s;\mu)}{\partial s} - \varphi(s;\mu)\,\dfrac{\partial\varphi(s;\lambda)}{\partial s}\right)\right]_{s=a}}{\lambda-\mu}$$

gesetzt wird. Führen wir hierin den Ausdruck (82) ein und bedenken, daß $m_1(\lambda)$, $m_2(\lambda)$ stetig differenzierbar sind und daß sE, $s\frac{\partial E}{\partial s}$, $\frac{\partial E}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial^2 E}{\partial s \partial \lambda}$ gleichmäßig für alle in Δ gelegenen λ mit wachsendem s gegen 0 konvergieren, so erhalten wir

$$V_a(\lambda, \mu) = \frac{\sin\{(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\mu})a\}}{\sqrt{\lambda} - \sqrt{\mu}} \cdot \frac{m_1^2(\lambda) + m_2^2(\lambda)}{2} + R_a(\lambda, \mu).$$

Dabei ist $R_a(\lambda, \mu)$ eine Summe von Termen, die teils gleichmäßig für alle in Δ gelegenen λ, μ mit wachsendem a gegen 0 konvergieren, teils von der Form

$$C(\lambda, \mu) \cdot {\cos \atop \sin} \{(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\mu})\, a\}$$

sind, wo die $C(\lambda, \mu)$ gewisse (auch für $\lambda = \mu$) stetige Funktionen des Variablenpaares λ, μ bedeuten. Daraus ergibt sich, daß

$$\int_{(\Delta)} R_a(\lambda, \mu)\, d\sqrt{\mu}$$

mit wachsendem a gleichmäßig für alle in Δ gelegenen λ gegen 0 konvergiert, und ferner, da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi$$

ist, daß

$$\lim_{a=\infty} \int_{(\Delta)} \left\{ \int_{(\Delta)} V_a(\lambda, \mu)\, d\sqrt{\mu} \right\} d\sqrt{\lambda} = \frac{\pi}{2} \int_{(\Delta)} [m_1^2(\lambda) + m_2^2(\lambda)]\, d\sqrt{\lambda} \tag{83}$$

wird. Damit ist der Nachweis der Existenz und Stetigkeit von $\int_0^\infty (\Delta \mathsf{Z})^2 ds$ erbracht.

Ebenso wie (83) folgt aber, da $\varrho(\lambda)$ stetig und monoton ist,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \Delta \mathsf{Z} \cdot \Delta \mathsf{P}\, ds &= \lim_{a=\infty} \int_{(\Delta)} \left\{ \int_{(\Delta)} V_a(\lambda, \mu)\, d\sqrt{\mu} \right\} d\varrho(\lambda) \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{(\Delta)} [m_1^2(\lambda) + m_2^2(\lambda)]\, d\varrho(\lambda) \cdot \end{aligned} \tag{84}$$

Aus Satz 6 schließen wir sofort, daß, wenn die nach s genommenen quadratischen Integrale von

$$\Xi_1(s; \lambda) = \int_0^\lambda \varphi(s; \mu)\, d\xi_1(\mu), \qquad \Xi_2(s; \lambda) = \int_0^\lambda \varphi(s; \mu)\, d\xi_2(\mu)$$

existieren und stetige Funktionen von λ sind,

$$\int_0^\infty \Delta \Xi_1 \cdot \Delta \Xi_2 \, ds = \int_{(\Delta)} \frac{d\xi_1 \, d\xi_2}{d\varrho}$$

wird. Nach den eben angestellten Überlegungen dürfen wir nun gewiß im Intervall Δ, welches ganz dem Gebiet $\lambda > 0$ angehört,

$$\xi_1(\lambda) = \sqrt{\lambda}, \quad \text{also} \quad \Xi_1(s;\lambda) = \mathsf{Z}(s;\lambda);$$
$$\xi_2(\lambda) = \varrho(\lambda), \quad \text{also} \quad \Xi_2(s;\lambda) = \mathsf{P}(s;\lambda)$$

wählen, und wir bekommen dann

$$\int_0^\infty \Delta \mathsf{Z} \cdot \Delta \mathsf{P} \, ds = \int_{(\Delta)} d\sqrt{\lambda} = \int_{(\Delta)} \frac{d\lambda}{2\sqrt{\lambda}}.$$

Ein Vergleich mit (84) liefert in der Tat

$$\frac{d\lambda}{d\varrho} = \pi \sqrt{\lambda}\,[m_1{}^2(\lambda) + m_2{}^2(\lambda)] \qquad (\text{für } \lambda > 0).$$

