Die Grundlagen der Physik.

Von

David Hilbert in Göttingen.

Das Nachfolgende ist im wesentlichen ein Abdruck der beiden älteren Mitteilungen[1]) von mir über die „Grundlagen der Physik“ und meiner Bemerkungen dazu, die F. Klein in seiner Mitteilung[2]) „Zu Hilberts erster Note über die Grundlagen der Physik“ veröffentlicht hat — mit nur geringfügigen redaktionellen Abweichungen und Umstellungen, die das Verständnis erleichtern sollen.

Das mechanistische Einheitsideal in der Physik, wie es von den großen Forschern der vorangegangenen Generation geschaffen und noch während der Herrschaft der klassischen Elektrodynamik festgehalten worden war, muß heute endgültig aufgegeben werden. Durch die Aufstellung und Entwickelung des Feldbegriffes bildete sich allmählich eine neue Möglichkeit für die Auffassung der physikalischen Welt aus. Mie zeigte als der erste einen Weg, auf dem dieses neuentstandene „feldtheoretische Einheitsideal“, wie ich es nennen möchte, der allgemeinen mathematischen Behandlung zugänglich gemacht werden kann. Während die alte mechanistische Auffassung unmittelbar die Materie selbst als Ausgang nimmt und diese durch eine endliche Auswahl diskreter Parameter bestimmt ansetzt, dient vielmehr dem neuen feldtheoretischen Ideal das physikalische Kontinuum, die sogenannte Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit, als Fundament. Waren früher Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variablen die Form der Weltgesetze, so sind jetzt notwendig partielle Differentialgleichungen ihre Ausdrucksform.

Die gewaltigen Problemstellungen und Gedankenbildungen der allgemeinen Relativitätstheorie von Einstein finden nun, wie ich in meiner ersten Mitteilung ausgeführt habe, auf dem von Mie betretenen Wege

---

[1]) Göttinger Nachr.: Erste Mitteilung, vorgelegt am 20. Nov. 1915, zweite Mitteilung, vorgelegt am 23. Dez. 1916.

[2]) Göttinger Nachr.: vorgelegt am 25. Jan. 1918.

ihren einfachsten und natürlichsten Ausdruck und zugleich in formaler Hinsicht eine systematische Ergänzung und Abrundung.

Seit der Veröffentlichung meiner ersten Mitteilung sind bedeutsame Abhandlungen über diesen Gegenstand erschienen: ich erwähne nur die glänzenden und tiefsinnigen Untersuchungen von Weyl und die an immer neuen Ansätzen und Gedanken reichen Mitteilungen von Einstein. Indes sowohl Weyl gibt späterhin seinem Entwicklungsgange eine solche Wendung, daß er auf die von mir aufgestellten Gleichungen ebenfalls gelangt, und andererseits auch Einstein, obwohl wiederholt von abweichenden und unter sich verschiedenen Ansätzen ausgehend, kehrt schließlich in seinen letzten Publikationen geradenwegs zu den Gleichungen meiner Theorie zurück.

Ich glaube sicher, daß die hier von mir entwickelte Theorie einen bleibenden Kern enthält und einen Rahmen schafft, innerhalb dessen für den künftigen Aufbau der Physik im Sinne eines feldtheoretischen Einheitsideals genügender Spielraum da ist. Auch ist es auf jeden Fall von erkenntnistheoretischem Interesse, zu sehen, wie die wenigen einfachen in den Axiomen I, II, III, IV von mir ausgesprochenen Annahmen zum Aufbau der ganzen Theorie genügend sind.

Ob freilich das reine feldtheoretische Einheitsideal ein definitives ist, evtl. welche Ergänzungen und Modifikationen desselben nötig sind, um insbesondere die theoretische Begründung für die Existenz des negativen und des positiven Elektrons, sowie den widerspruchsfreien Aufbau der im Atominneren geltenden Gesetze zu ermöglichen, — dies zu beantworten, ist die Aufgabe der Zukunft.

Teil I.

Es seien x_s $(s=1, 2, 3, 4)$ irgendwelche die Weltpunkte wesentlich eindeutig benennende Koordinaten, die sogenannten Weltparameter (allgemeinste Raum-Zeit-Koordinaten). Die das Geschehen in x_s charakterisierenden Größen seien:

1. die zuerst von Einstein eingeführten Gravitationspotentiale $g_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu=1, 2, 3, 4)$ mit symmetrischem Tensorcharakter gegenüber einer beliebigen Transformation der Weltparameter x_s; sie bilden die Koeffizienten der invarianten Differentialform

$$\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu;$$

2. die vier elektrodynamischen Potentiale q_s mit Vektorcharakter im selben Sinne, welche die Koeffizienten der invarianten Linearform

$$\sum_s q_s\, dx_s$$

bilden.

Das physikalische Geschehen ist nicht willkürlich, es gelten vielmehr folgende Axiome:

Axiom I (Mies Axiom von der Weltfunktion[3]). *Das Gesetz des physikalischen Geschehens bestimmt sich durch eine Weltfunktion H, die folgende Argumente enthält:*

$$(1) \qquad g_{\mu\nu},\ g_{\mu\nu l} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_l}, \qquad g_{\mu\nu lk} = \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_l \partial x_k},$$

$$(2) \qquad q_s,\ q_{sl} = \frac{\partial q_s}{\partial x_l}, \qquad (s, l = 1, 2, 3, 4)$$

und zwar muß die Variation des Integrals

$$\int H \sqrt{g}\, d\omega$$

$$(g = -|g_{\mu\nu}|, \qquad d\omega = dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4)$$

für jedes der 14 Potentiale $g_{\mu\nu}$, q_s verschwinden.

An Stelle der Argumente (1) können offenbar auch die Argumente

$$(3) \qquad g^{\mu\nu},\ g^{\mu\nu}_l = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_l}, \qquad g^{\mu\nu}_{lk} = \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_l \partial x_k}$$

treten, wobei $g^{\mu\nu}$ die durch $(-g)$ dividierte Unterdeterminante der Determinante $(-g)$ in bezug auf ihr Element $g_{\mu\nu}$ bedeutet.

Aus Axiom I folgen zunächst bezüglich der zehn Gravitationspotentiale $g^{\mu\nu}$ die zehn Lagrangeschen Differentialgleichungen

$$(4) \qquad \frac{\partial \sqrt{g} H}{\partial g^{\mu\nu}} - \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \sqrt{g} H}{\partial g^{\mu\nu}_k} + \sum_{k,l} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial \sqrt{g} H}{\partial g^{\mu\nu}_{kl}} = 0 \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4),$$

und sodann bezüglich der vier elektrodynamischen Potentiale q_s die vier Lagrangeschen Differentialgleichungen

$$(5) \qquad \frac{\partial \sqrt{g} H}{\partial q_h} - \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \sqrt{g} H}{\partial q_{hk}} = 0, \qquad (h = 1, 2, 3, 4).$$

Bezüglich der Differentialquotienten nach $g^{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}_k$, $g^{\mu\nu}_{kl}$, wie sie in (4) und nachfolgenden Formeln auftreten, sei ein für allemal bemerkt, daß wegen der Symmetrie in μ, ν einerseits und k, l andererseits die Differentialquotienten nach $g^{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}_k$ so zu verstehen sind, daß man ihnen den Faktor 1 bzw. $\frac{1}{2}$ hinzusetzt, je nachdem $\mu = \nu$ bzw. $\mu \neq \nu$ ausfällt, ferner die Differentialquotienten nach $g^{\mu\nu}_{kl}$ mit 1 bzw. $\frac{1}{2}$ bzw. $\frac{1}{4}$ multipliziert zu

[3]) Mies Weltfunktionen enthalten nicht genau diese Argumente; insbesondere geht der Gebrauch der Argumente (2) auf Born zurück; es ist jedoch gerade die Einführung und Verwendung einer solchen Weltfunktion im Hamiltonschen Prinzip das Charakteristische der Mieschen Elektrodynamik.

nehmen sind, je nachdem $\mu = \nu$ und $k = l$ bzw. $\mu = \nu$ und $k \neq l$ oder $\mu \neq \nu$ und $k = l$ bzw. $\mu \neq \nu$ und $k \neq l$ ausfällt.

Der Kürze halber bezeichnen wir die linken Seiten der Gleichungen (4), (5) bzw. mit

$$[\sqrt{g}H]_{\mu\nu}, \qquad [\sqrt{g}H]_h.$$

Die Gleichungen (4) mögen die Grundgleichungen der Gravitation, die Gleichungen (5) die elektrodynamischen Grundgleichungen heißen.

Axiom II (Axiom von der allgemeinen Invarianz[4]). *Die Weltfunktion H ist eine Invariante gegenüber einer beliebigen Transformation der Weltparameter x_s.*

Axiom II ist der einfachste mathematische Ausdruck für die Forderung, daß die Koordinaten an sich keinerlei physikalische Bedeutung haben, sondern nur eine Numerierung der Weltpunkte darstellen, von deren Art die Verkettung der Potentiale $g_{\mu\nu}$, q_s völlig unabhängig ist.

Im folgenden benutzen wir die leicht beweisbare Tatsache, daß, wenn p^j $(j = 1, 2, 3, 4)$ einen willkürlichen kontravarianten Vektor bedeutet, der Ausdruck

$$p^{\mu\nu} = \sum_s (g_s^{\mu\nu} p^s - g^{\mu s} p_s^\nu - g^{\nu s} p_s^\mu), \qquad \left(p_s^j = \frac{\partial p^j}{\partial x_s}\right)$$

einen symmetrischen kontravarianten Tensor und der Ausdruck

$$p_l = \sum_s (q_{ls} p^s + q_s p_l^s) \;^{5)}$$

einen kovarianten Vektor darstellt.

