Über unendliche diskontinuierliche Gruppen.

Von

M. Dehn in Kiel.

Inhalt.

Einleitung.

Die drei Fundamentalprobleme für die unendlichen diskontinuierlichen Gruppen.

Allgemeine diskontinuierliche Gruppen sind durch n Erzeugende und durch die m zwischen ihnen bestehenden Relationen

$$R_1(S_{i_1}\cdots)=1,$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$R_m(S_{i_m}\cdots)=1$$

wohl zuerst von Dyck (Math. Ann. 20 u. 22) definiert worden. Die Resultate dieser Arbeit beziehen sich aber wesentlich auf endliche Gruppen. Die allgemeine Theorie derartig definierter Gruppen, sofern sie unendlich sind, scheint bisher sehr wenig entwickelt zu sein. Hier sind es vor allem *drei fundamentale Probleme*, deren Lösung sehr wichtig und wohl nicht ohne eindringendes Studium der Materie möglich ist.

1. *Das Identitätsproblem:* Irgend ein Element der Gruppe ist durch seine Zusammensetzung aus den Erzeugenden gegeben. Man soll eine Methode angeben, um mit einer endlichen Anzahl von Schritten zu entscheiden, ob dies Element der Identität gleich ist oder nicht.

2. *Das Transformationsproblem:* Irgend zwei Elemente S und T der Gruppe sind gegeben. Gesucht wird eine Methode zur Entscheidung der Frage, ob S und T ineinander transformiert werden können, d. h. ob es ein Element U der Gruppe gibt, welches die Relation befriedigt:

$$S = UTU^{-1}.$$

3. *Das Isomorphieproblem:* Zwei Gruppen sind gegeben, man soll entscheiden, ob sie isomorph sind oder nicht (und, des weiteren, ob eine gegebene Zuordnung der Erzeugenden der einen Gruppe zu Elementen der andern Gruppe eine isomorphe Zuordnung ist oder nicht).

Diese drei Probleme haben sehr verschiedene Schwierigkeitsgrade. Das Problem 1 ist ein Spezialfall des Problems 2. Das erste betrifft offenbar den Charakter *eines* Elements einer Gruppe, das zweite die Beziehung von *zwei* Elementen *einer* Gruppe, das dritte endlich die Beziehungen zwischen Elementen *zweier* Gruppen. Es ist anzunehmen, daß die Lösung dieser drei Probleme das natürliche Fundament einer methodischen Darstellung der Theorie der unendlichen Gruppen bildet. Man wird jedoch schon mit Notwendigkeit zu ihnen geführt bei der Bearbeitung der Topologie. So erheischt eine jede verschlungene Raumkurve, sofern man sie topologisch vollständig verstehen will, die Lösung der drei obigen Probleme für einen speziellen Fall: Jeder Raumkurve K ist in der Tat eine auf die von uns gewählte Weise definierte unendliche Gruppe G_K zugeordnet. K ist dann und nur dann unverknotet, wenn G_K eine Abelsche Gruppe ist, was auf ein Identitätsproblem führt*). Jeder anderen Kurve des Raumes entspricht in bezug auf K ein bestimmtes Element von G_K. Zwei Raumkurven sind dann und nur dann, ohne K zu durchdringen, ineinander stetig überführbar, wenn die entsprechenden Elemente von G_K

*) S. Math. Ann. 69.

ineinander transformierbar sind. Endlich erfordert die Lösung der Frage, ob eine gegebene Raumkurve K' in K stetig ohne Selbstdurchdringung übergeführt werden kann, die Lösung des dritten Problems für G_K und $G_{K'}$.

Das Auftreten in der Topologie verscheucht auch etwaige Bedenken gegen die Beschränkung auf solche unendliche Gruppen, die in der oben angegebenen Weise definiert sind. In der Tat, solche Bedenken können entstehen, wenn man beachtet, daß im allgemeinen *jede unendliche Gruppe Untergruppen besitzt, die nicht durch eine endliche Anzahl von Erzeugenden, zwischen denen eine endliche Anzahl von Relationen besteht, erzeugt werden können.* Betrachten wir etwa die Gruppe, die durch die beiden Erzeugenden S_1 und S_2 ohne jede zwischen ihnen bestehende Relation gegeben ist, und greifen aus ihr alle diejenigen Elemente heraus, die aus S_1 durch Komposition und Transformation innerhalb der Gruppe entstehen, wie z. B. S_1, S_1^n, $S_2 S_1 S_2^{-1} S_1$ usw. Diese Elemente bilden eine Gruppe und zwar eine zu der gegebenen Gruppe gehörende invariante Untergruppe, deren Elemente nicht durch eine endliche Anzahl von ihnen erzeugt werden können. Diese Gruppe genügt also keineswegs der an die Spitze gestellten Definition für die zu behandelnden Gruppen.

Jedes der drei Probleme ist für *endliche* Gruppen ohne weiteres durch Probieren lösbar und also bedeutungslos. Beschränkt man sich auf *analytische* Gruppen, d. h. Gruppen von Transformationen in einer n-dimensionalen reellen oder komplexen Zahlenmannigfaltigkeit, bei denen die Erzeugenden direkt durch bestimmte Transformationen gegeben sind, so ist das erste Problem in den meisten Fällen ohne weiteres als gelöst zu betrachten. Ebenfalls gelöst wird das erste Problem durch die Konstruktion des zu der gegebenen Gruppe gehörenden *Gruppenbildes*, d. h. eines gewissen unendlichen Streckenkomplexes, der in der Arbeit Math. Ann. 69 eingeführt wurde und auch der vorliegenden Arbeit die Grundlage liefert.

Ist die Gruppe gegeben als eigentlich diskontinuierliche Gruppe von Bewegungen im euklidischen oder nichteuklidischen Raum, so ist das zweite Problem durch die Konstruktion der zu der Gruppe gehörenden *Fundamentalbereiche* zu erledigen. Ebenso erhalten wir die Lösung des Problems im allgemeinsten Falle durch die *kanonische Darstellung der Bewegungen des Gruppenbildes in sich.*

Für die Lösung des dritten Problems wird die analytische Darstellung wenig leisten können. Von wesentlicher Bedeutung scheint hier die *topologische Untersuchung des Gruppenbildes* zu sein.

In der vorliegenden Arbeit werden *die drei Probleme erledigt für den Fall, daß jede Erzeugende in allen definierenden Relationen zusammen nur zweimal vorkommt* (Kap. II). Um dies zu erreichen, muß ein genaues

Studium der einfachsten Klasse solcher Gruppen vorangehen, nämlich der *Fundamentalgruppen geschlossener Flächen* (Kap. I). Endlich werden (Kap. III) auch noch einige *Sätze über die allgemeinsten Gruppen* angegeben und einzelne *Beispiele von höheren Gruppen* behandelt. Hier wird unter anderem das Transformationsproblem für einige *Knotengruppen* erledigt, für die das Identitätsproblem bereits Math. Ann. 69 durch Aufstellung des Gruppenbildes gelöst wurde.

Kapitel I.

Die Fundamentalgruppen der geschlossenen Flächen.

Man kann nicht eigentlich sagen, daß im Falle der Fundamentalgruppen geschlossener Flächen die reine Gruppentheorie der Topologie große Dienste zu leisten imstande ist. Im Gegenteil wirkt die Lösung der topologischen Probleme auf die Gruppentheorie befruchtend ein, indem in gewissen einfachen Fällen durch jene Lösung die drei Fundamentalprobleme der Gruppentheorie sofort erledigt werden und ein Weg angedeutet wird, der auch in vielen anderen Fällen zum Ziele führt.

Wir müssen also zunächst topologische Dinge auseinandersetzen, und zwar betreffen diese die stetige Transformation von geschlossenen Kurven auf Flächen. Wir werden hierbei etwas ausführlicher sein müssen, als es nötig wäre, wenn diese Theorie, deren wichtigste Resultate, wenigstens was die zweiseitigen Flächen angeht, bekannt sind*), an irgendeiner Stelle vollständig durchgeführt wäre.

§ 1.

Zweiseitige Flächen.

1. Durch Aufschneiden längs $2p$ Rückkehrschnitten, die alle durch einen Punkt gehen und in Paare von sich schneidenden Kurven $a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_p, b_p$ zerfallen, wird die geschlossene zweiseitige Fläche vom Geschlechte p übergeführt in ein $4p$-Eck, dessen Seiten einander paarweise zugeordnet sind. Bezeichnet man mit a_i bzw. a_i^{-1} usw. die Kurve a_i usw., in den beiden verschiedenen Richtungen durchlaufen, so sind die Seiten des $4p$-Ecks, wenn man den Rand in bestimmtem Sinne durchläuft, der Reihe nach

$$a_1,\ b_1,\ a_1^{-1},\ b_1^{-1};\ a_2,\ \cdots,\ a_p^{-1},\ b_p^{-1}.$$

Jede geschlossene Kurve der Fläche wird in diesem $4p$-Eck abgebildet

*) Poincaré, Pal. Rend. 1905, S. 14ff. Die große Arbeit von C. Jordan (J. d. Math. 1866), die allein diesem Problem gewidmet ist, führt zu einem durchaus unrichtigen Resultat. Auch sieht man hier klar, wie wesentlich vereinfachend die Heranziehung der nichteuklidischen Geometrie wirkt.

durch geschlossene Kurven oder durch Kurvenstücke $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \cdots$, die je von zwei Randpunkten des $4p$-Ecks begrenzt werden. Der Endpunkt von $\mathfrak{d}_i$ und der Anfangspunkt von $\mathfrak{d}_{i+1}$ sind homologe Punkte auf entsprechenden Seiten oder beides Eckpunkte des $4p$-Ecks.

2. Wie man leicht sieht, kann man zunächst ohne Zugrundelegung bestimmter metrischer Verhältnisse, d. i. rein topologisch, ein unendliches Netz von folgender Beschaffenheit konstruieren: Von jedem Eckpunkt gehen $4p$ Strecken aus, jede Masche ist ein $4p$-Eck. Man kann die Netzseiten so bezeichnen, daß auf jeder Masche in demselben Sinne der Reihe nach die Strecken

$$a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}; a_2, \cdots, a_p^{-1}, b_p^{-1}$$

aufeinander folgen. Dann werden um jeden Eckpunkt in gleichem Sinne von demselben ausgehend die Strecken

$$b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, a_1, \cdots, b_p^{-1}, a_p$$

aufeinander folgen. Hierbei ist selbstverständlich eine Strecke, die in einem Sinne durchlaufen mit a_i bezeichnet ist, im andern Sinne durchlaufen mit a_i^{-1} zu bezeichnen. Es ist für das Folgende zweckmäßig, das $4p$-Ecknetz für $p = 1$ als Quadratnetz in der euklidischen Ebene, für $p > 1$ als Netz von gleichwinkligen und gleichseitigen $4p$-Ecken in der hyperbolischen Ebene anzunehmen.