Um die dadurch gewonnene Integraldarstellung in eine möglichst einfache Form zu bringen, führe ich

$$\psi(s;\lambda) = \frac{\varphi(s;\lambda)}{\sqrt{\pi[m_1{}^2(\lambda) + m_2{}^2(\lambda)]} \cdot \sqrt[4]{\lambda}} \qquad (\lambda > 0)$$

und für die n Punkte $\lambda_i (< 0)$ des Punktspektrums die normierten Eigenfunktionen

$$\psi_i(s) = \frac{\varphi(s;\lambda_i)}{\sqrt{\int_0^\infty (\varphi(s;\lambda_i))^2 \, ds}}$$

ein. *Dann gilt für jede stetige Funktion $f(s)$, welche die Randbedingung (10) erfüllt und die Eigenschaften besitzt, daß $L(f)$ stetig ist und die Integrale*

$$\int_0^\infty f^2 \, ds, \qquad \int_0^\infty (L(f))^2 \, ds, \qquad \int_0^\infty |f| \, ds$$

sämtlich konvergieren, die absolut und gleichmäßig konvergente Darstellung

$$(85) \qquad f(s) = \sum_{i=1}^n \psi_i(s) \int_0^\infty f(t)\,\psi_i(t)\,dt + \int_0^\infty \psi(s;\lambda) \int_0^\infty f(t)\,\psi(t;\lambda)\,dt\,d\lambda.$$

Auf den Beweis der Tatsache, daß die Anzahl n der Eigenwerte λ_i in unserm Falle endlich ist, will ich hier, da derselbe keine Schwierigkeit bereitet, nicht weiter eingehen. — Zu den Integraldarstellungen (85) gehören namentlich die, welche Herr Hilb in Kap. II seiner in der Einleitung zitierten Arbeit untersucht hat.*)

22. Anstatt nach der soeben entwickelten Methode auch den von Herrn Hilb durchgeführten Wirtingerschen Fall zu behandeln — was leicht geschehen kann —, ziehe ich es vor, hier zum Schluß noch ein einfaches Beispiel dafür zu geben, daß *das Spektrum einer Differentialgleichung die ganze reelle λ-Achse überdecken kann.* Gerade die Möglichkeit solcher Fälle zwingt uns, die Greensche Funktion des Differentialausdrucks $L(u)+\lambda u$ nicht für reelle, sondern für komplexe λ-Werte — etwa, wie in Kap. I. geschah, für $\lambda = i$ — aufzustellen.

Das Beispiel, welches ich im Auge habe, ist das folgende:

$$L(u) = \frac{d^2 u}{ds^2} + s\,u(s) \qquad (s \geqq 0). \tag{86}$$

Als Randbedingung werde $u(0)=0$ gewählt. (2) und (4) ergeben die Auflösungen

$$u^{(1)}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k s^{3k}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdots \overline{3k-1}\cdot 3k},$$

$$u^{(2)}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k s^{3k+1}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdots 3k\cdot \overline{3k+1}},$$

die sich mit Hilfe der Besselschen Funktionen $J_{\frac{1}{3}}$, $J_{-\frac{1}{3}}$ in der Form

$$u^{(1)}(s) = \sqrt[3]{3}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) u_1(s) = \sqrt[3]{3}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\cdot \sqrt{s}\, J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\, s^{3/2}\right),$$

$$u^{(2)}(s) = \cancel{\sqrt[3]{3}}\,\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) u_2(s) = \cancel{\sqrt[3]{3}}\,\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\cdot \sqrt{s}\, J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\, s^{3/2}\right)$$

darstellen lassen. Infolgedessen gelten für das Verhalten im Unendlichen die asymptotischen Formeln

$$u^{(1)}(s) \sim \sqrt[3]{3}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{s}}\cos\left(\frac{2}{3}\, s^{3/2} - \frac{\pi}{12}\right), \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

$$u^{(2)}(s) \sim \cancel{\sqrt[3]{3}}\,\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{s}}\cos\left(\frac{2}{3}\, s^{3/2} - \frac{5\pi}{12}\right).$$

---

*) Die Hilbschen Voraussetzungen kommen darauf hinaus, daß $p(s)$, $q(s)$ analytische Funktionen einer komplexen Variablen s sind, die für alle s, deren Realteil eine gewisse negative Grenze übersteigt, regulär sind, absolut unter einer festen Schranke bleiben und eine rein imaginäre Periode, etwa $2\pi i$, besitzen. Unter diesen Umständen konvergieren $p(s)$, $q(s)$ für $s = +\infty$ je gegen eine feste Grenze, und zwar ebenso stark, wie e^{-s} gegen 0 konvergiert. Natürlich wird die Grenze, gegen welche $p(s)$ konvergiert, als von 0 verschieden vorausgesetzt. — Neuerdings hat Herr Plancherel (Math. Ann. Bd. 67, pag. 519 ff.) die Gültigkeit der Hilbschen Integraldarstellungen unter beschränkteren Voraussetzungen für die zu entwickelnde Funktion $f(s)$ bewiesen.

Da $u^{(1)}(s+\lambda)$, $u^{(2)}(s+\lambda)$ zwei voneinander unabhängige Lösungen der Gleichung

$$L(u)+\lambda u \equiv \frac{d^2 u}{ds^2}+(s+\lambda)u=0 \tag{87}$$

sind, zeigen jene Formeln, daß (87) für keinen reellen Wert eine quadratisch integrierbare Lösung zuläßt und folglich der Differentialausdruck (86) kein Punktspektrum besitzt, während sein Streckenspektrum die reelle Achse lückenlos bedeckt.