Des weiteren stellen wir zwei mathematische Theoreme auf, die wie folgt lauten:

Theorem 1. Wenn J eine von $g^{\mu\nu}$, $g_l^{\mu\nu}$, $g_{lk}^{\mu\nu}$, q_s, q_{sk} abhängige Invariante ist, so gilt stets identisch in allen Argumenten und für jeden willkürlichen kontravarianten Vektor p^s

$$\sum_{\mu,\nu,l,k}\left(\frac{\partial J}{\partial g^{\mu\nu}}\Delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial J}{\partial g_l^{\mu\nu}}\Delta g_l^{\mu\nu} + \frac{\partial J}{\partial g_{lk}^{\mu\nu}}\Delta g_{lk}^{\mu\nu}\right) + \sum_{s,k}\left(\frac{\partial J}{\partial q_s}\Delta q_s + \frac{\partial J}{\partial q_{sk}}\Delta q_{sk}\right) = 0;$$

---

[4]) Die Forderung der orthogonalen Invarianz hat bereits Mie gestellt. In dem oben aufgestellten Axiom II findet der Einsteinsche fundamentale Grundgedanke der allgemeinen Invarianz den einfachsten Ausdruck, wennschon bei Einstein das Hamiltonsche Prinzip nur eine Nebenrolle spielt und seine Funktionen H keineswegs allgemeine Invarianten sind, auch die elektrischen Potentiale nicht enthalten.

[5]) p_l ist nicht zu verwechseln mit dem zu p^s gehörigen kovarianten Vektor $\sum_s g_{ls} p^s$.

dabei ist

$$\begin{aligned}
\varDelta g^{\mu\nu} &= \sum_m (g^{\mu m} p^\nu_m + g^{\nu m} p^\mu_m),\\
\varDelta g^{\mu\nu}_l &= -\sum_m g^{\mu\nu}_m p^m_l + \frac{\partial \varDelta g^{\mu\nu}}{\partial x_l},\\
\varDelta g^{\mu\nu}_{lk} &= -\sum_m (g^{\mu\nu}_m p^m_{lk} + g^{\mu\nu}_{lm} p^m_k + g^{\mu\nu}_{km} p^m_l) + \frac{\partial^2 \varDelta g^{\mu\nu}}{\partial x_l \partial x_k},\\
\varDelta q_s &= -\sum_m q_m p^m_s,\\
\varDelta q_{sk} &= -\sum_m q_{sm} p^m_k + \frac{\partial \varDelta q_s}{\partial x_k}.
\end{aligned}$$

Dieses Theorem 1 läßt sich auch folgendermaßen aussprechen:

Wenn J eine Invariante und p^s ein willkürlicher Vektor wie vorhin ist, so gilt die Identität

$$\sum_s \frac{\partial J}{\partial x_s} p^s = P(J); \tag{6}$$

dabei ist

$$\begin{aligned}
P &= P_g + P_q,\\
P_g &= \sum_{\mu,\nu,l,k} \left(p^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} + p^{\mu\nu}_l \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}_l} + p^{\mu\nu}_{lk} \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}_{lk}} \right),\\
P_q &= \sum_{l,k} \left(p_l \frac{\partial}{\partial q_l} + p_{lk} \frac{\partial}{\partial q_{lk}} \right)
\end{aligned}$$

gesetzt und es gelten die Abkürzungen:

$$p^{\mu\nu}_k = \frac{\partial p^{\mu\nu}}{\partial x_k}, \qquad p^{\mu\nu}_{kl} = \frac{\partial^2 p^{\mu\nu}}{\partial x_k \partial x_l}, \qquad p_{lk} = \frac{\partial p_l}{\partial x_k}.$$

Der Beweis von (6) ergibt sich leicht; denn diese Identität ist offenbar richtig, wenn p^s ein konstanter Vektor ist, und daraus folgt sie wegen ihrer Invarianz allgemein.

Theorem 2. Wenn J, wie im Theorem 1, eine von $g^{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}_l$, $g^{\mu\nu}_{lk}$, q_s, q_{sk} abhängige Invariante ist, und, wie oben, die Variationsableitungen von $\sqrt{g}J$ bez. $g^{\mu\nu}$ mit $[\sqrt{g}J]_{\mu\nu}$, bez. q_μ mit $[\sqrt{g}J]_\mu$ bezeichnet werden, und wenn ferner zur Abkürzung:

$$\begin{aligned}
i_s &= \sum_{\mu,\nu} ([\sqrt{g}J]_{\mu\nu} g^{\mu\nu}_s + [\sqrt{g}J]_\mu q_{\mu s}),\\
i^l_s &= -2 \sum_\mu [\sqrt{g}J]_{\mu s} g^{\mu l} + [\sqrt{g}J]_l q_s,
\end{aligned}$$

gesetzt wird, so gelten die Identitäten

$$i_s = \sum_l \frac{\partial i^l_s}{\partial x_l} \qquad (s = 1, 2, 3, 4). \tag{7}$$

Dieses Theorem 2 enthält als wesentlichen Kern einen allgemeinen mathematischen Satz[6]), der mir das Leitmotiv für den Aufbau der Theorie gewesen ist und der sich folgendermaßen ausspricht:

Ist F eine Funktion von n Größen (Funktionen von x_1, x_2, x_3, x_4) und ihren Ableitungen, und ist das Integral

$$\int F d\omega$$

invariant bei beliebigen Transformationen der vier Weltparameter x_1, x_2, x_3, x_4, so sind in dem System der n Lagrangeschen Differentialgleichungen, welche zu dem Variationsproblem

$$\delta \int F d\omega = 0$$

gehören, stets vier eine Folge der $n-4$ übrigen in dem Sinne, daß zwischen den n Lagrangeschen Ableitungen von F in bezug auf jene n Größen und deren totalen Differentialquotienten nach x_1, x_2, x_3, x_4 stets vier linear unabhängige Relationen identisch erfüllt sind.

Zum Beweise von Theorem 2 betrachten wir ein endliches Stück der vierdimensionalen Welt; ferner sei p^s ein Vektor, der nebst seinen Ableitungen auf der dreidimensionalen Oberfläche jenes Weltstückes verschwindet. Man hat gemäß der Definition von P:

$$P(\sqrt{g}J) = \sqrt{g}P(J) + J\sum_{\mu,\nu}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial g^{\mu\nu}}p^{\mu\nu} = \sqrt{g}P(J) + J\sum_s\left(\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x_s}p^s + \sqrt{g}p^s_s\right),$$

und nach Theorem 1 daher:

$$P(\sqrt{g}J) = \sqrt{g}\sum_s\frac{\partial J}{\partial x_s}p^s + J\sum_s\left(\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x_s}p^s + \sqrt{g}p^s_s\right) = \sum_s\frac{\partial\sqrt{g}Jp^s}{\partial x_s}.$$

Integrieren wir diese Gleichung über das betrachtete Weltstück, so ergibt sich wegen der Divergenzform der rechten Seite und wegen der Annahme über p^s:

$$\int P(\sqrt{g}J)\,d\omega = 0.$$

Wegen der Bildungsweise der Lagrangeschen Ableitung ist demnach auch

$$\int\Big\{\sum_{\mu,\nu}[\sqrt{g}J]_{\mu\nu}p^{\mu\nu} + \sum_{\mu}[\sqrt{g}J]_{\mu}p_{\mu}\Big\}\,d\omega = 0.$$

---

[6]) Den Beweis dieses Satzes hat allgemein Emmy Noether geliefert (Göttinger Nachr. 1918, Heft 2: „Invariante Variationsprobleme"). Die in Theorem 2 angegebenen Identitäten sind in meiner ersten Mitteilung zwar nur für den Fall behauptet worden, daß die Invariante von den $g^{\mu\nu}$ und deren Ableitungen abhängt; aber das dort eingeschlagene und im Text reproduzierte Beweisverfahren gilt ebenso auch für unsere allgemeine Invariante J. In der allgemeinen Form sind die angegebenen Identitäten zuerst von F. Klein auf Grund der Methode der infinitesimalen Transformation abgeleitet worden (Gött. Nachr. 1917, Heft 3: „Zu Hilberts erster Note über die Grundlagen der Physik").

Der Integrand hier läßt sich in der Form

$$\sum_{s,l}(i_s p^s + i_s^l p_l^s)$$

schreiben. Aus der so entstehenden Formel

$$\int \sum_{s,l}(i_s p^s + i_s^l p_l^s)\, d\omega = 0$$

erhalten wir

$$\sum_s \int \left(i_s - \sum_l \frac{\partial i_s^l}{\partial x_l}\right) p^s\, d\omega = 0$$

und damit auch die Behauptung unseres Theorems 2.

Zur Bestimmung der Weltfunktion H sind noch weitere Axiome erforderlich. Sollen die Grundgleichungen (4), (5) der Gravitation und der Elektrodynamik nur zweite Ableitungen der $g^{\mu\nu}$ enthalten, so muß H sich additiv zusammensetzen aus einer linearen Funktion mit konstanten Koeffizienten von der Invariante

$$K = \sum_{\mu,\nu} g^{\mu\nu} K_{\mu\nu},$$

wo $K_{\mu\nu}$ den Riemannschen Krümmungstensor

$$K_{\mu\nu} = \sum_{\varkappa}\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left\{\begin{matrix}\mu\varkappa\\ \varkappa\end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial x_\varkappa}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{matrix}\right\}\right) + \sum_{\varkappa,\lambda}\left(\left\{\begin{matrix}\mu\varkappa\\ \lambda\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\lambda\nu\\ \varkappa\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \lambda\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\lambda\varkappa\\ \varkappa\end{matrix}\right\}\right)$$

bedeutet, und einer Invariante L, die nur von $g^{\mu\nu}$, $g_l^{\mu\nu}$, q_s, q_{sk} abhängt. Wir machen folgende spezielle Annahme:

Axiom III (Axiom von der Gravitation und der Elektrizät). *Die Weltfunktion H hat die Gestalt*

$$H = K + L,$$

wo K die aus dem Riemannschen Tensor entspringende Invariante, die Krümmung, ist und L nur von den $g^{\mu\nu}$, q_s, q_{sk} abhängt.