3. Diese Netze kann man bekannterweise auffassen als Abbildungen der unendlich oft überdeckten zweiseitigen Flächen, wobei je zwei Überdeckungen längs *eines* Rückkehrschnittes zusammenhängen. Punkte verschiedener Überdeckung, die demselben Flächenpunkt entsprechen, werden wir zweckmäßig als im metrischen Sinne homologe Punkte der verschiedenen Netzmaschen bestimmen. Eine jede zusammenhängende Kurve der Fläche bildet sich in dem Netze ab als ebenfalls zusammenhängende Kurve, die so oft in eine neue Netzmasche übertritt, wie das Original auf der Fläche die Rückkehrschnitte schneidet. Anfangs- und Endpunkt des Abbildes einer geschlossenen Kurve sind homologe Punkte der betreffenden Netzmaschen. *Jede geschlossene Kurve* der Fläche *bestimmt* durch ein Abbild in dem Netze *eine Bewegung des Netzes in sich*, bei der jede Netzstrecke in eine gleichbezeichnete und der Anfangspunkt des Abbildes in den Endpunkt desselben übergeht. Hierbei ist ein bestimmter Durchlaufungssinn der Flächenkurve angenommen. Die Netzbewegung, die den Endpunkt in den Anfangspunkt überführt, entspricht der in entgegengesetztem Sinne durchlaufenen Flächenkurve.

4. Fällt der Endpunkt mit dem Anfangspunkt zusammen, so ist die entsprechende Netzbewegung die Ruhe; denn unter Festhaltung eines Netzpunktes und der Bezeichnungsweise ist das Netz auf keine von der Iden-

tität verschiedene Weise mit sich selbst zur Deckung zu bringen, dem Umstande entsprechend, daß durch die Bestimmung, daß ein Punkt a in einen homologen Punkt a' übergehen soll, die Bewegung eindeutig bestimmt ist.

Ist ein Abbild einer Flächenkurve eine geschlossene Netzkurve, so ist die Flächenkurve auf einen Punkt zusammenziehbar; denn wie das Abbild beweist, begrenzt die Flächenkurve ein einfach zusammenhängendes Stück der Fläche, das im allgemeinen die Fläche teilweise mehrfach überdecken wird. Umgekehrt ist *das Abbild einer auf einen Punkt zusammenziehbaren Kurve der Fläche eine geschlossene Kurve des Netzes.* Denn jene läßt sich auf der Fläche stetig („isotop") überführen in eine beliebige andere auf einen Punkt zusammenziehbare Kurve, deren Abbild etwa als eine ganz in einer Masche gelegene und folglich sicher geschlossene Kurve gewählt werden kann. Da aber stetigen Transformationen auf der Fläche stetige Transformationen auf dem Netz entsprechen, so ist auch das Abbild der ursprünglich gegebenen Kurve geschlossen. Da wir bei der Entscheidung, ob eine Netzkurve geschlossen ist oder nicht, keines metrischen Hilfsmittels bedürfen, so ist also die Frage, ob eine gegebene Kurve der Fläche auf einen Punkt reduzierbar ist, auf die oben angezeigte Weise direkt rein topologisch zu beantworten. Es ist hierbei gedacht, daß die Flächenkurve durch ihre aufeinanderfolgenden Schnittpunkte mit den verschiedenen Rückkehrschnitten und dementsprechend die sie abbildende Netzkurve durch in gleicher Weise aufeinanderfolgende Punkte der Netzseiten gegeben ist.

5. Das Bild einer nicht auf einen Punkt zusammenziehbaren geschlossenen Flächenkurve hat unendlich viele Formen, ist von der Wahl des Anfangspunktes abhängig. Wählt man einen bestimmten Anfangspunkt auf der Flächenkurve, aber verschiedene (homologe) Punkte des Netzes als seine Bilder, so entsprechen der Flächenkurve verschiedene, jedoch zur Deckung zu bringende, kongruente, ineinander transformierbare Bewegungen des Netzes. Wählen wir einen andern Punkt als Anfangspunkt der Flächenkurve, behalten jedoch das ursprüngliche Bild des ursprünglichen Endpunktes bei, so bleibt die zugehörige Bewegung des Netzes ungeändert. Hält man den Anfangspunkt der Flächenkurve fest und transformiert dieselbe im übrigen stetig (isotop) auf der Fläche, so behält die zugehörige Netzkurve Anfangs- und Endpunkt bei. Die zugehörige Netzbewegung ist also nach dem obigen ebenfalls unverändert geblieben. Umgekehrt sind alle durch zwei feste Netzpunkte begrenzte Kurven Bilder von stetig ineinander transformierbaren Flächenkurven. Da wir nun jede stetige Transformation einer Flächenkurve zusammensetzen können aus solchen Transformationen, bei denen ein Kurvenpunkt fest bleibt, so haben wir das Resultat: *Zwei Flächenkurven sind dann und nur*

dann stetig auf der Fläche ineinander transformierbar, wenn irgend zwei bez. zu den beiden Flächenkurven gehörende Netzbewegungen ineinander transformierbar sind.

Die Entscheidung der Frage, ob zwei Flächenkurven ineinander transformierbar sind oder nicht, ist also äquivalent mit der Lösung eines Problems der euklidischen bez. nichteuklidischen Metrik. Ohne weiteres können wir keine rein topologische Methode für die Erledigung des allgemeinen Problems angeben. Dies ist nur möglich im Falle $p = 1$, d. i. im Falle, daß das Netz in der euklidischen Ebene liegt. Hier setzen sich alle Bewegungen zusammen aus Parallelverschiebungen in der Richtung der a- bez. b-Seiten des Netzes. Die Bewegungsgruppe des Netzes ist abelsch, und zwei Bewegungen sind ineinander transformierbar, wenn sie aus der gleichen Anzahl gleich gerichteter a- bez. b-Verschiebungen zusammengesetzt sind. Dies liefert uns in leicht ersichtlicher Weise eine einfache topologische Entscheidung der in Betracht kommenden Frage.

Im Falle $p > 1$ haben wir es mit Bewegungen (ohne Umlegung) in der hyperbolischen Ebene zu tun. Eine jede einzelne solche Bewegung ist äquivalent mit einer Drehung um einen realen oder idealen Mittelpunkt. In unserm Falle muß er ideal sein, da es von der Identität verschiedene Bewegungen mit einem festen realen Punkt, wie schon oben bemerkt, nicht gibt. Es ist also jede der in Betracht kommenden Bewegungen eine Verschiebung längs einer realen Achse. Damit nun zwei solche Bewegungen ineinander transformierbar sind, ist es notwendig und hinreichend, daß die entsprechenden Verschiebungsstrecken längs den Achsen sich aus homologen Stücken in gleicher Weise zusammensetzen. Repräsentieren wir also die Verschiebungsstrecken durch lauter in *einer* Masche liegende Strecken, *so sind die Bewegungen dann und nur dann ineinander transformierbar, wenn diese Vereine von Strecken identisch sind.* Dadurch *ist unser Problem auf ein algebraisches Problem,* das in einer endlichen Anzahl von Schritten zu erledigen ist, zurückgeführt: In der Tat: 1. sind die Koordinaten der Netzpunkte Wurzeln algebraischer Gleichungen; 2. stellen sich die Netzbewegungen dar als lineare Transformationen der Koordinaten mit Koeffizienten, die bekannte algebraische Funktionen der Koordinaten der Netzpunkte sind; 3. sind deshalb auch die Koeffizienten der Gleichung der Verschiebungsachse bekannte algebraische Funktionen jener Größen, und das gleiche gilt dann auch für die Koordinaten der Schnittpunkte der Achse mit den Netzseiten; 4. kommt dann die Lösung unseres Problems hinaus auf die Entscheidung, ob gewisse Wurzeln gegebener algebraischer Gleichungen miteinander identisch sind, eine Entscheidung, die nach bekannten Sätzen mit einer endlichen Anzahl von Schritten zu erledigen ist.

Wenn auch die vorstehenden allgemeinen Bemerkungen uns bereits die Überzeugung geben, daß unser Problem in einer endlichen Anzahl von Schritten erledigt werden kann, so ist es doch mißlich, daß die aus ihnen fließende Methode viel zu umständlich ist, um auch in nur *einem* Falle praktisch zum Ziele zu führen. Es wird deswegen die folgende auf die speziell vorliegenden Verhältnisse gegründete *praktisch anwendbare Methode* von Bedeutung sein. Ihre Aufstellung legt uns nebenbei die angenehme Pflicht auf, tiefer in die geometrischen Eigenschaften des Polygonnetzes einzudringen.

6. In bezug auf eine Ecke A kann man alle Ecken des Netzes*) folgendermaßen in Klassen teilen: In die erste Klasse kommt A, in die zweite Klasse kommen die Ecken der von A ausgehenden $4p$ Netzseiten, in die dritte die Ecken der von den Punkten der zweiten Klasse ausgehenden Netzseite, mit Ausnahme des Punktes A usw., in die m^{te} Klasse die Ecken der von den Punkten der $m-1^{ten}$ Klasse ausgehenden Netzseiten, soweit sie nicht etwa schon den vorhergehenden Klassen angehören. Ein Punkt der m^{ten} Klasse, etwa B, kann mit A durch einen $m-1$-gliedrigen Netzstreckenzug verbunden werden, aber durch keinen Zug mit weniger Gliedern. Wir nennen $(m-1)s$, wo s die Länge der Netzseiten ist, die *Netzentfernung* ε_N von A und B:

$$\varepsilon_N(A, B) = (m-1)s.$$

Es bezeichne ferner $\varepsilon(A, B)$ die geradlinige Entfernung von A und B.
Hilfssatz: *Es ist*

$$\varepsilon_N(A, B) \leqq 4p(p+1)\varepsilon(A, B).$$

Den Beweis führen wir in zwei Abteilungen.

I. *Der Abstand zweier Punkte des Randes eines Netzpolygons, die auf zwei verschiedenen, nicht aneinander stoßenden Seiten liegen, ist größer als* $\frac{s}{2p}$.

a) Die Mitten zweier aneinander stoßenden Seiten verbinden wir durch einen Kreisbogen mit dem Zentrum in der gemeinsamen Ecke. Da die Verbindungslinien der Mitte mit der Polygonmitte senkrecht auf den Seiten stehen und ganz innerhalb des Polygons liegen, so liegt auch der Kreisbogen ganz innerhalb des Polygons. Der Abstand einer Polygonecke von einem Randpunkte auf einer nicht von ihr ausgehenden Seite ist also größer als $\frac{s}{2} > \frac{s}{2p}$.

b) Sind e und f (s. Fig. 1) zwei nicht aneinander stoßende Polygonseiten, so gibt es stets eine innerhalb des Polygons verlaufende Strecke, die senk-

*) Wir setzen in diesem Abschnitt stets $p > 1$ voraus.

recht auf beiden steht und demgemäß gleich dem kürzesten Abstand der beiden Seiten ist. Denn verbinden wir die Ecken von e und f durch zwei sich nicht schneidende Diagonalen, so entsteht ein Viereck mit vier spitzen Winkeln, von denen, da e und f gleiche Sehnen in einem Kreise sind, je zwei an dieser Diagonale anliegende Winkel gleich sind. (Die Winkel sind kleiner als die Polygonwinkel, also spitz, weil diese es nach Voraussetzung sind.) Die Fußpunkte dieser Strecke kürzesten Abstandes liegen in der Mitte der Seiten, wenn diese einander gegenüber liegen, andernfalls näher an den Endpunkten der kürzeren Diagonale, da die Mittellote auf den Seiten die längere Diagonale treffen.

