Paul Gordan.

Von

MAX NOETHER in Erlangen.

(Mit Unterstützung von Felix Klein in Göttingen und von Emmy Noether in Erlangen.)*)

Dem kurzen Gedenkworte, welches die Redaktion der Annalen ihrem treuen Freunde Paul Gordan bei seinem Hinscheiden gewidmet hat**) und das schon die wesentlichen Züge seiner Persönlichkeit wiedergibt, lassen wir hier eine *Darstellung seiner mathematischen Leistungen* folgen. Gordan schließt unmittelbar an die Reihe der großen Algebraiker, zunächst an Clebsch, an, deren Arbeit in dieser Zeitschrift gewürdigt worden ist; und sein Name ist mit ihren Blättern selbst unlöslich verbunden. So sind wir ihm schuldig, unsere Darstellung eingehend zu halten. Wir verbinden damit die Schilderung seines Lebensganges.***)

Paul Albert Gordan ist geboren zu Breslau am 27. April 1837, als Sohn des Kaufmanns David Gordan. Seine Mutter Friederike, aus der bekannten dortigen Familie Friedenthal, wurde ihm früh entrissen; sie hinterließ noch drei ältere Söhne — einer später ein höherer Staatsbeamter — und eine Tochter, alle sind vor ihrem Bruder verstorben. Paul Gordan wurde zunächst zu Hause unterrichtet und absolvierte dann die Quarta und einen Teil der Tertia des Friedrichsgymnasiums in Breslau, worauf ihn sein Vater in seinem eigenen Geschäft — einem Pelzhandel und Bankgeschäft in Breslau und Berlin — der kaufmännischen Laufbahn

---

*) Von Ersterem wurde ich in der Gesamtwürdigung, von Letzterer in der Würdigung der algebraischen Arbeiten wesentlich unterstützt.

**) Bd. 73, S. 321—322.

***) Ein Teil der bezüglichen Daten ist der Dissertation (I des am Schlusse angefügten Schriftenverzeichnisses) entnommen. Andere verdanke ich den Herren R. Sturm, dem Studiengenossen von Breslau, C. F. Geiser, einem der Opponenten bei der Berliner Disputation von 1862, J. Thomae, dem Göttinger Studiengenossen, und A. Brill, dem Gießener Kollegen; ferner L. Schlesinger solche aus Gießener Akten.

Die Nummernzitate des Aufsatzes beziehen sich auf das am Schluß folgende Schriftenverzeichnis.

zuführte. Zugleich besuchte er einige Jahre in Breslau eine Handelsschule; dann folgten zwei Jahre in einem Bankgeschäft in Genf, und wieder kurze Zeit im väterlichen Geschäft, diesmal in Berlin. Hierbei gewann jedoch bald eine früh gefaßte Neigung zur Mathematik soweit die Oberhand, daß ihn der Professor am Friedrich Wilhelm-Gymnasium und an der Kriegsschule N. H. Schellbach, der Lehrer so vieler Lehrer, erst privatim in diese Wissenschaft einführte und dann an E. Kummer verwies, der gerade 1855 aus Breslau nach Berlin zu umfassender Tätigkeit übergesiedelt war. Gordan hörte nun bei Kummer an der Universität, also in dessen erster zahlentheoretischer Periode, während mehrerer Semester, bereitete sich zugleich zum Gymnasialabsolutorium vor und erhielt nach einem mehrmonatigen Besuch des katholischen Gymnasiums zu Neisse daselbst am 19. August 1857, nach einer kleinen mathematischen Privatarbeit, das Reifezeugnis.

Jetzt folgten neun Universitätssemester bis zur Promotion: eines in Breslau, drei in Königsberg, wieder vier in Breslau, eines in Berlin. Seine Lehrer in Breslau waren außer Galle besonders Joachimsthal — bis zu dessen Tod, ein Semester vor Gordans zweitem Weggang von Breslau — und Schroeter, in Königsberg Richelot und Rosenhain; und so ist Gordan nun ganz in der Jacobischen Schule herangebildet: in Variationsrechnung, Mechanik, Elliptischen Funktionen usw., wenn er auch, wie es scheint, einige dieser Gebiete, so das letztgenannte, nur nach Abhandlungen und Vorlesungsheften zu studieren Gelegenheit hatte. In Berlin verkehrte Gordan dann mit Kronecker und hörte dessen 1861/62 zum ersten Mal gelesenes Kolleg über die Auflösung der algebraischen Gleichungen, so über die mit elliptischen Funktionen zusammenhängenden, und über den Rationalitätsbereich: Theorien und Begriffe, die für Gordan später noch von Wichtigkeit wurden.

In Breslau empfing Gordan auch das Thema zu seiner Dissertation, sie ist aus einer Arbeit „De linea geodetica" hervorgegangen, mit der er auf eine von der Fakultät gestellte Preisfrage im August 1861 den Preis erhielt*). Diese in Berlin am 1. März 1862 verteidigte Doktordissertation behandelt die geodätische Linie auf dem Erdsphäroid. Die Darstellung durch elliptische Thetas erfolgt nicht in der von Jacobi (J. f. Math. 53) gegebenen Form, sondern direkt nach den Formeln der Fundamenta. Interessanter ist die Behandlung der Variationsaufgabe selbst, bei der

*) Die Frage, an Jacobis Formeln J. f. Math. 53 anknüpfend, war von Joachimsthal 3. Aug. 1860 gestellt; das Urteil gab Schroeter ab. Es lautete anerkennend für das wissenschaftliche Streben des Verfassers, ablehnend gegenüber der Form und erklärte die Arbeit als des Preises für „nicht unwürdig" (nach dem „Bericht der Fakultäten über die von der kgl. Univ. zu Breslau gestellten Preisaufgaben", 3. Aug. 1861).

offenbar — die Literatur ist hierbei nicht angegeben — die Methode von Lagrange-Jacobi*) benutzt worden ist. Durch Rechnungen, welche lediglich dem speziellen Problem angepaßt sind, stellt Gordan fest, einmal: daß alle von einem Punkt A ausgehenden geodätischen Linien an irgend einen Punkt B der Fläche in ihrem Verlauf im allgemeinen beliebig nahe herangehen; daß aber die Eigenschaft des absoluten Minimums höchstens bis zum neuen Treffpunkt zweier Linien mit supplementärem Azimut in A gilt; sodann: daß das relative Minimum nur bis zum Schnittpunkt zweier sukzessiver Linien von A statthat. Die Jacobische zu einem gegebenen Punkt A gehörige Umhüllungskurve wird nicht behandelt.

Von den Thesen, welche Gordan bei jener Disputation — in einem Latein freilich, das Kronecker nicht gerade als klassisch anerkannte — verteidigte, seien hier zwei angeführt, die erste, weil sie seinen Anschauungen auch aus späterer Zeit entspricht, die zweite aus dem entgegengesetzten Grunde:

> „Die Methode des Unendlichkleinen ist, wie ich behaupte, nicht weniger genau, als die der Grenzen".
>
> „Es hat größeres Interesse zu untersuchen, welche Eigenschaften einer durch eine Differentialgleichung definierten Funktion innewohnen, als durch welche schon bekannte Funktionen sie ausgedrückt werden könne."

Die Funktionentheorie zog Gordan im Herbst 1862 zu Riemann. Er bekam auch die Einwilligung des Vaters, der lange an dem Sohne nur die rechnende, nicht die mathematische Begabung anerkennen wollte; und so ließ er sich in Göttingen immatrikulieren. Aber der nächste Zweck des dortigen Aufenthaltes wurde verfehlt. Zu mehr als einem kurzen Gespräch mit Riemann über dessen Flächen und einigen Wochen Kolleg über Potentialtheorie ist es nicht gekommen, da der erkrankte Forscher nach Italien abreisen mußte. Gordans Schicksalsgenosse war hierbei der einige Jahre jüngere J. Thomae, der sich nun eng an ihn anschloß. Beide hörten Dirichletsche Zahlentheorie bei E. Schering, Gordan freilich, wie überhaupt im Kolleg, nicht nachschreibend, ja halb eingeschläfert; um so lebhafter wurde er dann in der Diskussion auf den täglichen weiten Spaziergängen mit mehrmaliger Einkehr. Damals beschäftigte er sich mit der Transformationstheorie der elliptischen Funktionen, und er führte seinen Freund in seiner eindringlichen Art in sie ein, was dann diesen zur Beschäftigung mit der Transformationstheorie der Abelschen Funktionen antrieb.

In Göttingen traf Gordan im Juni 1863 eine Aufforderung von A. Clebsch, sich in Gießen zu habilitieren. Vielleicht war die Verbindung durch die

*) J. f. Math. 17; von Jacobi in Vorlesungen behandelt.

gemeinschaftlichen Beziehungen zur Königsberger Schule, oder zu Schellbach, in dessen Seminar Clebsch 1854 tätig gewesen, entstanden: jedenfalls zögerte Gordan nicht, der Aufforderung Folge zu leisten. Seine Untersuchungen wurden mit Thomaes Hilfe sofort zusammengefaßt, am 5. Juli ging das Gesuch nach Gießen, und die Habilitation konnte schon am 29. Juli 1863 vor sich gehen. Freilich war vorher noch eine Klausurprüfung in Mathematik und Physik, und ein Kolloquium in diesen Fächern und in Philosophie zu bestehen. Am 8. September erfolgte die venia docendi.

Von den damals verteidigten zwölf Thesen stehen einige unter Göttinger Einflüssen, wie die achte:

> „Die Probleme, welche die Riemannsche Geometrie der Lage stellt, sind begrifflich einfacher, als selbst die neuere Geometrie;“

andere, über partielle Differentialgleichungen usw., stehen auf Jacobischem Boden; charakteristisch für Gordan sind nur die neunte und elfte:

> „Es ist als wesentlicher Fortschritt der Analysis anzusehen, wenn sie sich dazu erhebt, gewisse oft vorkommende Kombinationen mit eigenen Namen zu bezeichnen.“
>
> „Es ist von großem Werte, selbst Bekanntes durch neue Methoden zu beweisen.“

In der Habilitationsschrift (II) wird die Aufgabe, die Konstante der *linearen Transformation der elliptischen Thetafunktion* als explizite Funktion der Transformationskoeffizienten zu bestimmen, vollständig erledigt. Was Gordan zu der Aufgabe hinzog, waren wohl zunächst die Erklärungen Jacobis (in einem Briefe an Hermite von 1845*)): daß er in seinen Vorlesungen die Theorie der unendlich vielen Formen der Thetafunktion umständlich gegeben habe, und daß — wenigstens im Fall des Nullarguments — die schwierige Bestimmung der auftretenden achten Einheitswurzel entweder auf Kettenbruchentwicklung oder auf die Gaußschen Summen führe. Oder es war mindestens der (allein zitierte) Bericht Rosenhains in seiner Preisschrift von 1851, der am speziellen Fall des Übergangs vom Periodenverhältnis τ zu $\frac{1}{\tau}$ mittels Fourierscher Reihe und Umformung der Integralkoeffizienten den Gang darstellt. Leider ist die betreffende Vorlesung Jacobis nicht veröffentlicht; nur die Zerlegung der θ-Reihe in eine endliche Summe von Teilreihen ist aus der Dissertation von Schroeter bekannt. Jedenfalls hat Gordan im allgemeinen den Gang Jacobis und seine Resultate rekonstruiert. Eine Abweichung besteht vielleicht darin, daß Gordan die Integralumwandlung durch einen Grenzprozeß für einen speziellen Modul ersetzt.

---

*) J. f. Math. 32 oder Werke, Bd. I von 1846; s. auch J. f. Math. 36.

Gordan war es aber entgangen, daß schon fünf Jahre vorher (in den C. R. der Pariser Akademie und in Liouvilles Journal) Hermite, von denselben Anregungen ausgehend, dieselben Endresultate vollständig entwickelt hatte, nach einer Methode, die eng an Jacobi anschließt.

So bedeutend die Leistung an sich ist, man vermißt in ihr — worauf Enneper in seinem historischen Buch über die elliptischen Funktionen hinweist — den Einblick in die Quellen. Dieser Umstand hängt einmal mit Gordans durchaus synthetischer Darstellungsweise zusammen; sodann aber auch mit seiner Arbeits- und Publikationsmethode: er führte für jede Arbeit eine große Reihe von Formelheften, sehr gut geordnet, aber nur mit dem geringsten Maße von Text versehen; die weitere Textgestaltung für den Druck und die Druckkorrekturen übernahmen dann mathematische Freunde. So konnte sich aber nicht immer eine völlige Korrektheit der Fassung ergeben, und manchmal sieht man auch nicht den tieferen Untergrund, auf welchem die Überlegungen ruhen. Auch enthalten nur einige der veröffentlichten Aufsätze, darunter aber gerade die ersten, den spezifischen Stil Gordans: lauter kurze, direkte, unvermittelt nebeneinanderstehende Sätze.

Die Theorie der Transformation der elliptischen Funktionen hat Gordan vielleicht auch in der Hoffnung auf Ergebnisse interessiert, die über Hermite und Kronecker hinaus in Zusammenhängen zwischen Gleichungen allgemeiner Art und Modulargleichungen erlangt werden könnten. Jedenfalls ist er noch einmal auf sie eingegangen (1), diesmal auf die der *nichtlinearen* Transformation. Er stellt ein Produkt von r Thetafunktionen, mit verschiedenen Argumenten w_h und mit Moduln $m_h \tau$, die ganzzahlige Vielfache von τ sind, als Summe von $m_1 m_2 \cdots m_r$ Produkten von je r solchen Funktionen dar, alle mit dem Modul τ, aber mit Argumenten, die lineare Verbindungen der w_h, mit gebrochenen Zahlen als Koeffizienten, sind. Es wird so eine sehr allgemeine Formel erhalten, wenn auch nicht gerade „alle nur denkbaren Beziehungen"; auch hat Gordan die beabsichtigten Anwendungen auf Modulargleichungen nicht mitgeteilt. Die Richtung ist eine starke Verallgemeinerung der schon genannten Königsberger Dissertation Schroeters von 1854; sie ist auch erst über 20 Jahre später (von Krause, sowie von Prym-Krazer*)) weiter verfolgt worden.

In Gießen schloß sich Gordan sofort eng an Clebsch an, ein Anschluß, der bald für die Wissenschaft von hoher Bedeutung werden sollte: er führte zu dem gemeinsamen Werk über die *Theorie der Abelschen Funktionen* (III). Indessen darf man sich die Vorgeschichte des Werkes doch nicht

*) Vgl. M. Krause, Theorie der doppeltperiodischen Funktionen einer veränderlichen Größe (Teubner), Bd. II (1897), S. 289.

so denken, wie es nach der Bemerkung C. Neumanns in seinem Nachruf auf Clebsch*) scheinen könnte: „daß Clebsch durch Gordan mit Riemanns Arbeiten über Abelsche Funktionen bekannt gemacht wurde", und vielleicht auch nach der Bemerkung in dem Bericht über die Leistungen Clebschs**), daß „für die Einführung der Abelschen Funktionen und ihrer Betrachtungsweisen in die Geometrie die äußere Veranlassung die Habilitation Gordans in Gießen war". Vielmehr muß Clebsch den Abelschen Funktionen selbständig schon früher nähergetreten sein. Denn er hatte Riemanns Abhandlung schon 1857 als Korrektor des Crelleschen Journals unter den Händen und Interesse für sie gefaßt; und die geometrische Bedeutung des Abelschen Theorems hatte er zu einer Zeit erkannt — die Daten der beiden Arbeiten in J. f. Math. 63 sind der 27. Sept. und der 28. Okt. 1863; vgl. auch die Anm. in J. f. Math. 63, S. 105 —, in der eine Beeinflussung durch Gordan noch kaum als möglich erscheint. Auch in den Hauptsatz Riemanns über das Verschwinden der Thetafunktion war, nach der zweiten der beiden Arbeiten, Clebsch eingedrungen, und die Arbeiten von C. Neumann und Prym hatten auf ihn eingewirkt.

Richtig aber ist, daß Clebsch noch im Sommer 1864 — nach einem Briefe an Roch — größere Schwierigkeiten im Verständnis von Riemanns Theorien zu überwinden hatte, so insbesondere bezüglich der algebraischen Modifikationen des Abelschen Theorems, welche das Auftreten von Doppel- und Rückkehrpunkten von seinem projektiven Standpunkte aus mit sich brachte. Erst allmählich, durch die Fälle $p=0$ und 1 (J. f. Math. 64) hindurch, hier mit Hilfe von Rosenhains Preisschrift, fand er den Weg zum erweiterten Umkehrproblem, wobei auch Brills Behandlung des Falles $p=2$ (J. f. Math. 65 von Okt. 1865), die auf seine Anregung erfolgte, noch eine Zwischenstufe bildete.