Hiernach nehmen die Gravitationsgleichungen die Form

$$(8) \qquad [\sqrt{g}K]_{\mu\nu} = -\frac{\partial \sqrt{g}L}{\partial g^{\mu\nu}} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4),$$

und die elektrodynamischen Gleichungen die Form

$$(9) \qquad \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial \sqrt{g}L}{\partial q_{hk}} = \frac{\partial L}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, 3, 4)$$

an.

Um den Ausdruck von $[\sqrt{g}K]_{\mu\nu}$ zu bestimmen, spezialisiere man zunächst das Koordinatensystem so, daß für den betrachteten Weltpunkt die $g_s^{\mu\nu}$ sämtlich verschwinden. Man findet auf diese Weise:

$$[\sqrt{g}K]_{\mu\nu} = \sqrt{g}\left(K_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} K\right).$$

Führen wir noch für den Tensor

$$-\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}\,L}{\partial g^{\mu\nu}}$$

die Bezeichnung $T_{\mu\nu}$ ein, so lauten die Gravitationsgleichungen

$$K_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}K=T_{\mu\nu}.$$

Andererseits wenden wir auf die Invariante L das Theorem 1 an und erhalten dadurch

$$(10)\qquad \sum_{\mu,\nu,m}\frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}}(g^{\mu m}p^{\nu}_{m}+g^{\nu m}p^{\mu}_{m})-\sum_{s,m}\frac{\partial L}{\partial q_s}q_m p^m_s$$
$$-\sum_{s,k,m}\frac{\partial L}{\partial q_{sk}}(q_{sm}p^m_k+q_{mk}p^m_s+q_m p^m_{sk})=0.$$

Das Nullsetzen des Koeffizienten von p^m_{sk} linker Hand liefert die Gleichung

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q_{sk}}+\frac{\partial L}{\partial q_{ks}}\right)q_m=0$$

oder

$$(11)\qquad \frac{\partial L}{\partial q_{sk}}+\frac{\partial L}{\partial q_{ks}}=0,$$

d. h. die Ableitungen der elektrodynamischen Potentiale q_s treten nur in den Verbindungen

$$M_{ks}=q_{sk}-q_{ks}$$

auf. Damit erkennen wir, daß bei unseren Annahmen die Invariante L außer von den Potentialen $g^{\mu\nu}$, q_s lediglich von den Komponenten des schiefsymmetrischen invarianten Tensors

$$M=(M_{ks})=\mathrm{Rot}\,(q_s),$$

d. h. des sogenannten elektromagnetischen Sechservektors abhängt. Und hieraus folgt weiter, daß

$$\frac{\partial L}{\partial q_{sk}}=\frac{\partial L}{\partial M_{ks}}=H^{ks}$$

ein schiefsymmetrischer kontravarianter Tensor, sowie daß

$$\frac{\partial L}{\partial q_k}=r^k$$

ein kontravarianter Vektor ist.

Mit Anwendung der eingeführten Bezeichnungen erhalten die elektrodynamischen Gleichungen die Form:

$$(12)\qquad \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_k\frac{\partial\sqrt{g}H^{kh}}{\partial x_k}=r^h\qquad (h=1,2,3,4).$$

Man erkennt in diesen Gleichungen eine Verallgemeinerung des einen Systems der Maxwellschen Gleichungen; das andere System erhält man aus den Gleichungen:

$$M_{ks} = q_{sk} - q_{ks}$$

durch Differentiation und Addition:

$$\frac{\partial M_{ks}}{\partial x_t} + \frac{\partial M_{st}}{\partial x_k} + \frac{\partial M_{tk}}{\partial x_s} = 0 \qquad (t, k, s = 1, 2, 3, 4). \tag{13}$$

Wir sehen also, daß die Form dieser „verallgemeinerten Maxwellschen Gleichungen“ (12), (13) im wesentlichen schon durch die Forderung der allgemeinen Invarianz, also auf Grund von Axiom II, bestimmt ist. Setzen wir in der Identität (10) den Koeffizienten von p_m^ν linker Hand gleich Null, so erhalten wir mit Benutzung von (11)

$$2\sum_{\mu} \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} g^{\mu m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} q_\nu - \sum_s \frac{\partial L}{\partial M_{ms}} M_{\nu s} = 0 \qquad (\mu = 1, 2, 3, 4), \tag{14}$$

also

$$2\sum_{\mu} \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} g^{\mu m} = \sum_s H^{ms} M_{\nu s} + r^m q_\nu$$

oder

$$-\frac{2}{\sqrt{g}} \sum_{\mu} \frac{\partial \sqrt{g} L}{\partial g^{\mu\nu}} g^{\mu m} = L\delta_\nu^m - \sum_s H^{ms} M_{\nu s} - r^m q_\nu,$$

$$\delta_\nu^m = 0 \quad (m \neq \nu),$$

$$\delta_\nu^\nu = 1.$$

Demnach ergibt sich für $T_{\mu\nu}$ die Darstellung:

$$T_{\mu\nu} = \sum_{\mu} g_{\mu m} T_\nu^m,$$

$$T_\nu^m = \frac{1}{2}\{L\delta_\nu^m - \sum_s H^{ms} M_{\nu s} - r^m q_\nu\}.$$

Der Ausdruck rechts stimmt überein mit dem Mieschen elektromagnetischen Energietensor, und wir finden also, daß der Miesche Energietensor nichts anderes ist als der durch Differentiation der Invariante L nach den Gravitationspotentialen $g^{\mu\nu}$ entstehende allgemein invariante Tensor — ein Umstand, der mich zum erstenmal auf den notwendigen engen Zusammenhang zwischen der Einsteinschen allgemeinen Relativitätstheorie und der Mieschen Elektrodynamik hingewiesen und mir die Überzeugung von der Richtigkeit der hier entwickelten Theorie gegeben hat.

Die Anwendung des Theorems 2 auf die Invariante K liefert:

$$\sum_{\mu,\nu} [\sqrt{g} K]_{\mu\nu} g_s^{\mu\nu} + 2\sum_m \frac{\partial}{\partial x_m}\Big(\sum_{\mu} [\sqrt{g} K]_{\mu s} g^{\mu m}\Big) = 0. \tag{15a}$$

Die Anwendung auf L ergibt

$$\sum_{\mu,\nu}(-\sqrt{g}\,T_{\mu\nu})\,g_s^{\mu\nu}+2\sum_m \frac{\partial}{\partial x_m}(-\sqrt{g}\,T_s^m)$$
$$+\sum_\mu[\sqrt{g}\,L]_\mu\, q_{\mu s}-\sum_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}([\sqrt{g}\,L]_\mu\, q_s)=0 \qquad (s=1,2,3,4). \tag{15b}$$

Als Folge der elektrodynamischen Grundgleichungen erhalten wir hieraus:

$$\sum_{\mu,\nu}\sqrt{g}\,T_{\mu\nu}g_s^{\mu\nu}+2\sum_m\frac{\partial\sqrt{g}\,T_s^m}{\partial x_m}=0. \tag{16}$$

Diese Gleichungen (16) ergeben sich auch als Folge der Gravitationsgleichungen, auf Grund von (15a). Sie haben die Bedeutung der mechanischen Grundgleichungen. Im Falle der speziellen Relativität, wenn die $g_{\mu\nu}$ Konstante sind, gehen sie über in die Gleichungen

$$\sum\frac{\partial\,T_s^m}{\partial x_m}=0,$$

welche die Erhaltung von Energie und Impuls ausdrücken.

Aus den Gleichungen (16) folgt auf Grund der Identitäten (15b):

$$\sum_\mu[\sqrt{g}\,L]_\mu\, q_{\mu s}-\sum_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}([\sqrt{g}\,L]_\mu\, q_s)=0$$

oder

$$\sum_\mu\left\{M_{\mu s}[\sqrt{g}\,L]_\mu+q_s\frac{\partial}{\partial x_\mu}([\sqrt{g}\,L]_\mu)\right\}=0, \tag{17}$$

d. h. aus den Gravitationsgleichungen (4) folgen vier voneinander unabhängige lineare Relationen zwischen den elektrodynamischen Grundgleichungen (5) und ihren ersten Ableitungen. Dies ist der genaue mathematische Ausdruck für den Zusammenhang zwischen Gravitation und Elektrodynamik, der die ganze Theorie beherrscht.

Da L unserer Annahme zufolge nicht von den Ableitungen der $g^{\mu\nu}$ abhängen soll, so muß L eine Funktion von gewissen vier allgemeinen Invarianten sein, die den von Mie angegebenen speziellen orthogonalen Invarianten entsprechen und von denen die beiden einfachsten diese sind:

$$Q=\sum_{k,l,m,n}M_{mn}M_{kl}\,g^{mk}g^{nl}$$

und

$$q=\sum_{k,l}q_k q_l\, g^{kl}.$$

Der einfachste und im Hinblick auf den Bau von K nächstliegende Ansatz für L ist zugleich derjenige, der der Mieschen Elektrodynamik entspricht, nämlich

$$L=\alpha Q+f(q) \qquad (\alpha=\text{konst.}).$$

Gemäß diesem Ansatz erhält man zwischen den Größen, die in den verallgemeinerten Maxwellschen Gleichungen auftreten, die Beziehungen

$$H^{ks} = 4\alpha M^{ks},$$
$$r^k = 2 f'(q) q^k,$$

wo

$$M^{ks} = \sum_{\mu,\nu} g^{k\mu} g^{s\nu} M_{\mu\nu},$$
$$q^k = \sum_l g^{kl} q_l$$

zu setzen ist. Für den ganz speziellen Fall

$$f(q) = \beta q \qquad (\beta = \text{konst.})$$

folgt, daß der „Stromvektor" r^k proportional dem kontravarianten Vektor q^k wird.