Fig. 1.

AB und AC seien zwei Polygonseiten, M_1 und M_2 ihre Mitten, M die Polygonmitte (s. Fig. 2), dann folgt durch Kongruenz der Dreiecke M_2AM_1 und M_2MM_1, daß $\sphericalangle AM_1M_2 = M_2M_1M = \frac{\pi}{4}$ ist und daß $MM_1 = AM_1 = \frac{s}{2}$ ist. Nun ist M_1, M_2 usw. ein reguläres, dem Kreis mit dem Radius MM_1 einbeschriebenes $4p$-seitiges Polygon, folglich ist $2p\,M_1M_2 > 2MM_2$ gleich dem Durchmesser des Kreises, und also $M_1M_2 > \frac{s}{2p}$.

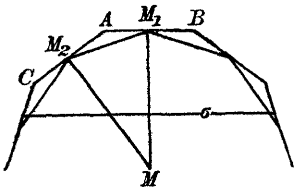

Fig. 2.

Sei nun σ eine Strecke kürzesten Abstandes zwischen zwei Seiten, die nicht durch weniger als zwei Seiten voneinander getrennt werden, so schneidet σ aus dem Kreis um M mit MM_1 ein Stück aus, das nicht größer als ein Halbkreis ist und in dem mindestens eine Sehne M_1M_2 vollständig enthalten ist (Fig. 2); folglich ist $\sigma > M_1M_2 > \frac{s}{2p}$. Sei endlich DE eine Strecke kürzesten Abstandes zweier Seiten, die nur durch eine Seite getrennt werden, dann verbinde man (s. Fig. 3) M_1 und M_2, M_1 und M, M_1 und M_3 durch Geraden, die DE in F, G bez. H schneiden. Aus der Kongruenz der Dreiecke M_1GF und M_2DF (die drei Winkel sind bez. einander gleich) folgt $DF = FG$, $M_2F = M_1F$. Da nun, wie früher gezeigt, $\sphericalangle M_2M_1M_3 = \frac{\pi}{2}$ ist, so folgt

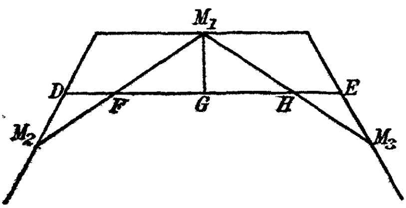

Fig. 3.

$$DE = 2FH > 2FM_1 = M_1M_2 > \frac{s}{2p}.$$

Damit ist das erste Ziel erreicht.

II. Eine zwei Netzecken verbindende Strecke können wir zerlegen in Stücke, die nach dem Vorhergehenden $> \frac{s}{2p}$ sind: a) Diagonale eines Polygons, b) Verbindungslinie eines Eckpunktes und eines Punktes auf einer nicht anstoßenden Seite desselben Polygons, c) Verbindungslinie zweier Punkte desselben Polygons, die auf zwei nicht anstoßenden Seiten liegen, d) Strecke von der in der Fig. 4 angegebenen Form XY: Die Anzahl der in A zusammenstoßenden, von XY getroffenen Seiten ist beliebig. YC gehört mit AB zu demselben Polygon, braucht aber nicht notwendig an AB in B anzugrenzen. Es kann aber Y auch mit B und Z zusammenfallen. ZE' ist das Spiegelbild von ZE in bezug auf AB. Daraus folgt: $XY \geqq EY = YZ + ZE' > YE' > \frac{s}{2p}$. Also ist auch $XY > \frac{s}{2p}$.

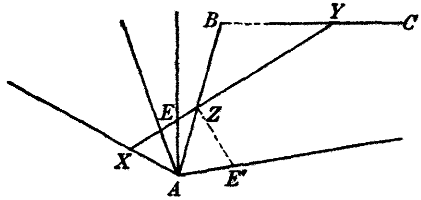

Fig. 4.

In den Fällen a), b) und c) kann man die Endpunkte der Teilstrecke durch einen längs Polygonseiten laufenden Streckenzug verbinden, dessen Länge $\leqq 2ps$ ist, im Falle d) durch einen Zug, dessen Länge $\leqq (2p+2)s$. Das Verhältnis $\frac{\varepsilon_N}{\varepsilon}$ ist also für jede Teilstrecke $> \frac{(2p+2)s}{\frac{s}{2p}}$ und folglich auch für die ganze Strecke wie behauptet

$$\varepsilon_N > 4p(p+1)\varepsilon.$$

Eine Bewegung liefert stets die Zuordnung von Netzecken zueinander und ist durch die Zuordnung zweier Ecken zueinander bestimmt. Geht bei einer Bewegung X_0 in X_1 über, so wollen wir allgemein den Punkt, der bei derselben Bewegung in X_0 übergeht, mit X_{-1} bezeichnen, den Punkt, in den X_1 übergeht mit X_2 usw. Seien nun A_0, A_1 und B_0, B_1 je zwei Eckpunkte des Netzes und es soll entschieden werden, ob die Bewegung $A_0 \to A_1$ in die Bewegung $B_0 \to B_1$ transformiert werden kann: Man verbinde B_0 mit B_1 durch einen Polygonseitenzug $B_0\alpha_0\beta_0\gamma_0 \cdots B_1$. Es seien ferner die zu $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \cdots$ entsprechenden Punkte bei der Bewegung $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \cdots$ (d. i. $B_0\alpha_0$, $B_0\beta_0, \cdots$ gehen in $B_1\alpha_1, B_1\beta_1, \cdots$ über). Die größte der Netzentfernungen $\varepsilon_N(A_0, A_1)$, $\varepsilon_N(B_0, B_1)$, $\varepsilon_N(\alpha_0, \alpha_1)$, $\varepsilon_N(\beta_0, \beta_1), \cdots$ sei m. Durch geeignetes Probieren (etwa indem man nacheinander die Punkte der 2., 3., $\cdots$ Klasse der Ecken in bezug auf A_0 bez. A_1 untersucht) erhält man zu beiden Seiten des Polygonzuges $\cdots A_{-1}A_0A_1 \cdots$

je ein Paar entsprechender Punkte $X_0 X_1$ und $Y_0 Y_1$, deren Netzentfernung größer als $4p(p+1)m$ ist.

Man verbinde A_0 und A_1 mit X_0 und Y_0 bez. X_1 und Y_1 durch entsprechende Polygonseitenzüge

$$A_0 \xi_0 \xi_0' \xi_0'' \cdots X_0 \text{ bez. } A_1 \xi_1 \xi_1' \xi_1'' \cdots X_1$$

und

$$A_0 \eta_0 \eta_0' \eta_0'' \cdots Y_0 \text{ bez. } A_1 \eta_1 \eta_1' \eta_1'' \cdots Y_1 .$$

Durch die Ecken $\xi_0, \xi_0', \cdots$ und $\eta_0, \eta_0', \cdots$ legt man je alle mit $B_0 B_1$, $\alpha_0 \alpha_1$, $\beta_0 \beta_1$ gleichbenannten Streckenzüge hindurch. *Dann und nur dann, wenn es einen in $\xi_0^{(i)}$ oder $\eta_0^{(i)}$ beginnenden Streckenzug gibt, der in $\xi_1^{(i)}$ bezw. $\eta_1^{(i)}$ endigt, ist $B_0 \rightarrow B_1$ in $A_0 \rightarrow A_1$ transformierbar.*

Daß diese Bedingung hinreichend ist, ist klar, weil je zwei gleichbenannte Streckenzüge allemal durch Bewegung ineinander übergeführt werden können. Daß die Bedingung notwendig ist, ergibt sich folgendermaßen: Nach unserem Hilfssatz ist die geradlinige Entfernung $\varepsilon(X_0, X_1)$ und $\varepsilon(Y_0, Y_1) > m$, also zunächst größer als $\varepsilon(A_0, A_1)$; daraus folgt, daß außerhalb des Gebietes zwischen den Kreisen $\cdots X_{-1}, X_0, X_1, \cdots$ und $\cdots Y_{-1}, Y_0, Y_1, \cdots$ die Entfernung entsprechender Punkte stets größer als $\varepsilon(X_0, X_1)$ bez. $\varepsilon(Y_0, Y_1)$ ist, also auch ihre Netzentfernung größer als die Netzentfernungen $\varepsilon_N(B_0, B_1)$, $\varepsilon_N(\alpha_0, \alpha_1)$, $\varepsilon_N(\beta_0, \beta_1)$, $\cdots$. Gibt es nun eine Bewegung, die $B_0 B_1$ in ein Punktepaar $B_0' B_1'$ überführt, das aus zwei sich bei der Bewegung $A_0 \rightarrow A_1$ entsprechenden Punkten besteht, so werden auch α_0 und α_1, β_0 und β_1, $\cdots$ in Paare sich bei $A_0 \rightarrow A_1$ entsprechender Punkte α_0', α_1'; β_0', β_1'; $\cdots$ übergehen, und es muß also der ganze Streckenzug $B_0' \alpha_0' \beta_0' \cdots B_1'$ innerhalb der Kreise $\cdots X_{-1} X_0 X_1 \cdots$ und $\cdots Y_{-1} Y_0 Y_1 \cdots$ liegen und folglich von dem Streckenzug $X_0 \cdots A_0 \cdots Y_0$ in mindestens einem Punkte getroffen werden, woraus die Notwendigkeit der obigen Bedingung unmittelbar folgt.

§ 2.

Einseitige Flächen.

Schneidet man eine geschlossene einseitige Fläche mit der Charakteristik k (= der Maximalanzahl der zusammen nicht begrenzenden geschlossenen Kurven auf der Fläche) längs k durch einen Punkt laufenden passend gewählten Rückkehrschnitten $a_1, a_2, \cdots, a_k$ auf, so erhält man ein einfach zusammenhängendes Flächenstück, dessen Begrenzung, im bestimmten Sinne durchlaufen, gebildet wird durch die Strecken

$$a_1, a_1, a_2, a_2, \cdots, a_k, a_k.$$

Konstruieren wir uns für den Fall $k = 1$ eine von zwei Zweiecken überdeckte Kugel, im Falle $k = 2$ ein Quadratnetz in der euklidischen Ebene, im Falle $k > 2$ in der hyperbolischen Ebene ein Netz von regulären $2k$-Ecken, die zu je $2k$ an einer Ecke zusammenstoßen, so können wir die Seiten der Netze jedesmal so bezeichnen, daß die Begrenzung jeder Masche, in geeignetem Sinnə durchlaufen, die oben angegebene $a_1, a_1, \cdots, a_k, a_k$ ist. Genau so wie im Falle der zweiseitigen Flächen können wir dann jede geschlossene Kurve auf ein zusammenhängendes Kurvenstück der netztragenden Ebene (resp. Kugel) mit homologen Endpunkten abbilden. Jeder geschlossenen Flächenkurve sowie allen in dieselbe stetig transformierbaren Flächenkurven entsprechen Bewegungen des Netzes in sich, die alle ineinander transformierbar sind. Diese Bewegungen sind im Falle $k > 2$ Drehungen um einen idealen Mittelpunkt *mit oder ohne Umlegung.* In der Tat kann hier bei einer von der Identität verschiedenen Bewegung kein realer Punkt in Ruhe bleiben. Zwei Bewegungen sind also dann und nur dann ineinander transformierbar, wenn sie beide Bewegungen mit Umlegung oder beide Bewegungen ohne Umlegung sind, und ferner die Repräsentierungen der Verschiebungsstrecken auf den Achsen der beiden Bewegungen in einer Netzmasche identisch sind. Es gelten hier dieselben Überlegungen wie die für zweiseitige Flächen im vierten, fünften und im sechsten Abschnitt angestellten. Diese liefern uns Methoden, um im Falle $k > 2$ die Frage, ob zwei Netzbewegungen ineinander transformierbar sind, oder, was auf dasselbe herauskommt, zwei Flächenkurven stetig ineinander transformierbar sind, in einer endlichen Anzahl von Schritten zu entscheiden.