Das gemeinsame Werk selbst ist wesentlich 1865 entstanden und, nachdem es Jan. 1866 angezeigt worden (3), im Herbst 1866 erschienen.

Wir können davon absehen, uns hier über die funktionentheoretische und algebraisch-geometrische Bedeutung der neuen Theorie näher auszusprechen; denn eine eingehende Würdigung von der Hand A. Brills enthält der oben genannte Bericht über Clebsch, an dem auch Gordan (26) mitwirkte, und die Beziehungen zu den übrigen Theorien sind in dem Bericht von Brill-Noether über die algebraischen Funktionen (D. Math. Ver. von 1893) ausführlich dargelegt. Dagegen hätten wir hier den Anteil Gordans an dem Werke zu entwickeln; aber gerade diese Aufgabe erscheint kaum durchführbar. Gordan selbst hat sich nur einmal, an seinem

*) Wiedergegeben in diesen Annalen 6, S. 199.

**) Math. Ann. 7, S. 19.

70. Geburtstage, darüber ausgesprochen*) in dem allgemeinen Sinne: „sein Zusammenwirken mit Clebsch sei eine glückliche Art der Arbeitsgemeinschaft gewesen, bei der ihm oft die Aufgabe zufiel, die Ideen des geistreichen Forschers in die Wirklichkeit umzusetzen." Diese Charakterisierung, treffend wie sie ohne Zweifel ist, gilt in erster Linie von dem gemeinsamen Werk. Clebsch hatte zwar überall die führende Rolle, aber Gordan stand von 1864 an in täglicher ununterbrochener verständnisvoller Aussprache hinter ihm als rastlos treibendes Element, dem keine Schwierigkeit unüberwindlich schien und das in sokratischer Weise Klarheit schuf. So zeugt schon der Plan zu einer selbständigen neuen Grundlegung der ganzen Theorie von einer solchen Energie und einem solchen Selbstvertrauen der beiden jugendlichen Forscher in ihre frischen Kräfte — der eine zählte erst 32 Jahre, der andere nur 27 —, daß gerade er als gemeinsames Eigentum angesprochen werden muß.

Insbesondere mag es aber der Wucht, deren die Gordansche Arbeit fähig war, bedurft haben, um zu dem Mittelpunkt der Theorie, dem 7. Abschnitt, hindurchzudringen: der Lösung des Umkehrproblems, mittels Zerlegung der Summe von Integralen 3. Gattung in zwei je nur von p Argumenten abhängige Funktionen. Übrigens ist der hierbei nach Riemann eingeschlagene Weg durch Funktionen von $p+1$ Punkten der Kurve komplizierter als der von Weierstraß.

Ferner wird man das Schlußkapitel über die unendlich vielen Formen der Thetafunktion im wesentlichen Gordan zuzuschreiben haben. Wenigstens hat er die Transformationsformel selbst, noch ohne Bestimmung der numerischen Konstanten, schon im April 1865 (2) mitgeteilt. Aber der Weg muß damals eher durch die Funktionalgleichungen der Periodizität, wie in (1) und bei Hermite und Thomae hindurchgeführt haben, als durch die Integrale 3. Gattung, wie später im Buche, da hierzu schon der 7. Abschnitt hätte fertig sein müssen. Die zur Bestimmung der 8. Einheitswurzel im Buche verwandte Methode, eine von Kronecker**) stammende Zerlegung der kanonischen Transformationsdeterminante in elementare, ist später aufgenommen worden. Die Abfassung und äußere Gestaltung des Werkes hatte Gordan, schwerfällig in der Handhabung der Feder, der Meisterhand von Clebsch überlassen.

Die „Abelschen Funktionen" von Clebsch-Gordan haben späterhin ihre stärkste Wirkung in der Richtung der Theorie der algebraischen Funktionen ausgeübt, wenn auch das Buch selbst seine Sätze an die speziell

*) Cf. Jahresber. d. D. Math. Ver. 16, S. 328.

**) Cf. Monatsber. der Berl. Akad. von Okt. 1866 und J. f. Math. 68. Kronecker reduziert dort auf eine kleinere Anzahl von Elementartransformationen als Clebsch-Gordan.

gegebene Kurve anknüpft und noch auf dem ternär-projektiven Standpunkt steht, nicht auf dem der rationalen Transformation, wie es z. B. eine Theorie der Moduln erfordert hätte. Gordan ist nicht mehr auf die Theorie der Funktionen, auch nicht der algebraischen, zurückgekommen, die ihn doch mehr nach der Seite der Formelentwicklungen, als nach der begrifflichen Seite beschäftigt hatte. Auch der Wunsch Gordans nach Herausgabe einer zweiten Auflage des Werkes, mit dem er an den Verfasser dieses Aufsatzes herangetreten war, wurde nicht erfüllt, da der historische Charakter des Werkes nicht durch eine systematische Umgestaltung zerstört werden sollte. Gordan wandte sich vielmehr dem Gebiete zu, in dem er von nun an das Lebenselement seiner Betätigung finden sollte: *der Algebra, insbesondere der Formentheorie der linearen Transformationen.*

In Clebschs Arbeiten hatten von 1860 an die algebraischen Eliminationsprobleme aus der Theorie der Kurven und Flächen eine systematische Weiterbildung der von den Engländern und von Hesse angewendeten Methoden erfahren. Es geschah auf Grund invariantentheoretischer Begriffe, aber doch noch wesentlich unter Verwendung der mehrfach geänderten Determinanten. Zu gleicher Zeit jedoch begründete Clebsch die Aronholdsche Symbolik von 1855, legte sie den Invariantenbildungen, wenigstens bei Grundformen mit *einer* Variabelnreihe, zugrunde, und gab die Übertragungsprinzipe von $m-1$ Variabeln auf m und von Formen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades auf solche n^{ten} Grades.*)

Nach Vollendung des Werkes über die Abelschen Funktionen führte Clebsch seinen Freund in diese algebraische Welt ein, die der Art Gordans so entsprach, daß er sie sich in kürzester Zeit völlig zu eigen machte und sich nun fast ausschließlich in ihr bewegte. Denn mit der Zusammensetzung aller Invarianten aus symbolischen Aggregaten waren in der Formentheorie alle Definitionen und Operationen aus dem begrifflich-abstrakten Gebiete in das konkrete Gebiet der algebraischen Darstellung und damit in Gordans Sinn erst zur Wirklichkeit und Klarheit gebracht. Die Formel war ihm immer und überall unentbehrliche Stütze für Gedankenbilden, Schlüsse und Ausdrucksweise.

Gordan wandte sich zunächst verschiedenen Richtungen zu, in denen Clebsch arbeitete. Mit ihm zusammen erweiterte er die Begriffe der von Hermite eingeführten *typischen Darstellungen* von Formen, indem die binäre Form 5. Grades, wie bei jenem, mit linearen Kovarianten trans-

*) Nach Gordan mag in diesem Bericht überall mit „Grad" die Dimension in den Punktvariabeln, mit „Ordnung" die Dimension in den Koeffizienten der Grundformen bezeichnet werden — gerade entgegengesetzt der Bezeichnungsweise der übrigen Autoren.

formiert (4), die 6. Grades aber (ibid.) als kubische Funktion dreier quadratischer Kovarianten dargestellt wurde. (5) und (15) sind interessante Anwendungen spezieller Fälle dieser quadratischen Transformation. Eine höhere gebrochene Transformation überhaupt ist dann von Gordan in (9) zur Überführung einer Gleichung in eine solche mit speziellen Invarianteneigenschaften — analog wie von Hermite die Tschirnhausen-Transformation — weiter verfolgt worden. In der gemeinsamen Arbeit (8) über die Theorie der ternären kubischen Form wird ein kovariantes Koordinatendreieck zugrundegelegt, dessen Ecken ein beliebiger Punkt x und zwei durch lineare Zwischenformen gegebene Punkte sind; und analoge Darstellungen rationaler und irrationaler Art bieten noch (37) und (38).

Nach den gemeinsamen typischen Darstellungen von 1867, alle zu dem Zweck, die Übersicht über die rationalen Zusammenhänge der zu einer Grundform gehörigen Formen zu erschließen, wandte sich Gordan der Ausbildung des von Clebsch den Invariantenbildungen zugrundegelegten *symbolischen Kalküls* zu. Er nahm dessen geometrische Eliminationsprobleme auf, um zu zeigen (7), daß die Anwendung einfacher symbolischer Identitäten — entsprechend den linearen Relationen, welche im n-ären Gebiet zwischen $n+1$ linearen Formen bestehen — das zweckmäßige Mittel zur Formenumwandlung abgebe. Insbesondere überwand er manche Eliminationsschwierigkeit, welche das Wegschaffen nur durch die Methode hereingebrachter Faktoren bot, so in (22) bei der Aufstellung der Gleichung für die Pentaederebenen der Fläche 3. Ordnung; und auch einige Arbeiten von Schülern Gordans gehören hierher.

Aus dem symbolischen Apparat heraus entwickelte Gordan — in dem schon genannten Aufsatz (9) von Jan. 1868 — den Keim zu einem Fortschritt, der weit über jenen Apparat hinaus eine methodische Bedeutung für die Invariantentheorie gewinnen sollte: die sog. *Clebsch-Gordansche Reihenentwicklung.* Er gelangt da für die binäre Grundkombinante bei zwei Variabelnreihen

$$\Theta(x, y) = m(y)\, l(x) - l(y)\, m(x)$$

zu einer normierten Reihenentwicklung nach Potenzen von $(xy) \equiv y_2 x_1 - y_1 x_2$:

$$\Theta(x, y) = \sum_{\nu} C_{\nu} (xy)^{2\nu+1} \vartheta^{\mu}_{x,\nu} \vartheta^{\mu}_{y,\nu}.$$

Die Koeffizienten sind dabei eindeutig definiert als *Polaren* von y in bezug auf Formen mit nur *einer* Reihe x:

$$\vartheta^{2\mu}_{\nu}(x) = (lm)^{2\nu+1} l^{\mu}_{x} m^{\mu}_{x},$$

die selbst die einfachsten, in den Koeffizienten von l sowohl, als von m linearen Bildungen sind. Diese Formen in x aber waren schon bei Cayley aufgetreten, aus Polaren $l_x^\mu l_y^{n-\mu}$ von l dadurch abgeleitet, daß die Produkte der y durch kogrediente $(n-\mu)^{\text{te}}$ Differentialquotienten von m ersetzt werden; sie wurden von Gordan plastisch „Übereinanderschiebungen", später „Überschiebungen" von m über l genannt.

Die Methode, die Gordan bei der alternierenden Form $\Theta(x, y)$ zu der Reihenentwicklung führte, besteht hier nur in Anwendung des binomischen Satzes auf die einzelnen symbolischen Faktoren und ferner in der symbolischen Umwandlung von Polarengliedern, welche letztere schon für sich den Existenzbeweis der Reihe ((11), § 2) gibt. Und ganz dieselben Operationen führen ihn 1870 in seiner Resultantenarbeit (18) zu der entsprechenden normierten Reihenentwicklung für alle binären Formen mit zwei Reihen kogredienter Variabeln: symbolisch $r_x^n s_y^m$; hierbei werden dann die sogenannten „Elementarkovarianten" $(rs)^k r_x^{n-k} s_x^{m-k}$ so verwendet, wie vorher die $\vartheta_\nu(x)$.

Inzwischen, vor Herbst 1870, hatte auch Clebsch die Reihenentwicklung hergestellt*), indem er statt der symbolisch gebildeten Elementarkovarianten durch den Prozeß Cayleys

$$\Omega \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1\, \partial y_2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2\, \partial y_1}$$

und durch Polarenprozesse alle invarianten binären Formen von zwei Variabelnreihen in Normalformen von solchen überführte, also $r_x^n s_y^m$ zunächst in $(rs) r_x^{n-1} s_y^{m-1}$, dann in die Elementarkovariante $(rs) r_x^{n-1} s_x^{m-1}$. Von Clebsch nahm Gordan diesen Differentiationsprozeß auf ((21) Okt. 1871), um daraus die Eindeutigkeit der normierten Entwicklung zu beweisen und ihre Zahlenkoeffizienten zu bestimmen. Die wirkliche Bedeutung des Ω-Prozesses ist die, daß das identische Verschwinden von $\Omega\varphi(x, y)$ die doppelt-binäre Form $\varphi(x, y)$ als *Polare* charakterisiert, und daß also gerade der Ω-Prozeß nötig wird, um irgend eine doppelt-binäre Form mod. (xy) einer Polaren äquivalent zu machen. Aber diese Bedeutung hat sich erst aus den Arbeiten von Clebsch von 1872 über die Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie, und zwar im n-ären Gebiet bei der Reduktion auf Normalformen von Formen mit irgend welchen Reihen von Variabeln, nach und nach ergeben. Bei Gordan erscheint sie in seiner Programmschrift von 1875 (IV, § 19), wo Normalformen durch noch erweiterte Ω-Prozesse definiert werden. Die volle Zurückführung der Bedeutung von

$$\Omega\varphi(x, u) \equiv \sum \frac{\partial^2 \varphi(x, u)}{\partial x_i\, \partial u_i} = 0$$

*) Veröffentlicht in seinem Buche über binäre Formen zu Beginn 1872; Vorwort von Sept. 1871.

(21), wo die u_i kontragredient zu den x sind, auf den *Polarenbegriff* ist erst 1887 erfolgt, als Mertens*) nach Ersatz der u_i durch Unterdeterminanten $(x_k y_l \cdots)$ einen zugehörigen Polarisationsprozeß einführte; was dann noch eine Weiterführung der Prozesse im Gefolge hatte. Es zeigte sich aber auch, daß der Ω-Prozeß, angewandt auf irgend ein Koeffizientenaggregat der linear transformierten Formen, *alle* invarianten Bildungen erzeugte, und nur diese; dies wurde sogar für Gordan in seinem Buche (V) die einzige Grundlage für die Möglichkeit der symbolischen Darstellung dieser Bildungen; für die weiteren Forscher diente der Prozeß selbst wieder, dem Cayleyschen Standpunkt von 1846 entsprechend, als Äquivalent für die Symbolik überhaupt.

Wenn bezüglich der Veröffentlichung der Reihenentwicklung Gordan zweifellos die Priorität gebührt, so hat er doch gern die Gleichzeitigkeit der Auffindung von seiner und Clebschs Seite betont, sowohl mündlich, als schon in (17) (Sept. 1870), als auch in dem Nachruf auf Clebsch ((26), S. 43) und in seinem Buche (V, Bd. II, S. 86), welches in der Darlegung dem durchsichtigen Gange von Clebsch folgt. Die hohe *theoretische* Bedeutung der Reihenentwicklung selbst aber bleibt darin bestehen, daß sie unmittelbar die Formentheorie aller Formen mit beliebigen Reihen von n-ären Variabeln auf die der simultanen Grundformen mit $n-1$ Reihen von Variabeln zurückführt.

Aus den Arbeiten am symbolischen Kalkül und der Reihenentwicklung heraus erhob sich Gordan 1868 (11) und 1869 (16) unmittelbar zum Höhepunkt seiner invariantentheoretischen Leistung, ja seines Schaffens überhaupt: zu dem *Gordanschen Endlichkeitstheorem.* Es besteht in dem Nachweis einer *endlichen* Basis für die Formen eines jeden Grundsystems binärer Formen.

Cayley hatte in seinem Second Memoir upon Quantics**), von der Definition der Kovarianten einer binären Form durch partielle Differentialgleichungen ausgehend, die Frage gestellt, ob die solchen Gleichungen eventuell genügenden Polynome eine endliche Basis von Formen haben, aus der sich alle als ganze Funktionen mit bloß numerischen Koeffizienten ableiten lassen; und er glaubte die Frage im allgemeinen verneinen zu sollen, insbesondere auch für das Kovariantenproblem. Seine Vermutung beruhte auf unbewiesenen Abzählungen. Da trat Gordan 1868 mit dem Beweise hervor, daß für eine binäre Grundform $f(x)$ in jedem Falle eine solche begrenzte Basis existiere: ein „vollständiges“ oder „volles“ Formen-

*) „Über invariante Gebilde ternärer Formen“, Wiener Sitzungsb. 95.

