Über die Komposition der quadratischen Formen[1]).

Von

A. Hurwitz †.

In den Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen vom Jahre 1898 habe ich die folgende Aufgabe behandelt:

Es seien φ, ψ, χ gegebene quadratische Formen von je n Variablen. Die Determinanten der drei Formen seien von Null verschieden. Man soll nun die Gleichung

$$(1) \qquad \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot \psi(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \chi(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

auf die allgemeinste Weise dadurch befriedigen, daß man $z_1, z_2, \ldots, z_n$ durch geeignete bilineare Formen der beiden Variablensysteme

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \quad \textit{und} \quad y_1, y_2, \ldots, y_n$$

ersetzt.

Mit anderen Worten: Es sollen alle Systeme von n^3 Konstanten

$$c_{\alpha\beta}^{(i)} \qquad (\alpha, \beta, i = 1, 2, \ldots, n)$$

bestimmt werden von der Eigenschaft, daß die Gleichung (1) durch die Substitution

$$z_i = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} c_{\alpha\beta}^{(i)} x_\alpha y_\beta \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

in eine Identität, d. h. eine für alle Werte der $2n$ Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ gültige Gleichung übergeht.

Da die quadratischen Formen durch lineare Transformation auf Summen von Quadraten gebracht werden können, kommt diese Aufgabe sofort auf die folgende zurück:

---

[1]) Die vorliegende Arbeit fand sich unter den nachgelassenen Manuskripten von A. Hurwitz und ist hier, abgesehen von der Korrektur einiger unbedeutender Schreibfehler, ungeändert abgedruckt. Die genaue Prüfung der Arbeit verdanken wir Herrn L. E. Dickson in Chicago, ebenso wie einige Bemerkungen, die hier in deutscher Übersetzung als Fußnoten abgedruckt sind. Die Redaktion.

Man soll die Gleichung

$$(2)\quad (x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\dots+y_n^2)=z_1^2+z_2^2+\dots+z_n^2$$

auf die allgemeinste Weise dadurch befriedigen, daß man $z_1, z_2, \dots, z_n$ *durch geeignete belineare Formen der beiden Variablensysteme*

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad \textit{und} \quad y_1, y_2, \dots, y_n$$

ersetzt.

Spezielle Lösungen dieser Aufgabe bilden die bekannten Gleichungen:

$$\begin{aligned}
(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2) &= (x_1y_1+x_2y_2)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2\\
(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2) &= (x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4)^2\\
&\quad+(x_1y_2-x_2y_1+x_3y_4-x_4y_3)^2\\
&\quad+(x_1y_3-x_2y_4-x_3y_1+x_4y_2)^2\\
&\quad+(x_1y_4+x_2y_3-x_3y_2-x_4y_1)^2
\end{aligned}$$

und eine analoge Gleichung, welche das Produkt aus den Summen der Quadrate von je acht Variablen als Summe von acht Quadraten bilinearer Formen jener Variablen darstellt.

A. a. O. habe ich bewiesen, daß die Gleichung (2) — abgesehen von dem trivialen Falle $n=1$ — nur in den Fällen

$$n=2,4,8$$

befriedigt werden kann. Ich fügte ohne Beweis hinzu, daß in diesen Fällen außer den soeben erwähnten speziellen Lösungen im wesentlichen keine weiteren existieren[2]).

Neuerdings habe ich nun gefunden, daß sich die Gleichung (2) auf noch einfacherem und zugleich weiterführendem Wege behandeln läßt. Diesen Weg will ich im folgenden darlegen und dabei sogleich von der nachstehenden allgemeinen Aufgabe ausgehen:

Man soll auf die allgemeinste Weise $z_1, z_2, \dots, z_n$ *als bilineare Formen der beiden Variablensysteme*

$$x_1, x_2, \dots, x_p \quad \textit{und} \quad y_1, y_2, \dots, y_n$$

so bestimmen, daß die identische Gleichung

$$(3)\quad (x_1^2+x_2^2+\dots+x_p^2)(y_1^2+y_2^2+\dots+y_n^2)=z_1^2+z_2^2+\dots+z_n^2$$

besteht.

Dabei bezeichnen n und p zwei gegebene positive ganze Zahlen.

---

[2]) Einen Beweis hierfür, der sich im Ideengang meiner Arbeit aus dem Jahre 1898 anschließt, hat Herr E. Robert in seiner demnächst erscheinenden Dissertation ausgearbeitet. (E. Robert, Composition des formes quadratiques de quatre et de huit variables indépendantes. Thèse, Zürich, 1912.)

Man bemerkt leicht, daß unsere Aufgabe sicher nur dann Lösungen zulassen kann, wenn $n \geqq p$ ist. Denn setzt man $y_1 = 1$, $y_2 = y_3 = \ldots = y_n = 0$, so folgt aus (3)

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2 = \bar{z}_1^2 + \bar{z}_2^2 + \ldots + \bar{z}_n^2,$$

wo $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_n$ lineare Formen von $x_1, x_2, \ldots, x_p$ bedeuten. Da aber $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2$ sich nicht als quadratische Form von weniger als p linearen Verbindungen der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_p$ darstellen läßt (weil die Determinante der Form $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2$ den von Null verschiedenen Wert 1 besitzt), so muß n mindestens gleich p sein. Den trivialen Fall $p = 1$ lasse ich beiseite und setze also

$$n \geqq p \geqq 2 \tag{4}$$

voraus.

I.

Zunächst will ich einige Bezeichnungen und Sätze aus der Lehre von den Matrizes zusammenstellen, deren ich mich weiterhin bedienen werde.

Eine Matrix ist bekanntlich ein System von $n \cdot m$ Zahlen, die in ein rechtekiges Schema von n Horizontal- und m Vertikalreihen angeordnet sind. Ist

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1m} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nm} \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad (a_{ik}) \tag{1}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n; \; k = 1, 2, \ldots, m)$$

eine solche Matrix, so nenne ich n ihre Horizontal-, m ihre Vertikalordnung. Die Zahlen a_{ik} heißen die Elemente der Matrix A. Im Falle $n = m$ ist A eine quadratische Matrix und n heißt ihre Ordnung schlechthin. Es versteht sich danach von selbst, daß, wenn von einer Matrix von der Ordnung n die Rede ist, eine quadratische Matrix von n Horizontal- und n Vertikalreihen gemeint ist.

Sind alle Elemente einer Matrix gleich Null, so wird die Matrix selbst mit 0 bezeichnet. Es muß dann aber, falls solches nicht aus dem Zusammenhang von selbst hervorgeht, hinzugefügt werden, wie groß die Anzahl n der Horizontal- und die Anzahl m der Vertikalreihen der Matrix ist.

Eine quadratische Matrix von der Ordnung n, deren Diagonalelemente a_{ii} sämtlich den nämlichen Wert a besitzen, während alle übrigen Elemente Null sind, bezeichne ich mit

$$a_n.$$

Der Index n darf fortgelassen werden, wenn kein Zweifel über die Ordnung der „Matrix a“ bestehen kann.

In der Theorie der Matrizes betrachtet man bekanntlich folgende Operationen:

1. *Multiplikation einer Matrix A mit einer Zahl a.*

Bezeichnet A die Matrix (1), so versteht man unter aA die Matrix

$$a \cdot A = (a a_{ik}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, m).$$

Statt $(-1) \cdot A$ wird kürzer $-A$ geschrieben.

2. *Addition der Matrizes.*

Bezeichnet A die Matrix (1) und B die Matrix

$$B = (b_{ik}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n';\ k = 1, 2, \ldots, m'), \tag{2}$$

so versteht man, falls

$$n' = n, \quad m' = m$$

ist, unter $A + B$ die Matrix

$$A + B = (a_{ik} + b_{ik}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, m). \tag{3}$$

Addieren lassen sich hiernach nur Matrizes mit den nämlichen Ordnungen. Die Subtraktion kann durch die Festsetzung

$$A - B = A + (-B)$$

definiert werden.

3. *Multiplikation der Matrizes.*

Falls die Matrix B ebensoviele Horizontalreihen hat wie A Vertikalreihen, falls also $n' = m$ ist, versteht man unter dem Produkte AB der beiden Matrizes die Matrix

$$AB = (c_{ik}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, m'), \tag{4}$$

deren Elemente durch die Gleichung

$$c_{ik} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \ldots + a_{im} b_{mk} \tag{5}$$

bestimmt sind.