Im Falle $k = 1$ haben wir bloß eine von der Identität verschiedene Bewegung, die Drehung der Kugel um 180^0 und dementsprechend bloß eine Art von nicht auf einen Punkt zusammenziehbaren Flächenkurven, die alle ineinander transformierbar sind.

Es bleibt noch der Fall $k = 2$ übrig. Die Fläche wird abgewickelt auf ein Quadratnetz der euklidischen Ebene. Die Seiten einer Masche seien der Reihe nach a, a, b, b. Die Bewegungen des Netzes in sich sind entweder Parallelverschiebungen oder Klappungen verbunden mit Parallelverschiebungen längs der Klappachse. Die Klappachse verbindet entweder die Mitten von Quadratseiten mit der Bezeichnung a oder die Mitten von Quadratseiten mit der Bezeichnung b. Es ist hiernach leicht, die Entscheidung, ob zwei Bewegungen ineinander transformierbar sind, zu treffen: Zwei ineinander transformierbare Bewegungen sind entweder Parallelverschiebungen gleicher Größe und Richtung oder Klappungen um homologe Achsen, verbunden mit gleich großen Parallelverschiebungen längs der Klappachse.

§ 3.

Analytischer Ausdruck für die Flächenkurven.

Jede Bewegung des Netzes in sich kann erzeugt werden durch die Zuordnung zweier Netzeckpunkte. Also ist jede Flächenkurve transformierbar in eine Flächenkurve, deren Netzbild aus lauter Netzseiten besteht. Eine solche Kurve bez. die zugehörige Netzbewegung wollen wir durch die Namen der Netzseiten bezeichnen, und zwar in der Reihenfolge und demjenigen Durchlaufungssinn entsprechend, wie diese sich aus dem Durchlaufen der Kurve vom Anfangs- zum Endpunkt ergeben. Sei A irgend ein solcher, einen Netzseitenzug darstellender Ausdruck, B irgend ein anderer solcher Ausdruck, so ist

$$B^{-1}AB = C$$

ein Ausdruck, der den allgemeinsten in A transformierbaren Streckenzug darstellt. Die den Streckenzügen A und C entsprechenden Netzbewegungen bez. Flächenkurven sind ineinander transformierbar und umgekehrt: Sind A und C zwei Streckenzüge, die ineinander transformierbaren Netzbewegungen entsprechen, so kann man stets einen Streckenzug B finden, sodaß die obige Beziehung zwischen A, B und C gültig ist. Diese Bemerkungen gelten für alle Abwicklungen von Flächenkomplexen auf Netze. Wenden wir dies speziell auf die zweiseitige und einseitige Ringfläche an, so ergibt sich, daß im ersteren Falle alle Netzseitenzüge transformierbar sind in den Ausdruck

$$a^n b^m,$$

wo n und m ganze positive oder negative Zahlen oder Null sein können und a^n natürlich den aus n Strecken a gebildeten Streckenzug bedeutet. Zwei Ausdrücke sind nur dann ineinander transformierbar, wenn sie in bezug auf n und m übereinstimmen. Etwas verwickelter liegen die Verhältnisse im Falle des einseitigen Ringes. Wir beachten für das Folgende, daß wir in einem Ausdruck stets vier aufeinander folgende Strecken mit der Bezeichnung a bez. a, b, b weglassen oder hinzufügen können, da diese vier Strecken einen geschlossenen Streckenzug bilden. Wir können überall b durch $a^{-1}ab$ und b^{-1} durch $(ab)^{-1}a$ ersetzen (wo $(ab)^{-1}$ den Streckenzug ab in umgekehrtem Sinne durchlaufen bezeichnet). ab wollen wir der Einfachheit halber mit c bezeichnen. Wir haben dann:

$$ac = c^{-1}a.$$

Wir können also in jedem Streckenzug, der nach obigem nur c und a enthält, alle c und alle a zusammennehmen und erhalten so (ohne Transformation) Ausdrücke von der Form

$$a^n c^m \quad \text{oder} \quad c^m a^n,$$

Ausdrücke, die durch Transformation ineinander übergehen. Ist n gerade, so stellen diese Ausdrücke Parallelverschiebungen dar, und es ergibt sich leicht, daß keine Transformation die Zahlen m oder n ändern kann. Sollen also zwei solche Ausdrücke mit geradem n ineinander transformierbar sein, so müssen sie in den Zahlen m und n übereinstimmen. Ist aber n ungerade und $m = m_1 + m_2$, so ist nach obigem

$$c^m a^n = c^{m_1 + m_2} a^n = c^{m_1} a^n c^{-m_2}.$$

Durch Transformation geht also

$$c^{m_1 + m_2} a^n \quad \text{in} \quad c^{m_1 - m_2} a^n$$

über. Also geht durch Transformation ein jeder Ausdruck mit ungeradem Exponenten für a in eine der Formen

$$a^n \quad \text{oder} \quad c a^n$$

über. Zusammenfassend haben wir also: Zwei Ausdrücke sind dann und nur dann ineinander transformierbar, wenn 1. die algebraische Summe der Exponenten von a die gleiche ist, und wenn gleichzeitig 2. a) falls jene Summe gerade ist, auch die algebraische Summe der Exponenten von c die gleiche ist, oder b) falls jene Summe ungerade ist, die algebraische Summe der Exponenten von c beidemal gerade oder ungerade ist. Hiermit ist dann die Theorie der Transformation von Kurven auf einem einseitigen Ring vollständig erledigt.

§ 4.

Amphidrome Flächenkurven.

Auf den einseitigen Flächen, für die $k = 1$ oder $= 2$ ist, gibt es nicht auf einen Punkt reduzierbare Kurven, die in sich selbst im umgekehrten Durchlaufungssinn transformierbar sind. In der Tat gibt es für $k = 1$ nur eine einzige Art von Flächenkurven, die nicht auf einen Punkt zusammenziehbar sind. Diese Kurven zweimal durchlaufen begrenzen ein einfach zusammenhängendes Flächenstück, und also ist eine solche Kurve in sich selbst im umgekehrten Durchlaufungssinn stetig zu transformieren, wobei sogar ein Kurvenpunkt festgehalten werden darf. Für $k = 2$ sind in der obigen Bezeichnungsweise die den Ausdrücken ab resp. ba entsprechenden Flächenkurven ineinander transformierbar. Es ist aber

$$ab\,ba = 1,$$

also

$$ab = (ba)^{-1},$$

das heißt also, die dem Ausdruck ab entsprechende Kurve ist in die dem Ausdruck $(ba)^{-1}$ entsprechende Kurve mit Festhaltung eines Punktes stetig transformierbar. Und folglich sind die den Ausdrücken ba und $(ba)^{-1}$

entsprechenden sich nur durch den Durchlaufungssinn unterscheidenden Flächenkurven ineinander transformierbar. Wir wollen solche Kurven *amphidrom* nennen und zeigen, daß es auf anderen geschlossenen Flächen keine amphidromen Kurven gibt.

Betrachten wir zunächst die einseitigen Flächen mit $k > 2$. Die zugehörigen Netzbewegungen sind Drehungen um einen idealen Mittelpunkt in der hyperbolischen Ebene mit oder ohne Klappung um die reale Achse. Da kein realer Punkt der Ebene bei einer Netzbewegung in Ruhe bleiben kann, so ist eine reine Klappung ohne gleichzeitige Drehung nicht möglich. Keine Gerade der Ebene außer der Achse geht in sich selbst über bei der Bewegung. Soll also eine von der Ruhe verschiedene Bewegung in die inverse Bewegung durch eine zweite Bewegung übergeführt werden, so muß die zweite Bewegung dieselbe Achse haben wie die erste Bewegung. Ist dies aber der Fall, so sind die beiden Bewegungen miteinander vertauschbar. Daraus folgt, daß die erste Bewegung zweimal hintereinander ausgeführt die Identität ergeben müßte. Das ist aber unmöglich, da jede Bewegung eine Drehung um einen idealen Mittelpunkt enthält. Dieselben Schlüsse gelten auch für zweiseitige Flächen, wenn $p > 1$ ist. Ist $p = 1$, so sind alle Bewegungen miteinander vertauschbar und zwar Parallelverschiebungen in der euklidischen Ebene. Keine Bewegung zweimal hintereinander ausgeführt kann die Identität sein, und folglich kann auch keine Bewegung in die zu ihr inverse transformiert werden. Amphidromen Flächenkurven entsprechen aber Netzbewegungen, die mit den zu ihnen inversen transformierbar sind. Wir haben also den Satz:

Amphidrome Kurven gibt es nur auf den einseitigen Flächen mit $k = 1$ *und* 2.

Es ist leicht, für $k = 2$ alle amphidromen Kurventypen zu ermitteln. Sie entsprechen Parallelverschiebungen des Netzes senkrecht zu den Klappachsen, die bei den Netzbewegungen vorkommen und entsprechen folglich Ausdrücken von der Form $(ab)^m$ oder sind in solche Kurven transformierbar.

§ 5.

Einführung der Fundamentalgruppen.

Die Bewegungen des Netzes, auf das wir in der obigen Weise eine geschlossene Fläche abgewickelt haben, in sich bilden eine Gruppe. Es ist klar, daß als Erzeugende dieser Gruppe die $2p$ bez. k Bewegungen genommen werden können, die den $2p$ bez. k geschlossenen Flächenkurven entsprechen, längs denen die Fläche zwecks Abwicklung aufgeschnitten wurde. Bezeichnen wir die Bewegung mit dem Namen der zugehörigen Kurve, so haben wir also als Erzeugende der verschiedenen

Bewegungsgruppen gemäß der obigen Bezeichnungsweise $a_1, b_1, \cdots, a_p, b_p$ bez. $a_1, \cdots, a_k$, zwischen denen eine einzige Relation besteht, nämlich

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1} = 1$$

bez.

$$a_1^2 \cdots a_k^2 = 1 .$$

In der Tat läßt sich jede Beziehung zwischen Bewegungen des Netzes in sich aus der zugehörigen Relation herleiten, weil die jener Beziehung entsprechende geschlossene Kurve ein einfach zusammenhängendes, aus lauter Maschen bestehendes Gebiet begrenzt und eben jene Relation ausdrückt, daß die zugehörige Masche eine geschlossene Kurve ist.