Teil II.

Es soll nun der Zusammenhang der Theorie mit der Erfahrung näher erörtert werden. Dazu ist noch ein weiteres Axiom erforderlich.

Axiom IV (Raum-Zeit-Axiom). *Es soll die quadratische Form*

$$G(X_1, X_2, X_3, X_4) = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} X_\mu X_\nu \tag{18}$$

von der Art sein, daß bei ihrer Darstellung als Summe von vier Quadraten linearer Formen der X_s stets drei Quadrate mit positivem und ein Quadrat mit negativem Vorzeichen auftritt.

Die quadratische Form (18) liefert für unsere vierdimensionale Welt der x_s die Maßbestimmung einer Pseudogeometrie. Die Determinante g der $g_{\mu\nu}$ fällt negativ aus.

Ist in dieser Geometrie eine Kurve

$$x_s = x_s(p) \qquad (s = 1, 2, 3, 4)$$

gegeben, wo $x_s(p)$ irgendwelche reelle Funktionen des Parameters p bedeuten, so kann diese in Teilstücke zerlegt werden, auf denen einzeln der Ausdruck

$$G\left(\frac{dx_1}{dp}, \frac{dx_2}{dp}, \frac{dx_3}{dp}, \frac{dx_4}{dp}\right)$$

nicht sein Vorzeichen ändert: ein Kurvenstück, für welches

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) > 0$$

ausfällt, heiße eine *Strecke* und das längs dieses Kurvenstücks genommene Integral

$$\lambda = \int \sqrt{G\left(\frac{dx_s}{dp}\right)}\, dp$$

heiße die *Länge der Strecke*; ein Kurvenstück, für welches

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) < 0$$

ausfällt, heiße eine *Zeitlinie* und das längs dieses Kurvenstückes genommene Integral

$$\tau = \int \sqrt{-G\left(\frac{dx_s}{dp}\right)}\, dp$$

heiße die *Eigenzeit der Zeitlinie*; endlich heiße ein Kurvenstück, längs dessen

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) = 0$$

wird, eine *Nullinie*.

Um diese Begriffe unserer Pseudogeometrie anschaulich zu machen, denken wir uns ein ideales Maßinstrument: die *Lichtuhr*, mittels derer wir die Eigenzeit längs einer jeden Zeitlinie bestimmen können.

Zunächst zeigen wir, daß dieses Instrument ausreicht, um mit seiner Hilfe die Werte der $g_{\mu\nu}$ als Funktionen von x_s zu berechnen, sobald nur ein bestimmtes Raum-Zeit-Koordinatensystem x_s eingeführt worden ist. In der Tat wählen wir irgend zehn Zeitlinien aus, die sämtlich längs verschiedenen Richtungen in den nämlichen Weltpunkt x_s einlaufen, so daß diesem Endpunkt jedesmal der Parameterwert p zukommt, so ergibt sich für jede der zehn Zeitlinien im Endpunkt die Gleichung

$$\left(\frac{d\lambda^{(h)}}{dp}\right)^2 = G\left(\frac{dx_s^{(h)}}{dp}\right), \qquad (h = 1, 2, \ldots, 10);$$

hier sind die linken Seiten bekannt, sobald wir die Eigenzeiten $\tau^{(h)}$ mittels der Uhr bestimmt haben. Setzen wir nun zur Abkürzung

$$D(u) = \begin{vmatrix} \left(\frac{dx_1^{(1)}}{dp}\right)^2, & \frac{dx_1^{(1)}}{dp}\frac{dx_2^{(1)}}{dp}, & \ldots, & \left(\frac{dx_4^{(1)}}{dp}\right)^2, & \left(\frac{d\lambda^{(1)}}{dp}\right)^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \left(\frac{dx_1^{(10)}}{dp}\right)^2, & \frac{dx_1^{(10)}}{dp}\frac{dx_2^{(10)}}{dp}, & \ldots, & \left(\frac{dx_4^{(10)}}{dp}\right)^2, & \left(\frac{d\lambda^{(10)}}{dp}\right)^2 \\ X_1^2, & X_1 X_2, & \ldots, & X_4^2, & u \end{vmatrix},$$

so wird offenbar

$$(19) \qquad G(X_s) = -\frac{D(0)}{\frac{\partial D}{\partial u}},$$

wodurch sich zugleich für die Richtungen der ausgewählten zehn Zeitlinien im Punkte $x_s(p)$ die Bedingung

$$\frac{\partial D}{\partial u} \neq 0$$

als notwendig herausstellt.

Ist G nach (19) berechnet, so würde die Anwendung des Verfahrens auf irgendeine 11-te Zeitlinie, die in $x_s(p)$ endigt, die Gleichung

$$\left(\frac{d\lambda^{(11)}}{dp}\right)^2 = G\left(\frac{dx^{(11)}}{dp}\right)$$

liefern und diese Gleichung wäre dann sowohl eine Kontrolle für die Richtigkeit des Instrumentes als auch eine experimentelle Bestätigung dafür, daß die Voraussetzungen der Theorie für die wirkliche Welt zutreffen.

Der axiomatische Aufbau unserer Pseudogeometrie ließe sich ohne Schwierigkeit durchführen: erstens ist ein Axiom aufzustellen, auf Grund dessen folgt, daß Länge bzw. Eigenzeit Integrale sein müssen, deren Integrand lediglich eine Funktion der x_s und ihrer ersten Ableitungen nach dem Parameter ist; als ein solches Axiom wäre etwa der bekannte Enveloppensatz für geodätische Linien verwendbar. Zweitens ist ein Axiom erforderlich, wonach die Sätze der pseudo-Euklidischen Geometrie d. h. das alte Relativitätsprinzip im Unendlichkleinen gelten soll; hierzu wäre das von W. Blaschke[7]) aufgestellte Axiom besonders geeignet, welches aussagt, daß die Bedingung der Orthogonalität für irgend zwei Richtungen — sei es bei Strecken oder Zeitlinien — stets eine gegenseitige sein soll.

Es seien noch kurz die hauptsächlichsten Tatsachen zusammengestellt, die uns die Monge-Hamiltonsche Theorie der Differentialgleichungen für unsere Pseudogeometrie lehrt.

Jedem Weltpunkte x_s gehört ein Kegel zweiter Ordnung zu, der in x_s seine Spitze hat und in den laufenden Punktkoordinaten X_s durch die Gleichung

$$G(X_1 - x_1, X_2 - x_2, X_3 - x_3, X_4 - x_4) = 0$$

bestimmt ist; derselbe heiße der zum Punkte x_s zugehörige *Nullkegel.* Die sämtlichen Nullkegel bilden ein vierdimensionales Kegelfeld, zu dem einerseits die „Mongesche" Differentialgleichung

$$G\left(\frac{dx_1}{dp}, \frac{dx_2}{dp}, \frac{dx_3}{dp}, \frac{dx_4}{dp}\right) = 0$$

und andererseits die „Hamiltonsche" partielle Differentialgleichung

$$H\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \frac{\partial f}{\partial x_4}\right) = 0 \tag{20}$$

gehört, wo H die zu G reziproke quadratische Form

$$H(U_1, U_2, U_3, U_4) = \sum_{\mu\nu} g^{\mu\nu} U_\mu U_\nu$$

---

[7]) Räumliche Variationsprobleme mit symmetrischer Transversalitätsbedingung, Leipziger Berichte, Math.-phys. Kl. **68** (1916), S. 50.

bedeutet. Die Charakteristiken der Mongeschen und zugleich die der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung (20) sind die geodätischen Nullinien. Die sämtlichen von einem bestimmten Weltpunkt a_s $(s=1,2,3,4)$ ausgehenden geodätischen Nullinien erzeugen eine dreidimensionale Punktmannigfaltigkeit, die die zum Weltpunkt a_s gehörige *Zeitscheide* heißen möge. Die Zeitscheide besitzt in a_s einen Knotenpunkt, dessen Tangentialkegel gerade der zu a_s gehörige Nullkegel ist. Bringen wir die Gleichung der Zeitscheide auf die Gestalt

$$x_4 = \varphi(x_1, x_2, x_3),$$

so ist

$$f = x_4 - \varphi(x_1, x_2, x_3)$$

ein Integral der Hamiltonschen Differentialgleichung (20). Die sämtlichen vom Punkte a_s ausgehenden Zeitlinien verlaufen gänzlich innerhalb desjenigen vierdimensionalen Weltteiles, der die zu a_s gehörige Zeitscheide als Begrenzung hat.

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns dem Problem der Kausalität in der neuen Physik zu.

Bisher haben wir alle Koordinatensysteme x_s, die aus irgendeinem durch eine willkürliche Transformation hervorgehen, als gleichberechtigt angesehen. Diese Willkür muß eingeschränkt werden, sobald wir die Auffassung zur Geltung bringen wollen, daß zwei auf der nämlichen Zeitlinie gelegene Weltpunkte im Verhältnis von Ursache und Wirkung zueinander stehen können und daß es daher nicht möglich sein soll, solche Weltpunkte auf gleichzeitig zu transformieren. Indem wir x_4 als die *eigentliche* Zeitkoordinate auszeichnen, stellen wir folgende Definitionen auf:

Ein *eigentliches* Raum-Zeit-Koordinatensystem ist ein solches, für welches außer $g < 0$ stets noch die folgenden vier Ungleichungen

$$(21) \qquad g_{11} > 0, \qquad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0, \qquad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} > 0, \qquad g_{44} < 0$$

erfüllt sind. Eine Transformation, die ein solches Raum-Zeit-Koordinatensystem in ein anderes eigentliches Raum-Zeit-Koordinatensystem überführt, heiße eine *eigentliche* Raum-Zeit-Koordinatentransformation.