**) Phil. Transactions 146 (1856); Papers, II, Nr. 141.

system von f. Und zwar lieferte der Beweis zugleich — was für Gordans Anschauungsweise wesentlich war — die wirkliche Bildung eines vollen Systems. Die Reduktion auf ein kleinstes solches System wäre dann nur Sache des Kalküls.

Die beiden Beweise Gordans haben im wesentlichen denselben Gedankengang, nur ist er im zweiten, durch explizite Ausdehnung auf mehrere, simultan gegebene Grundformen und durch den Begriff des relativ-vollständigen Systems, viel durchsichtiger geworden. Wenn wir nun hier, der Bedeutung gemäß, welche das Verfahren in Gordans ganzer Lebensarbeit gewonnen hat, versuchen wollen, eine Vorstellung von dem Beweisgang zu geben, so halten wir uns vorzugsweise an die zweite Arbeit (16).

Unter einem „relativ-vollständigen System $A_1, \cdots, A_\varrho$ der Grundformen $f_1, f_2, \cdots$, modulo $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$“ wird verstanden, daß alle zu den f gehörigen invarianten Formen sich in der Gestalt

$$G(A) + P(\varphi)$$

darstellen lassen, nämlich als ganze Funktionen der A mit numerischen Koeffizienten, bis auf einen Ausdruck P, der in jedem Glied Koeffizienten der φ enthält. In der Absicht, induktive Schlüsse von n auf $n+1$ zu machen, geht Gordan schrittweise von Formen niedrigerer Ordnung, oder Grad, oder Überschiebung zu höheren solchen fort und stellt so Sätze der Art auf:

I. Sämtliche invariante Bildungen m^{ter} Ordnung in den Koeffizienten von f lassen sich durch Überschiebung von f über Formen $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung ableiten; daher lassen sich sämtliche zu f gehörigen Formen nach und nach durch Überschiebungen mit f bilden.

II. Sei für eine Grundform $f(x)$ vom n^{ten} Grad W das „übernommene“ System, d. h. aus dem vollen zur ersten Polaren $\sum \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} y_i$ gehörigen System dadurch erhalten, daß man auch die y noch durch x ersetzt. Die W bilden für f ein relativ-volles System, mod. einer Formenreihe χ, K; wobei die χ die k^{ten} Überschiebungen von f über sich selbst für $k > \frac{n}{2}$, K dasselbe für $k = \frac{n}{2}$ (wenn $n = 4\nu$) ist.

III. Besitzt die Reihe $f_1, f_2, \cdots$ ein mod. der Reihe $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ relativ-volles System A, die Reihe $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ aber ein absolut-volles System B, so besitzt auch die simultane Reihe $f_1, f_2, \cdots, \varphi_1, \varphi_2, \cdots$ ein volles System C. C besteht aus den A, den B, und einer begrenzten Anzahl weiterer Bildungen, welche sämtlich Überschiebungen von Produkten der A über Produkte der B sind.

Der erste Satz ist nichts weiter als eine Anwendung der Reihenentwicklung: es wird jede Kovariante $\Phi(x)$ von $f(x)$ erst durch eine Form $\vartheta(x, y)$ ersetzt, für welche $\vartheta(x, x) \equiv \Phi(x)$ ist, diese nach Potenzen von (xy) normiert entwickelt und endlich die Produkte der y durch kogrediente Differentialquotienten von $f(x)$ ersetzt. Zugleich liefert der Satz eine *Anordnung* aller zu f gehörigen Bildungen, beginnend mit f selbst.

Um den zweiten Satz einzusehen, hat man zunächst zu bemerken, daß die k^{ten} Überschiebungen von f über sich selbst für $k < \frac{n}{2}$ zu den W gehören. Der übrige Teil des Satzes ergibt sich, indem man ihn für die Formen niedrigerer Ordnung als richtig voraussetzt und dies auf den im ersten Satze geleisteten Ausdruck einer Form m^{ter} Ordnung $\Phi(x)$ anwendet. Nach und nach kommt man so, außer auf Formen W, nur auf Formen 2^{ter} Ordnung.

Für den dritten Satz genügt es, die Produkte der A über die der B zu schieben, da in den Überschiebungen der $P(B)$ über Produkte der B die A in niedrigerer Ordnung auftreten als in der zu betrachtenden Bildung. Von jenen aber zeigt die Rechnung, daß man in den Faktorenanzahlen der Produkte gewisse einfache Grenzen nicht zu überschreiten braucht, weil sonst in den Überschiebungen immer mindestens ein Term zerfällt, die Überschiebung selbst also als reduzible zu betrachten ist.

Da nun das Gordansche Theorem für die Formen χ, ihrem Grad nach, als gültig vorausgesetzt wird, so liefern, wenn K nicht vorhanden ist $(n \neq 4\nu)$, die Sätze II und III unmittelbar das Theorem für $f(x)$. Aber auch wenn K, vom selben Grad wie f, existiert, hat man einen Abschluß; denn macht man in bezug auf K dieselbe Betrachtung wie vorher für f, so tritt im Satze II in den Modul der χ, K an Stelle von K nur eine *Invariante* J, die n^{te} Überschiebung von K über f.

Wir weisen noch darauf hin, daß — was von Gordan nicht explizite ausgesprochen wird — unter dem vollen System der χ dasjenige verstanden ist, welches bei Auffassung aller Koeffizienten der χ als unabhängiger Unbestimmter gebildet werden kann. Da aber diese Koeffizienten von den Koeffizienten (a) der Grundformen f abhängen, sind sie nicht voneinander unabhängig; und die vorkommenden identischen Relationen sind als identische in den Unbestimmten (a) aufzufassen, nachdem man in dem System der χ die Koeffizienten durch die (a) ausgedrückt hat.

Solche Funktionen der Koeffizienten der χ, die bei deren formaler Auffassung als Unbestimmter nicht-invariant sind, wohl aber vermöge der Parameterdarstellung durch die (a), also erst für die $f_1, f_2, \cdots$, invariant werden, treten in dieser Untersuchung Gordans also nicht auf.

Und wir mögen überhaupt hier darauf hinweisen, daß Gordan bei der Systembildung *spezieller* Formen — wie sie z. B. weiterhin in der Gleichungstheorie auftreten — immer nur die nach der allgemeinen Vorschrift formal gebildeten Invarianten in Betracht zu ziehen pflegte. —

Gordan hat 1872 (in (23) und (24)) durch Einführung des Verhaltens der *nicht-negativen* ganzzahligen Lösungen eines Systems diophantischer Gleichungen den Beweis seines Theorems noch beträchtlich durchsichtiger gemacht. Er gibt hier den Satz, daß sich alle derartigen Lösungssysteme aus einer endlichen Anzahl solcher Lösungssysteme additiv zusammensetzen lassen: was wir als *„speziellen Gordanschen Endlichkeitssatz“* bezeichnen mögen.

Wenn nun in dem mit III bezeichneten Satze ein Produkt

$$\Pi(x) = A_1^{h_1}(x) \cdots A_\varrho^{h_\varrho}(x) \qquad [A_i \text{ vom Grade } m_i]$$

über ein Produkt

$$\Pi'(y) = B_1^{k_1}(y) \cdots B_\sigma^{k_\sigma}(y) \qquad [B_j \text{ vom Grade } n_j]$$

m-mal geschoben wird, so wird die resultierende Überschiebung in x und y bezüglich von den Graden

$$N_1 = \sum h_i m_i - m, \qquad N_2 = \sum k_j n_j - m.$$

In diesen beiden Gleichungen, in welchen die m_i, n_j gegebene Zahlen sind, entspricht nicht nur jeder der genannten Überschiebungen ein bestimmtes nicht-negatives Zahlensystem h_i, k_j, m, N_1, N_2; sondern auch umgekehrt. Denn die Differenz zweier zum selben Lösungssystem gehöriger Formen wird eine Form von denselben Ordnungen, wie jede dieser Formen, aber von höherem Gewichte — d. i. die Potenz, in welcher bei linearer Transformation die Determinante derselben als Faktor vortritt; bei symbolischer Darstellung also die Anzahl der Klammerfaktoren —; ist daher in Gordans Anordnung eine frühere, im System wegzulassende Form. Einem in zwei Faktoren zerfallenden Gliede einer Überschiebung entspricht so die additive Zusammensetzung eines Lösungssystems der beiden Gleichungen aus zwei einfacheren, und umgekehrt. So folgt aus dem „speziellen Endlichkeitssatz“, daß die Anzahl der in Satz III zu berücksichtigenden Überschiebungen eine endliche ist.

Während alle bisher angeführten Systemsbetrachtungen zwar von ihrem Urheber aus der symbolischen Darstellung der Formen gezogen worden sind, aber — wie unsere Darlegung erkennen lassen wird — im Grunde von ihr gar nicht abhängen, hat nun Gordan in seiner Programmschrift (IV) von 1875 zur Grundlage seiner symbolischen Operationen einen Prozeß, *„Faltung“* genannt, eingeführt, der nur symbolisch als primärer zu bezeichnen ist: es wird ein Produkt $a_x b_x$ durch einen Klammerfaktor (ab) ersetzt. Unsymbolisch setzt sich die Faltung, nach der Theorie der normierten Reihenentwicklungen, aus einer Reihe von Prozessen zusammen, nämlich aus einer Summe von Überschiebungen. Und umgekehrt setzt sich auch jede Überschiebung, symbolisch dargestellt, aus einer Summe von Faltungen zusammen — analog wie ein Polarenprozeß, auf ein Produkt angewandt, eine Summe von Polarbildungen liefert. Dieser symbolische Prozeß dient Gordan zu einer Anordnung der Formen des Systems nach den in ihnen enthaltenen Exponenten von Klammerfaktoren, sowie zur Aufstellung von symbolischen *Reduzenten*, d. h. eines Produktes von Klammerfaktoren, welches als Faktor in einer Form auftretend, dieselbe vermöge „früherer“ Formen reduzibel macht. So wird denn jetzt in den angeführten Sätzen I, II, III der Begriff des relativ-vollständigen Systems auf Moduln ausgedehnt, die gegebene Klammerprodukte sind. Und es werden nun, statt der dortigen Systeme f; χ, K; $\cdots$ sukzessive folgende Systeme eingeführt, wenn $f = a_x^n = b_x^n = \cdots$ und $(\varphi, \psi)^k$ die k^{te} Überschiebung von φ über ψ bedeutet:

$A^{(0)} = f,$ vollständig mod. $(ab)^2$;

$B^{(0)} = (f, f)^2 = f_2,$ „ „ $(ab)^4$;

$A^{(1)} = f, f_2, (f, f_2),$ „ „ $(ab)^4$;

$B^{(1)}$, ein Bildsystem von $A^{(1)}$, gebildet an $(f, f)^4 = f_4$, wie $A^{(1)}$ an f, nämlich

$$B^{(1)} = f_4,\ (f_4, f_4)^2 = f_{4.2},\ (f_4, f_{4,2}),\ \text{vollständig mod. } (ab)^6;$$

$A^{(2)}$, entstehend aus Überschiebung von $A^{(1)}$ mit $B^{(1)}$, vollständig mod. $(ab)^6$; usw. Das System $A^{(\nu)}$ dient als Vorbild für das Bildsystem $B^{(\nu)}$, so lange $\nu \overline{\gtrless} \frac{n}{4} - 1$ ist; für größere ν wird als Vorbild des Systems $B^{(\nu)}$ das vollständige System einer Form vom Grade $2(n - 2\nu - 2) > n$ benutzt. Das letzte so erhaltene System $A^{(\nu)}$, für $\nu \overline{\gtrless} \frac{n}{2}$, ist dann das vollständige System von f.

Vom symbolischen Standpunkt aus war nun durch diese sukzessive Systemsbildung — abgesehen von der auch hier noch notwendigen Herübernahme von Systemen, die zu Grundformen niedrigeren Grades als f gehören — die (symbolische) Struktur des vollen Systems von f übersichtlich geworden. Und der in der Einleitung der Programmschrift (IV) getane Ausspruch: „Je mehr die Wissenschaft fortschreitet, umsomehr wird es möglich, die Resultate, welche sich sonst nur durch längere Zwischenbetrachtungen beweisen ließen, unmittelbar einzusehen: und man wird einen mathematischen Gegenstand erst dann als erledigt betrachten, wenn dieses Ziel erreicht ist“, konnte besonders in der vereinfachten und klaren Darstellung des 2^{ten} Bandes der „Vorlesungen“ (V) annähernd als erfüllt angesehen werden.

Da war es ein eigentümliches Zusammentreffen, daß gerade mit dem Abschluß des Beweises in diesem Buche*) ein Beweis des Gordanschen Theorems erscheinen sollte, der vom Gordanschen „speziellen Endlichkeitssatz" ausging, im übrigen aber einen Weg nahm, der den obigen Ausspruch in idealer Weise bestätigen sollte.

Im Juli 1885 hat Mertens**) einen solchen Beweis erbracht. Er verläßt dabei die Aronholdsche Symbolik, benutzt aber die Gaußsche***), welche ohne Voraussetzung der Wurzelexistenz die Wurzeln durch Unbestimmte ersetzt — ein Hilfsmittel, das übrigens ohne Einfluß auf den Gang des Beweises ist. Der Gedankengang besteht wesentlich im Übergang von den Invarianten einer binären Form vom Grade $n-1$ zu denen einer durch Zufügung eines linearen Faktors entstehenden Form vom Grade n, wobei letztere noch durch n Permutationen für den linearen Faktor zu einer allgemeinen Form $f_n(x)$ vom n^{ten} Grade gemacht wird.

Kurz darauf haben Mertens†), und unabhängig davon Hilbert††), denselben Gedankengang noch dadurch übersichtlicher gemacht, daß sie die Form $f_n(x)$ direkt in alle ihre n Linearfaktoren zerlegen und jede Invariante J von $f_n(x)$ als ganze Funktion aller homogen gemachten Wurzeldifferenzen ansetzen. In dieser einfachsten Gestalt läßt sich nun der Beweis in einige Zeilen zusammenfassen:

Für irgend ein Anfangsglied Ω, aus welchem durch die $n!$ Permutationen alle Glieder von J additiv hervorgehen, ergeben die Gewichtsbedingungen ein System von diophantischen Gleichungen, deren nicht-negative Lösungen sich — nach dem speziellen Endlichkeitssatz von Gordan — aus m Grundlösungen additiv zusammensetzen mögen. Wenn der i^{ten} Grundlösung ein Anfangsglied ω_i entspricht, so stellt sich Ω als Potenzprodukt dieser m Größen ω_i dar. Aus ω_i ist durch die $n!$ Permutationen eine Größenreihe von $n!$ Gliedern zu bilden; dann werden aber die Invarianten J von $f_n(x)$ simultan-symmetrische Funktionen dieser m Größenreihen. — Nun ist es ein bekannter Satz, daß die simultan-symmetrischen Funktionen von Größenreihen eine endliche Basis haben, durch die sich alle derartigen Funktionen rational und ganz darstellen lassen. Diese ist also hier die gesuchte Basis für alle Invarianten von $f_n(x)$.

Damit ist also nicht nur der Beweis selbst auf zwei einfache End-

*) Siehe V, Bd. 2, S. 236, Anm.

**) „Beweis, daß alle Invarianten und Kovarianten eines Systems binärer Formen ganze Funktionen einer endlichen Anzahl von Gebilden dieser Art sind". J. f. Math. 100 (1887).

***) Im zweiten Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra (Werke II, S. 31).

†) Wiener Sitzungsber. vom 24. Jan. 1889.

††) Math. Ann. 33; dat. März 1888, erschienen im Jan. 1889.

lichkeitssätze zurückgebracht; man könnte ihn auch als rechnerisches Mittel zur Bildung eines vollen Systems gebrauchen, das im einzelnen Falle noch bedeutende Abkürzungen zuließe. Der Beweis kann jetzt geradezu als ein elementarer bezeichnet werden.