An die hierdurch gegebene Definition der Multiplikation der Matrizes knüpft sich folgende Betrachtung. Man ordne der Matrix A zu die lineare Substitution

$$x_i = a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + \ldots + a_{im} y_m \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{6}$$

wobei $x_1, x_1, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m$ Variable bedeuten. Wenn nun aus diesen Variablen die Matrizes

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \tag{7}$$

mit den Ordnungen n, 1 bez. m, 1 gebildet werden, so sind die Gleichungen (6) gleichbedeutend mit der einen Gleichung

(8) $$x = A\,y.$$

In entsprechender Weise kann die der Matrix B entsprechende lineare Substitution durch die Gleichung

(9) $$y = B\,z$$

dargestellt werden, wo z die aus m' Variablen $z_1, z_2, \ldots, z_{m'}$ gebildete Matrix

(10) $$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{m'} \end{pmatrix}$$

bedeutet. Die Gleichungen (5) besagen nun, daß durch Elimination der Variablen $y_1, y_2, \ldots, y_m$ aus den Gleichungen (8) und (9)

(11) $$x = (A\,B)\,z,$$

also die zur Produktmatrix $A\,B$ gehörende Substitution folgt.

Bezeichnet C eine Matrix, deren Horizontalordnung gleich ist der Vertikalordnung von B, und ist

(12) $$z = C\,t$$

die (8) und (9) analoge Darstellung der zu der Matrix C gehörenden Substitution, so ergibt die Elimination der Variablen y und z aus (8), (9) und (12) sofort

$$x = (A\,B)\,C\,t = A\,(B\,C)\,t$$

und daher

(13) $$(A\,B)\,C = A\,(B\,C).$$

D. h. die Multiplikation der Matrizes unterliegt dem assoziativen Gesetze. Daß für die Addition und Multiplikation der Matrizes das distributive Gesetz gilt, daß also

$$(A + C)(B + D) = A\,B + A\,D + C\,B + C\,D$$

ist, folgt sofort aus der Tatsache, daß die Elemente der Produktmatrix nach (5) linear und homogen in den Elementen der Faktorenmatrizes sind.

4. *Übergang von einer Matrix zu ihrer konjugierten.*

Vertauscht man in einer Matrix A die Horizontal- mit den Vertikalreihen, so entsteht eine neue Matrix, welche die konjugierte von A heißt und durch Anhängung eines Akzentes, also mit A', bezeichnet wird. Es ist demnach

$$(14) \qquad A' = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{21}, & \ldots, & a_{n1} \\ a_{12}, & a_{22}, & \ldots, & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m}, & a_{2m}, & \ldots, & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

oder

$$(15) \qquad A' = (a'_{ik}) \quad (a'_{ik} = a_{ki},\ i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n).$$

Man überzeugt sich leicht, daß folgende Gesetze gelten:

$$(16) \qquad (aA)' = aA', \quad (A + B)' = A' + B', \quad (AB)' = B'A'.$$

Für manche Untersuchungen ist es sehr bequem, eine Darstellung der Matrizes zu verwenden, bei welcher die Elemente selbst Matrizes sind. Die einfachsten Fälle einer solchen Darstellung finden sich schon in der grundlegenden Abhandlung von Laguerre[3]). Allgemein ist sie im Anschluß an eine von mir gehaltene Vorlesung von Herrn H. Kreis in seiner Dissertation[4]) dargelegt werden. Betrachtet man zwei Matrizes mit derselben Horizontalordnung n und den Vertikalordnungen m und m'

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nm} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11}, & b_{12}, & \ldots, & b_{1m'} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1}, & b_{n2}, & \ldots, & b_{nm'} \end{pmatrix},$$

so entsteht dadurch, daß man B neben A stellt, die Matrix

$$(A, B) = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1m}, & b_{11}, & b_{12}, & \ldots, & b_{1m'} \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nm}, & b_{n1}, & b_{n2}, & \ldots, & b_{nm'} \end{pmatrix}$$

von der Horizontalordnung n und der Vertikalordnung $m + m'$. Allgemeiner erhält man aus beliebig vielen Matrizes $A, B, \ldots, L$ von der nämlichen Horizontalordnung n und den bez. Vertikalordnungen $m, m', \ldots, m^{(r)}$ durch Nebeneinanderstellen die Matrix $(A, B, \ldots, L)$ von der Horizontalordnung n und der Vertikalordnung $m + m' + \ldots + m^{(r)}$.

In entsprechender Weise kann man Matrizes mit derselben Vertikalordnung m und den bez. Horizontalordnungen $n, n', \ldots, n^{(r)}$ untereinanderstellen und dadurch eine neue Matrix mit der Vertikalordnung m und der Horizontalordnung $n + n' + \ldots + n^{(r)}$ bilden.

Liegen nun $r \cdot s$ Matrizes

$$A_{i,k} \quad (i = 1, 2, \ldots, r;\ k = 1, 2, \ldots, s)$$

vor, so beschaffen, daß die Matrizes mit demselben ersten Index i dieselbe Horizontalordnung n_i und die Matrizes mit demselben zweiten Index k

3) Œuvres 1 (Paris 1898), S. 221—267.

4) H. Kreis, Contribution à la théorie des systèmes linéaires. Thèse, Zürich, 1906.

dieselbe Vertikalordnung m_k besitzen, so erhält man durch Nebeneinanderstellen die r Matrizes

$$(A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{is}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Stellt man weiter diese r Matrizes untereinander, so entsteht eine Matrix, welche durch

$$(17) \qquad A = \begin{pmatrix} A_{11}, & A_{12}, & \ldots, & A_{1s} \\ A_{21}, & A_{22}, & \ldots, & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1}, & A_{r2}, & \ldots, & A_{rs} \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad (A_{ik})$$

$$(i = 1, 2, \ldots, r;\ k = 1, 2, \ldots, s)$$

bezeichnet werde. Diese Matrix A hat die Horizontalordnung $n_1 + n_2 + \ldots + n_r$ und die Vertikalordnung $m_1 + m_2 + \ldots + m_s$.

Die ursprüngliche Darstellung (1) der Matrizes, bei welcher die Elemente a_{ik} Zahlen sind, ist ein spezieller Fall der Darstellung (17). Wenn nämlich die Matrizes A_{ik} sämtlich die Horizontalordnung 1 und die Vertikalordnung 1 besitzen, so sind diese Matrizes nichts anderes als Zahlen.

Der Hauptsatz, welcher sich an die verallgemeinerte Darstellung (17) der Matrizes anknüpft, ist dieser: Es sei

$$(18) \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11}, & B_{12}, & \ldots, & B_{1t} \\ B_{21}, & B_{22}, & \ldots, & B_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{s1}, & B_{s2}, & \ldots, & B_{st} \end{pmatrix}$$

eine Matrix, deren Element B_{ik} eine Matrix von der Horizontalordnung m_i und der Vertikalordnung l_k ist. Dann ist

$$(19) \qquad AB = \begin{pmatrix} C_{11}, & C_{12}, & \ldots, & C_{1t} \\ C_{21}, & C_{22}, & \ldots, & C_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{r1}, & C_{r2}, & \ldots, & C_{rt} \end{pmatrix},$$

wobei die Matrix C_{ik} durch die Gleichung

$$(20) \qquad C_{ik} = A_{i1}B_{1k} + A_{i2}B_{2k} + \ldots + A_{is}B_{sk}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, r;\ k = 1, 2, \ldots, t)$$

gegeben ist. Mit anderen Worten: die Multiplikation der Matrizes (17) und (18) vollzieht sich geradeso, als ob die Elemente A_{ik} und B_{ik} Zahlen wären.