Die Bestimmung der Basisfunktion $\varrho(\lambda)$ ist nach der gleichen Methode wie im vorigen Absatz durchzuführen. Im gegenwärtigen Beispiel ist

$$\varphi(s;\lambda)=u^{(2)}(s+\lambda)\,u^{(1)}(\lambda)-u^{(1)}(s+\lambda)\,u^{(2)}(\lambda). \tag{88}$$

Wird wiederum

$$V_a(\lambda,\mu)=\int_0^a \varphi(s;\lambda)\,\varphi(s;\mu)\,ds$$

gesetzt, so gewinnen wir aus den asymptotischen Darstellungen der Funktionen $u^{(1)}(s)$, $u^{(2)}(s)$ und deren Differentialquotienten leicht die Limesgleichung

$$\lim_{a=\infty}\int_{(\Delta)} V_a(\lambda,\mu)\,d\mu=\boxed{\sqrt[3]{3}\left\{\Gamma\left(\tfrac{1}{3}\right)\Gamma\left(\tfrac{2}{3}\right)\right\}^2}\cdot\{u_1^2(\lambda)+u_2^2(\lambda)-u_1(\lambda)\,u_2(\lambda)\}\equiv\frac{1}{\varrho'(\lambda)},$$

und zwar gilt dieselbe gleichmäßig für alle λ, die einem im übrigen willkürlichen, ganz im Innern von Δ gelegenen Intervall angehören. Daraus ist zu schließen, daß

$$\frac{d\varrho}{d\lambda}=\varrho'(\lambda)$$

ist. Schreibt man

$$\psi(s;\lambda)=\frac{u_2(s+\lambda)\,u_1(\lambda)-u_1(s+\lambda)\,u_2(\lambda)}{\sqrt{u_1^2(\lambda)+u_2^2(\lambda)-u_1(\lambda)\,u_2(\lambda)}},$$

so besteht für die „willkürliche" Funktion $f(s)$ die Integraldarstellung

$$f(s)=\frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(s;\lambda)\int_0^\infty f(t)\,\psi(t;\lambda)\,dt\,d\lambda.$$

Die Bedingungen, denen $f(s)$ zu genügen hat, können ohne Mühe genauer präzisiert werden. Außerdem läßt sich diese Integraldarstellung ebenso weitgehend verallgemeinern, wie es durch die von Herrn Hilb und die in Absatz 21 dieser Arbeit angestellten Untersuchungen mit dem Fourierschen Integraltheorem geschehen ist.

Schlußbemerkung. Statt der Gleichung

$$L(u)+\lambda u=0 \tag{89}$$

$3\left\{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\right\}^2$

kann man die allgemeinere Form

$$L(u) + \lambda k(s) u = 0 \tag{90}$$

zugrunde legen, in der $k(s)$ eine für $s \geqq 0$ stetige, positive Funktion bedeutet. Will man annehmen, daß $L\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ existiert und stetig ist, so kann man (90) auf eine Gleichung von der spezielleren Art (89) transformieren.*) Wie man sich aber durch eine direkte Behandlung von (90) überzeugt, welche gar keine Schwierigkeit darbietet, ist diese Voraussetzung der Existenz und Stetigkeit von $L\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ überflüssig, da es, wenn nur $k(s)$ stetig und > 0 ist, allgemein gelingt, Entwicklungen einer willkürlichen Funktion $f(s)$ nach den einer festen Randbedingung genügenden Lösungen von (90) herzuleiten, welche den Sätzen 4 und 7 genau entsprechen. Dabei hat man die in diesen beiden Sätzen auftretende Bedingung der quadratischen Integrierbarkeit von f und $L(f)$ durch die Forderung zu ersetzen, daß die Integrale

$$\int_0^\infty k f^2 \, ds, \qquad \int_0^\infty \frac{1}{k} (L(f))^2 \, ds$$

konvergieren sollen.**)

Läßt man auch die Annahme fallen, daß $k(s)$ für $s \geqq 0$ ein konstantes Vorzeichen besitzt, so gelangt man zu Fragestellungen, zu deren Beantwortung die Theorie der *polaren Integralgleichungen* ***) herangezogen werden muß. Die genaue Formulierung der in diesem Falle gültigen Entwicklungssätze nebst einer Erweiterung der hier zur Sprache gekommenen Untersuchungen auf partielle Differentialgleichungen von elliptischem Typus †) hoffe ich binnen kurzem zur Veröffentlichung bringen zu können.

Bad Sooden a. d. Werra, den 4. Juni 1909.

---

*) Vergl. z. B. Hilbert, Gött. Nachr. 1904, pag. 226.

**) Auch die Resultate der Absätze 20, 21 übertragen sich auf den allgemeineren Fall der Gleichung (90), wenn wir, statt $k(s)$ identisch $= 1$ zu nehmen, nur die Endlichkeit des Integrals $\int_0^\infty t|k(t) - 1| \, dt$ voraussetzen.

***) Derartige Gleichungen sind zuerst von Hilbert (Gött. Nachr. 1906, pag. 473ff.) behandelt worden.

†) Vergl. Hilb, a. a. O, Kap. IV.