Über die binären Formen hinaus haben die analogen symbolischen Methoden Gordan nur noch in einigen Fällen zum Beweis und zur Aufstellung eines vollen Systems gelangen lassen, hauptsächlich wegen der großen Komplikation, die durch die Mehrheit nicht kogredienter Variabelnreihen entsteht. So bildet Gordan (14) für die allgemeinen kubischen ternären Formen ein volles System von 34 Formen, dessen Formenzusammenhänge er dann, gemeinsam mit Clebsch, in (25) entwickelt. Auch werden, wieder gemeinsam mit Clebsch (13), die allgemeinen Prinzipien der Betrachtung auf eine ternäre Grundform ausgedehnt, welche die Punkt- und Linienvariabeln enthält; und für den Fall, daß die beiden Grade gleich 1 sind — also für die ebene Kollineation, für die auch geometrisch interessante Entwicklungen erhalten werden —, wird sogar das volle System aufgestellt. Dem simultanen System zweier quadratischer ternärer Grundformen konnte Gordan eine Durcharbeitung geben (38), wie viel später noch (78) dem zweier quadratischer quaternärer Formen. Endlich bewältigte er auch (36) das System der Kleinschen ternären biquadratischen Form, für welche eine gewisse doppeltquadratische Zwischenform identisch verschwindet, und gewann damit auch ein wenigstens relativ-volles System für die allgemeine ternäre biquadratische Grundform.

Während so für Grundformen mit mehr als zwei homogenen Variabeln die symbolischen Methoden im allgemeinen versagten, und ebenso die auf Definition durch symmetrische Funktionen beruhenden Methoden, sollten neue Begriffe und Methoden, die im Prinzip an Kronecker anknüpften, auch für das weiteste Gebiet die Gültigkeit des Gordanschen Endlichkeitstheorems aufweisen. 1890*) entwickelt Hilbert einen sehr allgemeinen Endlichkeitssatz, wonach für ein ganz beliebig gegebenes System von homogenen Formen F stets ein endlicher *Modul* $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$, aus Formen des Systems gebildet, existiert, in dem alle F enthalten sind (mit Koeffizienten, die ganze Funktionen der Variabeln sind). Insbesondere ist dies für das System aller Invarianten J von Grundformen $f_1, f_2, \ldots$, die J betrachtet als homogene Formen in den Koeffizienten der $f_1, f_2, \ldots$, der Fall. Hat man aber den Modul von Invarianten $(i_1, \ldots, i_m)$, durch die sich alle J in der Gestalt $\Sigma A_k i_k$ darstellen, so können, nach einem zweiten Hilbertschen Satze, der auf Anwendung des invariantenerzeugenden Pro-

*) „Über die Theorie der algebraischen Formen"; insbesondere Abschn. V „Die Theorie der algebraischen Invarianten". Math. Ann. 36. Vorläufige Mitteilung in Gött. Nachr. von 1889.

zesses Ω beruht, die A_k durch Invarianten J_k der $f_1, f_2, \ldots$ ersetzt werden. Und da dann diese J_k von niedrigerer Ordnung in den Koeffizienten der $f_1, f_2, \ldots$ sind als J selbst, so ergibt die Wiederholung des Schlusses die $i_1, i_2, \ldots, i_m$ als volles System für die Invarianten der $f_1, f_2, \ldots$.

Gordan — anfänglich diesen begrifflichen Deduktionen gegenüber mehr ablehnend: „das ist keine Mathematik, das ist Theologie!“ — ist dann zweimal (53), (69) dem diesem Beweise zugrunde liegenden Hilbertschen Endlichkeitssatze nähergetreten, indem er die gegebenen Formen F nach verschiedenen Kriterien in eine Reihe anordnete, die das Bilden eines endlichen Moduls aus ihnen deutlich machte; das erstemal in komplizierterer Weise speziell für die Invariantenformen, das zweitemal allgemein und einfach.

Auch für einen erweiterten Formenbegriff, nämlich für beliebige Grundformen mit mehreren, *unabhängig* voneinander transformierten Variabelnreihen, hat, im Anschluß an vorbereitende Arbeiten von Study (Erl. Ber. 19 (1887)) und von Gordan ((47), (50); s. auch (21)), Hilbert (l. c.) das Endlichkeitstheorem bewiesen.

Da das Formensystem von Grundformen einen algebraischen Funktionenkörper bildet, so lag es auch nahe, die ganze Endlichkeitsfrage unter den höheren Gesichtspunkt der Bestimmung der *ganzen algebraischen Funktionen* eines solchen Körpers und des dafür geltenden Kroneckerschen Satzes vom endlichen Fundamentalsystem zu rücken. Dies ist Hilbert (Math. Ann. 42 (1893)), aber unter Voraussetzung des Endlichkeitssatzes für Invarianten, gelungen, während ein letzter Schritt auch diese Voraussetzung auszuschließen hätte.

Durch solche Überlegungen allgemeinerer Art ist in dem Beweisverfahren über die Endlichkeit des Systems nach und nach die Symbolik zurückgetreten; nicht aber in der rechnenden Herstellung des Systems, da die Symbolik eben dem spezifischen Charakter der formalen Invarianten angepaßt ist. In dieser Beziehung haben wir noch auf einige Einzeluntersuchungen Gordans hinzuweisen.

Im II. Bande der „Vorlesungen“, Nr. 117, wird mittels der Reihenentwicklung bewiesen, daß *jede* Relation zwischen invarianten binären Formen durch Rechnen mit den symbolischen Identitäten allein erhalten, d. h. daß der verschwindende Ausdruck in eine Summe zerlegt werden kann, von der jedes Glied eine der Identitäten zum Faktor hat. Auch diese Betrachtung hat ihre Fortführung erfahren, zunächst durch Study*) für ternäre Formen, bei denen bereits eine Anzahl verschiedener Grundidentitäten auftreten.

*) Math. Ann. 30 und „Methoden zur Theorie der ternären Formen“, Leipzig, Teubner 1889.

Einen Fortschritt anderer Art, der von Bedeutung auch für den Begriff der Systemsbildung ist, hat Gordan schon 1871 in seiner Abhandlung über *Kombinanten* (21) gemacht. Es handelt sich um diejenigen invarianten Bildungen bezüglich eines Grundsystems von p n-ären Formen gleichen Grades, $f_1(x), \ldots, f_p(x)$, welche nicht nur bezüglich linearer Substitutionen der x, sondern auch für lineare Substitutionen der λ in $\Sigma\lambda_i f_i(x)$ invariant sind, ohne die λ zu enthalten. Der Satz Gordans ist: daß die Kombinanten schon für sich ein vollständiges System von solchen besitzen.

In der Tat wird eine Kombinante von $f_1, \ldots, f_p$ eine ganze Funktion der Invarianten einer Reihe von Linearformen, und damit weiter eine invariante Form einer bestimmten Grundkombinante, der Determinante

$$P(y) = \sum \pm f_1(y^{(1)}) \ldots f_p(y^{(p)})$$

mit p Reihen $y^{(i)}$ von Variabeln (für spezielle binäre Formen auch schon in (8) und (9) erhalten). Vermöge der Reihenentwicklungen folgt für binäre Formen sogar weiter, daß $P(y)$ sich durch eine endliche Anzahl von, nur von je einer Reihe x abhängender Grundkombinanten ersetzen läßt; wonach in diesem Falle die Endlichkeit ihres vollen Systems auch nach Gordan bewiesen ist.

In seinen „Vorlesungen", (Bd. II, S. 6) hat dann Gordan die Definition einer Kombinante Q der f_i noch durch $\sum \frac{\partial Q}{\partial a_k} a_k' = 0$ ersetzt, wo die a_k, a_k' die Koeffizienten je zweier der Formen f_i vorstellen. Diese Definition tritt an Stelle der früheren, wenn die Koeffizienten der f_i nicht voneinander unabhängig sind.

Kombinantenuntersuchungen sollten auch vorzugsweise den lange vorbereiteten Stoff*) für den III. Band der „Vorlesungen" bilden, der den ternären Formen gewidmet werden sollte. Auch war die Bearbeitung dieses Bandes erst seitens des verdienten Herausgebers der beiden ersten Bände, dann von anderer Seite, in Angriff genommen; aber beide Male wurde sie abgebrochen, mehr aus äußeren Gründen als wegen der inzwischen eingetretenen Fortschritte allgemeinerer Begriffsentwicklungen.

Wir haben durch Heranziehen der Systemsarbeiten Gordans auch nach 1874 schon weit über seine Gießener Zeit hinübergegriffen und kommen nun auf sie zurück.

In Gießen war Gordan mit Clebsch nicht nur durch engste Freundschaft und durch ununterbrochene gemeinsame wissenschaftliche Forschung

*) Eine Reihe hierher gehöriger Hefte befindet sich unter den hinterlassenen Manuskripten Gordans; diese sind der Universitätsbibliothek von Erlangen übergeben worden.

verbunden, sondern auch durch Mitarbeit an den Unterrichtszielen Clebschs. Dieser erkannte die unablässige Tätigkeit Gordans im Lehramt voll an und zog ihn zu den Seminarübungen heran. Die mathematische Ausbildung der Forststudierenden fiel ihm zum großen Teil zu. Insbesondere durch seine überaus lebhafte Art gewann er damals schon die Zuneigung der Studierenden, wie das auch späterhin immer der Fall war. Eine äußere Anerkennung erfolgte schon Ende 1865 durch Ernennung zum nichtetatsmäßigen außerordentlichen Professor, 1868 die Gewährung eines Gehalts, das 1872 aufgebessert wurde.

Im Januar 1869 vermählte sich Gordan mit Sophie Deurer, zu Heidelberg geboren als Tochter des dortigen Professors, nachmaligen Gießener Ordinarius des römischen Rechtes, Wilhelm Deurer. Aus der Ehe ist ein Sohn, Paul, hervorgegangen, jetzt höherer Beamter im Nahrungsmittelwesen in Danzig; und auch eines Enkelsohnes konnten sich die Großeltern erfreuen.

Der Weggang Clebschs im Herbst 1868 änderte nichts an den Beziehungen zwischen Beiden bis zu dem vier Jahre später erfolgten Tode des Ersteren. Aber Gordans Verhältnisse in Gießen fingen an unerquicklich zu werden. So kam ihm eine auf den 1. Oktober 1874 erfolgte Berufung an die Universität Erlangen gelegen, zunächst auf das neugegründete Extraordinariat, das er nach Wegberufung von Klein nach München, wohin auch Brill kam, schon am 1. April 1875 mit dem Ordinariat vertauschen konnte, während Noether Gordans Nachfolger in Erlangen wurde. Die Tradition der Clebschschule ging damit wesentlich auf Erlangen-München über.

In Erlangen fand Gordan bald Anregung zu neuer algebraischer Arbeit. Zunächst konnte er durch die im Winter 1874/75 daselbst erfolgte Berührung mit F. Lindemann, der mit der Bearbeitung von Clebschs Vorlesungen über Geometrie beschäftigt war, auf einige Kapitel dieses Werkes einwirken, wie bez. (38) schon S. 17 angegeben ist. Sodann bemühte er sich in glücklichster Weise um Hesses noch unerledigten Satz, daß eine Form von n Variabeln, deren Hessesche Determinante identisch verschwindet, sich linear in eine solche mit weniger Variabeln überführen lasse, d. h. daß die zwischen den n ersten Polaren der Form bestehende Relation $\pi(f_1, \ldots, f_n) = 0$ eine lineare sei. Durch Noether angeregt, der schon eine Reihe ganz verschiedener Beweisversuche angestellt hatte, schlug nun Gordan jene Relation selbst als Ausgangspunkt eines neuen Versuches vor und konnte so für den ternären Fall den Satz Hesses rechnerisch erschließen (28). In gemeinsamer schwieriger Untersuchung (29) ergaben sich dann für die aus Geraden zusammengesetzten Mannigfaltigkeiten Φ, welche, wie f, der Gleichung $\sum \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \pi}{\partial f_i} = 0$ genügen und von

$n-1$ Variabeln rational abhängen, genügend viele Struktureigenschaften, um für $n=3$ und 4 die Gültigkeit des Satzes unmittelbar erkennen zu lassen, für $n>4$ aber die Ungültigkeit. Auch konnte noch ein Formentyp, für $n=5$ der einzige existierende, aufgestellt werden, der Hesses Behauptung nicht entspricht.

Eine viel tiefere und nachhaltendere Bedeutung hat aber das Zusammenwirken mit F. Klein im Wintersemester 1874/75 und das nachfolgende häufige Zusammentreffen der beiden Forscher — besonders in Eichstätt: „mathesis Quercupolitana“ nach Gordans Ausdruck — gewonnen. Und zwar nach zwei Richtungen hin: einmal durch die immer ermutigende, in allen Schwierigkeiten noch Wege findende *Einwirkung* von seiten Gordans, wie sie aus seiner durchdringenden Auffassung und seinem vorwärts treibenden Wesen hervorging; sodann durch seine rechnerisch ausführende *Mitwirkung* an der algebraischen Seite der von Klein damals und eine Reihe von Jahren hindurch behandelten Probleme aus der Gleichungs- und Funktionentheorie. Die erstere Richtung entzieht sich, in ihren unbestimmten Linien, der Berichterstattung, so eingreifend sie gelegentlich war. Wir wenden uns daher direkt den hierher gehörigen Arbeiten Gordans aus der *Gleichungstheorie* zu, die nach und nach die allgemeinen Gleichungen 5^{ten} Grades, die Gleichungen 7^{ten} Grades mit Gruppe G_{168}, endlich die allgemeinen Gleichungen 6^{ten} Grades betreffen, 1877 einsetzen und bis zu seiner letzten Publikation von 1910 heraufreichen.

Indem Klein im Juni 1874 alle endlichen Gruppen von reellen Bewegungen des Raumes untersuchte, welche eine Kugel in sich überführen und ihren Fixpunkt im Innern derselben haben, indem er also die regulären Körper, insbesondere das Ikosaeder studierte, gelangte er durch Auftragen der komplexen Variabeln η auf der Kugel zu allen endlichen diskontinuierlichen Gruppen von linearen Transformationen einer Veränderlichen $\eta=\frac{\eta_1}{\eta_2}$, und zu den binären Formen von η_1, η_2, welche solche Gruppen zulassen. Zu jeder der 5 so erhaltenen Gruppen erschloß er aber auch das ganze zugehörige Formensystem von 3 Formen, insbesondere ein Büschel von binären Formen N^{ten} Grades $F(\eta)-X\cdot\Phi(\eta)$, dadurch daß er jeden Punkt η der Kugel allen N Transformationen der Gruppe unterwarf (X der Büschelparameter). So ergab sich für die Gruppe G_{60} von 60 Transformationen, welche den geraden Vertauschungen von 5 Größen isomorph ist, die Schar $H^3(\eta)-X\cdot f^5(\eta)$, wobei $f(\eta)$ die „Ikosaederform“ 12^{ten} Grades*), $H(\eta)$ deren Hessesche Form bedeutet, und eine charakteristische Eigenschaft für f: $(ff)^4=0$. Auf Formen dieser Art war früher

*) In kanonischer Form ist

$$f(\eta_1,\eta_2)=\eta_1\eta_2(\eta_1^{10}+11\eta_1^5\eta_2^5-\eta_2^{10}).$$

schon Schwarz, nur inhomogen, und unabhängig von Klein (1875) Fuchs bei Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen 2^{ter} Ordnung, die algebraische Integrale besitzen, gestoßen, die Fuchsschen „Primformen".

Gordan nahm nun 1877 (in (32), (33)) beide Fragerichtungen auf, um sie rein algebraisch zu behandeln. Die nach den endlichen binären Gruppen führt er auf die Lösung einer Kreisteilungsgleichung

$$1 + \cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 + \cos\varphi_3 = 0$$

durch rationale Vielfache von π zurück, was ihn zu einer kanonischen Darstellung aller 5 Gruppen führt. In vereinfachtem Gedankengang, der jene Gleichung und auch eine von Gordan benutzte Symbolik vermeidet, hat dann H. Weber dieses Resultat in seinem Lehrbuch der Algebra (II, Abschn. VII) wieder entwickelt.

In der zweiten Richtung identifiziert Gordan die existierenden unter den Fuchsschen Primformen mit den Kleinschen Formen, indem er die allgemeinen Systemsuntersuchungen seiner Programmschrift (IV) anwendet.