Die vier Ungleichungen drücken aus, daß in irgendeinem Weltpunkte a_s der zugehörige Nullkegel den linearen Raum

$$x_4 = a_4$$

ganz außerhalb läßt. die Gerade

$$x_1 = a_1, \qquad x_2 = a_2, \qquad x_3 = a_3$$

dagegen im Inneren enthält; die letztere Gerade ist daher stets eine Zeitlinie.

Es sei nunmehr irgendeine Zeitlinie $x_s = x(p)$ gegeben; wegen

$$G\left(\frac{dx}{dp}\right) < 0$$

folgt dann, daß in einem eigentlichen Raum-Zeit-Koordinatensystem stets

$$\frac{dx_4}{dp} \neq 0$$

sein und folglich längs einer Zeitlinie die eigentliche Zeitkoordinate x_4 stets wachsen bzw. abnehmen muß. Da eine Zeitlinie bei jeder Koordinatentransformation Zeitlinie bleibt, so können zwei Weltpunkte einer Zeitlinie durch eine eigentliche Raum-Zeit-Koordinatentransformation niemals den gleichen Wert der Zeitkoordinate x_4 erhalten d. h. unmöglich auf gleichzeitig transformiert werden.

Andererseits wenn die Punkte einer Kurve eigentlich auf gleichzeitig transformiert werden können, so gilt nach der Transformation für diese Kurve

$$x_4 = \text{konst.}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{dx_4}{dp} = 0,$$

mithin

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{dp} \frac{dx_\nu}{dp} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3),$$

und hier ist wegen der ersten drei unserer Ungleichungen (21) die rechte Seite positiv; die Kurve charakterisiert sich demnach als eine Strecke.

So sehen wir, daß die dem Kausalitätsprinzip zugrunde liegenden Begriffe von Ursache und Wirkung auch in der neuen Physik zu keinerlei inneren Widersprüchen führen, sobald wir nur stets die Ungleichungen (21) zu unseren Grundgleichungen hinzunehmen, d. h. uns auf den Gebrauch eigentlicher Raum-Zeit-Koordinaten beschränken.

An dieser Stelle sei auf ein späterhin nützliches besonderes Raum-Zeit-Koordinatensystem hingewiesen, welches ich das *Gaußische Koordinatensystem* nennen möchte, weil es die Verallgemeinerung desjenigen geodätischen Polarkoordinatensystems ist, das Gauß in die Flächentheorie eingeführt hat. Es sei in unserer vierdimensionalen Welt irgendein dreidimensionaler Raum gegeben von der Art, daß jede in diesem Raum verlaufende Kurve eine Strecke ist: *ein Streckenraum*, wie ich einen solchen nennen möchte; x_1, x_2, x_3 seien irgendwelche Punktkoordinaten dieses Raumes. Wir konstruieren nun in einem jeden Punkte x_1, x_2, x_3 desselben die zu ihm orthogonale geodätische Linie, die eine Zeitlinie sein wird, und tragen auf derselben x_4 als Eigenzeit auf; dem so erhaltenen Punkte der vierdimensionalen Welt weisen wir die Koordinatenwerte $x_1 x_2 x_3 x_4$ zu. Für diese Koordinaten wird, wie leicht zu sehen ist,

$$G(X_s) = \sum_{\mu\nu}^{1,2,3} g_{\mu\nu} X_\mu X_\nu - X_4^2, \tag{22}$$

d. h. das Gaußische Koordinatensystem ist analytisch durch die Gleichungen

$$g_{14} = 0, \quad g_{24} = 0, \quad g_{34} = 0, \quad g_{44} = -1 \tag{23}$$

charakterisiert. Wegen der vorausgesetzten Beschaffenheit des dreidimensionalen Raumes $x_4 = 0$ fällt die rechter Hand in (22) stehende quadratische Form der Variablen X_1, X_2, X_3 notwendig positiv definit aus, d. h. die drei ersten der Ungleichungen (21) sind erfüllt, und da dies auch für die vierte gilt, so erweist sich das Gaußische Koordinatensystem stets als ein eigentliches Raum-Zeit-Koordinatensystem.

Wir kehren nun zur Erforschung des Kausalitätsprinzips in der Physik zurück. Als den hauptsächlichen Inhalt desselben sehen wir die Tatsache an, die bisher in jeder physikalischen Theorie galt, daß aus der Kenntnis der physikalischen Größen und ihrer zeitlichen Ableitungen in der Gegenwart allemal die Werte dieser Größen für die Zukunft eindeutig bestimmt werden können: die Gesetze der bisherigen Physik fanden nämlich ausnahmslos ihren Ausdruck in einem System von Differentialgleichungen solcher Art, daß die Anzahl der darin auftretenden Funktionen wesentlich mit der Anzahl der unabhängigen Differentialgleichungen übereinstimmte, und somit bot dann der bekannte Cauchysche Satz über die Existenz von Integralen von Differentialgleichungen unmittelbar den Beweisgrund für jene Tatsache.

Unsere Grundgleichungen (4) und (5) der Physik sind nun keineswegs von der oben charakterisierten Art; vielmehr sind, wie ich gezeigt habe, vier von ihnen eine Folge der übrigen: wir können die elektrodynamischen Gleichungen (5) als Folge der zehn Gravitationsgleichungen (4) ansehen und haben somit für die 14 Potentiale $g_{\mu\nu}$, q_s nur die zehn voneinander wesentlich unabhängigen Gleichungen (4).

Sobald wir an der Forderung der allgemeinen Invarianz für die Grundgleichungen der Physik festhalten, ist der eben genannte Umstand auch wesentlich und notwendig. Gäbe es nämlich für die 14 Potentiale noch weitere von (4) unabhängige invariante Gleichungen, so würde die Einführung eines Gaußischen Koordinatensystems vermöge (23) für die zehn physikalischen Größen

$$g_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3), \qquad q_s \quad (s = 1, 2, 3, 4)$$

ein System von Gleichungen liefern, die wiederum voneinander unabhängig wären und, da sie mehr als zehn sind, ein überbestimmtes System bilden würden.

Unter solchen Umständen also, wie sie in der neuen Physik der allgemeinen Relativität zutreffen, ist es keineswegs mehr möglich, aus der Kenntnis der physikalischen Größen in Gegenwart und Vergangenheit eindeutig ihre Werte in der Zukunft zu folgern. Um dies anschaulich an einem Beispiel zu zeigen, seien unsere Grundgleichungen (4) und (5) in dem besonderen Falle integriert, der dem Vorhandensein eines einzigen dauernd ruhenden Elektrons entspricht, so daß sich die 14 Potentiale

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu}(x_1, x_2, x_3) \\ q_s &= q_s\ (x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

als bestimmte Funktionen von x_1, x_2, x_3 ergeben, die von der Zeit x_4 sämtlich unabhängig sind, und überdies so, daß noch die drei ersten Komponenten r^1, r^2, r^3 der Viererdichte verschwinden mögen. Wir wenden sodann auf die Potentiale die folgende Koordinatentransformation an:

$$\begin{cases} x_1 = x_1' & \text{für } x_4' \leqq 0 \\ x_1 = x_1' + e^{-\frac{1}{x_4'^2}} & \text{für } x_4' > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= x_2' \\ x_3 &= x_3' \\ x_4 &= x_4'; \end{aligned}$$

die transformierten Potentiale $g'_{\mu\nu}, q'_s$ sind für $x_4' \leqq 0$ die gleichen Funktionen von x_1', x_2', x_3' wie die $g_{\mu\nu}, q_s$ in den ursprünglichen Variablen x_1, x_2, x_3, während die $g'_{\mu\nu}, q'_s$ für $x_4' > 0$ wesentlich auch von der Zeitkoordinate x_4' abhängen, d. h. die Potentiale $g'_{\mu\nu}, q'_s$ stellen ein Elektron dar, das bis zur Zeit $x_4' = 0$ ruht, dann aber sich in seinen Teilen in Bewegung setzt.

Dennoch glaube ich, daß es nur einer schärferen Erfassung der dem Prinzip der allgemeinen Relativität[8]) zugrunde liegenden Idee bedarf, um das Kausalitätsprinzip auch in der neuen Physik aufrechtzuhalten. Dem Wesen des neuen Relativitätsprinzipes entsprechend müssen wir nämlich die Invarianz nicht nur für die allgemeinen Gesetze der Physik verlangen, sondern auch jeder Einzelaussage in der Physik den invarianten Charakter zusprechen, falls sie einen physikalischen Sinn haben soll — im Einklang damit, daß jede physikalische Tatsache letzten Endes durch Lichtuhren, d. h. durch Instrumente von *invariantem* Charakter fest-

[8]) In seiner ursprünglichen, nunmehr verlassenen Theorie hatte A. Einstein (Sitzungsberichte der Akad. zu Berlin 1914, S. 1067) in der Tat, um das Kausalitätsprinzip in der alten Fassung zu retten, gewisse 4 nicht invariante Gleichungen für die $g_{\mu\nu}$ besonders postuliert.

stellbar sein muß. Gerade so wie in der Kurven- und Flächentheorie eine Aussage, für die die Parameterdarstellung der Kurve oder Fläche gewählt ist, für die Kurve oder Fläche selbst keinen geometrischen Sinn hat, wenn nicht die Aussage gegenüber einer beliebigen Transformation der Parameter invariant bleibt oder sich in eine invariante Form bringen läßt, so müssen wir auch in der Physik eine Aussage, die nicht gegenüber jeder beliebigen Transformation des Koordinatensystems invariant bleibt, als *physikalisch sinnlos* bezeichnen. Beispielsweise hat im oben betrachteten Falle des ruhenden Elektrons die Aussage, daß dasselbe etwa zur Zeit $x_4 = 1$ ruhe, physikalisch keinen Sinn, weil diese Aussage nicht invariant ist.