Das Netz ist das Gruppenbild) der Gruppe der Bewegungen des Netzes in sich.* Diese Gruppe heißt *Fundamentalgruppe der zugehörigen Fläche.* Jeder durch einen *festen Punkt* der Fläche laufenden geschlossenen Flächenkurve entspricht ein Element der Gruppe, zwei ineinander transformierbaren Flächenkurven entsprechen zwei ineinander transformierbare Elemente der Gruppen, speziell entspricht den auf einen Punkt transformierbaren Flächenkurven die Identität. Sind A und B Flächenkurven, denen die Elemente a und b der Fundamentalgruppe entsprechen, so entspricht das Element ab der Flächenkurve, die entsteht, wenn ich erst a und dann b durchlaufe. Durch die Betrachtungen der § 1—3 ist also das Identitäts- und das Transformationsproblem für die Fundamentalgruppen vollständig gelöst.

Die so gefundenen Fundamentalgruppen sind, wie gleich einzusehen, isomorph mit Gruppen, die dieselbe Anzahl von Erzeugenden, aber eine andere Relation zwischen denselben besitzen. So ist z. B. die Gruppe

$$\begin{cases} \text{Erzeugende: } & a_1, a_2; \\ \text{Relation: } & a_1 a_2 a_1^{-1} a_2 = 1 \end{cases}$$

isomorph mit einer Fundamentalgruppe in der obigen Form, nämlich

$$\begin{cases} \text{Erzeugende: } & a, b; \\ \text{Relation: } & a^2 b^2 = 1. \end{cases}$$

Wir wollen eine Bedingung aufstellen, die dafür hinreichend ist, daß eine Gruppe mit einer einzigen Relation einer Fundamentalgruppe einer geschlossenen Fläche isomorph ist. Wir werden übrigens später sehen, daß diese Bedingung auch notwendig ist**). Konstruieren wir das zu der durch die Relation gegebenen Gruppe gehörige Gruppenbild, indem wir von einem Punkt aus der Relation und allen ihren zyklischen Vertauschungen

*) S. Math. Ann. 69.

**) wenn jede Erzeugende in den Relationen höchstens zweimal vorkommen soll.

entsprechende Polygone ausgehen lassen, *so ist die gegebene Gruppe isomorph mit einer Fundamentalgruppe einer geschlossenen Fläche, wenn diese Polygone* infolge der Bezeichnung der Strecken, mit dem sie an dem Ausgangspunkt hängen, *sich zu einem einzigen Blatt zusammenschließen.* In der Tat, in diesem Falle muß jede Erzeugende zweimal in der Relation vorkommen. Es entsteht eine geschlossene Fläche, wenn ich das von einem der Relation entsprechenden Polygon begrenzte Flächenstück so zusammenbiege, daß gleichbezeichnete Seiten zusammenfallen. Jede Seite wird zu einer geschlossenen Flächenkurve. Die Fundamentalgruppe dieser Fläche ist, wie leicht ersichtlich, die gegebene Gruppe, womit unsere Behauptung erwiesen ist.

§ 6.

Topologische Eigenschaften der Gruppenbilder für Fundamentalgruppen von geschlossenen Flächen.

Wir wollen noch einen Satz herleiten über das Gruppenbild der allgemeinsten Gruppe, die einer Fundamentalgruppe einer geschlossenen Fläche isomorph ist. Das Bild einer solchen Gruppe in der „kanonischen“ Form ist ein Netz in der euklidischen oder nichteuklidischen Ebene. Es ist klar, daß wir irgend zwei Netzpunkte durch einen Netzstreckenzug verbinden können, der keinen Punkt mit dem Punkt, der die Identität repräsentiert, gemeinsam hat. Dies überträgt sich in gewisser Form auf die allgemeinste Darstellung dieser Gruppe: Seien $S_1, S_2, \cdots, S_n$ die Erzeugenden der Gruppe in der kanonischen Form, $T_1, T_2, \cdots, T_m$ die Erzeugenden der allgemeinen Darstellung, dann lassen sich nach Voraussetzung die S_i durch die T_i ausdrücken. Sei h die größte Anzahl der T_i, die in einem dieser Ausdrücke vorkommt, dann betrachten wir in der allgemeinen Darstellung die Gesamtheit aller derjenigen Netzpunkte, deren „Netzentfernung“ (siehe S. 123) von der Identität nicht größer ist als h. Wir betrachten ferner das Bild B dieser Gesamtheit in dem kanonischen Netz. Alle Punkte des Netzes mit Ausnahme einer endlichen Anzahl lassen sich durch Netzstreckenzüge verbinden, die keinen Punkt gemeinsam haben mit den Punkten von B. Alle diese Elemente sind in der allgemeinen Darstellung Punkte, die sich durch Streckenzüge verbinden lassen, die keinen Punkt mit der Identität gemeinsam haben. In der Tat: zwei dieser Punkte lassen sich nach dem obigen durch einen Streckenzug verbinden, der sich aus Gliedern zusammensetzt, die Ausdrücke der S_i in den T_i sind, und Punkte verbinden, die von der Identität eine Entfernung größer als h haben. Folglich wird keines dieser Glieder die Identität berühren, womit wir den Satz haben:

In jeder Darstellung der Fundamentalgruppe einer geschlossenen Fläche kann man mit Ausschluß einer endlichen Anzahl von Elementen je zwei

Elemente durch einen Streckenzug verbinden, der die Identität nicht enthält. Hieraus folgt durch eine leichte Verallgemeinerung:

Ist in irgend einer Darstellung der Fundamentalgruppe einer geschlossenen Fläche eine Gesamtheit von Elementen gegeben, so gibt es nur eine endliche Anzahl von Elementen, die man nicht zu je zweien durch einen Streckenzug verbinden könnte, der kein Element mit der gegebenen Gesamtheit gemeinsam hat. Ferner:

In jeder Darstellung der Fundamentalgruppe einer geschlossenen Fläche hat jeder geschlossene Streckenzug, der gewisse Ungleichheitsbedingungen befriedigt, die Eigenschaft, daß ein ihn umgebender ringförmiger Streifen alle anderen Elemente in zwei Klassen teilt, innere und äußere. Je zwei äußere und je zwei innere Elemente können durch einen Streckenzug verbunden werden, der keine Elemente mit dem gegebenen geschlossenen Streckenzug gemeinsam hat. Jeder Streckenzug, der ein inneres und ein äußeres Element verbindet, hat mindestens ein Element mit dem geschlossenen Streckenzug gemeinsam.

Wir sehen also, daß in gewissem Sinne der einfache Zusammenhang der Elemente des kanonischen Netzes auch in der allgemeinsten Darstellung erhalten bleibt. Ähnliche Betrachtungen lassen sich, wie leicht ersichtlich, für irgendwelche Gruppen anstellen: Gewisse *Zusammenhangsverhältnisse des Gruppenbildes* ergeben sich so *als* von der Darstellung unabhängige *„Invarianten" der Gruppe.*

Zum Schluß unserer Betrachtung über die Fundamentalgruppen beweisen wir den Satz:

Zwei Fundamentalgruppen geschlossener Flächen sind nur dann isomorph, wenn sie zu homöomorphen Flächen gehören.

Herr Tietze*) hat folgenden Satz über unendliche Gruppen bewiesen: Läßt man in den Fundamentalrelationen Vertauschung der Glieder zu, dann werden vermöge der so entstehenden Beziehungen zwischen den Erzeugenden einige derselben durch r noch vollständig willkürlich bleibende auszudrücken sein. Diese Zahl r ist für zwei isomorphe Gruppen dieselbe. — Nun ist r für eine Fläche vom Geschlecht p gleich $2p$, für eine einseitige Fläche mit der Charakteristik k gleich $k-1$. Wäre unser Satz nicht richtig, so müßte folglich wegen des Tietzeschen Satzes die Fundamentalgruppe einer zweiseitigen Fläche vom Geschlecht p isomorph sein mit der Fundamentalgruppe einer einseitigen Fläche mit der Charakteristik $2p+1$. Nun hat Tietze a. a. O. bewiesen, daß zwei Flächenkomplexe, die zu isomorphen Gruppen gehören, dieselben Torsionszahlen haben. Andererseits haben zweiseitige Flächen nur der Einheit gleiche

*) Wien. Ber. 1907.

Torsionszahlen. Jede einseitige Fläche hat aber Kurven, die erst zweimal durchlaufen begrenzen, und folglich besitzt eine solche Fläche eine Torsionszahl gleich 2, woraus das gewünschte Resultat folgt.

Kapitel II.

Gruppen, in deren Fundamentalrelationen die Erzeugenden höchstens zweimal vorkommen.

Es ist unsere Aufgabe, mit Hilfe der Untersuchungen des vorigen Kapitels die in der Überschrift bezeichneten Gruppen in eine kanonische Form zu bringen und dadurch zunächst für sie das Isomorphieproblem, dann auch das Transformationsproblem zu lösen.

Es sei also G eine Gruppe mit den Erzeugenden $S_1, S_2, \cdots, S_m$ und den Relationen $R_1 = R_2 = \cdots = R_n = 1$, bei der jede Erzeugende in allen Relationen zusammen höchstens zweimal vorkommt.

1. Kommt in einer Relation, etwa $R_1 = 1$ eine Erzeugende, etwa S_1, nur einmal vor, d. h. ist etwa R_1, eventuell nach zyklischer Vertauschung der Komponenten, gleich $S_1 T$, wo S_1 in T nicht vorkommt, dann ist G isomorph mit einer Gruppe G' mit den Erzeugenden $S_2, \cdots, S_m$ und den Relationen $R_2 = \cdots = R_n = 1$, in denen S_1 durch T^{-1} ersetzt ist. Es kommen dann $S_2, \cdots, S_m$ in jeder Relation höchstens zweimal vor. Man kann also durch diese Reduktion erreichen, daß jede Erzeugende höchstens in *einer* Relation und in dieser zweimal vorkommt. Wir können uns deswegen im folgenden zunächst auf solche Gruppen beschränken, die nur eine Relation besitzen, in der jede Erzeugende zweimal vorkommt.

2. Sei also G eine Gruppe mit der einzigen Relation $R = 1$, in der die Erzeugenden $S_1, S_2, \cdots, S_m$ jede zweimal vorkommen. Konstruieren wir dann das Gruppenbild, indem wir von einem Punkt aus die dem Ausdruck R sowie den durch zyklische Vertauschung aus ihm hervorgehenden Ausdrücken entsprechenden Polygone ausgehen lassen, so finden wir im allgemeinenen nicht dieselben einfachen Verhältnisse wie bei den Fundamentalgruppen der ein- bez. zweiseitigen Flächen. Die Polygone werden sich vielmehr zu mehreren Blättern zusammenschließen.