Bald ging das Interesse vom Ikosaeder und seiner Gruppe auf die damit zusammenhängende *Gleichungstheorie* über. Als Resolventen der Ikosaedergleichung 60^{ten} Grades $H^3(\eta) - X \cdot f^5(\eta) = 0$ traten bei Klein*) verschiedene Gleichungen 5^{ten} und 6^{ten} Grades auf, dieselben, welche Hermite, Kronecker und Brioschi zur Auflösung der Gleichung 5^{ten} Grades mittels elliptischer Modulfunktionen geführt hatten; für Klein aber definierte die Ikosaedergleichung an sich die sog. Ikosaederirrationalität $\eta(X)$, die sich auch durch eine hypergeometrische Reihe ausdrücken ließ. Da deutete Gordan, dessen Interesse für die Gleichungen 5^{ten} Grades schon in der Berliner Zeit von 1861/62 erwacht war, auf das umgekehrte Problem hin, die Ikosaederirrationalität *zur Auflösung der Gleichungen 5^{ten} Grades*, mit isomorpher Gruppe G_{60}, zu verwenden. So ergab sich für Klein die Aufgabe, vom Standpunkt der Ikosaederfragen aus über die vielseitigen algebraischen Formen- und Gleichungsbeziehungen, die nach und nach bezüglich der Gleichungen 5^{ten} Grades entstanden waren, auch abgesehen von den transzendenten Lösungen, eine Übersicht und für sie eine einheitliche Ableitung zu gewinnen. Und dies gelang ihm begrifflich vollständig, rechnerisch insoweit, als er die Formeln, welche den Übergang zu den gesuchten Resolventen leisten, insbesondere die Darstellung ihrer Wurzeln durch die η, teils geometrisch-konstruktiv, teils durch Rechnung mit symmetrischen Funktionen bilden konnte**).

Auch hierbei griff Gordan ein, und zwar mit Systematisierung der Rechnungen durch Formbildungsprozesse, insbesondere in seinem Auf-

*) Math. Ann. 9 (1875).

**) Math. Ann. 12 (1877); Vorlesungen über das Ikosaëder, Teubner 1884.

satz (35) vom Januar 1878 über Gleichungen 5^{ten} Grades. Klein hatte die „Hauptgleichung" 5^{ten} Grades $F(y)=0$ — für welche nämlich das 2^{te} und das 3^{te} Glied fehlen, also $\Sigma y = 0$, $\Sigma y^2 = 0$ sind — dadurch auf die Ikosaedergleichung reduziert, daß er statt der y_i die 4 in den y_i linearen und homogenen Lagrangeschen Ausdrücke p_1, p_2, p_3, p_4 einführt, welche

$$\Sigma y^2 = p_1 p_4 + p_2 p_3$$

machen, und die Parameter

$$\eta = -\frac{p_1}{p_2} = \frac{p_3}{p_4}, \qquad \zeta = \frac{p_1}{p_3} = -\frac{p_2}{p_4}$$

der beiden Erzeugendenscharen der Fläche 2^{ter} Ordnung $p_1 p_4 + p_2 p_3 = 0$ ins Auge faßte. Dann ergibt sich ζ aus η durch eine ungerade Permutation der y_i; die Gruppe G_{60} der 60 geraden Vertauschungen der y_i aber liefert eine solche Γ_{60} von 60 linear gebrochenen Transformationen von η, so daß η einer Ikosaedergleichung der genannten Art, mit einem Parameter X genügt, der eine rationale Funktion der Koeffizienten der Hauptgleichung und der Quadratwurzel aus ihrer Diskriminante ist. Ebenso genügt ζ einer solchen Gleichung, mit einem anderen Parameter, welcher aus jenem durch Vorzeichenänderung der Quadratwurzel der Diskriminante hervorgeht. η und ζ bestimmen zusammen den Punkt y_i als Schnittpunkt der beiden Erzeugenden; es muß sich also ζ durch η und die Koeffizienten der Hauptgleichung rational darstellen lassen. Diese Darstellung hat Klein l. c. durch umständliche Rechnungen mit symmetrischen Funktionen geleistet.

Der Fortschritt Gordans in Math. Ann. 13 besteht nun darin, daß er auch hier Prozesse der Invariantentheorie zur Geltung brachte. Indem er

$$p_1 = \eta_1 \zeta_1, \quad p_2 = -\eta_2 \zeta_1, \quad p_3 = \eta_1 \zeta_2, \quad p_4 = \eta_2 \zeta_2$$

setzt, verwandelt er die Koeffizienten der Hauptgleichung in *doppelt-binäre* Formen in η_1, η_2 und ζ_1, ζ_2. Der Gedanke ist nun, die Formen als solche zweier Variabelnreihen zu behandeln, die *unabhängig voneinander* linearen Transformationen unterworfen werden, und daraus das System derjenigen von beiden Reihen abhängigen Formen zu bestimmen, welche durch gleichzeitige Anwendung der Ikosaedertransformationen der η_1, η_2, und der dazu kontragredienten der ζ_1, ζ_2 unverändert bleiben. Als eine solche Grundform ermittelte er eine einfache Form der Grade 3; 3, nämlich

$$\eta_1^3 \zeta_1^2 \zeta_2 + \eta_1^2 \eta_2 \zeta_2^3 + \eta_1 \eta_2^2 \zeta_1^3 - \eta_2^3 \zeta_1 \zeta_2^2,$$

im wesentlichen identisch mit Σy^3; indem er aber das ganze System bildete, ergab sich ihm insbesondere ein ganzes Büschel solcher doppelt-binären Formen, welche in der einen Variabelnreihe ζ_1, ζ_2 linear sind und daher, gleich Null gesetzt, den verlangten Übergang von η zu ζ und somit auch die Bestimmung der Wurzeln y_i durch die η, ζ, wirklich leisten.

In ihrer doppelten Bedeutung: für die Formentheorie an sich, sodann spezieller für die Ikosaeder- und Gleichungstheorie, steht diese Arbeit (35) mit an der Spitze der Leistungen Gordans*).

Während der Übergang von der Hauptgleichung 5ten Grades zu der einparametrigen Ikosaedergleichung auf rationalem Wege bewirkt wird, tritt bei der Überführung der allgemeinen Gleichung mit Gruppe G_{60} in die Hauptgleichung bekanntlich eine Quadratwurzel auf. Diese Quadratwurzel ist eine sog. *„akzessorische“ Irrationalität,* insofern sie keine rationale Funktion der Wurzeln der Gleichung 5ten Grades ist. Mit ihr haben sich Klein und Gordan wiederholt beschäftigt. Daß eine solche Irrationalität zur Zurückführung der Gleichung auf eine Resolvente mit nur *einem* Parameter notwendig sei, hat Kronecker in J. f. Math. 59 ausgesprochen; der erste Beweis dieses Satzes ist aber von Klein geliefert worden, für dessen Theorie der Kroneckersche Satz einen wichtigen Teil bildet. Der Beweis**), auf dem Umstand beruhend, daß alle Ikosaederformen gerade sind, war noch kompliziert; und seine inneren Gedanken wurden erst im Verkehr mit Gordan ans Licht gebracht und dann in Math. Ann. 12, sowie im Ikosaederbuch, noch in geometrischer Einkleidung, wiedergegeben. Dem unten zitierten Berichte Kleins***) gemäß sind es die folgenden Momente:

a) Anwendung des bekannten Lürothschen Satzes (Math. Ann. 9) in der Form: Wenn eine rationale Funktion φ der Veränderlichen $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ bei Zugrundelegung der alternierenden Gruppe der x einer 1-parametrigen Resolvente genügt, so lassen sich die Wurzeln derselben, $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ rational durch einen, in den φ_k rationalen Parameter η ausdrücken. Diese Funktion η der $x_0, \ldots, x_{n-1}$ substituiert sich bei den $\frac{n!}{2}$ Vertauschungen der Gruppe linear gebrochen. Damit sind, bei der Kenntnis aller endlichen Gruppen einer Veränderlichen, schon die Fälle $n > 5$ ausgeschlossen.

b) Eine Gruppe linear-gebrochener Substitutionen für $\eta = \frac{\psi(x)}{\chi(x)}$ geht bei frei veränderlichen $x_0, \ldots, x_{n-1}$ von selbst in eine holoedrisch-isomorphe Gruppe von homogenen binären Substitutionen der ψ, χ über.

c) Für $n = 5$ gibt es aber keine binäre Gruppe von 60 Substitutionen. Aus der Ikosaedergruppe Γ_{60} geht nämlich durch das Homogenisieren eine Gruppe von doppelt so hoher Ordnung, 120, hervor. Diese besitzt aber

*) Nur hält sich der Schlußteil, der auf Hermites Lösung durch elliptische Funktionen eingeht, wie diese in Jacobischer Tradition an die irrationalen Moduln, nicht an die rationalen Invarianten.

**) Sitzungsber. der Erlanger Phys.-Med. Ges. H. 9, Sitzung vom 15. Jan. 1877.

***) „Über die Auflösung der allgemeinen Gleichungen fünften und sechsten Grades“ vom 22. März 1905, J. f. Math. 129; abgedruckt in Math. Ann. 61.

keine Untergruppe von 60, weil schon die Achtergruppe, welche entsprechend aus der in Γ_{60} enthaltenen Vierergruppe hervorgeht, keine Vierergruppe als Untergruppe besitzt.

Demgegenüber gruppiert sich der Beweis des Kroneckerschen Satzes durch Gordan in (46)*) so:

a') ist, nach Weglassung des Schlußsatzes von a), identisch mit a); nur noch unter ausdrücklicher Begründung der auch in a) benutzten Verallgemeinerung des Lürothschen Satzes von einer Variabeln x_0 auf n Variable. Schluß auf $n > 5$ ist nicht gezogen, weil die Kenntnis aller endlichen binären Gruppen nicht vorausgesetzt werden sollte.

b') Wiederum identisch mit b), nur ausgesprochen für die alternierende Gruppe G_{12} von vier Veränderlichen (Tetraedergruppe).

c') An Stelle der Gruppenbetrachtung c) wird rechnerisch aus b') erschlossen, daß eine Funktion $\eta(x_0, \ldots, x_3)$, die sich bei der Tetraedergruppe linear-gebrochen substituiert, bei der in ihr enthaltenen Vierergruppe ungeändert bleibt.

d') Da sich nun für $n > 4$ jede alternierende Gruppe aus Vierergruppen zusammensetzt, so bleibt η überhaupt bei dieser Gruppe unverändert; φ ist daher nichts weiter als eine alternierende Funktion von $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, also zur Resolventenbildung unbrauchbar.

Auch zum Übergang von der allgemeinen Gleichung 5^{ten} Grades mit alternierender Gruppe zu der 1-parametrigen Brioschischen Gleichungsform, bei der das 2^{te} und 4^{te} Glied fehlen, gebraucht man nur die eine akzessorische Quadratwurzel. Erst wenn man weiter durch eine Substitution der Art $u = \varrho v$ den Parameter ganz auf das letzte Glied werfen will, tritt in ϱ noch eine weitere akzessorische Quadratwurzel auf: $\sqrt{f(\eta)}$ nach Klein**), also nach Gordan (35)***) $\sqrt{\gamma_1} = \sqrt{f(\eta_1, \eta_2)}$, wo γ_1 die Diskriminante nach ζ_1, ζ_2 der Form $\tau(\eta_1, \eta_2; \zeta_1, \zeta_2)$, von den Graden 6; 2 bedeutet, die selbst in ζ_1, ζ_2 die Hessesche Form der in (35) zu grunde gelegten Σy^3 von den Graden 3; 3 ist.

Nun ist aber dieser Übergang schon 1878 von L. Kiepert†) durch bloße Tschirnhausen-Transformation in sehr einfacher rechnerischer Weise ausgeführt worden, die Gordans Arbeit (35) benutzt, nicht aber die eingehende letzte Quadratwurzel deutet. Wohl unabhängig von dieser Arbeit, vielmehr angeregt durch sein kurz vorher bei den Tripelgleichungen 7^{ten}

*) Wiedergegeben in H. Webers Lehrbuch der Algebra II und in E. Nettos Vorlesungen über Algebra II.

**) Vgl. etwa Vorlesungen über das Ikosaeder, Formel (27), S. 105.

***) Vgl. (35) Tabelle S. 386.

†) In § 8 seiner Abhandlung, J. f. Math. 87.

Grades eingeschlagenes analoges Verfahren*), hat sich Gordan um Mitte der achtziger Jahre genau dasselbe Ziel gesetzt ((43) und (45)), in der Absicht, unter äußerlicher Vermeidung der Invariantentheorie einen einfach zugänglichen Weg zur Hauptgleichung und ihrer rechnerischen Lösung aufzustellen.

Zuerst benutzt er in (43) direkt die beiden linearen Faktoren der Hesseschen Form τ zur linearen Transformation der in ζ_1, ζ_2 binären Formen Σy^3, Σy^5 3^{ten} bzw. 5^{ten} Grades. Um aber den Gang und den Sinn von (43) und vor allem von (45) zu verstehen, wird es erforderlich, zunächst auf Kleins Gedankengang näher einzugehen.

Vom Ikosaeder ausgehend gelangt Klein zu einem Formenbüschel $y = W_1(\eta) + \lambda W_2(\eta)$ derart, daß y für jeden Wert von λ einer Hauptgleichung 5^{ten} Grades, nun mit 2 Parametern, genügt; dann wird $t = \frac{W_2(\eta)}{W_1(\eta)}$ Wurzel einer 1-parametrigen Brioschischen Gleichung. Und da sich η mit Hilfe einer akzessorischen Quadratwurzel rational durch die Wurzeln x einer allgemeinen Gleichung $F(x) = 0$, vom 5^{ten} Grade und der alternierenden Gruppe, ausdrückt, so hat man eine Tschirnhausen-Transformation zwischen t und x.

Gordan führt in (45) diesen Gang, im wesentlichen in umgekehrter Richtung, rechnerisch aus. Zu $F(x) = 0$ wird direkt eine Tschirnhausen-Transformation

$$y = \varphi(x) + \lambda \psi(x)$$

daraus definiert, daß y für jeden Wert von λ einer Hauptgleichung genügen soll, wobei zur Auflösung der Relationen für die Koeffizienten von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ nur die eine akzessorische Quadratwurzel nötig wird. Auch dann würde $t = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ zu einer 1-parametrigen Brioschischen Gleichung führen, Gordan macht aber hier einen Umweg. Zwischen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ besteht nämlich eine quadratische nicht homogene Relation $\Phi(\varphi, \psi) = 0$, welche durch $\varphi = 0$, $\psi = 0$ befriedigt wird; statt Benutzung dieser Stelle wird erst durch eine weitere Quadratwurzel eine weitere Stelle $\varphi = \varphi_0$, $\psi = \psi_0$ von $\Phi = 0$ gesucht und t' mittels $t' = \frac{\psi - \psi_0}{\varphi - \varphi_0}$ als linear- gebrochene Funktion von t eingeführt. So wird also die erst am Schlusse nötige Beiziehung der zweiten Irrationalität in der ganzen Rechnung mitgeführt. Zum Schluß laufen die Formeln für die Überführung der Hauptgleichung in die Brioschische Form ganz auf die kurzen, von Kiepert gegebenen hinaus.

Wie sehr die Rechnung von (45) dem allgemeineren Gebrauch entgegenkommt, erhellt aus ihrer Aufnahme — nur mit etwas weiterem

*) Vgl. unten S. 30.

Hinausschieben der zweiten Hilfswurzel — in H. Webers Lehrbuch der Algebra, Bd. I; aber auch hier ohne Erklärung ihres Sinnes. —

Wir haben die gegenseitigen Beziehungen der Arbeiten von Klein und Gordan, insbesondere auch die betreffs der akzessorischen Irrationalität und die, welche den elementarisierenden Darstellungen von Gordan zu Grunde liegen, so ausführlich erörtert, nicht nur, weil überall das Verhältnis der beiden Forscher zueinander zum Ausdruck kommt, sondern vor allem deshalb, weil diese Untersuchungen der achtziger Jahre eine eigentümliche Seite der Arbeitsmethode Gordans an deutlichen Beispielen beleuchten. Gordan pflegte einen Gedankenhöhenweg in kleine Abschnitte zu teilen, jeden einzeln rechnerisch nach allen Seiten weit zu verfolgen und möglichst ebene Durchstiche zu schlagen, um so vielleicht zuletzt zu einem geradesten Weg zu gelangen. Die Darstellung, die als synthetische noch den Weg rückwärts zu durchlaufen hatte, konnte dann überraschend einfach erscheinen.

Der für die Gleichungen 5^{ten} Grades geschilderte Vorgang wiederholte sich in der fruchtbaren Arbeitszeit von 1878—84 für ein um eine Stufe höheres Gebiet: für die *Gleichungen* 7^{ten} *Grades mit Gruppe* G_{168} ((36) bis (41)).