Was nun das Kausalitätsprinzip betrifft, so mögen für die Gegenwart in irgendeinem gegebenen Koordinatensystem die physikalischen Größen und ihre zeitlichen Ableitungen bekannt sein: dann wird eine Aussage nur physikalischen Sinn haben, wenn sie gegenüber allen denjenigen Transformationen invariant ist, bei denen jene als bekannt vorausgesetzten Werte für die Gegenwart unverändert bleiben; ich behaupte, daß die Aussagen dieser Art für die Zukunft sämtlich eindeutig bestimmt sind, d. h. das Kausalitätsprinzip gilt in dieser Fassung:

Aus der Kenntnis der 14 physikalischen Potentiale $g_{\mu\nu}$, q_s in der Gegenwart folgen alle Aussagen über dieselben für die Zukunft notwendig und eindeutig, sofern sie physikalischen Sinn haben.

Um diese Behauptung zu beweisen, benutzen wir das Gaußische Raum-Zeit-Koordinatensystem. Die Einführung von (23) in die Grundgleichungen (4) liefert uns für die 10 Potentiale

$$(24) \qquad g_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3), \qquad q_s \quad (s = 1, 2, 3, 4)$$

ein System von ebenso vielen partiellen Differentialgleichungen; wenn wir diese auf Grund der gegebenen Anfangswerte für $x_4 = 0$ integrieren, so finden wir auf eindeutige Weise die Werte von (24) für $x_4 > 0$. Da das Gaußische Koordinatensystem selbst eindeutig festgelegt ist, so sind auch alle auf dieses Koordinatensystem bezogenen Aussagen über jene Potentiale (24) von invariantem Charakter.

Die Formen, in denen physikalisch sinnvolle, d. h. invariante Aussagen mathematisch zum Ausdruck gebracht werden können, sind sehr mannigfaltig.

Erstens. Dies kann mittels eines invarianten Koordinatensystems geschehen. Ebenso wie das vorhin benutzte Gaußische ist zu solchem Zwecke auch das bekannte Riemannsche und desgleichen dasjenige Raum-Zeit-Koordinatensystem verwendbar, in welchem die Elektrizität auf Ruhe und Einheitsdichte transformiert erscheint. Bezeichnet $f(q)$, wie am Schluß von Teil I die im Hamiltonschen Prinzip auftretende Funktion der Invariante

$$q = \sum_{kl} q_k q_l g^{kl},$$

so ist

$$r^s = 2 f'(q) \cdot q^s = 2 f'(q) \sum_l g^{sl} q_l$$

die Viererdichte der Elektrizität; sie stellt einen kontravarianten Vektor dar und ist daher für ein Weltgebiet, in dem $f'(q) \neq 0$ ist und das Viererpotential nirgends verschwindet, auf $(0, 0, 0, 1)$ transformierbar. Nach dieser Transformation sind aus den vier Gleichungen

$$\sum_l g^{sl} q_l = 0, \quad (s = 1, 2, 3), \qquad \sum_l g^{4l} q_l = \frac{1}{2 f'(q)}$$

die vier Komponenten des Viererpotentials q_s durch die $g_{\mu\nu}$ ausdrückbar und jede Beziehung zwischen den $g_{\mu\nu}$ in diesem Koordinatensysteme ist sodann eine invariante Aussage.

Für Partikularlösungen der Grundgleichungen kann es besondere invariante Koordinatensysteme geben; so bilden z. B. im unten behandelten Falle des zentrisch-symmetrischen Gravitationsfeldes r, ϑ, φ, t ein bis auf Drehungen invariantes Koordinatensystem.

Zweitens. Die Aussage, wonach sich ein Koordinatensystem finden läßt, in welchem die 14 Potentiale $g_{\mu\nu}$, q_s für die Zukunft gewisse bestimmte Werte haben oder gewisse bestimmte Beziehungen erfüllen, ist stets eine invariante und daher physikalisch sinnvoll. Der mathematische invariante Ausdruck für eine solche Aussage wird durch Elimination der Koordinaten aus jenen Beziehungen erhalten. Ein Beispiel bietet der oben betrachtete Fall des ruhenden Elektrons: der wesentliche und physikalisch sinnvolle Inhalt des Kausalitätsprinzips drückt sich hier in der Aussage aus, daß das für die Zeit $x_4 \leqq 0$ ruhende Elektron bei geeigneter Wahl des Raum-Zeit-Koordinatensystems auch für die Zukunft $x_4 > 0$ beständig in allen seinen Teilen ruht.

Drittens. Auch ist eine Aussage invariant und hat daher stets physikalischen Sinn, wenn sie für jedes beliebige Koordinatensystem gültig ist, ohne daß dabei die auftretenden Ausdrücke formal invarianten Charakter zu besitzen brauchen.

Nach meinen Ausführungen ist die Physik eine vierdimensionale Pseudogeometrie, deren Maßbestimmung $g_{\mu\nu}$ durch die Grundgleichungen (4) und (5) an die elektromagnetischen Größen, d. h. an die Materie gebunden ist. Mit dieser Erkenntnis wird nun eine alte geometrische Frage zur Lösung reif, die Frage nämlich, ob und in welchem Sinne die Euklidische Geometrie — von der wir aus der Mathematik nur wissen, daß sie ein logisch widerspruchsfreier Bau ist — auch in der Wirklichkeit Gültigkeit besitzt.

Die alte Physik mit dem absoluten Zeitbegriff übernahm die Sätze der Euklidischen Geometrie und legte sie vorweg einer jeden speziellen physikalischen Theorie zugrunde. Auch Gauß verfuhr nur wenig anders: er konstruierte hypothetisch eine nicht-Euklidische Physik, indem er unter Beibehaltung der absoluten Zeit von den Sätzen der Euklidischen Geometrie nur das Parallelenaxiom fallen ließ; die Messung der Winkel eines Dreieckes mit großen Dimensionen zeigte ihm dann die Ungültigkeit dieser nicht-Euklidischen Physik.

Die neue Physik des Einsteinschen allgemeinen Relativitätsprinzips nimmt gegenüber der Geometrie eine völlig andere Stellung ein. Sie legt weder die Euklidische noch irgendeine andere bestimmte Geometrie vorweg zugrunde, um daraus die eigentlichen physikalischen Gesetze zu deduzieren, sondern die neue Theorie der Physik liefert mit einem Schlage durch ein und dasselbe Hamiltonsche Prinzip die geometrischen und die physikalischen Gesetze, nämlich die Grundgleichungen (4) und (5), welche lehren, wie die Maßbestimmung $g_{\mu\nu}$ — zugleich der mathematische Ausdruck der physkalischen Erscheinung der Gravitation — mit den Werten q_s der elektrodynamischen Potentiale verkettet ist.

Die Euklidische Geometrie ist ein der modernen Physik fremdartiges Ferngesetz: indem die Relativitätstheorie die Euklidische Geometrie als allgemeine Voraussetzung für die Physik ablehnt, lehrt sie vielmehr, daß Geometrie und Physik gleichartigen Charakters sind und als eine Wissenschaft auf gemeinsamer Grundlage ruhen.

Die oben genannte geometrische Frage läuft darauf hinaus, zu untersuchen, ob und unter welchen Voraussetzungen die vierdimensionale Euklidische Pseudogeometrie

$$\begin{array}{llll} g_{11}=1, & g_{22}=1, & g_{33}=1, & g_{44}=-1 \\ g_{\mu\nu}=0 & (\mu \neq \nu) & & \end{array} \tag{25}$$

eine Lösung der Gravitationsgleichungen bzw. die einzige reguläre Lösung derselben ist.

Die Gravitationsgleichungen (8) lauten:

$$[\sqrt{g}\,K]_{\mu\nu} + \frac{\partial \sqrt{g}\,L}{\partial g^{\mu\nu}} = 0,$$

wo

$$[\sqrt{g}\,K]_{\mu\nu} = \sqrt{g}\left(K_{\mu\nu} - \frac{1}{2} K g_{\mu\nu}\right)$$

ist. Bei der Einsetzung der Werte (25) wird

$$[\sqrt{g}\,K]_{\mu\nu} = 0 \tag{26}$$

und für

$$q_s = 0 \qquad (s = 1, 2, 3, 4)$$

wird

$$\frac{\partial \sqrt{g}\, L}{\partial g^{\mu\nu}} = 0;$$

d. h. wenn alle Elektrizität entfernt wird, so ist die pseudo-Euklidische Geometrie möglich. Die Frage, ob sie in diesem Falle auch notwendig ist, d. h. ob — bzw. unter gewissen Zusatzbedingungen — die Werte (25) und die durch Transformation der Koordinaten daraus hervorgehenden Werte der $g_{\mu\nu}$ die einzigen regulären Lösungen der Gleichungen (26) sind, ist eine mathematische, hier nicht allgemein zu erörternde Aufgabe. Ich beschränke mich vielmehr darauf, einige besondere diese Aufgabe betreffende Überlegungen anzustellen.