Betrachten wir z. B. die Gruppe

$$G \begin{cases} \textit{Erzeugende:} & S_1, S_2, S_3, S_4; \\ \textit{Relation:} & S_2 S_1 S_1 S_3 S_4 S_4 S_2 S_3 = 1, \end{cases}$$

so zerfallen die zugehörigen acht Polygone in zwei Teile. Und zwar bilden die vier Polygone, die mit den gleichsinnig durchlaufenen Streckenpaaren $S_2 S_1$, $S_1^{-1} S_1^{-1}$, $S_1 S_3$, $S_3^{-1} S_2^{-1}$ an dem Punkte hängen, ein Blatt, sowie ebenfalls die vier Polygone mit resp. Streckenpaaren $S_3 S_4$, $S_4^{-1} S_4^{-1}$, $S_4 S_2$, $S_2^{-1} S_3^{-1}$. Wenn wir nun diese Gruppe transformieren, indem wir die *neue Erzeugende* $\Sigma_1 = S_1 S_3$ einführen, so erhalten wir:

$$G' \begin{cases} \textit{Erzeugende:} & \Sigma_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4; \\ \textit{Relation:} & S_2\, \Sigma_1\, S_3^{-1}\, \Sigma_1\, S_4\, S_4\, S_2\, S_3 = 1. \end{cases}$$

Die an einem Punkt hängenden Polygone des Gruppenbildes zerfallen wieder in zwei Teile: die Polygone mit den Streckenpaaren $S_2 \Sigma_1$, $\Sigma_1^{-1} S_3$, $S_3^{-1} S_2^{-1}$; bez. $\Sigma_1 S_4$, $S_4^{-1} S_4^{-1}$, $S_4 S_2$, $S_2^{-1} S_3^{-1}$, $S_3 \Sigma_1^{-1}$. Führt man jetzt die neuen Erzeugenden $S_2 \Sigma_1 = \Sigma_2$ und $\Sigma_1^{-1} S_3 = \Sigma_3$ ein, so erhält man die Gruppe

$$\Gamma \begin{cases} \textit{Erzeugende:} & \Sigma_1,\ \Sigma_2,\ \Sigma_3,\ S_4; \\ \textit{Relation:} & \Sigma_2\, \Sigma_3^{-1}\, S_4\, S_4\, \Sigma_2\, \Sigma_3 = 1. \end{cases}$$

Man erkennt, daß in der Relation die Erzeugende Σ_1 überhaupt nicht vorkommt und daß die sechs der Relation entsprechenden an einem Punkt des Gruppenbildes hängenden Polygone ein einziges Blatt bilden. Und zwar sind die Streckenpaare der Reihe nach $\Sigma_2 \Sigma_3^{-1}$, $\Sigma_3 \Sigma_2$, $\Sigma_2^{-1} \Sigma_4^{-1}$, $\Sigma_4 \Sigma_4$, $\Sigma_4^{-1} \Sigma_3$, $\Sigma_3^{-1} \Sigma_2^{-1}$. Lassen wir also unter den Erzeugenden Σ_1 weg, so erhalten wir eine Gruppe, deren Bild ein reguläres 6-Ecknetz in der hyperbolischen Ebene ist.

Dieses im speziellen Falle erprobte Verfahren läßt sich, wie wir im folgenden zeigen wollen, zu einer allgemeinen Methode durchbilden.

Seien etwa

$$S_1 S_2,\ S_2^{-1} S_3,\ \cdots,\ S_l^{-1} S_1^{-1}$$

l Streckenpaare, die zu Polygonen gehören, die *ein* Blatt $\mathfrak{B}$ bilden. Jede der Erzeugenden $S_1, \cdots, S_l$ kommt als Glied eines Paares entweder zweimal oder viermal vor. Wir wollen zunächst die beiden *extremen Fälle* betrachten:

a) Die Erzeugenden $S_1, \cdots, S_l$ kommen sämtlich viermal in den Streckenpaaren des Blattes $\mathfrak{B}$ vor: Da nach Voraussetzung jede Erzeugende in der Relation höchstens zweimal vorkommt, so gehört sie zu höchstens vier Streckenpaaren. Also bildet keine der Erzeugenden $S_1, \cdots, S_l$ mit einer von allen diesen verschiedenen Erzeugenden der Gruppe ein Streckenpaar. Da aber nach Voraussetzung nur *eine* Relation besteht, also auch als Element des Gruppenbildes nur *ein* einfaches Polygon, in dem jede Erzeugende, die in der Relation vorkommt, durch Strecken repräsentiert wird, so kommen in der Relation keine anderen Erzeugenden vor als $S_1, \cdots, S_l$. Diese Erzeugenden allein bestimmen zusammen mit der Relation eine Gruppe, deren Bild ein reguläres n-Ecknetz ist, wo n gleich $2l$ ist.

b) Alle Erzeugenden $S_1, \cdots, S_l$ kommen zweimal in den Streckenpaaren des Blattes $\mathfrak{B}$ vor: Wir wählen als neue Erzeugende:

$$\Sigma_2 = S_1 S_2,\ \Sigma_3 = S_2^{-1} S_3,\ \cdots,\ \Sigma_l = \Sigma_{l-1}^{-1} \Sigma_l,$$

woraus

$$S_l^{-1} S_1^{-1} = (\Sigma_2 \Sigma_3 \cdots \Sigma_l)^{-1}$$

folgt. Durch $S_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_l$ lassen sich alle Erzeugenden $S_1, \cdots, S_l$ ausdrücken:

$$S_1 = S_1,\ S_2 = S_1^{-1} \Sigma_2,\ S_3 = S_1^{-1} \Sigma_2 \Sigma_3,\ \cdots.$$

Die gegebene Gruppe G ist also isomorph mit einer Gruppe Γ, in der $S_1, S_2, \cdots, S_l$ durch $S_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_l$ gemäß den obigen Formeln ersetzt sind. Nach Voraussetzung kommt jede Erzeugende S_i $(i = 1, \cdots, l)$ in der Relation nur zweimal vor, einmal in der Verbindung $S_{i-1} S_i$, das zweite Mal in der Verbindung $S_i^{-1} S_{i+1}$, nach obigem sind aber diese Verbindungen identisch mit $\Sigma_i \Sigma_{i+1}$ resp. für $i = l$ mit $(\Sigma_2 \Sigma_3 \cdots \Sigma_l)^{-1}$. Es wird also nach der Einsetzung der neuen Erzeugenden S_1 überhaupt nicht mehr in der Relation vorkommen. Wir haben also durch die Transformation die Anzahl der in der Relation vorkommenden Erzeugenden um eins vermindert (übrigens ist auch, wie unschwer einzusehen, die Anzahl der Blätter, zu denen sich die an einen Punkt hängenden Polygone des Gruppenbildes zusammenschließen, um eins kleiner geworden). In der Relation kommt auch nach der Transformation jede Erzeugende zweimal oder keinmal vor.

Allgemeiner Fall: Einige Erzeugende kommen viermal und einige zweimal in den blattbildenden Paaren vor. Dann gibt es, da je zwei aufeinanderfolgende Paare eine Erzeugende gemeinsam haben, ein Paar, das aus einer viermal vorkommenden und einer zweimal vorkommenden Erzeugenden gebildet wird. Wir dürfen annehmen, daß dies bei dem ersten Paare $S_1 S_2$ der Fall ist und zwar, daß S_1 viermal, S_2 zweimal vorkommt. Schreiten wir in der Reihe der Paare weiter, so kommen wir also vor dem Ende zu einem Paare, in dem wieder S_1 erscheint und zwar hat das erste solche Paar die Form $S_r^{-1} S_1$; denn hätte es die Form $S_r^{-1} S_1^{-1}$, so bildeten die ersten r Paare bereits das Blatt und es käme in den Paaren S_1 nur zweimal vor. Die Reihe lautet demgemäß:

$$S_1 S_2,\ S_2^{-1} S_3,\ \cdots,\ S_r^{-1} S_1,\ S_1^{-1} S_{r+1},\ \cdots,\ S_l^{-1} S_1^{-1}$$

und enthält $l + 1$ Paare. Wir setzen nun:

$$S_1 S_2 = \Sigma_1$$

und führen Σ_1 statt S_1 als neue Erzeugende ein. Wir erhalten jetzt aus den Paaren die Reihe

$$\Sigma_1,\ S_2^{-1} S_3,\ \cdots,\ S_r^{-1} \Sigma_1 S_2^{-1},\ S_2 \Sigma_1^{-1} S_{r+1},\ \cdots,\ S_l^{-1} S_2 \Sigma_1^{-1}$$

und diese liefern die l blattbildenden Paare

$$S_2^{-1} S_3,\ S_3^{-1} S_4,\ \cdots, S_r^{-1} \Sigma_1,\ \Sigma_1^{-1} S_{r+1},\ S_{r+1}^{-1} S_{r+2},\ \cdots,\ S_l^{-1} S_2.$$

In ihnen kommt Σ_1 nur zweimal vor, und wir haben also unser Blatt in ein solches mit einem Paar weniger übergeführt. Die Relation zwischen den neuen Erzeugenden, bei denen $S_1 S_2$ durch Σ_1 ersetzt ist, enthält wieder alle Erzeugenden zweimal oder keinmal. Denn Σ_1 kommt zweimal vor: an der Stelle von $S_1 S_2$, sowie in der Ersatzstrecke $\Sigma_1 S_2^{-1}$ für S_1, wo es zum zweiten Male in der Relation auftritt. Ebenso kommt S_2 zweimal vor, nämlich in dieser Ersatzstrecke, sowie das zweite Mal, wo es in der ursprünglichen Relation auftrat. — Es ist wohl zu bemerken, daß der obige Schluß nicht mehr richtig ist, wenn in den ursprünglichen Paaren auch S_2 viermal vorkommt; denn lautet die ursprüngliche Relation etwa

$$S_1 S_2 S_t \cdots = 1,$$

so wird nach dem Einsetzen von Σ_1 aus dem Paare $S_t^{-1} S_2^{-1}$ das Paar $S_t^{-1} \Sigma_1^{-1}$, auf das dann $\Sigma_1 S_2^{-1}$ und $S_2 S_u$ usw. folgen würde, d. i. wir hätten dann wieder, wie vor der Transformation, $l+1$ blattbildende Paare. Man kann diese Erscheinung leicht an einem Beispiel sich veranschaulichen.

Durch diesen Prozeß kann man sukzessiv die Paarzahl eines Blattes verringern, bis man zu dem extremen Falle b kommt, d. i. bis es ebensoviele Paare wie zu dem Blatt gehörige Erzeugende gibt. Dann aber tritt das oben auseinandergesetzte Reduktionsverfahren ein, durch das ein Blatt verloren geht, und eine Erzeugende nicht mehr in der Relation vorkommt. Jetzt lassen wir wieder mehrere Relationen zu und gelangen durch die obigen Betrachtungen zu folgender *Normalform der Gruppe: Unter den Erzeugenden sind w Erzeugende, die in keiner Relation vorkommen („freie, willkürliche Erzeugende") und v Vereine von mehreren Erzeugenden; die Erzeugenden jedes Vereins kommen bloß in einer Relation und in dieser zweimal vor. Die Erzeugenden jedes Vereins bestimmen zusammen mit der Vereinsrelation eine Gruppe, deren Bild ein reguläres Netz der euklidischen oder nichteuklidischen Ebene ist* (s. S. 131).