Der Beweis für diese Tatsache wird am einfachsten so geführt:

Es seien

$$x^{(1)},\ x^{(2)},\ \ldots,\ x^{(r)},$$
$$y^{(1)},\ y^{(2)},\ \ldots,\ y^{(s)},$$
$$z^{(1)},\ z^{(2)},\ \ldots,\ z^{(t)}$$

Matrizes von der Art der Matrizes (7). Und zwar sei die Matrix $x^{(i)}$ mit n_i Variablen, die Matrix $y^{(i)}$ mit m_i Variablen, die Matrix $z^{(i)}$ mit l_i Variablen gebildet. Dann läßt sich die der Matrix A entsprechende lineare Substitution durch die Gleichungen

$$(21) \qquad x^{(i)} = A_{i1}y^{(1)} + A_{i2}y^{(2)} + \ldots + A_{is}y^{(s)} \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

darstellen, welche die in den Matrizes $x^{(i)}$ enthaltenen $n_1 + n_2 + \ldots + n_r$ Variablen als lineare homogene Funktionen der in den Matrizes $y^{(i)}$ enthaltenen $m_1 + m_2 + \ldots + m_s$ Variablen ausdrücken. In entsprechender Weise wird die zur Matrix B gehörende lineare Substitution durch die Gleichungen

$$(22) \qquad y^{(i)} = B_{i1}z^{(1)} + B_{i2}z^{(2)} + \ldots + B_{it}z^{(t)} \quad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

dargestellt. Ersetzt man nun in den Gleichungen (21) die Matrizes $y^{(i)}$ durch ihre Ausdrücke (22), so entsteht das Gleichungssystem

$$(23) \qquad x^{(i)} = C_{i1}z^{(1)} + C_{i2}z^{(2)} + \ldots + C_{it}z^{(t)} \quad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

wobei C_{ik} durch (20) gegeben ist. Da nun das Gleichungssystem (23) die der Matrix AB entsprechende lineare Substitution darstellt, so ist hiermit der Beweis des obigen Satzes erbracht.

Falls unter den Elementen der Matrix (17) Nullmatrizen vorkommen, so werden diese zur Vereinfachung der Notierung fortgelassen. So bedeutet z. B.

$$(24) \qquad D = \begin{pmatrix} D_{11} & & & \\ & D_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_{rr} \end{pmatrix}$$

eine Matrix, für welche alle außerhalb der Diagonale stehenden Elemente Nullmatrizen sind. Die Bildung des Produktes DA vollzieht sich nach dem obigen dadurch, daß die Horizontalreihen von A der Reihe nach linksseitig mit $D_{11}, D_{22}, \ldots, D_{rr}$ multipliziert werden, d. h. es ist

$$(25) \qquad DA = \begin{pmatrix} D_{11}A_{11}, & D_{11}A_{12}, & \ldots, & D_{11}A_{1s} \\ D_{22}A_{21}, & D_{22}A_{22}, & \ldots, & D_{22}A_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{rr}A_{r1}, & D_{rr}A_{r2}, & \ldots, & D_{rr}A_{rs} \end{pmatrix}.$$

Analoges gilt für die rechtsseitige Multiplikation einer beliebigen Matrix mit einer solchen „Diagonalmatrix“ D.

Schließlich ist noch zu bemerken, daß die konjugierte der Matrix (17) offenbar durch

$$(26)\qquad A' = \begin{pmatrix} A'_{11}, & A'_{21}, & \ldots, & A'_{r1} \\ A'_{12}, & A'_{22}, & \ldots, & A'_{r2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A'_{1s}, & A'_{2s}, & \ldots, & A'_{rs} \end{pmatrix}$$

vorgestellt wird, wobei allgemein A'_{ik} die konjugierte der Matrix A_{ik} bezeichnet. Die Horizontalreihen der als Zahlenmatrix (d. h. in der ursprünglichen Gestalt (1)) geschriebenen Matrix (17) stimmen nämlich mit den Vertikalreihen der als Zahlenmatrix geschriebenen Matrix (26) überein.

II.

Die bilinearen Formen $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_n$, um deren Bestimmung es sich handelt, setze ich in die Form

$$(1)\qquad \mathfrak{z}_i = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{in}y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

wobei die Koeffizienten a_{ik} lineare homogene Funktionen der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_p$ bedeuten. Damit nun die identische Gleichung

$$(2)\qquad \mathfrak{z}_1^2 + \mathfrak{z}_2^2 + \ldots + \mathfrak{z}_n^2 = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2)(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2)$$

bestehe[5]), ist erforderlich und hinreichend, daß

$$(3)\qquad a_{1i}a_{1k} + a_{2i}a_{2k} + \ldots + a_{ni}a_{nk} = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2 \text{ oder } = 0$$

sei, je nachdem $i = k$ oder $i \neq k$ ist.

---

[5]) [Einige dem Manuskript nachträglich zugefügte Formeln von Hurwitz besagen folgendes: für das Bestehen der Identität

$$z_1^2 + \ldots + z_n^2 = (x_1^2 + \ldots + x_p^2)(y_1^2 + \ldots + y_q^2)$$

$$z_i = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{iq}y_q$$

haben wir die Bedingungen (3), worin jetzt $i, k = 1, 2, \ldots, q$. Die Bedingungen sind,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nq} \end{pmatrix}$$

gesetzt, äquivalent mit (5), worin jetzt die rechte Seite als eine Matrix q-ter Ordnung aufzufassen ist. Daraus ergibt sich (9), worin die A_h, ebenso wie A, als Matrizes von Horizontalordnung n und Vertikalordnung q aufzufassen sind. (Aber die Überlegung von (10) an gilt nur für den Fall $q = n$.) *L. E. D.*]

Die Gleichungen (3) besagen aber nichts anderes, als daß die Matrix

$$(4)\qquad A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{pmatrix}$$

der Bedingung

$$(5)\qquad A'A = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2)$$

genügen muß. Die rechte Seite der Gleichung (5) bedeutet dabei diejenige Matrix n-ter Ordnung, deren Diagonalelemente sämtlich gleich $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2$ sind, während alle übrigen Elemente verschwinden.

Da die Elemente der Matrix A lineare homogene Funktionen der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sind, so läßt sich A auf die Form

$$(6)\qquad A = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_p A_p$$

bringen, wobei $A_1, A_2, \ldots, A_p$ Matrizen mit konstanten Elementen bezeichnen. Hierdurch geht (5) über in

$$(7)\qquad (x_1 A_1' + x_2 A_2' + \ldots + x_p A_p')(x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_p A_p) = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2).$$

Führt man die Multiplikation aus, so erkennt man, daß unsere Aufgabe auf die folgende zurückkommt:

Man soll alle Systeme von p Matrizes n-ter Ordnung

$$(8)\qquad A_1, A_2, \ldots, A_p$$

bestimmen, welche den Gleichungen

$$(9)\qquad A_h' A_h = 1, \quad A_h' A_k + A_k' A_h = 0 \quad (h, k = 1, 2, \ldots, p;\ h \neq k)$$

genügen.

Setzt man nun, unter i die imaginäre Einheit verstanden,

$$(10)\qquad A_1 = iA_p B_1,\ A_2 = iA_p B_2, \ldots,\ A_{p-1} = iA_p B_{p-1},$$

so gehen die Bedingungsgleichungen (9) nach leichten Umformungen in folgende über:

$$(11)\qquad A_p' A_p = 1, \quad B_h' B_h = -1, \quad B_h' + B_h = 0, \quad B_h' B_k + B_k' B_h = 0 \quad (h, k = 1, 2, \ldots, p-1;\ h \neq k).$$

Die auf die Matrizes B bezüglichen Gleichungen lassen sich durch folgende ersetzen:

$$(12)\qquad B_h' = -B_h, \quad B_h^2 = +1, \quad B_h B_k = -B_k B_h.$$

Wenn umgekehrt $B_1, B_2, \ldots, B_{p-1}$ den Bedingungen (12) genügen, und A_p der Bedingung $A'_p A_p = 1$, welche aussagt, daß A_p eine orthogonale Matrix sein soll, so werden die Matrizes (10) die Bedingungen (9) befriedigen. Es genügt demnach, folgende Aufgabe zu lösen:

Man soll alle Systeme von $p-1$ Matrizes n-ter Ordnung

(13) $$B_1, B_2, \ldots, B_{p-1}$$

bestimmen, welche schiefsymmetrisch sind (d. h. den Bedingungen $B'_h = -B_h$ genügen) und überdies die Gleichungen

(14) $$B_h^2 = -1, \quad B_h B_k = -B_k B_h \quad (h, k = 1, 2, \ldots, p-1;\ h \neq k)$$

befriedigen.

III.