F. Klein hatte auch für die Modular- und Multiplikatorgleichungen der Transformation 7^{ter} Ordnung der elliptischen Funktionen und deren Resolventen eine Beziehung zur Invariantentheorie der linearen Transformationen hergestellt, um von hier aus einen vollen Überblick über jenes algebraische Gebiet zu erhalten. Von der Galoisschen Resolvente ausgehend hatte er 1878 auf funktionentheoretischem Wege*) für die zugehörige Gruppe G_{168} von 168 Substitutionen eine isomorphe Gruppe Γ_{168} von *ternären* linearen Transformationen konstruiert. Dies war also die isomorphe lineare Gruppe von möglichst wenigen Variabeln, wie sie Klein schon in Math. Ann. 4 prinzipiell forderte. Die hier auftretende Gruppe Γ_{168}, ausgeübt auf drei homogene Größen x_1, x_2, x_3, führt einen Ausdruck 4^{ten} Grades

$$f(x) = x_1{}^3 x_2 + x_2{}^3 x_3 + x_3{}^3 x_1$$

in sich über: $f = 0$ ist eben die Normalkurve 4^{ten} Grades für die Gleichung vom Geschlecht 3 zwischen der absoluten Invariante J des elliptischen Integrals und der Wurzel η der Galoisschen Resolvente der Modulargleichung. Klein erschloß wieder für diese Kurve aus der bezeichneten Gruppe Γ_{168} das ganze Formensystem ihrer Kovarianten, insbesondere das Kurven-

*) Sitzungsber. der Erlanger Sozietät, H. 10 (1878); Math. Ann. 14 (1878) und 15 (1879).

büschel 42^{ten} Grades $\Psi^3 - J \cdot \Delta^7 = 0$, das aus $f = 0$ die Gruppen von je 168 Punkten ausschneidet. Diese beiden Gleichungen zusammengenommen stellen für ihn die Grundirrationalität in J dar; und auf diese wird, mit Hilfe einer „akzessorischen" Gleichung 4^{ten} Grades (Schneiden von $f = 0$ mit einer zu einem Punkte x kovarianten Geraden) die Gleichung für diejenigen 168 Punkte zurückgeführt, die aus *irgend* einem Punkte x der Ebene $f = 0$ mittels der Γ_{168} hervorgehen.

Weiterhin leistete Klein auch die, schon 1858 von Kronecker vermutete, Zurückführung aller Gleichungen mit der Gruppe G_{168} auf die letztgenannten Modulargleichungen. Es gelingt unter Zugrundelegung eines ganz allgemeinen Prinzips*) für irgend eine Gleichung $\Phi(z) = 0$, mit einer Gruppe G_N von N Substitutionen, welche einer Gruppe $\Gamma_{\frac{N}{\nu}}$ von $\frac{N}{\nu}$ *linearen* Transformationen von μ Variabeln $x_1, \ldots, x_\mu$ isomorph ist, Systeme von μ Funktionen $X_1, \ldots, X_\mu$ der Wurzeln von $\Phi(z) = 0$ zu bilden, die sich wie die $x_1, \ldots, x_\mu$ linear transformieren, und damit die Lösung von $\Phi(z) = 0$ auf ein Normalproblem zu reduzieren. Und für die Gleichungen 7^{ten} Grades mit der Gruppe G_{168} war inzwischen die sie charakterisierende „Tripel"-Eigenschaft erkannt worden**): daß die 7 Wurzeln sich zu 7 Tripeln ordnen, die ihrerseits wieder einer zweiten Tripelgleichung genügen, deren Tripel den 7 ersteren Wurzeln einzeln zugeordnet sind.

Gordan nahm alle hier vorliegenden, konstruktiv und an der kanonischen Gestalt von $f(x)$ gelösten, Gleichungs- und Formenprobleme auf, um die notwendigen Bildungen auch wirklich und rein algebraisch durchzuführen. Und zwar holt er zunächst weit aus mit systematischen invariantentheoretischen Untersuchungen der allgemeinen Gleichungsformen, weiter als es die Gleichungstheorie verlangte, und ohne Gruppenbetrachtungen, aber mit Entwicklungen, die für die Formentheorie bedeutsam sind.

Die erste dieser Arbeiten, (36) vom Aug. 1880, haben wir schon oben (S. 17) erwähnt: sie berechnet ein volles System von 54 Bildungen für eine biquadratische ternäre Form $F(y) = a_y^4$, für welche, wie für die Kleinsche Form $f(x)$, die Zwischenform $F_\varphi^2 - \frac{i}{8} v_y^2$ identisch verschwindet $\left[\varphi = \frac{1}{2}(abv)^4;\ i = \frac{4}{3} F_\varphi^4\right]$. So im System von $F(y)$ orientiert, stellt sich gleich danach Arbeit (37) einmal die Aufgabe, durch irrationale typische Darstellung, nämlich unter Zugrundelegung eines zu $F(y)$ kovarianten

*) Math. Ann. 15. Daß in jedem Falle ein nicht identisch verschwindendes System $X_1, \ldots, X_\mu$ gebildet werden kann, wird von Burkhardt Math. Ann. 41 hinzugefügt.

**) Noether, Jan. 1879, Math. Ann. 15.

Koordinatendreiecks, von dem ein Eckpunkt in einem Wendepunkt von $F(y) = 0$ angenommen ist, $F(y)$ in die bezeichnete kanonische Gestalt von $f(x)$ zu transformieren. Damit ist dann jene Kovariantenbedingung als die Normalform charakterisierend erwiesen. Zugleich gelingt es Gordan (§ 17), die Transformationskoeffizienten, mit Determinante 1, selbst auf einfache Weise zu berechnen, wenn man nur für $F(y) = 0$ die Werte $\psi(y)$, $\Delta(y)$ und die Normalauflösung x_1, x_2, x_3 kennt. Aber vor allem wird für die Kleinsche Problemstellung, aus gegebenen *beliebigen* Werten von $F(y)$, $\psi(y)$, $\Delta(y)$ die Punktgruppe y zu bestimmen, das algebraische Substrat gegeben, indem von Gordan, von einem beliebigen Punkt y ausgehend, eine rationale typische Darstellung mittels linearer Zwischenformen geliefert wird, welche für die Zurückführung auf das spezielle Problem die Endformeln herstellt.

Das Problem wird aber zwei Jahre später in (39) von Gordan bedeutend verallgemeinert, indem er zur Kurve 4^{ten} Grades $F(y) = 0$ statt des beliebigen Punktes der y-Ebene einen Linienkegelschnitt $K(v)$ dieser Ebene hinzunimmt und die Aufgabe stellt, aus den numerisch gegebenen Werten der Fundamentalinvarianten von $F(y)$, $K(v)$ die Koeffizienten von $K(v)$ zu bestimmen, dadurch, daß das (homogen) 6-parametrige Problem auf das frühere (homogen) 3-parametrige in kovarianter Weise zurückzuführen ist. Auch hierbei greift Gordan wieder zu ausgedehnten Entwicklungen im Gebiete der rationalen typischen Formendarstellungen, zunächst in einem vorbereitenden Aufsatze (38), der die Darstellungen an Kegelschnittbüschel und linearer Form, an Kegelschnittschar, und, als Anwendung, an $F(y)$, $K(v)$ mittels einer dazu kovarianten linearen Form durchführt. Die weitere Behandlung der letzteren Darstellung führt in (39) zum vollen System von 12 Fundamentalinvarianten für $F(y)$, $K(v)$, die sich rational auf nur 7 reduzieren, zwischen denen noch eine algebraische Relation stattfindet. Die weitere irrationale Zurückführung auf die kanonische Form $f(x)$ von $F(y)$ geschieht nach (37).

Bis dahin bewegt sich Gordan ausschließlich im Gebiet der linearen Invariantentheorie, ohne dabei die Gruppe Γ_{168} von linearen Transformationen, welche die Kurve 4^{ter} Ordnung in sich überführen, irgendwie zu benutzen: er behandelt die spezielle Kurve als von vornherein durch ihre Kovarianteneigenschaft gegeben. Nun erst in (40) tritt die Gleichungstheorie selbst ein, mit dem Ziel aller dieser Entwicklungen, irgend eine Gleichung 7^{ten} Grades $\Phi(z) = 0$ mit der Substitutionengruppe G_{168} auf das Kleinsche Problem der x_1, x_2, x_3, für welches $f(x) = 0$, *explizit* zu reduzieren. Der Zusammenhang dieses Gleichungssystems mit dem Invariantenproblem von (39) geht durch die Lagrangeschen Ausdrücke von $\Phi(z) = 0$, mit $\Sigma z_i = 0$, hindurch: es sind das 6 lineare Ausdrücke ϱ_{kl} der 7 Wurzeln

z_i, welche sich bei der Gruppe G_{168} der z_i gerade wie die Koeffizienten ϱ_{kl} eines Kegelschnitts

$$k(u) \equiv \Sigma \varrho_{kl} u_k u_l$$

linear substituieren, wenn die u_1, u_2, u_3 der kontragredienten Gruppe der linearen Gruppe Γ_{168} der Variabeln x_1, x_2, x_3 unterworfen werden. Dieser Kegelschnitt wird also der Normalkurve adjungiert. In der Behandlung der Gleichung 7^{ten} Grades selbst werden nicht, wie sonst, die Koeffizienten und *eine* Affektfunktion als die gegebenen Größen angenommen, sondern es wird, algebraisch weit darüber hinausgehend, aus dem Tripelcharakter, durch welchen der Gleichung $\Phi(z) = 0$ eine zweite solche $\Phi'(z') = 0$ linear und reziprok zugeordnet wird, in den 7 niedrigsten Potenzsummen der Wurzeln von $\Phi(z) = 0$, bzw. von $\Phi'(z') = 0$, eine volle Basis für die Affektfunktionen, und zugleich ein System unabhängiger Parameter, ermittelt und in den Invarianten des x-Problems umkehrbar eindeutig ausgedrückt. Die linearen Funktionen z_i, z_i' der ϱ_{kl} aber erscheinen in dem x-Problem als die zweiten Überschiebungen der Kegelschnitte $\Sigma \varrho_{kl} u_k u_l$ über zwei durch Klein bekannte spezielle, $f(x) = 0$ zugeordnete 7-Systeme von Kegelschnitten. So ist denn die Lösung der Tripelgleichung auf das Problem von (39) reduziert.

Daß die Untersuchungen (36) bis (40) für die Behandlung der Tripelgleichungen als solcher Umwege vorstellen; daß sie vielmehr, so wie sie vorliegen, ihre Bedeutung vorzugsweise für die Formentheorie haben, in der sie sich durch schwer zugängliches Gebiet bewegen, ist von Gordan selbst ausgesprochen (40): er erklärt es aus seiner individuellen Vorliebe für ganz allgemeine formenbildende Prozesse. Und hier kommt nun jenes Verfahren des Abebnens zur Erscheinung, das zuletzt nur noch elementare Schritte fordert, aber auch (ibid.) „jede Spur von dem Wege, auf welchem die Resultate gewonnen wurden, verwischen“ will, ohne Rücksicht darauf, daß das Verständnis des Ganges darunter leiden muß. Gordan greift in (41) die beiden zugeordneten Tripelgleichungen $\Phi(z) = 0$, $\Phi'(z') = 0$, mit den linearen Relationen zwischen ihren Wurzeln, unmittelbar an, indem er, mit Rechnungen nach Art der auf symmetrische Funktionen bezüglichen, das volle System der Affektfunktionen sukzessive herstellt, hierdurch für die beiden Tripelgleichungen Kleins 2-parametrige Normalformen wiederfindet und endlich die Überführung in diese Normalformen durch explizite Tschirnhausen-Transformation, auch wieder in mehreren Schritten, bewirkt. Die Umkehrung dieser Transformation wird noch nicht durchgeführt.

Ein so großzügiges Werk diese ganze Hexalogie von Arbeiten Gordans über die Tripelgleichungen 7^{ten} Grades vorstellt, so greift sie doch über die Gleichungsfragen weit hinaus, und man kann nicht umhin, zu wünschen, daß die orientierenden Ideen und die für die Gleichungen selbst wesentlichen Resultate in einer übersichtlichen Darstellung neu zusammengefaßt würden, welche die völlig algorithmische Art: die Formeltabellen und die zu ihnen führenden symbolischen Rechnungen und die Rechnungen mit Affektfunktionen, möglichst vermeidet.

Auf die Altersarbeiten Gordans über die *Gleichungen* 6^{ten} *Grades* (81) und (84) brauchen wir nur kurz einzugehen, einmal wegen der Analogie zu den Vorgängen bei den Gleichungen 5^{ten} und 7^{ten} Grades, sodann weil sich über die Vorarbeiten der o. g. Bericht von Klein*) verbreitet.

Wiederum beziehen sich die Untersuchungen auf eine lineare ternäre Gruppe; diesmal auf eine Γ_{360} von 360 ebenen Kollineationen, entdeckt durch G. Valentiner 1889, in ihrem Zusammhang mit den Gleichungen 6^{ten} Grades erkannt und in ihrer Gruppen- und Formentheorie erforscht durch A. Wiman 1895**). Die holoedrisch-isomorphe Beziehung der Γ_{360} zu den G_{360} der geraden Vertauschungen von 6 Größen ergab sich hier durch die Herstellung zweier Systeme Σ, Σ' von je 6 Kegelschnitten K_h, bzw. K_h', deren je 6 Elemente durch die Γ_{360} sich untereinander vertauschen: als involutorische Sextupel, deren paarweise genommene Invarianten verschwinden, waren sie schon früher bei F. Gerbaldi aufgetreten, der dann aber auch die Formen- und Resolvententheorie später noch weiter entwickelt hat***). In dem einfachen Formensystem ist diesmal die niedrigste Form eine ternäre Form $f(x_1, x_2, x_3)$ vom 6^{ten} Grade. Neben die Gruppe Γ_{360} tritt durch Homogenmachen eine Gruppe $\Gamma'_{3\cdot 360}$, welche der gegebenen Gruppe 3-stufig isomorph wird und keine ausgezeichnete Untergruppe Γ'_{360} enthält.

Und wiederum ein der Γ_{360} zugehöriges 2-parametriges Gleichungsproblem, das „Valentiner"-, richtiger wohl „Valentiner-Wiman"-Problem: aus zwei gegebenen Verhältnissen v, w der Kovarianten von $f(x_1, x_2, x_3)$, 0^{ter} Dimension in den x_1, x_2, x_3, die $x_1 : x_2 : x_3$ zu berechnen. Die transzendente Lösung dieses Problemes ist es, in die Gordan in (81) eingreift.

L. Lachtin hatte nämlich 1902†) als Differentialresolvente desselben, analog der hypergeometrischen Gleichung für das Ikosaederproblem, ein System von 3 linearen partiellen Differentialgleichungen 2^{ter} Ordnung für eine von v, w abhängige Funktion aufgestellt, welches drei zu x_1, x_2, x_3

---

*) J. f. Math. 129 und Math. Ann. 61. S. auch Fricke-Klein, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, Bd. II, Anhang (1912).

**) Math. Ann. 47.

***) Ib. 50 (1897) u. Rend. Circ. Mat. Palermo Bde 12—16 (1898—1902). Weitere Beiträge zur Resolvententheorie von Fricke in dem eben zit. „Anhang".

†) Math. Ann. 56.

proportionale Größen als unabhängige Lösungen besitzt; er hatte aber die auftretenden numerischen Koeffizienten noch unberechnet gelassen. Diese Rechnung gelingt Gordan, indem er bei der invariantentheoretischen Aufstellung des Systems aus der kanonischen Form von $f(x) = \Sigma K_h^3$ nicht nur die schon bekannten Kovarianten, sondern auch die Zwischenformen von $f(x)$ benutzt.

Nun erhebt sich aber die Frage nach dem Übergang von der *allgemeinen* Gleichung 6^{ten} Grades $F(z) = 0$, mit der alternierenden Gruppe G_{360}, auf das Valentiner-Wiman-Problem. Hier war F. Klein vorangegangen*), indem er die Möglichkeit zeigte, auf rationalem Wege eine Form $\Omega(z_h;\, x_i)$ zu bilden, 3^{ter} Dimension in x_1, x_2, x_3 und rational in den Wurzeln z_h von $F(z) = 0$, welche unverändert bleibt, wenn man gleichzeitig auf die x_i die homogenen Substitutionen der $\Gamma'_{3\cdot 360}$, und auf die z_h je die entsprechenden Vertauschungen der G_{360} ausübt. Zur Bestimmung der x_i selbst wird dann nur noch eine akzessorische Gleichung nötig, die der Wendepunktbestimmung von $\Omega = 0$ entspricht und daher durch Wurzelziehen gewonnen werden kann.