Ist die gegebene Gruppe schon durch eine Relation bestimmt, so kann es zwar beliebig viele freie Erzeugende, aber bloß einen blattbildenden Verein mehrerer Erzeugender geben. Die Gruppe ist in diesem Falle, wie leicht einzusehen, die Fundamentalgruppe der Kurven eines Flächenkomplexes, der aus einer geschlossenen Fläche und w an einem Punkt derselben hängenden nichts begrenzenden geschlossenen Kurven besteht. Die ursprüngliche Form der Gruppenrelation führt dagegen auf Flächen, die außer $w - w'$ jener angehängten freien geschlossenen Kurven w' Selbstberührungspunkte besitzen. Statt der freien Kurven können wir auch „Hörner" (s. Fig. 5) einführen, d. h. Kugeln mit einem Selbstberührungspunkt. Die verschiedenen Formen der der Gruppe entsprechenden Flächen entsprechen dann der Tatsache: *Jede Fläche mit w Selbstberührungspunkten ist homöomorph mit einer singularitätenfreien Fläche, an die w Hörner angehängt sind.*

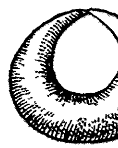

Fig. 5.

Im allgemeinen Falle, d. i. wenn die Gruppe durch beliebig viele Relationen bestimmt ist, ist die Gruppe in der reduzierten Form die Fundamentalgruppe von v geschlossenen Flächen und w freien geschlossenen Kurven, die alle in einem Punkte zusammenhängen. Der Gruppe in der ursprünglich gegebenen Form entspricht dasselbe System, in dem aber ein Teil der freien Kurven in Selbstberührungspunkte der Flächen umgewandelt ist.

Für jede Gruppe von der betrachteten Art, d. i. in deren bestimmenden Relationen jede Erzeugende höchstens zweimal vorkommt, ist also eine Reihe von Zahlen charakteristisch:

$$p_1, \cdots, p_{v_1}, k_1, k_2, \cdots, k_{v_2}, w.$$

Hier bedeuten $p_1, \cdots, p_{v_1}$ die Geschlechtszahlen der zu den Vereinen der gegebenen Gruppe gehörigen zweiseitigen Flächen, $k_1, \cdots, k_{v_2}$ die Charakteristiken der zugehörigen einseitigen Flächen, endlich w die Anzahl der freien Kurven. Da homöomorphe Flächenkomplexe isomorphe Fundamentalgruppen haben, so haben wir also den Satz:

Stimmen die charakteristischen Zahlen für zwei Gruppen überein, so sind diese isomorph.

Und auch die Umkehrung gilt:

Sind zwei Gruppen der betrachteten Art isomorph, so stimmen ihre charakteristischen Zahlen überein (d. i. man kann eine solche Gruppe nur auf eine Weise auf die reduzierte Form bringen).

In der Tat: Seien G und G' die beiden isomorphen Gruppen, jede in reduzierter Form, und M_2 irgend eine geschlossene Mannigfaltigkeit, deren Fundamentalgruppe einem Verein von G entspricht. Wir wollen zeigen, daß die dieser Fundamentalgruppe entsprechenden Elemente von G' alle wieder der Fundamentalgruppe einer Fläche angehören, bez. durch ein bestimmtes Element von G' transformierte Elemente einer solchen Gruppe von G' sind. Zu diesem Zwecke bemerken wir, daß das Gruppenbild für die Fundamentalgruppe für zwei oder mehrere Flächen zusammen aus unendlich vielen Blättern besteht, die zu je zweien oder mehreren an jedem Punkte zusammenhängen. Sei nun T irgend ein Element der betrachteten Untergruppe von G', so werden die verschiedenen Potenzen von T nur dann in demselben Blatt liegen, wenn T entweder einem einzigen Blatte angehört oder die Transformierte eines solchen Elements ist. Weiter: sind T, U zwei Elemente der betreffenden Untergruppen, so werden die verschiedenen Potenzen von T, U und TU nur dann demselben Blatt angehören, wenn T und U gleich transformierte Elemente desselben Blattes sind. Da nun die betrachtete Untergruppe von G' isomorph ist mit der Fundamentalgruppe einer geschlossenen Fläche, so muß nach dem S. 132 bewiesenen Satze ihre Darstellung in der Gruppe G' blattähnlichen Zusammenhang besitzen. Dies ist nicht der Fall, wie leicht zu sehen, wenn die verschiedenen Potenzen von T, U und TU unendlich vielen verschiedenen Blättern angehören. Also ist die betrachtete Untergruppe sicher eine Untergruppe einer zu G' gehörenden Fundamentalgruppe einer Fläche, und da wir unsern Schluß ebensogut auf die Abbildung einer zu G' gehörenden Fundamentalgruppe in G anwenden können, so folgt, daß jeder zu G gehörenden Fundamentalgruppe einer Fläche eine Fundamentalgruppe einer Fläche von G', eventuell durch ein Element von G' transformiert, entspricht. Aus dem früher bewiesenen Satze, daß nur zu homöomorphen Flächen gehörende Fundamentalgruppen isomorph sein können, folgt dann, wie behauptet, daß die Anzahl $p_1, \cdots, p_{\nu_1}, k_1, k_2, \cdots, k_{\nu_n}$ für G und G' gleich sind. Aus dem Tietzeschen Satze folgt schließlich, daß auch die Anzahl w der Hörner bei G und G' dieselbe sein muß.

Nachdem wir die betrachteten Gruppen in eine kanonische Form gebracht haben, ist es leicht, die Lösung des sie betreffenden Transformationsproblems anzugeben. Seien S_1 und S_2 zwei Elemente einer der hier betrachteten Gruppen, K_1 und K_2 die ihnen entsprechenden Kurven auf dem in kanonische Form gebrachten zugehörigen Flächenkomplex, der nach unserer obigen Entwicklung aus zweiseitigen und einseitigen Flächen sowie Hörnern, die alle in *einem* Punkte zusammenhängen, sich zusammensetzt. S_1 und S_2 sind dann und nur dann ineinander transformierbar, wenn K_1 und K_2 stetig auf dem Flächenkomplexe ineinander überführbar sind. K_1 möge aus den geschlossenen Kurven $L_1^{(1)}, L_1^{(2)}, \cdots, L_1^{(m_1)}$ der Reihe nach durchlaufen sich zusammensetzen. Hierbei nehmen wir an, daß keine der Kurven $L_1^{(i)}$ auf Null reduzierbar ist und ferner keine zwei aufeinanderfolgenden Kurven $L_1^{(i)}$ und $L_1^{(i+1)}$ oder $L_1^{(m)}$ und $L_1^{(1)}$ derselben Fläche des Flächenkomplexes angehören. Dasselbe sei der Fall mit der Zusammensetzung von K_2 aus $L_2^{(1)}, L_2^{(2)}, \cdots, L_2^{(m_2)}$. Dann müssen, wenn K_1 und K_2 ineinander überführbar sein sollen, m_1 und m_2 gleich sein. Ferner müssen entweder, wenn $m_1 = m_2 = 1$ ist, $L_1^{(1)}$ und $L_2^{(1)}$ auf derselben Fläche liegen und auf dieser Fläche stetig ineinander überführbar sein, oder wenn $m_1 = m_2 > 1$ ist, nach eventueller geeigneter zyklischer Umordnung die m_1 Kurven $L_1^1(L_2^{(1)})^{-1}, L_1^2(L_2^{(2)})^{-1}, \cdots, L_1^{m_1}(L_2^{(m_2)})^{-1}$ auf einen Punkt reduzierbar sein. Diese Bedingungen sind sowohl notwendig als auch, wie leicht einzusehen, hinreichend dafür, daß K_1 und K_2 ineinander stetig überführbar bez. S_1 und S_2 ineinander transformierbar sind.

Kapitel III.

Höhere Gruppen.

§ 1.

Allgemeines.

Zu jeder gegebenen unendlichen Gruppe kann man eine vierdimensionale (homogene) Mannigfaltigkeit finden, deren Fundamentalgruppe mit der gegebenen Gruppe isomorph ist: Jeder Flächenkomplex kann singularitätenfrei repräsentiert werden in einem vierdimensionalen Raum. Hat der Flächenkomplex die gegebene Gruppe zur Fundamentalgruppe, so hat die vierdimensionale Umgebung (Domäne) des Komplexes ebenfalls die gegebene Gruppe zur Fundamentalgruppe. Man kann auch eine geschlossene vierdimensionale Mannigfaltigkeit mit dieser Eigenschaft finden, und zwar in der vierdimensionalen Umgebung des im fünfdimensionalen singularitätenfrei zu repräsentierenden Flächenkomplexes. Zwei M_4 mit derselben Fundamentalgruppe brauchen nicht homöomorph zu sein. Beispielsweise: Die vierdimensionalen Umgebungen eines Elementarflächenstückes und einer Kugelfläche im fünfdimensionalen Raum haben beide als Fundamentalgruppe die Identität, aber sie sind gewiß nicht homöomorph. Denn die zweite Bettische Zahl ist für die erste Mannigfaltigkeit gleich 1, für die zweite gleich 3.

Wir haben im vorigen Kapitel diejenigen unendlichen Gruppen behandelt, in deren Fundamentalrelationen jede Erzeugende höchstens zweimal vorkommt. Es ist leicht zu zeigen, daß *jede Gruppe in eine solche Form gebracht werden kann, daß in den Fundamentalrelationen jede Erzeugende höchstens dreimal vorkommt.* In der Tat: Sei S eine Erzeugende, die h-mal ($h > 3$) in den Fundamentalrelationen vorkommt, so füge man zu diesen die Relation

$$S = S_1,$$

wo S_1 eine neue Erzeugende ist, hinzu und ersetze S zweimal in den Relationen durch S_1. Dann kommt S im ganzen in allen Relationen inklusive der neuen $(h-1)$-mal und S_1 dreimal vor. Ist $h > 4$, so nehme man weiter die Relation

$$S = S_2$$

hinzu, ersetze S zweimal durch S_2 und fahre so fort, bis man mit Hilfe von $h-3$ neuen Erzeugenden $S_1, S_2, \cdots, S_{h-3}$ die gegebene Gruppe in eine solche Form gebracht hat, daß jetzt eine Erzeugende weniger existiert, die mehr als dreimal in den Relationen vorkommt. Damit ist die obige Behauptung erwiesen.

Die nach der bereits behandelten nächst einfache Klasse von Gruppen ist diejenige, die alle Gruppen enthält, in deren Fundamentalrelationen eine und nur eine Erzeugende dreimal vorkommt. Diese wollen wir in einer weiteren Arbeit behandeln.

§ 2.

Knotengruppen.