Zunächst sehe ich von den Bedingungen $B'_h = -B_h$ ab und betrachte also die Systeme

(1) $$\Sigma = (B_1, B_2, \ldots, B_{p-1})$$

von $p-1$ Matrizes n-ter Ordnung, welche den Gleichungen (14) der vorigen Nummer genügen. Bezeichnet T irgendeine Matrix n-ter Ordnung von nicht verschwindender Determinante, so wird gleichzeitig mit Σ auch das zu Σ „ähnliche" System

(2) $$T\Sigma T^{-1} = (TB_1T^{-1}, TB_2T^{-1}, \ldots, TB_{p-1}T^{-1})$$

den Gleichungen II, (14) genügen. Zwei Lösungen dieser Gleichungen, wie Σ und $T\Sigma T^{-1}$, die einander ähnlich sind, sollen als nicht wesentlich verschieden angesehen oder auch als „äquivalent" bezeichnet werden. Demnach kann man in einem Lösungssystem (1) an die Stelle einer der Matrizes B_h irgendeine ihr ähnliche treten lassen, d. h. sie durch eine beliebige Matrix T transformieren. Denn wenn nur die übrigen Matrizes durch dieselbe Matrix T transformiert werden, bleibt das Lösungssystem nach der getroffenen Festsetzung wesentlich ungeändert.

Die Matrix B_1 ist nun, da sie der Gleichung $B_1^2 = 1$ genügt, bekanntlich ähnlich einer Diagonal-Matrix, deren Diagonalglieder einen der Werte $+1$ und -1 besitzen, also einer Matrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1_r & \\ & -1_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Da aber $B_2 B_1 B_2^{-1} = -B_1$, also B_1 ähnlich zu $-B_1$ ist, so geht das System der charakteristischen Wurzeln von B_1 durch Vorzeichenänderung aller Wurzeln in sich über. Daher muß $r = n - r$, d. h. $n = 2r$ eine gerade Zahl sein und man darf also in dem System (1)

(3) $$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

voraussetzen, wobei die Elemente von B_1 Matrizes von der Ordnung $r = \frac{n}{2}$ bedeuten. Sei nun

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{4}$$

irgend eine Matrix n-ter Ordnung, unter a, b, c, d Matrizes der Ordnung $\frac{n}{2}$ verstanden. Es ist dann

$$B_1 B = \begin{pmatrix} a, & b \\ -c, & -d \end{pmatrix}, \quad B B_1 = \begin{pmatrix} a, & -b \\ c, & -d \end{pmatrix}.$$

Hieraus ersieht man:

Die allgemeinste Lösung B der Gleichung

$$B_1 B = B B_1 \tag{5}$$

lautet

$$B = \begin{pmatrix} a & \\ & d \end{pmatrix}, \tag{6}$$

und die allgemeinste Lösung B der Gleichung

$$B_1 B = -B B_1 \tag{7}$$

lautet

$$B = \begin{pmatrix} & b \\ c & \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Für die letztere Matrix ergibt sich

$$B^2 = \begin{pmatrix} bc & \\ & cb \end{pmatrix}.$$

Soll daher die Matrix (8) der Bedingung $B^2 = 1$ genügen, so hat sie die Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} & b \\ b^{-1} & \end{pmatrix}. \tag{8'}$$

Insbesondere werden also die Matrizes $B_2, B_3, \ldots, B_{p-1}$ diese Gestalt besitzen. Ist nun etwa

$$B_2 = \begin{pmatrix} & b_2 \\ b_2^{-1} & \end{pmatrix},$$

so geht B_2 durch Transformation mit

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \\ & b_2 \end{pmatrix}$$

in

$$T B_2 T^{-1} = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$$

über, während die Matrix (3) durch Transformation mit T in sich übergeht. Demnach darf man in dem Systeme Σ

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \tag{9}$$

voraussetzen, während

$$B_h = \begin{pmatrix} & b_h \\ b_h^{-1} & \end{pmatrix} \qquad (h = 3, 4, \ldots, p-1)$$

ist. Die Gleichung

$$B_2 B_h = - B_h B_2$$

ergibt $b_h^{-1} = - b_h$, oder

$$b_h^2 = -1.$$

Setzt man $b_h = i C_h$, so kommt

(10) $$B_h = \begin{pmatrix} & i C_h \\ -i C_h & \end{pmatrix} \qquad (h = 3, 4, \ldots, p-1)$$

und

(11) $$C_h^2 = 1, \quad C_h C_k = - C_k C_h \qquad (h \neq k),$$

welch' letztere Gleichungen aus $B_h B_k = - B_k B_h$ folgen.

Es gilt also der Satz:

Betrachtet man ähnliche Systeme als nicht wesentlich verschieden, so lautet das allgemeinste System

(12) $$\Sigma = (B_1, B_2, B_3, \ldots, B_{p-1})$$

von $p-1$ Matrizes n-ter Ordnung, welche den Gleichungen II, (14) *genügen:*

(13) $$\begin{cases} B_1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} & i C_3 \\ -i C_3 & \end{pmatrix}, \\ B_4 = \begin{pmatrix} & i C_4 \\ -i C_4 & \end{pmatrix}, \ldots, B_{p-1} = \begin{pmatrix} & i C_{p-1} \\ -i C_{p-1} & \end{pmatrix}, \end{cases}$$

wobei

(14) $$\Sigma_1 = (C_3, C_4, \ldots, C_{p-1})$$

das allgemeinste System von $p-3$ Matrizes der Ordnung $\frac{n}{2}$ bedeutet, welche den Gleichungen

(15) $$C_h^2 = 1, \quad C_h C_k = - C_k C_h \quad (h, k = 3, 4, \ldots, p-1;\ h \neq k)$$

genügen.

Diese Gleichungen besitzen dieselbe Gestalt, wie die Gleichungen II, (14). Daher läßt sich der vorstehende Satz wiederum auf das System Σ_1 anwenden. Dadurch wird die Bestimmung von Σ_1 zurückgeführt auf die Bestimmung des allgemeinsten Systemes

(16) $$\Sigma_2 = (D_5, D_6, \ldots, D_{p-1})$$

von $p-5$ Matrizes der Ordnung $\frac{n}{4}$, welche den Gleichungen

(17) $$D_h^2 = 1, \quad D_h D_k = - D_k D_h \quad (h, k = 5, 6, \ldots, p-1;\ h \neq k)$$

genügen. So fortfahrend gelangt man schließlich zu einem Systeme

(18) $$\Sigma_{r-1} = (L_{2r-1}, L_{2r}),$$

wenn $p - 1 = 2r$ gerade ist, resp. zu einem Systeme

(19) $$\Sigma_r = (L_{2r+1}),$$

wenn $p - 1 = 2r + 1$ ungerade ist.

In dem Systeme (18) bedeuten L_{2r-1}, L_{2r} Matrizes der Ordnung $\frac{n}{2^{r-1}}$, welche den Gleichungen

$$L_{2r-1}^2 = 1, \quad L_{2r}^2 = 1, \quad L_{2r-1} L_{2r} = - L_{2r} L_{2r-1}$$

genügen. Nach der obigen Analyse ist demnach das System Σ_{r-1} nicht wesentlich verschieden von dem Systeme

(20) $$L_{2r-1} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \quad L_{2r} = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix},$$

wobei die Elemente der Matrizes (20) Matrizes von der Ordnung $\frac{n}{2^r}$ sind.

In dem Systeme (19) bedeutet L_{2r+1} eine Matrix der Ordnung $\frac{n}{2^r}$, welche der Gleichung

$$L_{2r+1}^2 = 1$$

genügt. Das System Σ_r ist demnach nicht wesentlich verschieden von dem aus einer Matrix der Gestalt

(21) $$L_{2r+1} = \begin{pmatrix} 1_\alpha & \\ & -1_\beta \end{pmatrix}$$

bestehenden Systeme, unter α, β zwei nicht negative ganze Zahlen von der Summe

$$\alpha + \beta = \frac{n}{2^r}$$

verstanden.