Im Falle der pseudo-Euklidischen Geometrie haben wir

$$g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu},$$

worin

$$\gamma_{11} = 1, \quad \gamma_{22} = 1, \quad \gamma_{33} = 1, \quad \gamma_{44} = -1,$$
$$\gamma_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu)$$

bedeutet. Für jede dieser pseudo-Euklidischen Geometrie benachbarte Maßbestimmung gilt der Ansatz

$$g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu} + \ldots, \tag{27}$$

wo ε eine gegen Null konvergierende Größe und $h_{\mu\nu}$ Funktionen der x_s sind. Über die Maßbestimmung (27) mache ich die folgenden zwei Annahmen:

I. Die $h_{\mu\nu}$ mögen von der Variabeln x_4 unabhängig sein.

II. Die $h_{\mu\nu}$ mögen im Unendlichen ein gewisses reguläres Verhalten zeigen.

Soll nun die Maßbestimmung (27) für alle ε die Differentialgleichungen (26) erfüllen, so folgt, daß die $h_{\mu\nu}$ notwendig gewisse lineare homogene partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung erfüllen müssen. Diese Differentialgleichungen lauten, wenn man nach Einstein[9])

$$h_{\mu\nu} = k_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\sum_s k_{ss}, \qquad (k_{\mu\nu} = k_{\nu\mu}) \tag{28}$$

$$\delta_{\mu\nu} = 0 \qquad (\mu \neq \nu),$$
$$\delta_{\nu\nu} = 1$$

---

[9]) Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation. Berichte d. Akad. zu Berlin (1916), S. 688.

setzt und zwischen den zehn Funktionen $k_{\mu\nu}$ die vier Relationen

$$\sum_s \frac{\partial k_{\mu s}}{\partial x_s} = 0, \qquad (\mu = 1, 2, 3, 4) \tag{29}$$

annimmt, wie folgt:

$$\Box k_{\mu\nu} = 0, \tag{30}$$

wo zur Abkürzung

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}$$

gesetzt ist.

Die Relationen (29) sind wegen des Ansatzes (28) einschränkende Voraussetzungen für die Funktionen $h_{\mu\nu}$; ich will jedoch zeigen, wie es durch eine geeignete infinitesimale Transformation der Variablen x_1, x_2, x_3, x_4 stets erreicht werden kann, daß für die entsprechenden Funktionen $h'_{\mu\nu}$ nach der Transformation jene einschränkenden Voraussetzungen erfüllt sind.

Zu dem Zwecke bestimme man vier Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ der Variablen, die bzw. den Differentialgleichungen

$$\Box \varphi_\mu = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \sum_\nu h_{\nu\nu} - \sum_\nu \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} \tag{31}$$

genügen. Vermöge der infinitesimalen Transformation

$$x_s = x'_s + \varepsilon \varphi_s$$

geht $g_{\mu\nu}$ über in

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \varepsilon \sum_a g_{a\nu} \frac{\partial \varphi_a}{\partial x_\mu} + \varepsilon \sum_a g_{a\mu} \frac{\partial \varphi_a}{\partial x_\nu} + \cdots$$

oder wegen (27) in

$$g'_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \varepsilon h'_{\mu\nu} + \ldots,$$

wo

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\nu}$$

gesetzt ist. Wählen wir nun

$$k_{\mu\nu} = h'_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \sum_s h'_{ss},$$

so erfüllen diese Funktionen wegen (31) die Einsteinschen Bedingungen (29) und es wird

$$h'_{\mu\nu} = k_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \sum_s k_{ss} \qquad (k_{\mu\nu} = k_{\nu\mu}).$$

Die Differentialgleichungen (30), die nach den obigen Ausführungen für die gefundenen $k_{\mu\nu}$ gelten müssen, gehen wegen der Annahme I in

$$\frac{\partial^2 k_{\mu\nu}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 k_{\mu\nu}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 k_{\mu\nu}}{\partial x_3^2} = 0$$

über und, da die Annahme II — demgemäß verstanden — zu schließen gestattet, daß die $k_{\mu\nu}$ im Unendlichen sich Konstanten nähern, so folgt, daß dieselben überhaupt Konstante sein müssen, d. h.: Durch Variation der Maßbestimmung der pseudo-Euklidischen Geometrie unter den Annahmen I und II ist es nicht möglich, eine reguläre Maßbestimmung zu erlangen, die nicht ebenfalls pseudo-Euklidisch ist und die doch zugleich einer elektrizitätsfreien Welt entspricht.

Die Integration der partiellen Differentialgleichungen (26) gelingt noch in einem andern Falle, der von Einstein[10]) und Schwarzschild[11]) zuerst behandelt worden ist. Ich gebe im folgenden für diesen Fall einen Weg an, der über die Gravitationspotentiale $g_{\mu\nu}$ im Unendlichen keinerlei Voraussetzungen macht und außerdem auch für meine späteren Untersuchungen Vorteile bietet. Die Annahmen über die $g_{\mu\nu}$ sind folgende:

1. Die Maßbestimmung ist auf ein Gaußisches Koordinatensystem bezogen — nur daß g_{44} noch willkürlich gelassen wird; d. h. es ist

$$g_{14} = 0, \quad g_{24} = 0, \quad g_{34} = 0.$$

2. Die $g_{\mu\nu}$ sind von der Zeitkoordinate x_4 unabhängig.

3. Die Gravitation $g_{\mu\nu}$ ist zentrisch symmetrisch in bezug auf den Koordinatenanfangspunkt.

Nach Schwarzschild ist die allgemeinste diesen Annahmen entsprechende Maßbestimmung in räumlichen Polarkoordinaten, wenn

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\vartheta \\ x_2 &= r\sin\vartheta\cos\varphi \\ x_3 &= r\sin\vartheta\sin\varphi \\ x_4 &= t \end{aligned}$$

gesetzt wird, durch den Ausdruck

$$F(r)\,dr^2 + G(r)\,(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) - H(r)\,dt^2 \tag{32}$$

---

10) Perihelbewegung des Merkur. Sitzungsber. d. Akad. zu Berlin (1915), S. 831.

11) Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes. Sitzungsber. d. Akad. zu Berlin (1916), S. 189.

dargestellt, wo $F(r)$, $G(r)$, $H(r)$ noch willkürliche Funktionen von r sind. Setzen wir

$$r^* = \sqrt{G(r)},$$

so sind wir in gleicher Weise berechtigt r^*, ϑ, φ als räumliche Polarkoordinaten zu deuten. Führen wir in (32) r^* anstatt r ein und lassen dann wieder das Zeichen $*$ weg, so entsteht der Ausdruck

$$M(r)dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2 - W(r)dt^2, \tag{33}$$

wo $M(r)$, $W(r)$ die zwei wesentlichen willkürlichen Funktionen von r bedeuten. Die Frage ist, ob und wie diese auf die allgemeinste Weise zu bestimmen sind, damit den Differentialgleichungen (26) Genüge geschieht.

Zu dem Zwecke müssen die bekannten in Teil I angegebenen Ausdrücke $K_{\mu\nu}$, K berechnet werden. Der erste Schritt hierzu ist die Aufstellung der Differentialgleichungen der geodätischen Linien durch Variation des Integrals

$$\int \left(M\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dp}\right)^2 + r^2\sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 - W\left(\frac{dt}{dp}\right)^2 \right) dp.$$

Wir erhalten als Lagrangesche Gleichungen diese:

$$\frac{d^2 r}{dp^2} + \frac{1}{2}\frac{M'}{M}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 - \frac{r}{M}\left(\frac{d\vartheta}{dp}\right)^2 - \frac{r}{M}\sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{W'}{M}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2 = 0,$$

$$\frac{d^2\vartheta}{dp^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{dp}\frac{d\vartheta}{dp} - \sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 = 0,$$

$$\frac{d^2\varphi}{dp^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{dp}\frac{d\varphi}{dp} + 2\operatorname{cotg}\vartheta\frac{d\vartheta}{dp}\frac{d\varphi}{dp} = 0,$$

$$\frac{d^2 t}{dp^2} + \frac{W'}{W}\frac{dr}{dp}\frac{dt}{dp} = 0;$$

hier und in der folgenden Rechnung bedeutet das Zeichen $'$ die Ableitung nach r. Durch Vergleich mit den allgemeinen Differentialgleichungen der geodätischen Linien:

$$\frac{d^2 x_s}{dp^2} + \sum_{\mu\nu}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ s\end{matrix}\right\}\frac{dx_\mu}{dp}\frac{dx_\nu}{dp} = 0$$

entnehmen wir für die Klammersymbole $\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ s\end{matrix}\right\}$ die folgenden Werte — wobei die verschwindenden nicht angegeben sind:

$$\left\{\begin{matrix}11\\ 1\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\frac{M'}{M}, \quad \left\{\begin{matrix}22\\ 1\end{matrix}\right\} = -\frac{r}{M}, \quad \left\{\begin{matrix}33\\ 1\end{matrix}\right\} = -\frac{r}{M}\sin^2\vartheta,$$

$$\left\{\begin{matrix}44\\ 1\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\frac{W'}{M}, \quad \left\{\begin{matrix}12\\ 2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{r}, \quad \left\{\begin{matrix}33\\ 2\end{matrix}\right\} = -\sin\vartheta\cos\vartheta,$$

$$\left\{\begin{matrix}13\\ 3\end{matrix}\right\} = \frac{1}{r}, \quad \left\{\begin{matrix}23\\ 3\end{matrix}\right\} = \operatorname{cotg}\vartheta, \quad \left\{\begin{matrix}14\\ 4\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\frac{W'}{W}.$$