In diese wichtige Untersuchungsrichtung greift Gordan von 1904 an in zweierlei Weise ein. Zunächst ergab sich aus seinem Verkehr mit Klein ein abgekürztes Verfahren zur Bildung der Funktion Ω, indem die 6 Kegelschnitte des oben genannten Systems Σ herangezogen wurden; und ebenso konnte die Herstellung der akzessorischen Irrationalität vereinfacht werden. Vor allem aber wurde dann von Gordan der ganze Übergang von $F(z) = 0$ zum ebenen Problem in (84) vereinfacht: an Stelle der Form Ω wird von ihm eine bei den linearen Substitutionen $\Gamma'_{3\cdot 360}$ der x_i, und den kontragredienten der u_k ebenfalls invariante bilineare Zwischenform $\omega(z_h;\, x_i;\, u_k)$ gesetzt — als „Kleinsche Bilinearform" bezeichnet. Die akzessorische Irrationalität reduziert sich jetzt auf die Lösung der Gleichung dritten Grades für die sich selbst entsprechenden Punkte in der durch $\omega = 0$ gegebenen Kollineation.

Man kann aber nicht sagen, daß die angeführten Arbeiten für die hier vorliegenden Fragen abschließend sind. So hat schon A. Coble eine sehr bedeutende Vereinfachung der Arbeit (84) gleich nach ihrem Erscheinen erreicht**), indem er den Grad der Bilinearform $\omega(z_h;\, x_i;\, u_k)$ in den z_h von 6 auf 4 reduziert; und für die in (84) nicht berührte Umkehrung der Tschirnhausen-Transformation zwischen Gleichung 6^{ten} Grades und Normalproblem findet sich bei Coble wenigstens der Ansatz, wenn auch nicht die Berechnung. Besonders aber ist eine volle Umgestaltung der ganzen Be-

*) Rend. Acc. Linc. vom 9. April 1899.

**) Math. Ann. 70.

handlung der Aufgabe denkbar, einmal etwa durch Heranziehung der *beiden* S. 31 genannten Systeme Σ, Σ' im Sinne der Behandlung der Tripelgleichungen 7^{ten} Grades, sodann durch Bildung ausgezeichneter Gleichungen, welche hier die Stelle der „Hauptgleichung" 5^{ten} Grades zu übernehmen hätten.

Wir haben noch über eine Reihe von Einzelrichtungen zu berichten, die Gordan im Laufe der Jahre verfolgt hat, teilweise freilich in engem Zusammenhang mit den Untersuchungen allgemeiner Art.

Vor allem sind die von 1870 an bis zum Schluß laufenden vielfachen *Resultantenbetrachtungen* für Gordan charakteristisch. Die Darstellung in Determinantenform, wie sie für zwei binäre Formen existiert, genügt ihm nicht, sie erscheint ihm bei höheren Graden nicht für die Ausrechnung praktisch. Er verlangt statt dessen, was für den Grad 2 der einen Form geleistet ist, explizite rationale Ausdrücke durch niedrigere Invarianten. So wendet er denn (18) auf die Cayleysche Form $\varphi(y)f(x) - f(y)\varphi(x)$ zweier binärer Formen gleichen Grades, aus der die Bézoutsche Form der Resultante $R_{f,\varphi}$ gebildet wird, seine Reihenentwicklung für Formen von zwei Variabelnreihen nach Potenzen von (xy) an; ebenso auf die Kovariante, deren Verschwinden einen gemeinsamen Faktor 2^{ten} Grades bezeichnet; und damit erhält er diese Kovariante, und hieraus die Resultante selbst, als ganze Funktion von Überschiebungen. Bei Formen ungeraden Grades hat man so freilich nur Quotienten von Entwicklungen. Aber bis zum 5^{ten} Grade hin werden alle Formeln sogar explizit ausgerechnet; und in einer späten Arbeit von 1906 (82), einer Fortführung von (18), werden die Rechnungen, verfeinert durch die Benutzung der Kombinantenbegriffe, noch mehr durchgeführt.

Dasselbe Ziel verfolgen die Diskriminantenarbeiten (42), (49), nur auf anderem Wege, indem nämlich, wie in den „Vorlesungen" (V, Bd. II), erst die Invarianten der binären Form 6^{ten} bzw. 7^{ten} Grades bis zu einer gewissen Ordnung hin allgemein ermittelt und dann im Fall eines Doppelfaktors der Grundform berechnet werden, woraus die gesuchte Relation zwischen ihnen hervorgeht. Auch für die Resultante dreier ternärer Formen beliebigen Grades wird jenes formentheoretische Ziel erreicht. Schon in (58) hatte Gordan aus einer von A. Brill gegebenen Form durch deren Befreiung von einem Faktor u_x^2 eine Zwischenform V abgeleitet, deren in den x und u identisches Verschwinden die Bedingungen für eine ternäre Form $f(x)$, in lineare Faktoren zu zerfallen, darstellt. In (64) und (65) wird nun, wesentlich mit Hilfe des Hermiteschen Reziprozitätssatzes (62), die Resultante dreier ternärer Formen f, f_1, f_2 als simultane Invariante von f und V, vermehrt um eine Summe von Überschiebungen von V über weitere Formen, erhalten.

Andere Noten haben wieder den Zweck, gerade die Determinantenausdrücke der Resultante zweier binärer Formen der Berechnung zugänglicher zu machen, so als Summe von Produkten in (57) und in manchen von Gordan veranlaßten Dissertationen. Oder es werden (80) Beziehungen zwischen den Unterdeterminanten der Sylvesterschen Form zu denen der Bézoutschen abgeleitet, oder auch (27), vermöge des Brillschen Satzes über korrespondierende Matrizen, besondere Ausdrücke für einen größten gemeinsamen Teiler zweier binärer Formen gleichen Grades. Die Darstellung der Resultante durch das Differenzenprodukt der Wurzeln α_i, β_k, d. h. als Summe der Koeffizienten der Gleichung für $\frac{\beta_k}{\alpha_i}$, wird von Gordan (71) durch Umkehr der Newtonschen Formeln dazu benutzt, die Resultante als ganze Funktion der Summen der positiven Potenzen der β_k und der negativen Potenzen der α_i auszudrücken; und das Verfahren wird (68) zur Herstellung einer Menge von Relationen zwischen symmetrischen Funktionen der Wurzeln von Gleichungen und zur expliziten Berechnung von Resolventen erweitert. Für die Diskriminante einer ternären Form findet sich in (48) ein Determinantenausdruck, analog dem Sylvesterschen im binären Gebiet. Partielle Differentialgleichungen für die Resultante zweier binärer Formen sind schon in (17) (1870) berechnet, unter anderer Gestalt als bei Brioschi und ohne daß die Beziehungen zu dessen Gleichungen erörtert werden.

Als eine Anwendung von Resultanteneigenschaften mag eine Vereinfachung gelten, welche Gordan an dem zweiten algebraischen Beweis von Gauß für die Wurzelexistenz einer Gleichung angebracht hat (31). Sie liegt in derselben Richtung, wie sie schon bei von Staudt (J. f. Math. 29) angegeben war: der Reduktion auf die Gleichung für die Wurzeldifferenzen; und sie weicht von dessen Behandlung nur in einem der zu betrachtenden Fälle ab.

Führen wir endlich noch einige Rechnungen von Relationen zwischen Kovarianten aus ihren Leitgliedern hinzu (52), so haben wir ein vollständiges Bild der rein algebraischen Tätigkeit Gordans vor uns. Indes müssen wir noch eine seiner hierhergehörigen Bestrebungen berühren, die in ihrem Ziel auf eine andere Wissenschaft hinübergreift und auf die er große Hoffnungen setzte. Auf Anregung von W. Alexejeff und in einer gemeinsamen Arbeit mit ihm (75) wurden die symbolischen Formeln der binären Invariantentheorie zu den atomistischen Konstitutionsformeln der Chemie in Beziehung gebracht: den Elementatomen $a, a', \cdots$, mit festen Wertigkeiten $n, n', \cdots$, werden bezw. Formen $a_x^n, a_x'^{n'}, \cdots$ mit den Graden $n, n', \cdots$, jeder Bindung $a - a'$ eine symbolische Determinante (aa'), den gesättigten Verbindungen also symbolische Determinantenprodukte zugeordnet. Daß dasselbe Entsprechen schon 22 Jahre vorher von Sylvester ausgesprochen worden, war den beiden Verfassern bis zu ihrer Publikation hin entgangen. Ihr Ziel ging aber über die bloße Zuordnung hinaus; indem sie auch die einfachsten Formenprozesse deuteten, dachten sie an eine Anwendung der Systemsbegriffe auf die Chemie. Indes hat die Veröffentlichung, wohl wegen ihres formal-kombinatorischen Charakters und wegen unvollständiger Analogie, keine Fortsetzung gefunden.

Nicht-algebraisch hat sich Gordan nur noch einmal betätigt. Im Jahre 1893 hatte Hilbert*) durch einen neuen Gedanken einen einfachen Beweis der Transzendenz der Zahlen e und π geliefert; und gleich darauf hatte Hurwitz**) eine Modifikation des Beweises gegeben, indem er die dort benutzten Integrale, wesentlich durch Anwendung partieller Integration und des einfachsten Falles des Mittelwertsatzes, vermied. In einer Arbeit (54), die übrigens nur den Gang von Hurwitz rückwärts laufend wiedergeben will, geht nun Gordan in dieser Richtung der Elementarisierung noch einen Schritt weiter, indem er auch die noch vorhandenen Differentialquotienten mittels der Reihe für e^x verdrängt. In bezug auf die dabei verwandte Symbolik $r! = h^r$, auf welche seit dieser Arbeit von verschiedenen Seiten Nachdruck gelegt worden ist, muß aber gesagt werden, daß sie in dem Gang des Beweises keine weitere Rolle spielt, als die einer kürzeren Bezeichnung, und daß sie zudem einfach aus der Note von Hurwitz herübergenommen ist. Die in der Note (54) weggelassene, aber für den Beweis wesentliche Abschätzung des klein werdenden Restgliedes hat Gordan in einem hinterlassenen unveröffentlichten Hefte von 1900 durchgeführt.

Noch 38 Jahre, von 1874 an, hat Gordan in Erlangen verbracht. Sie sind für ihn gleichmäßig verlaufen: täglich Vorlesungen, Arbeit, und die unentbehrlichen Spaziergänge entweder mit Mitarbeitern, wie schon mit Clebsch in drastisch lebhaften Zwiegesprächen, unbekümmert um alle Umgebung, oder allein, in tiefem Nachdenken und seine Gedanken im Kopfe so fertig verarbeitend, daß er seine Rechnungen zu Hause fast ohne Striche ausführen konnte. Die Fähigkeit zu solch beweglicher und ausgedehnter Fassungskraft hatte Gordan von jeher durch ein eigentümliches Mittel bei sich entwickelt: er führte im Kopfe lange Zahlenrechnungen aus, und er hat es in dieser — wie schon Clebsch sagte — „brotlosen Kunst", die doch für ihn eine tiefere Bedeutung hatte, recht weit gebracht. Auch in seinen jährlichen Sommeraufenthalten lebte er so, als wahrer Peripathetiker. Viele Stunden waren dem Café gewidmet, ge-

*) Math. Ann. 43.
**) Ibidem.

legentlich auch dem Schach, immer mit der Zigarre, der Abend gehörte gern der Geselligkeit oder auch dem Verkehr mit Jüngeren im mathematischen Verein; dann war er der lebhafteste unter Allen, unerschöpflich in anregendem Diskutieren und Plaudern und in humorvollen Erinnerungen. Dabei liebte er vermöge seiner reichen Phantasie und seiner scharfen Beobachtungsgabe paradoxe Aussprüche, mit einem treffenden Kern von Wahrheit, und plastische Bilder, von einer einzigen Seite gesehen.

Im Denken und Handeln war Gordan durchaus impulsiver Art. So war er auch nicht organisatorisch veranlagt, doch oft ein guter Berater seiner Fakultät, der er übrigens zweimal als Dekan vorstand. Seine allgemeinen Interessen waren rege, so für die klassische deutsche Literatur.

In seiner eigenen Wissenschaft war es weniger ein Vertiefen in fremde Arbeiten — denn solche las er sehr wenig —, als ein Überblick über die inneren Zusammenhänge und ein instinktives Gefühl für die Wege und Ziele der mathematischen Bestrebungen, was ihn schon aus kleinen Andeutungen Wertvolles von Minderem scheiden ließ. Aber den auf die Grundlagen gehenden Begriffsentwicklungen ist Gordan nie gerecht geworden: auch in seinen Vorlesungen hat er alle Grunddefinitionen begrifflicher Art, selbst die der Grenze, vollständig gemieden. Sein Vorlesungsprogramm hat sich nur auf die Vorlesungen allgemeiner Art, gelegentlich auch auf binäre Formentheorie, erstreckt; die Übungen waren mit Vorliebe der Algebra entnommen. Über Jacobisches, so über Funktionaldeterminanten, trug er gern vor, nie über Funktionentheoretisches, höhere Geometrie oder Mechanik; auch ließ er keine Seminarvorträge halten. Die Vorlesungen wirkten wesentlich durch die Lebhaftigkeit der Ausdrucksweise und durch eine zum Selbststudium anregende Kraft, eher als durch Systematik und Strenge.

Wie hochbeliebt Gordan in der Fakultät war, zeigen nach außen die mannigfachen ihm erwiesenen Ehrungen, die ihn erfreuten. So bei seinem 25-jährigen Jubiläum als Ordinarius; so bei seinem siebzigsten Geburtstage, bei dem ihm die Fakultät eine Adresse widmete und die nächsten auswärtigen Freunde sich um ihn vereinigten; so noch einmal bei dem goldenen Doktorjubiläum 1912, an dem sich auch die Universität Berlin durch Diplomerneuerung, die k. preußische Akademie der Wissenschaften durch eine Adresse beteiligten. Die vielerlei Anerkennungen bedeutender Akademien bereiteten Gordan lebhafte Genugtuung.

Im Frühjahr 1910 trat Gordan von seinem Lehramt zurück, las aber noch vier weitere Semester, drei neben seinem Nachfolger Erh. Schmidt. Völlig setzte er die Vorlesungen erst im Semester vor seinem Ableben aus, nachdem er die ihm ans Herz gewachsene Algebra seinem zweiten Nachfolger E. Fischer übergeben konnte, mit dem er dann noch ein Jahr lang in engen wissenschaftlichen Verkehr trat. Schon seit längerer Zeit litt Gordan gelegentlich an Schwächeanfällen; von einem solchen im November 1912 eingetretenen erholte er sich nicht mehr: seine körperlichen und geistigen Kräfte sanken nun täglich, bis ihn am 21. Dezember 1912 der Tod erlöste. Seine Ruhestätte fand er auf dem Neustädter Friedhof Erlangens.

Gordan war eine der markantesten und bekanntesten Persönlichkeiten unter den Mathematikern der Neuzeit. Er fehlte kaum auf den Mathematiker-Versammlungen, den deutschen und den internationalen; er war bei der Gründung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung beteiligt, 1894 und bei der damaligen Versammlung in Wien ihr Vorsitzender, ebenso vertretungsweise bei der nächsten Versammlung in Lübeck: meist trug er über ein ihn gerade beschäftigendes Thema vor, immer aber war er dort, stets von einer Gruppe Jüngerer umgeben, ein belebendes Element.

Gordan, eine in sich geschlossene Individualität, war kräftig und einheitlich im Leben und in der Arbeit. Kein Neuerer in der Wissenschaft: er griff nur an, was seiner Art gemäß war; aber was er angriff, führte er unermüdlich durch bis zu Ende. Aus dem Stoffe selbst heraus neue kombinatorische Methoden zu schaffen und seine Instrumente kräftig zu handhaben, das war sein mächtiges Können: er war *Algorithmiker*.

Erlangen, Oktober 1913.

Schriftenverzeichnis.

Selbständig erschienene Veröffentlichungen.

I. De Linea Geodetica. Dissertatio inauguralis. Berlin 1862. 42 Seiten 4°, mit Vita und vier Thesen; verteidigt am 1. März 1862 bei der philos. Fakultät der Universität Berlin. Vorgedruckt eine Widmung an den Vater. Als Opponenten werden aufgeführt: Kretzschmar, Dr. philos., Geiser, stud. math. und Rathke, stud. phil. [Die Dissertation ist aus einer Arbeit hervorgegangen, welche am 3. August 1861 auf eine Preisfrage der philosophischen Fakultät Breslau den Preis erhalten hatte.]