Es ist nun noch folgendes zu bemerken. Nach dem obigen Satze entspricht dem Systeme Σ_1 vermöge der Gleichungen (13) ein bestimmtes System Σ. Ersetzt man nun das System Σ_1 durch das nicht wesentlich verschiedene

$$\overline{\Sigma}_1 = T\,\Sigma_1\,T^{-1} = (T\,C_3\,T^{-1}, \ldots, T\,C_{p-1}\,T^{-1}),$$

so tritt an die Stelle des Systems Σ das aus den Matrizes

$$\overline{B}_1 = B_1, \quad \overline{B}_2 = B_2, \quad \overline{B}_h = \begin{pmatrix} & i\,T\,C_h\,T^{-1} \\ -i\,T\,C_h\,T^{-1} & \end{pmatrix} \; (h = 3, 4, \ldots, p-1($$

bestehende System $\overline{\Sigma}$. Es ist aber

$$\overline{B}_h = U\,B_h\,U^{-1} \qquad (h = 1, 2, \ldots, p-1),$$

wenn U die Matrix

$$U = \begin{pmatrix} T & \\ & T \end{pmatrix}$$

bedeutet. Das System $\bar{\Sigma}$ ist also nicht wesentlich verschieden von dem System Σ. Berücksichtigt man diese Tatsache, so erkennt man, daß folgender Satz gilt, welcher die vorhergehenden Überlegungen resumiert:

Es sei die Aufgabe vorgelegt, ein System Σ von $p-1$ Matrizes n-ter Ordnung

$$\Sigma = (B_1, B_2, \ldots, B_{p-1}) \tag{22}$$

zu bestimmen, welche den Gleichungen

$$B_h^2 = 1, \quad B_h B_k = -B_k B_h \quad (h, k = 1, 2, \ldots, p-1;\ h \neq k) \tag{23}$$

genügen. Man hat dann die beiden Fälle zu unterscheiden:

1. **Fall:** $p - 1 = 2r$ *ist eine gerade Zahl.*

In diesem Falle besitzt die Aufgabe dann und nur dann Auflösungen, wenn n durch 2^r teilbar ist. Ist diese Bedingung erfüllt, so erhält man eine Auflösung auf folgende Weise. Bezeichnet

$$\Sigma_k = (N_{2k+1}, N_{2k+2}, \ldots, N_{p-1}) \qquad (2k+1 < p) \tag{24}$$

irgendein System von $p-1-2k$ Matrizes der Ordnung $\frac{n}{2^k}$, so verstehe man unter Σ_{k-1} das von den Matrizes der Ordnung $\frac{n}{2^{k-1}}$

$$\left\{\begin{aligned} M_{2k-1} &= \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \quad M_{2k} = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \\ M_{2k+1} &= \begin{pmatrix} & i N_{2k+1} \\ -i N_{2k+1} & \end{pmatrix}, \ \ldots, \ M_{p-1} = \begin{pmatrix} & i N_{p-1} \\ -i N_{p-1} & \end{pmatrix} \end{aligned}\right. \tag{25}$$

gebildete System (wobei die Elemente dieser Matrizes selbst Matrizes von der Ordnung $\frac{n}{2^k}$ sind).

Man bilde nun zunächst das System Σ_{r-1} bestehend aus den beiden Matrizes der Ordnung $\frac{n}{2^{r-1}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix},$$

wobei die Elemente dieser Matrizes selbst Matrizes von der Ordnung $\frac{n}{2^r}$ sind. Von Σ_{r-1} ausgehend, steige man sukzessive auf zu den Systemen $\Sigma_{r-2}, \Sigma_{r-3}, \ldots, \Sigma_0$. Das System Σ_0 stellt dann eine Auflösung unserer Aufgabe vor. Jede andere Auflösung Σ ist dieser Auflösung Σ_0 ähnlich.

2. **Fall**: $p-1=2r+1$ *ist eine ungerade Zahl.*

In diesem Falle besitzt die Aufgabe dann und nur dann Auflösungen, wenn n durch 2^r teilbar ist. Ist diese Bedingung erfüllt, so erhält man eine Auflösung auf folgende Weise. Man zerlege $\frac{n}{2^r}$ in zwei nicht negative Summanden α, β:

$$\frac{n}{2^r}=\alpha+\beta$$

und bezeichne mit Σ_r das aus der einen Matrix von der Ordnung $\frac{n}{2^r}$

$$\begin{pmatrix} 1_\alpha & \\ & -1_\beta \end{pmatrix}$$

bestehende System). Von Σ_r ausgehend, steige man (genau nach der im ersten Fall gegebenen Vorschrift) sukzessive auf zu den Systemen $\Sigma_{r-1}, \Sigma_{r-2}, \ldots, \Sigma_0$. Das System Σ_0 stellt dann eine Auflösung unserer Aufgabe vor. Da die Zerlegung von $\frac{n}{2^r}$ in zwei nicht negative Summanden auf $\frac{n}{2^r}+1$ Weisen möglich ist, so ergeben sich ebensoviele Auflösungen der Aufgabe. Jede andere Auflösung ist einer (und, wie sich zeigen läßt, auch nur einer) dieser $\frac{n}{2^r}+1$ speziellen Auflösungen ähnlich.*

Im Falle der Lösbarkeit der betrachteten Aufgabe hat man entweder

$$p=2r+1, \quad n=2^r m,$$

oder

$$p=2r+2, \quad n=2^r m.$$

Soll nun insbesondere $p=n$ sein, so muß der letztere Fall stattfinden, wenn von der trivialen Möglichkeit $r=0$, also $p=n=1$ abgesehen wird. Dann muß also

$$p=n=2r+2=2^r m$$

sein. Sobald $r>3$, ist nun $2r+2<2^r$ und es sind daher nur die Fälle $r=0, 1, 3$ möglich, wobei dann bezüglich

$$p=n=2, 4, 8, \quad m=\frac{n}{2^r}=2, 2, 1$$

wird. Der obige Satz ergibt daher folgendes spezielle Resultat:

Die Gleichungen

$$(26) \qquad B_h^2=1, \quad B_h B_k=-B_k B_h \quad (h, k=1, 2, \ldots, n-1;\ h \neq k)$$

---

*) Im Falle $\beta=0$ ist die obige Matrix durch die Matrix 1 von der Ordnung $\frac{n}{2^r}$ zu ersetzen, im Falle $\alpha=0$ durch die Matrix -1.

sind in Matrizes n-ter Ordnung $(n > 1)$ *nur lösbar in den drei Fällen*

$$n = 2, \quad n = 4, \quad n = 8.$$

Im Falle $n = 2$ handelt es sich um die eine Gleichung

$$B_1^2 = 1 \tag{27}$$

und jede Lösung ist einer der folgenden drei Lösungen ähnlich

$$B_1 = 1, \quad B_1 = -1, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Im Falle $n = 4$ hat man die Gleichungen

$$\begin{cases} B_1^2 = B_2^2 = B_3^2 = 1, \quad B_1 B_2 = -B_2 B_1, \quad B_1 B_3 = -B_3 B_1, \\ \qquad\qquad B_2 B_3 = -B_3 B_2, \end{cases} \tag{29}$$

deren allgemeinste Lösung ähnlich ist einer der drei speziellen Lösungen

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1_2 & \\ & -1_2 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} & 1_2 \\ 1_2 & \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} & iB \\ -iB & \end{pmatrix}, \tag{30}$$

unter B eine der drei Matrizes zweiter Ordnung (28) verstanden.

Im Falle $n = 8$ endlich, ist jede Lösung der Gleichungen (26) ähnlich einer der beiden folgenden. Man bilde zunächst die drei Matrizes zweiter Ordnung

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad N_3 = \varepsilon \begin{pmatrix} & i \\ -i & \end{pmatrix}, \tag{31}$$

unter ε einen der beiden Werte $+1, -1$ verstanden; sodann die fünf Matrizes vierter Ordnung

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1_2 & \\ & -1_2 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} & 1_2 \\ 1_2 & \end{pmatrix}, \quad M_{k+2} = \begin{pmatrix} & iN_k \\ -N_k & \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, 3) \tag{32}$$

und endlich die sieben Matrizes achter Ordnung

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1_4 & \\ & -1_4 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} & 1_4 \\ 1_4 & \end{pmatrix}, \quad B_{k+2} = \begin{pmatrix} & iM_k \\ -iM_k & \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5). \tag{33}$$

Diese sieben Matrizes stellen nun sowohl für $\varepsilon = +1$ als auch für $\varepsilon = -1$ eine Lösung der Gleichungen (26) im Falle $n = 8$ vor und jede andere Lösung ist einer dieser beiden durch (33) definierten Lösungen ähnlich.

IV.