Die Gruppe der Kleeblattschlinge ist, wie früher*) gezeigt, in folgender Form darstellbar:

$$\begin{cases} \text{Erzeugende: } S_1\,S_2\,S_3\,S_4; \\ \text{Relationen: } S_1\,S_4^{-1} = S_2\,S_4^{-1}\,S_3 = S_3\,S_4^{-1}\,S_1 = 1\,. \end{cases}$$

An derselben Stelle haben wir das Gruppenbild für diese Gruppe aufgestellt und damit das Identitätsproblem für dieselbe gelöst. Wir wollen hier zeigen, daß das Gruppenbild durch ein reguläres Netz in einem nichteuklidischen Raume dargestellt werden kann. In der Tat setzte sich das gefundene Gruppenbild zusammen aus Parallelstreifen (s. Fig. 11 a. a. O.), die zu je dreien mit ihren Rändern zusammenhängen. Wir konstruieren nun in einer hyperbolischen Ebene ein Streckensystem von folgender Beschaffenheit: Es enthält keine geschlossenen Polygone und von jedem Eckpunkt gehen drei gleiche Strecken unter gleichen Winkeln $\frac{2\pi}{3}$ aus. Dies ist leicht zu erreichen, wenn man nur die Länge der Seiten gleich der Basis eines gleichschenkeligen Dreiecks mit dem Winkel 0 an der Spitze und dem Basiswinkel $= \frac{\pi}{3}$ nimmt. Dadurch wird erreicht, daß ein Zug aus Strecken mit dieser Länge und dem Brechungswinkel $\frac{2\pi}{3}$ sich nicht schließt oder sich selbst schneidet (denn die Ecken liegen auf einem Grenzkreis), und folglich auch ein Zug aus Strecken mit dieser Länge und dem Brechungswinkel $\frac{2\pi}{3}$ oder $\frac{4\pi}{3}$ sich nicht schließt oder sich selbst schneidet. Wir denken uns etwa die hyperbolische Maßbestimmung erzeugt durch einen Fundamentalkreis in der euklidischen Ebene. Wir errichten über diesem Kreis einen geraden Zylinder, errichten ebenfalls senkrecht auf der Ebene über jeder der oben konstruierten Strecken einen Parallelstreifen, bestimmen auf den Rändern desselben eine Reihe durch gleichen Abstand getrennter Punkte, so zwar, daß die Punkte des einen Randes senkrecht über der Mitte des Abstandes zwischen zwei benachbarten Punkten des andern Randes sich befinden. Verbinden wir dann jeden Punkt des einen Randes mit den beiden nächst benachbarten des andern

*) Math. Ann. 69.

Randes, so haben wir in der Gesamtheit der Strecken auf dem Parallelstreifen und auf den Rändern derselben einen unendlichen Streckenkomplex, der bei richtiger Bezeichnungsweise das Gruppenbild für die Kleeblattschlingengruppe ist. Damit ist also gezeigt, daß diese Gruppe isomorph ist mit einer (eigentlich diskontinuierlichen) Gruppe von linearen Transformationen des Raumes, bei denen die Zylinderfläche in sich übergeht.

Auch das Transformationsproblem ist für die betrachtete Gruppe leicht zu lösen. Man hat dazu nicht nötig, die Bewegungen in dem durch den Zylinder als Fundamentalgebilde definierten nichteuklidischen Raum in eine kanonische Form zu bringen: Der einem Element der Gruppe entsprechende Streckenzug durchläuft eine Reihe von Parallelstreifen. Diese ist nur dann durch Transformation zu vermindern, wenn die Projektion des Streckenzugs auf die nichteuklidische Ebene doppelt, aber im entgegengesetzten Sinne durchlaufene Strecken enthält, eventuell nachdem das Endglied an den Anfang gesetzt ist. Durch Transformation kann man stets den Streckenzug überführen in einen solchen mit der Minimalzahl durchlaufenen Parallelstreifen. Zwei in diese Form transformierte Streckenzüge sind nur dann ineinander transformierbar, wenn sie, eventuell nach zyklischer Vertauschung der Glieder von demselben Anfangspunkt ausgehend, auch denselben Endpunkt haben. Damit ist eine Methode nachgewiesen, die die Entscheidung über die Transformierbarkeit zweier Elemente in einer endlichen Anzahl von Schritten zu treffen gestattet.

Durch ganz analoge Betrachtungen löst man das Transformationsproblem für die Knotengruppen, die zu Kurven, die mit der Kleeblattschlinge eng verwandt sind, gehören, und die Math. Ann. 69 S. 164 aufgestellt sind. Die Grundlage für die Bilder dieser Gruppen liefern wieder unendliche reguläre Streckenkomplexe der hyperbolischen Ebene ohne geschlossene Kurven von der Art, daß in jeder Ecke fünf bez. sieben usw. Strecken zusammenstoßen. Die Lösung des Transformationsproblems erfolgt genau so wie bei der Kleeblattschlinge.

Auch für die zu diesem Knoten gehörenden Poincaréschen Räume (a. a. O. S. 161ff.) ist es möglich, die Lösung des Transformationsproblems für die zugehörigen Fundamentalgruppen anzugeben. Unter diesen befindet sich eine endliche zur Kleeblattschlinge gehörige. Für sie ist das Transformationsproblem durch Probieren ohne weiteres zu lösen. Die Gruppenbilder der andern lassen sich auf einem Komplex von Prismen darstellen, deren Querschnittsystem ein reguläres Polygonnetz der hyperbolischen Ebene ist. Die Gruppen lassen sich also darstellen durch lineare reelle Transformationen des Raumes, bei denen eine Zylinderfläche in sich übergeht. Einer jeden Bewegung des Gruppenbildes in sich entspricht eine

Bewegung der nichteuklidischen Ebene, die durch zwei entsprechende Punkte und zwei einander entsprechende an diesen Punkten hängende Polygone bestimmt ist. Irgend zwei Punkte A und A_1 des Gruppenbildes erzeugen zwei bestimmte derartige Bewegungen, nämlich diejenige, bei der A in A_1 übergeht, und diejenige, bei der A_1 in A übergeht. Sei nun S ein Element, von dem wir entscheiden wollen, ob es in ein Element T *transformierbar* ist oder nicht. Irgend ein Punkt O des Gruppenbildes möge durch S in A, durch T in B übergehen. Bei diesen Bewegungen möge der Punkt $\mathfrak{o}$ des Querschnittnetzes in $\mathfrak{a}$ bez. in $\mathfrak{b}$ und gleichzeitig das an $\mathfrak{o}$ hängende Netzpolygon $p_{\mathfrak{o}}$ in das Netzpolygon $p_{\mathfrak{a}}$ bzw. $p_{\mathfrak{b}}$ übergehen. Sollen S und T ineinander transformierbar sein, so müssen diese beiden Netzbewegungen kongruent und zwar durch eine einer Bewegung des Gruppenbildes in sich entsprechende Netzbewegung ineinander überführbar sein. Dies läßt sich in einer endlichen Anzahl von Schritten durch Probieren gemäß den in Kap. I entwickelten Methoden entscheiden. Diese Bedingung ist aber noch nicht hinreichend. Sei etwa U ein Element, dessen entsprechende Netzbewegung die S entsprechende Netzbewegung in die T entsprechende Netzbewegung überführt. Der dem Element $U^{-1}SU$ entsprechende Streckenzug, dessen zugehörige Netzbewegung mit der Bewegung $\{\mathfrak{o} \longrightarrow \mathfrak{b},\ p_{\mathfrak{o}} \longrightarrow p_{\mathfrak{b}}\}$ identisch ist, möge vom Punkte O_1 ausgehen und im Punkte B_1 endigen. (O, O_1 und $\mathfrak{o}$ und ebenso B, B_1 und $\mathfrak{b}$ liegen je auf einer Geraden senkrecht zum Querschnittnetz.) Dann ist S nur dann in T transformierbar, wenn die Strecken OO_1 und BB_1 gleich und gleichgerichtet sind.

Damit sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Transformierbarkeit zweier Elemente der in Betracht kommenden Gruppen in eine solche Form gebracht, daß man imstande ist, mit einer endlichen Anzahl von Schritten zu entscheiden, ob sie befriedigt sind. Gleichzeitig haben wir damit die Beantwortung der Frage möglich gemacht, wann zwei gegebene Kurven der betreffenden Poincaréschen Räume ineinander stetig (*mit* Selbstdurchdringung) überführbar sind.

§ 3.

Gruppen mit zwei Erzeugenden.

Die drei Fundamentalprobleme für alle Gruppen mit zwei Erzeugenden (etwa a und b) zu lösen, scheint einstweilen noch sehr schwierig zu sein. Es umfaßt auch diese Klasse bereits sämtliche Knotengruppen, wie sich durch geometrische Betrachtung leicht ergibt. Es ist einfach, die Probleme für diejenigen Gruppen zu erledigen, in deren definierenden Relationen a dreimal und b zweimal vorkommt. Schwierigkeiten treten bereits auf, wenn a und b beide dreimal in den definierenden Relationen vorkommen. Wir wollen hier nur auf die Gruppe, die durch die Relation

$$a^3 b^3 = 1$$

gegeben ist, ein wenig eingehen: Wir bauen das Gruppenbild auf aus „Würfelsechsecken", d. h. räumlichen Sechsecken, deren Seiten Kanten eines Würfels sind, so zwar, daß jede Seitenfläche des Würfels nur zwei der Kanten enthält. Die Seiten eines Würfelsechseckes bezeichnen wir in bestimmtem Sinne durchlaufen mit a, a, a, b, b, b. Bei der Konstruktion des Gruppenbildes ordnen sich die den Würfelsechsecken entsprechenden Würfel zu Prismen an. Jedes Prisma wird in jedem seiner Würfel durch ein zweites Prisma geschnitten. Durch zwei aufeinander folgende Würfel eines Prismas gehen zwei weitere Prismen, deren Achsen aufeinander senkrecht stehen. Hierdurch ist das Gruppenbild völlig bestimmt. Doch ist wohl zu beachten, daß nur diejenigen Punkte des Gruppenbildes identisch sind, die es infolge der eben auseinandergesetzten Zusammenhangsverhältnisse der Prismen sind, nicht aber solche, deren Zusammenfallen durch die besonderen metrischen Verhältnisse des euklidischen Raumes bewirkt wird. Z. B.: Durch zwei Würfel W_1 und W_2 eines Prismas, die durch eine ungerade Anzahl von Würfeln getrennt werden, gehen zwei parallele Prismen P_1 und P_2. Seien W_1' und W_2' zwei Würfel auf P_1 bez. P_2, die auf homologen Seiten von W_1 und W_2 liegend durch dieselbe ungerade Anzahl von Würfeln von diesen getrennt werden, so fallen im euklidischen Raum selbstverständlich die beiden P_1 bez. P_2 in W_1' bez. W_2' schneidenden Prismen zusammen. In unserm Gruppenbild aber haben sie keinen Punkt miteinander gemeinsam. Unsere Gruppe ist auch nicht isomorph mit einer Gruppe von Bewegungen des euklidischen Raumes. Man kann dagegen zeigen, daß sie isomorph ist mit einer, freilich nicht eigentlich diskontinuierlichen Bewegungsgruppe des hyperbolischen Raumes.

Durch die Aufstellung des Gruppenbildes ist das Identitätsproblem sofort gelöst. Auch das Transformationsproblem läßt sich, in etwas umständlicher Weise, erledigen mit Hilfe von allgemeinen Prinzipien, die wir in einer weiteren Arbeit entwickeln werden.