II. Über die Transformation der Θ-Funktionen. Habilitationsschrift, Gießen 1863, 18 Seiten 4°.

III. Theorie der Abelschen Functionen von A. Clebsch und P. Gordan, Professoren an der Universität Gießen. Leipzig, B. G. Teubner 1866, XIII u. 333 Seiten. [Vorwort vom 18. August 1866.]

IV. Über das Formensystem binärer Formen. Programm zum Eintritt in die philos. Fakultät und den Senat der K. Friedr.-Alex.-Univ. zu Erlangen. Erlangen, 20. März 1875. Leipzig, B. G. Teubner 1875, 52 Seiten. [Selbstbericht im Repertorium f. Math. 1, S. 12—13.]

V. Dr. Paul Gordans Vorlesungen über Invariantentheorie. Herausgegeben von Dr. Georg Kerschensteiner. [Hermite gewidmet.] Erster Band: Determinanten. Leipzig, B. G. Teubner 1885, XI u. 201 Seiten. [Vorwort aus Juli 1885.] Zweiter Band: Binäre Formen. Leipzig, B. G. Teubner 1887, XII u. 360 Seiten. [Vorwort aus Juli 1887.]

Abhandlungen.

1. Beziehungen zwischen Theta-Producten. Gießen den 20. März 1865, J. f. Math. 66 (1866), S. 185—192.

2. Transformation des fonctions Abéliennes. Gießen, 26 avril 1865. C. R. Paris 60 (1865), S. 925—927 (Sitzung v. 1. Mai 1865).

3. Théorie des fonctions Abéliennes (zus. mit A. Clebsch). C. R. Paris 62 (1866), S. 183—187, S. 227—230 (Sitzungen vom 22. und 29. Januar 1866). [Voranzeige des Buches (III).]

4. Sulla rappresentazione tipica delle forme binarie (zus. mit A. Clebsch). Gießen, febbrajo 1867. Ann. di Mat. (2) 1 (1867), S. 23—79.

5. Applicazione della Memoria „Sulla rappresentazione tipica delle forme binarie" all equazione modulare della trasformazione di quinto ordine. Ibid. S. 367—372.

6. Les formes binaires du 6° degré (zus. mit A. Clebsch). C. R. Paris 64 (1867), S. 582—586 (Sitzung vom 18. März 1867). [Auszug aus §§ 8—13 von (4).]

7. Über die vier- und fünfpunktige Berührung einer Geraden mit einer algebraischen Fläche. Zeitschr. Math. Phys. 12 (1867), S. 495—504.

8. Über die Theorie der ternären cubischen Formen (zus. mit A. Clebsch). Gießen, den 15. September 1867. Math. Ann. 1 (1869), S. 56—89.

9. Über die Invarianten binärer Formen bei höheren Transformationen. Gießen, den 14 Januar 1868. J. f. Math. 71 (1870), S. 164—194.

10. Sur les covariants et invariants des formes binaires. C. R. Paris 66 (1868), S. 1117—1119 (Sitzung vom 1. Juni 1868). [Voranzeige von (11).]

11. Beweis, daß jede Covariante und Invariante einer binären Form eine ganze Function mit numerischen Coeffizienten einer endlichen Anzahl solcher Formen ist. Gießen, den 8. Juni 1868. J. f. Math. 69 (1868), S. 323—354.

12. Über eine das Hyperboloid betreffende Aufgabe. Gießen. Zeitschr. Math. Phys. 13 (1868), S. 59—63.

13. Über biternäre Formen mit contragredienten Variabeln (zus. mit A. Clebsch). Gießen, den 3. September 1868. Math. Ann. 1 (1869), S. 359—400.

14. Über ternäre Formen dritten Grades. Gießen, im Oktober 1868. Ibid. S. 90—128.

15. Applicazione di alcuni risultati contenuti nella memoria „Sulla rappresentazione tipica delle forme binarie del 5° e del 6° grado" agli integrali iperellittici. 10 aprile 1869. Ann. di Mat. (2) 2 (1869), S. 346—348.

16. Die simultanen Systeme binärer Formen. Math. Ann. 2 (1870), S. 227—280. [Ausgegeben Februar 1870.]

17. Die partiellen Differentialgleichungen, denen die Resultante einer Form n^{ten} Grades und einer Form m^{ten} Grades genügt. Gießen, im Sept. 1870. Gött. Nachr. 1870, S. 427—433.

18. Über die Bildung der Resultante zweier Gleichungen. Math. Ann. 3 (1871), S. 355—414. [Ausgegeben im Februar 1871.]

19. Über Curven dritter Ordnung mit zwei Doppelpunkten. Gießen, im Januar 1871. Ibid. S. 631—632.

20. Resultanten von Covarianten. Gießen, im März 1871. Ibid. 4 (1871) S. 169—171.

21. Über Combinanten. Gießen, Oktober 1871. Ibid. 5 (1872), S. 95—122.

22. Über das Pentaeder der Flächen dritter Ordnung. Gießen, im März 1872. Ibid. S. 341—377.

23. Über die simultanen Invarianten binärer Formen. Gießen, den 8. April 1872. Ibid. S. 595—601.

24. Über die Auflösung linearer Gleichungen mit reellen Coeffizienten. Gießen, April 1872. Ibid. 6 (1873), S. 23—28.

25. Über cubische ternäre Formen (zus. mit A. Clebsch). Ibid. S. 436—512. [Ausgegeben Okt. und Dez. 1873.]

26. [In „Rudolf Friedrich Alfred Clebsch, Versuch einer Darlegung und Würdigung seiner wissenschaftlichen Leistungen, von einigen seiner Freunde", im Juli 1873, ibid. 7 (1874), S. 1—55: Mitarbeit an der Darlegung von dessen invariantentheoretischen Arbeiten, S. 37—50.]

27. Über den größten gemeinsamen Factor. Gießen, im Oktober 1873. Ibid. 7 (1874), S. 433—448.

28. Über einen Satz von Hesse. Sitzungsber. der Erlanger phys.-med. Sozietät, Sitzung vom 13. Dezember 1875. Heft 8 (1876), S. 89—94.

29. Über die algebraischen Formen, deren Hessesche Determinante identisch verschwindet (zus. mit M. Noether). Erlangen, im Mai 1876. Math. Ann. 10 (1876), S. 547—568. [Auszug aus der Abh., mitgeteilt von M. Noether, in Erlanger Ber., Sitzung vom 10. Januar 1876, Heft 8 (1876), S. 51—56. Selbstbericht von M. Noether, im Repertorium f. Math. 1, S. 255—257.]

30. Ein Hauptsatz der Algebra. Erlanger Ber., Sitzung vom 8. Mai 1876. Heft 8 (1876), S. 138—142. [Auszug aus (31).]

31. Über den Fundamentalsatz der Algebra. Math. Ann. 10 (1876), S. 572—575. [Selbstber. im Rep. f. Math. 1, S. 254—255.]

32. Über endliche Gruppen linearer Transformationen einer Veränderlichen. Erlangen, im Februar 1877. Ibid. 12 (1877), S. 23—46. [Selbstber. im Rep. f. Math. 2, S. 42—45.]

33. Binäre Formen mit verschwindenden Covarianten. Erlangen, im März 1877. Ibid., S. 147—166. [Selbstber. im Rep. f. Math. 2, S. 45—48.]

34. Über die Auflösung der Gleichungen fünften Grades (Vorgetragen am 9. Juli 1877). Erl. Ber. Heft 9 (1877), S. 183—186. [Vorarbeit für (35).]

35. Über die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade. Erlangen, im Januar 1878. Math. Ann. 13 (1878), S. 375—404. [Selbstber. im Rep. f. Math 2, S. 152—157.]

35′. [Voranzeige von (35) in den Verh. d. Ges. Deutscher Naturf. u. Ärzte, München (1877), S. 98.]

36. Über das volle Formensystem der ternären biquadratischen Form $f = x_1{}^3 x_2 + x_2{}^3 x_3 + x_3{}^3 x_1$. Erlangen, im August 1880. Math. Ann. 17 (1880), S. 217—233. (Hierzu eine Tafel.)

37. Über die typische Darstellung der ternären biquadratischen Form $f = x_1{}^3 x_2 + x_2{}^3 x_3 + x_3{}^3 x_1$. Erlangen, Ende September 1880. Ibid., S. 359—378.

38. Über Büschel von Kegelschnitten. Erlangen, im Januar 1882. Ibid. 19 (1882), S. 529—552. [Hierzu gehörig: Clebschs Vorlesungen über Geometrie, her. von Lindemann, Bd. I, S. 288—291 der ersten Auflage.]

39. Weitere Untersuchungen über die ternäre biquadratische Form $f = x_1{}^3 x_2 + x_2{}^3 x_3 + x_3{}^3 x_1$. Erlangen, Ende Mai 1882. Ibid. 20 (1882), S. 487—514.

40. Über Gleichungen siebenten Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen. Erlangen, Ende Mai 1882. Ibid., S. 515—530.

41. Über Gleichungen siebenten Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen II. Erlangen, im Oktober 1884. Ibid. 25 (1885), S. 459—521.

42. Die Discriminante der binären Form 6. Grades (Vorgelegt am 9. Februar 1885). Erl. Ber. Heft 17 (1885), S. 40—42.

43. Sur les équations du cinquième degré. Journ. de Math. (4) 1 (1885), S. 455—458.

44. Über Gleichungen fünften Grades (Vorgetragen am 10. Mai 1886). Erl. Ber. Heft 18 (1886), S. 81—83. [Auszug aus (45).]

45. Über Gleichungen fünften Grades. Erlangen, im Sommer 1886. Math. Ann. 28 (1887), S. 152—166.

46. Über biquadratische Gleichungen. Erlangen, im Dezember 1886. Ibid. 29 (1887), S. 318—326.

47. Formensystem. (Sitzung vom 14. Nov. 1887). Erl. Ber., Heft 19 (1887), S. 35—38. [Auszug aus (50).]

48. Über die Bildung der Discriminante einer ternären Form. Eingelaufen am 17. Dezember 1887. Sitzber. Ak. München 17 (1887), S. 477—478.

49. Die Discriminante der Form 7. Grades $f = a_x^7$. Erlangen, im Januar 1888. Math. Ann. 31 (1888), S. 566—600.

50. Das erweiterte Formensystem. Ibid. 33 (1889), S. 372—389. [Ausgegeben Febr. 1889.]

51. Über Begriff und Eigenschaften der Differentialinvarianten, ihr Zusammenhang mit den gewöhnlichen Invarianten. Verh. d. Ges. Deutscher Naturf. u. Ärzte. Bremen, Bd. IV (1890). [Voranzeige der Anmerkung S. 506 von (52).]

52. Bestimmung einer binären Form aus Anfangsgliedern ihrer Covarianten. Erlangen, im Dezember 1891. Math. Ann. 40 (1892), S. 503—526.

53. Über einen Satz von Hilbert. Erlangen, im September 1892. Ibid. 42 (1893), S. 132—142.

54. Transcendenz von e und π. Erlangen, im Mai 1893. Ibid. 43 (1893), S. 222—224.

[54'. Dasselbe, ins Polnische übertragen durch S. Dickstein, in dessen Zeitschrift Prace Matematyczno-Fizyczne 1897, S. 9—12.]

55. Sur la transcendance du nombre e. C. R. Paris 116 (1893), S. 1040—1041 (Sitzung vom 8. Mai 1893.) (Extrait d'une lettre adr. à M. Hermite.) [Auszug aus (54).]

55'. Über Transcendenz von e und π. Verh. der Ges. Deutscher Naturf. u. Ärzte, Nürnberg, Bd. II (1893), S. 13—14. [Auszug aus (54).]

56. Über die Sylvestersche Resultante. Ibid. S. 4.

57. Über die Resultante. (Auszug aus einem an Herrn A. Hurwitz gerichteten Brief.) Math. Ann. 45 (1894), S. 405—409. [Ausg. Okt. 1894.]

58. Das Zerfallen einer Curve in gerade Linien. Erlangen, im April 1894. Ibid. S. 410—427.

59. Das Zerfallen von Curven in gerade Linien. [Wien 1894.] Jahrber. d. D. Math.-Ver. 4 (1897), S. 92. [Anzeige von (58).]

60. Über unverzweigte lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung auf ebenen Curven vierten Grades. (Auszug aus einem an F. Klein gerichteten Briefe.) München, im April 1895. Math. Ann. 46 (1895), S. 606—608.

61. Der Pascalsche Satz. [Lübeck 1895.] Jahrber. d. D. Math.-Ver. 4 (1897), S. 155—157.

62. Der Hermitesche Reciprocitätssatz. Gött. Nachr. 1897, S. 182—183.

63. Resultante ternärer Formen. Verh. d. I. Int. Math. Kongr. Zürich (1897), S. 143—144. [Auszug aus (65).]

64. Le résultant de trois formes ternaires quadratiques. Journ. de Math. (5), 3 (1897), S. 195—201.

65. Resultanten ternärer Formen. Math. Ann. 50 (1898), S. 113—132. [Ausgegeben Dez. 1897.]

66. Auszug aus einem Schreiben an Herrn L. Berzolari. Erlangen, 5. Juli 1898. Rend. Circ. Mat Palermo 12 (1898), S. 326—328.

67. Sur le résultant de deux équations. (Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite.) Erlangen, 11 octobre 1898. C. R. Paris 127 (1898), S. 539—541. (Sitzung v. 17. Okt. 1898.) [Auszug aus (68).]

68. Symmetrische Functionen. Math. Ann. 52 (1899), S. 501—528.

69. Neuer Beweis des Hilbertschen Satzes über homogene Functionen. München, September 1899. Gött. Nachr (1899), S. 240—242.

70. Les invariants des formes binaires, Journ. de Math. (5) 6 (1900), S. 141—156.

71. Über die symmetrischen Functionen. Jahrber. d. Deutsch. Math.-Ver. 8 (1900), S. 178—179. [Auszug aus (68).]

72. Über homogene Functionen. Ibid. S. 180 [Auszug aus (70).]

73. Formentheoretische Entwicklung der in Herrn Whites Abhandlung über Curven dritter Ordnung enthaltenen Sätze. (Received for publication Oct. 15, 1899.) Trans. Am. Math. Soc. 1 (1900), S. 9—13.

74. Die Hessische und die Cayleysche Curve. (Received for publication June 10, 1900.) Ibid. S. 402—413.

74′. Die Hessische und die Cayleysche Curve. [Wiederabdruck von (74).] Festschrift der Universität Erlangen zur Feier des achtzigsten Geburtstages Sr. Kgl. Hoheit d. Prinzregenten Luitpold von Bayern. Erlangen und Leipzig, A. Deichert 1901.

75. Übereinstimmung der Formeln der Chemie und der Invariantentheorie (zus. mit W. Alexejeff). Erlangen, im Juli 1900. Erl. Ber. Heft 32 (1900), S. 107—142.

75′. Übereinstimmung der Formeln der Chemie und der Invariantentheorie (zus. mit W. Alexejeff). [Wiederabdruck von (75).] Zeitschr. f. phys. Chem. 35 (1900), S. 610—633.

76. Some relations between Physical Constants and Constitution in Benzenoid Amines. Part. II (zus. mit L. Limpach). Erlangen. Journ. of the Chem. Soc. Transact. 79 (1901), S. 1080—1085. [Rechnungen über Schmelzpunkte enthaltend.]

77. Das simultane System von zwei quadratischen quaternären Formen. Erl. Ber. Heft 33 (1901), S. 205—216. [Auszug aus (78).]

78. Das simultane System von zwei quadratischen quaternären Formen. Math. Ann. 56 (1903), S. 1—48.

79. Über die Auflösung der Gleichungen 6ten Grades. Verh. d. III. Intern. Math. Kongr. in Heidelberg (1904), S. 140—143 (1905).

80. Die Resultante binärer Formen. Erl. Ber. Bd. 37 (1905), S. 379—387.

81. Die partiellen Differentialgleichungen des Valentinerproblems. (Ein Beitrag zur Auflösung der Gleichungen 6ten Grades.) Erlangen, im Herbst 1905. Math. Ann. 61 (1905), S. 453—526.

82. Die Resultante binärer Formen. Erlangen, den 30. April 1906. Rend. Circ. Mat. Palermo 22 (1906), S. 161—196.

83. Gleichungen 6ten Grades. Atti del IV Congr. Intern. dei Matem. Roma (1908) Vol. II (1909), S. 5—7.

84. Über eine Kleinsche Bilinearform. (Ein Beitrag zur Auflösung der Gleichungen 6. Grades.) Math Ann. 68 (1910), S. 1—23.