Man hat nun die Aufgabe, unter den Lösungen der Gleichungen

$$B_h^2 = 1, \quad B_h B_k = -B_k B_h \quad (h \neq k;\ h, k = 1, 2, \ldots, p-1) \tag{1}$$

diejenigen auszusuchen, die aus schiefsymmetrischen Matrizes n-ter Ordnung gebildet werden, für welche also

$$B_h' = -B_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, p-1)$$

ist. Nach der vorigen Nummer haben wir die Systeme

$$(2)\qquad \begin{cases} \Sigma_0,\ \Sigma_1,\ \Sigma_2,\ \ldots,\ \Sigma_{r-1} & (p-1=2r) \\ \text{bez.}\quad \Sigma_0,\ \Sigma_1,\ \Sigma_2,\ \ldots,\ \Sigma_r & (p-1=2r+1) \end{cases}$$

von rechts nach links zu bilden, ausgehend von

$$\Sigma_{r-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}\right] \quad \left(\text{Ordnung der Elemente } \frac{n}{2^r}\right)$$

$$\text{bez.}\quad \Sigma_r = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1_\beta \end{pmatrix} \qquad \left(\alpha+\beta=\frac{n}{2^r}\right).$$

Jede Lösung von (1) ist dann Σ_0 ähnlich.

Wenn

$$\Sigma_1 = (C_3,\ C_4,\ \ldots,\ C_{p-1}),$$

so ist

$$\Sigma_0 = \left[\overset{B_1}{\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}},\ \overset{B_2}{\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}},\ \overset{B_3}{\begin{pmatrix} & i\,C_3 \\ -i\,C_3 & \end{pmatrix}},\ \ldots,\ \overset{B_{p-1}}{\begin{pmatrix} & i\,C_{p-1} \\ -i\,C_{p-1} & \end{pmatrix}}\right].$$

Unsere Aufgabe ist nun, T so zu bestimmen, daß

$$(T B_h T^{-1})' = -T B_h T^{-1} \qquad (h=1,2,\ldots,p-1)$$

oder

$$(T')^{-1} B' T' = -T B_h T^{-1}$$

oder

$$B_h' T' T = -T' T B_h$$

oder

$$(3)\qquad U B_h = -B_h' U$$

wird, wo

$$(4)\qquad T' T = U$$

gesetzt ist. Damit bei gegebenem U eine Matrix T von nicht verschwindender Determinante, die (4) befriedigt, gefunden werden kann, ist erforderlich und hinreichend, daß $U' = U$ ist und die Determinante von U nicht verschwindet[7]).

---

[7]) [Wenn $U' = U$ und die Determinante von U von 0 verschieden ist, so ist U die Matrix einer qadratischen Form Q, die in die Form

$$q = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$$

transformiert werden kann. Die Matrix von q ist die Einheitsmatrix 1. Bezeichnen wir mit T die Matrix der Substitution, die q in Q überführt. Dann ist bekanntlich

$$T' \cdot 1 \cdot T = U \quad \text{oder} \quad T' T = U.$$

Der Beweis der später folgenden Formel (17) ist der gleiche, der von (16) ist ähnlich. *L. E. D.*]

Man hat also U so zu bestimmen, daß

$$(5)\qquad \begin{cases} UB_h = -B'_h U, \\ U' = U, \qquad \text{Det. } U \neq 0 \end{cases}$$

wird. Sei nun

$$U = \begin{pmatrix} X & U_1 \\ V & W \end{pmatrix},$$

wo die Elemente X, U_1, V, W als Matrizes von der Ordnung $\frac{n}{2}$ vorausgesetzt werden. Die Gleichungen $UB_h = -B'_h$ für $h = 1$ und $h = 2$ geben dann

$$\begin{pmatrix} X & U_1 \\ V & W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & U_1 \\ V & W \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} X & U_1 \\ V & W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & U_1 \\ V & W \end{pmatrix},$$

d. i.

$$\begin{pmatrix} X & -U_1 \\ V & -W \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} X & U_1 \\ -V & -W \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} U_1 & X \\ W & V \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} V & W \\ X & U_1 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist $X = W = 0$, $V = -U_1$, d. h.

$$(6)\qquad U = \begin{pmatrix} 0 & U_1 \\ -U_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen $U' = U$ muß $U'_1 = -U_1$ sein, wegen Det. $U \neq 0$ auch Det. $U_1 \neq 0$. Da weiter für $h > 2$ die erste Gleichung (5)

$$\begin{pmatrix} & U_1 \\ -U_1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & iC_h \\ -iC_h & \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} & -iC'_h \\ iC'_h & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & U_1 \\ -U_1 & \end{pmatrix},$$

d. i.

$$\begin{pmatrix} -iU_1C_h & \\ & -iU_1C_h \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} iC'_hU_1 & \\ & iC'_hU_1 \end{pmatrix},$$

lautet, so folgt

$$(7)\qquad \begin{cases} U_1C_h = C'U_1 & (h = 3, 4, \ldots, p-1), \\ U'_1 = -U_1, \quad \text{Det. } U_1 \neq 0. \end{cases}$$

Um also die zum Systeme Σ_0 gehörenden Matrizen U, welche die Gleichungen (5) befriedigen, zu bestimmen, hat man die zum Systeme Σ_1 gehörenden Matrizen U_1 aufzusuchen, welche (7) befriedigen. Indem man weiter

$$U_1 = \begin{pmatrix} U_2 & X \\ V & W \end{pmatrix}$$

setzt, wo die Elemente von der Ordnung $\frac{n}{4}$ sind, ergibt sich aus (7) für $h = 3$ und $h = 4$, daß

$$(8)\qquad U_1 = \begin{pmatrix} U_2 & \\ & U_2 \end{pmatrix}, \qquad U'_2 = -U_2, \qquad \text{Det. } U_2 \neq 0$$

sein muß, und da

$$C_h = \begin{pmatrix} & iD_h \\ -iD_h & \end{pmatrix} \qquad (h = 5, 6, \ldots),$$

so folgt

$$(9)\qquad \begin{cases} U_2 D_h = -D_h' U_2, & (h=5,6,\ldots), \\ U_2' = -U_2, \quad \text{Det.}\, U_2 \neq 0. \end{cases}$$

Den Gleichungen (9) $h = 5, 6, \ldots$ entsprechend muß weiter

$$U_2 = \begin{pmatrix} & U_3 \\ -U_3 & \end{pmatrix}$$

$$(10)\qquad \begin{cases} U_3 E_h = E_h' U_3 & (h=7,\ldots), \\ U_3' = U_3. \end{cases}$$

Schließlich wieder

$$U_3 = \begin{pmatrix} U_4 & \\ & U_4 \end{pmatrix}$$

$$(11)\qquad \begin{cases} U_4 F_h = -F_h' U_4 & (h=9,\ldots), \\ U_4' = U_4. \end{cases}$$

So fortfahrend erhält man den Systemen

$$(12)\qquad \Sigma_0,\ \Sigma_1,\ \Sigma_2,\ \Sigma_3,\ \ldots$$

entsprechend die Matrizes

$$(13)\qquad U,\ U_1,\ U_2,\ U_3,\ \ldots$$

so beschaffen, daß in leicht verständlicher Schreibweise

$$(14)\qquad \begin{cases} U\Sigma_0 U^{-1} = -\Sigma_0', \quad U_1 \Sigma_1 U_1^{-1} = \Sigma_1', \quad U_2 \Sigma_2 U_2^{-1} = -\Sigma_2', \\ U_3 \Sigma_3 U_3^{-1} = \Sigma_3', \quad U_4 \Sigma_4 U_4^{-1} = -\Sigma_4', \quad \ldots \end{cases}$$

ist. Ferner

$$(15)\qquad U = \begin{pmatrix} & U_1 \\ -U_1 & \end{pmatrix},\ U_1 = \begin{pmatrix} U_2 & \\ & U_2 \end{pmatrix},\ U_2 = \begin{pmatrix} & U_3 \\ -U_3 & \end{pmatrix},\ U_3 = \begin{pmatrix} U_4 & \\ & U_4 \end{pmatrix},\ \ldots$$

und

$$U' = U,\ U_1' = -U_1,\ U_2' = -U_2,\ U_3' = U_3,\ U_4' = U_4,\ \ldots$$

Die Matrizes U müssen überdies von nicht verschwindender Determinante sein.

Ich betrachte zunächst den Fall 1) $p - 1 = 2r$. Es ist dann

$$\Sigma_{r-1} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \qquad \left(\text{Elemente von der Ordnung } \frac{n}{2^r}\right).$$

Das System der Matrizes (13) schließt mit U_{r-1} und zwar ist U_{r-1} bestimmt durch die Bedingungen

1^a) $U_{r-1}\Sigma_{r-1}U_{r-1}^{-1} = -\Sigma_{r-1}$, $U_{r-1}' = U_{r-1}$, wenn $r - 1 \equiv 0 \pmod 4$,

1^b) $U_{r-1}\Sigma_{r-1}U_{r-1}^{-1} = \Sigma_{r-1}$, $U_{r-1}' = -U_{r-1}$, wenn $r - 1 \equiv 1 \pmod 4$,

1^c) $U_{r-1}\Sigma_{r-1}U_{r-1}^{-1} = -\Sigma_{r-1}$, $U_{r-1}' = -U_{r-1}$, wenn $r - 1 \equiv 2 \pmod 4$,

1^d) $U_{r-1}\Sigma_{r-1}U_{r-1}^{-1} = \Sigma_{r-1}$, $U_{r-1}' = U_{r-1}$, wenn $r - 1 \equiv 3 \pmod 4$.

Diesen Fällen entsprechen die folgenden Ausdrücke für U_{r-1}:

1[a]) $U_{r-1} = \begin{pmatrix} & V \\ -V & \end{pmatrix}$, $V' = -V$, $r \equiv 1 \pmod 4$,

1[b]) $U_{r-1} = \begin{pmatrix} V & \\ & V \end{pmatrix}$, $V' = -V$, $r \equiv 2 \pmod 4$,

1[c]) $U_{r-1} = \begin{pmatrix} & V \\ -V & \end{pmatrix}$, $V' = V$, $r \equiv 3 \pmod 4$,

1[d]) $U_{r-1} = \begin{pmatrix} V & \\ & V \end{pmatrix}$, $V' = V$, $r \equiv 0 \pmod 4$.

Da in den Fällen 1[a]) und 1[b]) V schiefsymmetrisch und von nicht verschwindender Determinante sein muß, so muß die Ordnung $\frac{n}{2^r}$ gerade, d. h. n durch 2^{r+1} teilbar sein. Ist sodann $V^{(0)}$ eine spezielle schiefsymmetrische Matrix von nicht verschwindender Determinante und der Ordnung $\frac{n}{2^r}$, so ist

(16) $$V = S' V^{(0)} S$$

die allgemeinste, wo S eine beliebige Matrix von der Ordnung $\frac{n}{2^r}$ und nicht verschwindender Determinante bezeichnet.

In den Fällen 1[c]) und 1[d]) bedeute $V^{(0)}$ eine spezielle symmetrische Matrix von der Ordnung $\frac{n}{2^r}$ und nicht verschwindender Determinante, z. B. $V^{(0)} = 1$, dann ist

(17) $$V = S' V^{(0)} S$$

die allgemeinste, wo wieder S eine beliebige Matrix von der Ordnung $\frac{n}{2^r}$ und nicht verschwindender Determinante bedeutet.

Die der Annahme $V = V^{(0)}$ entsprechende Reihe von Matrizen (13) werde nun mit

(18) $$U^{(0)} = \begin{pmatrix} & U_1^0 \\ -U_1^0 & \end{pmatrix}, \quad U_1^{(0)} = \begin{pmatrix} U_2^0 & \\ & U_2^0 \end{pmatrix}, \ldots$$

bezeichnet. Dann entsteht die der Annahme

$$V = S' V^{(0)} S$$

entsprechende Reihe folgendermaßen. Es sei

(19) $$S_0 = \begin{pmatrix} S_1 & \\ & S_1 \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} S_2 & \\ & S_2 \end{pmatrix}, \ldots, \quad S_{r-1} = \begin{pmatrix} S & \\ & S \end{pmatrix},$$

so ist

(20) $$U = S_0' U^{(0)} S_0, \quad U_1 = S_1' U_1^{(0)} S_1, \quad U_2 = S_2' U_2^{(0)} S_2, \ldots$$

Die allgemeinste Lösung der Gleichungen (1) in schiefsymmetrischen Matrizes wird nun durch das System

(21) $$T \Sigma_0 T^{-1}$$

vorgestellt, wo T der Bedingung

$$T'T = S'U^{(0)}S \tag{22}$$

genügt [8]). Eine spezielle Lösung erhalten wir, wenn $S = 1$ genommen und entsprechend $T^{(0)}$ aus

$$(T^{(0)})'T^{(0)} = U^{(0)} \tag{23}$$

bestimmt wird. Diese spezielle Lösung wird durch das System

$$\Sigma^{(0)} = T^{(0)}\Sigma_0 T^{(0)-1} \tag{24}$$

dargestellt. Um die allgemeinste Lösung zu erhalten, setzen wir in (22)

$$T = RT^{(0)}S. \tag{25}$$

Es ergibt sich

$$S'(T^{(0)})'R'RT^{(0)}S = S'U^{(0)}S$$

und nach (23)

$$R'R = 1. \tag{26}$$

Das System (21) wird daher

$$RT^{(0)}S\Sigma_0 S^{-1}(T^{(0)})^{-1}R^{-1}$$

oder, da $S\Sigma_0 S^{-1} = \Sigma_0$ ist [9]),

$$R\Sigma^{(0)}R^{-1}, \tag{27}$$

wo R eine orthogonale Matrix bezeichnet.

Nach den Formeln der Nr. II entspricht dem System $R\Sigma^{(0)}R^{-1}$ eine Matrix

$$\left\{\begin{aligned} A &= (x_1A_1 + x_2A_2 + \dots + x_pA_p) \\ &= A_p(ix_1B_1 + ix_2B_2 + \dots + ix_{p-1}B_{p-1} + x_p) \\ &= A_pR(ix_1B_1^{(0)} + ix_2B_2^{(0)} + \dots + x_p)R^{-1}, \end{aligned}\right. \tag{28}$$

wobei A_p eine beliebige orthogonale Matrix bezeichnet. Ersetzen wir A_pR durch R_1 wie R^{-1} durch R_2, so nimmt (26) die Form

$$A = R_1A^{(0)}R_2 \tag{29}$$

an, wo nun $A^{(0)}$ eine spezielle Lösung der Gleichung (5) in Nr. II vorstellt, R_1 und R_2 zwei beliebige orthogonale Matrizes bezeichnen.

---

[8]) [In (22) und in den folgenden Formeln schreibt Hurwitz S anstatt S_0. *L. E. D.*]

[9]) [Daß $S\Sigma_0 S^{-1} = \Sigma_0$ ist (eigentlich $S_0\Sigma_0 S_0^{-1}$, vgl. [8])), wird so bewiesen: die durch (19) erklärte Matrix S_{r-1} transformiert offenbar Σ_{r-1} in sich selber; die Elemente von Σ_{r-1} sind 1 und -1, wo 1 die Einheitsmatrix bedeutet, die dieselbe Ordnung besitzt, wie S in Formel (19). Beachten wir den Bau der Systeme $\Sigma_0, \Sigma_1, \dots$ (vgl. S. 15), so sehen wir, daß S_{r-2} Σ_{r-2} in sich selbst transformiert usw., und endlich, daß S_0 Σ_0 in sich selbst transformiert. *L. E. D.*]

Aus dem Zusammenhang, in welchem die Matrix A mit dem ursprünglichen Probleme steht, folgt nun schließlich:

Es sei die Aufgabe vorgelegt, $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_n$ *als bilineare Formen der beiden Variablensysteme*

$$x_1, x_2, \ldots, x_p \quad \textit{und} \quad y_1, y_2, \ldots, y_n$$

so zu bestimmen, daß die identische Gleichung

$$(30)\quad (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2)(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2) = \mathfrak{z}_1^2 + \mathfrak{z}_2^2 + \ldots + \mathfrak{z}_n^2$$

besteht, wobei $p > 1$ *vorausgesetzt wird.*

Wenn nun

$$p = 2r + 1$$

eine ungerade Zahl ist, so ist die Aufgabe dann und nur dann lösbar, falls n durch 2^r *teilbar ist, im Falle daß* $r \equiv 0$ *oder* $3 \pmod 4$ *ist, dagegen n durch* 2^{r+1} *teilbar ist, im Falle, daß* $r \equiv 1$ *oder* $2 \pmod 4$ *ist. Ist diese Bedingung erfüllt, so entsteht aus einer Lösung* $\mathfrak{z}_1^{(0)}, \mathfrak{z}_2^{(0)}, \ldots, \mathfrak{z}_n^{(0)}$ *die allgemeinste Lösung, indem man in dieser Lösung* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *einer beliebigen orthogonalen Transformation unterzieht und ebenso* $\mathfrak{z}_1^{(0)}, \mathfrak{z}_2^{(0)}, \ldots, \mathfrak{z}_n^{(0)}$ *einer anderen beliebigen orthogonalen Transformation unterwirft.*

Hierzu ist noch folgendes zu bemerken:

Besteht die Identität (30) für bestimmte bilineare Formen $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_n$ der Variablensysteme $x_1, \ldots, x_p$ und $y_1, y_2, \ldots, y_n$ und ebenso die Identität

$$(31)\quad (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2)(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \ldots + \eta_m^2) = \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \ldots + \zeta_m^2$$

für bestimmte bilineare Formen $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m$ der Variablensysteme $x_1, x_2, \ldots, x_p$ und $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$, so ergibt die Addition von (30) und (31)

$$(32)\quad (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2)(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 + \ldots + \eta_m^2)$$
$$= \mathfrak{z}_1^2 + \mathfrak{z}_2^2 + \ldots + \mathfrak{z}_n^2 + \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \ldots + \zeta_m^2.$$

Hier können $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_n, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m$ als bilineare Funktionen der beiden Variablensysteme $x_1, x_2, \ldots, x_p$ und $y_1, y_2, \ldots, y_n, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ angesehen werden. Die Gleichung (32) stellt somit eine Lösung unseres Problems für den Fall zweier Variablensysteme von p und $n + m$ Variablen vor. Eine derartige Lösung möge „reduzibel" und aus den beiden Lösungen (30) und (31) zusammengesetzt oder in diese beiden Lösungen zerfallend heißen. Da nun im Falle $p = 2r + 1$, wenn überhaupt nur *eine* Lösung existiert, falls solche, die durch orthogonale Transformation der $y_1, \ldots, y_n$ und $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_n$ auseinander entstehen, als nicht verschieden gelten, so erhält man alle Lösungen aus den den folgenden Fällen entsprechenden:

$$p = 2r + 1, \quad n = 2^r, \qquad \text{wenn } r \equiv 0 \text{ oder } 3 \pmod 4,$$
$$p = 2r + 1, \quad n = 2^{r+1}, \qquad \text{wenn } r \equiv 1 \text{ oder } 2 \pmod 4,$$
$$p = 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ \ldots$$
$$n = 4,\ 8,\ 8,\ 16,\ 64,\ 128,\ 128,\ 256,\ \ldots$$

Ich betrachte nun den Fall 2) $p - 1 = 2r + 1$. Es ist dann

$$\Sigma_r = \begin{pmatrix} 1_\alpha & \\ & -1_\beta \end{pmatrix} \qquad \left(\alpha + \beta = \frac{n}{2^r}\right).$$

Das System der Matrizes (13) schließt mit U_r, und zwar ist U_r bestimmt durch die Bedingungen

$$2^{a})\quad U_r \begin{pmatrix} 1_\alpha & \\ & -1_\beta \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1_\alpha & \\ & -1_\beta \end{pmatrix} U_r, \quad U_r' = U_r, \text{ wenn } r \equiv 0 \pmod 4.$$

Es ist daher $\alpha = \beta = \frac{n}{2^{r+1}}$ und $U_r = \begin{pmatrix} & B \\ B' & \end{pmatrix}$.

$$2^{b})\quad U_r \begin{pmatrix} 1_\alpha & \\ & -1_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_\alpha & \\ & -1_\beta \end{pmatrix} U_r, \quad U_r' = -U_r, \text{ wenn } r \equiv 1 \pmod 4.$$

Daher α und β beliebig, der Bedingung $\alpha + \beta = \frac{n}{2^r}$ gemäß und $U_r = \begin{pmatrix} A_\alpha & \\ & A_\beta \end{pmatrix}$ mit $A_\alpha' = -A_\alpha$, $A_\beta' = -A_\beta$. Da U_r nicht verschwindende Determinante haben muß, hat man notwendig $\alpha + \beta = \frac{n}{2^r}$ *gerade*, also n durch 2^{r+1} teilbar. Ja es müssen α und β gerade sein, weil A_α, A_β schief und von nicht verschwindender Determinante.

$$2^{c})\quad U_r \begin{pmatrix} 1_\alpha & \\ & -1_\beta \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1_\alpha & \\ & -1_\beta \end{pmatrix} U_r, \quad U_r' = -U_r, \text{ wenn } r \equiv 2 \pmod 4.$$

Daher $\alpha = \beta = \frac{n}{2^{r+1}}$ und $U_r = \begin{pmatrix} & B_{\alpha,\beta} \\ -B_{\beta,\alpha}' & \end{pmatrix}$.

$$2^{d})\quad U_r \begin{pmatrix} 1_\alpha & \\ & -1_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_\alpha & \\ & -1_\beta \end{pmatrix} U_r, \qquad U_r' = U_r, \text{ wenn } r \equiv 3 \pmod 4.$$

Daher α und β nur der Bedingung $\alpha + \beta = \frac{n}{2^r}$ unterworfen und $U_r = \begin{pmatrix} A_\alpha & \\ & A_\beta \end{pmatrix}$ mit $A_\alpha' = A_\alpha$, $A_\beta' = A_\beta$.

In den Fällen 2^{a}) und 2^{c}) gibt es, wie eine der obigen auf $p = 2r + 1$ bezügliche Betrachtung analoge Überlegung zeigt, nur *eine* Lösung unseres Problems, wenn orthogonale Transformationen der Variablen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ und der $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_n$ als unwesentlich angesehen werden. Alle irreduziblen Lösungen entsprechen also jetzt den Fällen

$$p = 2r + 2, \quad n = 2^{r+1} \qquad (r \equiv 0\ (4)),$$
$$p = 2r + 2, \quad n = 2^{r+1} \qquad (r \equiv 2\ (4)),$$
$$p = 2,\ 6,\ 10,\ 14,\ 18,\ \ldots,$$
$$n = 2,\ 8,\ 32,\ 128,\ 512,\ \ldots.$$

In den Fällen $2^{b})$ und $2^{d})$ entspricht jeder Wahl der Zahlen α, β, die der Gl. $\alpha+\beta=\frac{n}{2^r}$ $(\alpha\equiv 0\,(2), \beta\equiv 0\,(2)$, wenn $r\equiv 1\,(4))$ resp. $\alpha+\beta=\frac{n}{2^r}$ $(r\equiv 3\,(4))$ genügen, eine Lösung des Problems, wenn wieder orthogonale Transformationen der $y_1, y_2, \ldots, y_n$ und $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_n$ unwesentlich erachtet werden. Wenn man nun die auf S. 23 oben geschilderte Zusammensetzung zweier Lösungen

$$(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_p^2)(y_1^2+\ldots+y_n^2)=\mathfrak{z}_1^2+\ldots+\mathfrak{z}_n^2,$$
$$(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_p^2)(\eta_1^2+\ldots+\eta_m^2)=\zeta_1^2+\ldots+\zeta_m^2$$

zu der neuen Lösung

$$\begin{aligned}(x_1^2+\ldots+x_p^2)(y_1^2+\ldots+y_n^2+\eta_1^2+\ldots+\eta_m^2)\\=\mathfrak{z}_1^2+\ldots+\mathfrak{z}_n^2+\zeta_1^2+\ldots+\zeta_m^2\end{aligned}$$

vornimmt, so ergibt die Untersuchung der diesen Lösungen entsprechenden Systeme $B_1, B_2, \ldots, B_{p-1}$, daß wieder nur folgende irreduziblen Lösungen existieren:

$$p=2r+2,\quad n=2^r \qquad (r\equiv 3\,(4)),$$
$$p=2r+2,\quad n=2^{r+1} \qquad (r\equiv 1\,(4)),$$

also

$$\begin{array}{rlllll} & \scriptstyle r=1 & \scriptstyle 3 & \scriptstyle 5 & \scriptstyle 7 & \scriptstyle 9 \\ p= & 4, & 8, & 12, & 16, & 20, \ldots, \\ n= & 4, & 8, & 64, & 128, & 1024, \ldots. \end{array}$$

(Eingegangen am 4. 1. 1922.)