Hiermit bilden wir:

$$K_{11}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}13\\3\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}14\\4\end{Bmatrix}\right)-\frac{\partial}{\partial r}\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}$$
$$+\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}21\\2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}13\\3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}31\\3\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}14\\4\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}41\\4\end{Bmatrix}$$
$$-\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}13\\3\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}14\\4\end{Bmatrix}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\frac{W''}{W}-\frac{1}{4}\frac{W'^2}{W^2}-\frac{M'}{rM}-\frac{1}{4}\frac{M'W'}{MW}$$

$$K_{22}=\frac{\partial}{\partial\vartheta}\begin{Bmatrix}23\\3\end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial r}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}$$
$$+\begin{Bmatrix}21\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}23\\3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}32\\3\end{Bmatrix}$$
$$-\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}13\\3\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}14\\4\end{Bmatrix}\right)$$
$$=-1-\frac{1}{2}\frac{rM'}{M^2}+\frac{1}{M}+\frac{1}{2}\frac{rW'}{MW}$$

$$K_{33}=-\frac{\partial}{\partial r}\begin{Bmatrix}33\\1\end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial\vartheta}\begin{Bmatrix}33\\2\end{Bmatrix}$$
$$+\begin{Bmatrix}31\\3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}33\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}32\\3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}33\\2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}33\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}13\\3\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}33\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}23\\3\end{Bmatrix}$$
$$-\begin{Bmatrix}33\\1\end{Bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}13\\3\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}14\\4\end{Bmatrix}\right)-\begin{Bmatrix}33\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}23\\3\end{Bmatrix}$$
$$=\sin^2\vartheta\left(-1-\frac{1}{2}\frac{rM'}{M^2}+\frac{1}{M}+\frac{1}{2}\frac{rW'}{MW}\right)$$

$$K_{44}=-\frac{\partial}{\partial r}\begin{Bmatrix}44\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}41\\4\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}44\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}44\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}41\\4\end{Bmatrix}$$
$$-\begin{Bmatrix}44\\1\end{Bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}13\\3\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}14\\4\end{Bmatrix}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{W''}{M}+\frac{1}{4}\frac{M'W'}{M^2}+\frac{1}{4}\frac{W'^2}{MW^2}-\frac{W'}{rM}$$

$$K=\sum_s g^{ss}K_{ss}=\frac{W''}{MW}-\frac{1}{2}\frac{W'^2}{MW^2}-2\frac{M'}{rM^2}-\frac{1}{2}\frac{M'W'}{M^2W}$$
$$-\frac{2}{r^2}+\frac{2}{r^2M}+2\frac{W'}{rMW}.$$

Wegen

$$\sqrt{g}=\sqrt{MW}\,r^2\sin\vartheta$$

wird

$$K\sqrt{g}=\left\{\left(\frac{r^2W'}{\sqrt{MW}}\right)'-2\frac{rM'\sqrt{W}}{M^{\frac{3}{2}}}-2\sqrt{MW}+2\sqrt{\frac{W}{M}}\right\}\sin\vartheta$$

und, wenn wir

$$M=\frac{r}{r-m},\qquad W=w^2\,\frac{r-m}{r}$$

setzen, wo nunmehr m und w die unbekannten Funktionen von r werden, so erhalten wir schließlich

$$K\sqrt{g}=\left\{\left(\frac{r^2 W'}{\sqrt{MW}}\right)'-2wm'\right\}\sin\vartheta,$$

so daß die Variation des vierfachen Integrals

$$\iiiint K\sqrt{g}\,dr\,d\vartheta\,d\varphi\,dt$$

mit der Variation des einfachen Integrals

$$\int w\,m'\,dr$$

äquivalent ist und zu den Lagrangeschen Gleichungen

$$\begin{aligned} m'&=0\\ w'&=0 \end{aligned}\tag{34}$$

führt. Man überzeugt sich leicht, daß diese Gleichungen in der Tat das Verschwinden sämtlicher $K_{\mu\nu}$ bedingen; sie stellen demnach wesentlich die allgemeinste Lösung der Gleichungen (26) unter den gemachten Annahmen 1., 2., 3., dar. Nehmen wir als Integrale von (34) $m=\alpha$, wo α eine Konstante ist und $w=1$, was offenbar keine wesentliche Einschränkung bedeutet, so ergibt sich aus (33) die gesuchte Maßbestimmung in der von Schwarzschild zuerst gefundenen Gestalt

$$G(dr,d\vartheta,d\varphi,dt)=\frac{r}{r-\alpha}\,dr^2+r^2\,d\vartheta^2+r^2\sin^2\vartheta\,d\varphi^2-\frac{r-\alpha}{r}\,dt^2.\tag{35}$$

Die Singularität dieser Maßbestimmmung bei $r=0$ fällt nur dann fort, wenn $\alpha=0$ genommen wird, d. h. die Maßbestimmung der pseudo-Euklidischen Geometrie ist bei den Annahmen 1., 2., 3. die einzige reguläre Maßbestimmung, die einer elektrizitätsfreien Welt entspricht.

Für $\alpha\neq 0$ erweisen sich $r=0$ und bei positivem α auch $r=\alpha$ als solche Stellen, an denen die Maßbestimmung nicht regulär ist. Dabei nenne ich eine Maßbestimmung oder ein Gravitationsfeld $g_{\mu\nu}$ an einer Stelle *regulär,* wenn es möglich ist, durch umkehrbar eindeutige Transformation ein solches Koordinatensystem einzuführen, daß für dieses die entsprechenden Funktionen $g'_{\mu\nu}$ an jener Stelle regulär d. h. in ihr und in ihrer Umgebung stetig und beliebig oft differenzierbar sind und eine von Null verschiedene Determinante g' haben.

Obwohl nach meiner Auffassung nur reguläre Lösungen der physikalischen Grundgleichungen die Wirklichkeit unmittelbar darstellen, so sind doch gerade die Lösungen mit nicht regulären Stellen ein wichtiges mathematisches Mittel zur Annäherung an charakteristische reguläre Lösungen — und in diesem Sinne ist nach dem Vorgange von Einstein und Schwarzschild die für $r = 0$ und $r = \alpha$ nicht reguläre Maßbestimmung (35) als Ausdruck der Gravitation einer in der Umgebung des Nullpunktes zentrisch-symmetrisch verteilten Masse anzusehen[12]). Im gleichen Sinne ist auch der Massenpunkt als der Grenzfall einer gewissen Verteilung der Elektrizität um einen Punkt herum aufzufassen, doch sehe ich an dieser Stelle davon ab, die Bewegungsgleichungen desselben aus meinen physikalischen Grundgleichungen abzuleiten. Ähnlich verhält es sich mit der Frage nach den Differentialgleichungen für die Lichtbewegung.

Als Ersatz für die Ableitung aus den Grundgleichungen mögen nach Einstein die folgenden zwei Axiome dienen:

Die Bewegung eines Massenpunktes im Gravitationsfeld wird durch eine geodätische Linie dargestellt, welche Zeitlinie ist.

Die Lichtbewegung im Gravitationsfeld wird durch eine geodätische Nullinie dargestellt[13]).

Da die Weltlinie, die die Bewegung des Massenpunktes darstellt, eine Zeitlinie sein soll, so ist es, wie wir leicht einsehen können, stets möglich, den Massenpunkt durch eigentliche Raum-Zeit-Transformationen auf Ruhe zu bringen, d. h. es gibt eigentliche Raum-Zeit-Koordinatensysteme, in bezug auf die der Massenpunkt beständig ruht.

Die Differentialgleichungen der geodätischen Linien für das zentrische Gravitationsfeld (35) entspringen aus dem Variationsproblem

$$\delta \int \left(\frac{r}{r-\alpha} \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{dp}\right)^2 + r^2 \sin^2\vartheta \left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 - \frac{r-\alpha}{r} \left(\frac{dt}{dp}\right)^2 \right) dp = 0,$$

sie lauten nach bekanntem Verfahren:

$$\frac{r}{r-\alpha} \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{dp}\right)^2 + r^2 \sin^2\vartheta \left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 - \frac{r-\alpha}{r} \left(\frac{dt}{dp}\right)^2 = A, \tag{36}$$

$$\frac{d}{dp}\left(r^2 \frac{d\vartheta}{dp}\right) - r^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 = 0, \tag{37}$$

$$r^2 \sin^2\vartheta \frac{d\varphi}{dp} = B, \tag{38}$$

$$\frac{r-\alpha}{r} \frac{dt}{dp} = C, \tag{39}$$

wo A, B, C Integrationskonstante bedeuten.

[12]) Die Stellen $r = \alpha$ nach dem Nullpunkt zu transformieren, wie es Schwarzschild tut, ist meiner Meinung nach nicht zu empfehlen; die Schwarzschildsche Transformation ist überdies nicht die einfachste, die diesen Zweck erreicht.

[13]) Laue hat für den Spezialfall $L = \alpha Q$ gezeigt, wie man diesen Satz aus den elektrodynamischen Gleichungen durch Grenzübergang zur Wellenlänge Null ableiten kann; Phys. Zeitschrift **21** (1920).

Ich beweise zunächst, daß die Bahnkurven des $r\vartheta\varphi$-Raumes stets in Ebenen liegen, die durch das Gravitationszentrum gehen.

Zu dem Zwecke eliminieren wir den Parameter p aus den Differentialgleichungen (37) und (38), um so eine Differentialgleichung für ϑ als Funktion von φ zu erhalten. Es ist identisch

$$(40)\quad \frac{d}{dp}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dp}\right)=\frac{d}{dp}\left(r^2\frac{d\vartheta}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dp}\right)=\left(2r\frac{dr}{d\varphi}\frac{d\vartheta}{d\varphi}+r^2\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2}\right)\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2+r^2\frac{d\vartheta}{d\varphi}\frac{d^2\varphi}{dp^2}.$$

Andererseits liefert (38) durch Differentation nach p:

$$\left(2r\frac{dr}{d\varphi}\sin^2\vartheta+2r^2\sin\vartheta\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{d\varphi}\right)\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2+r^2\sin^2\vartheta\frac{d^2\varphi}{dp^2}=0$$

und wenn wir hieraus den Wert von $\frac{d^2\varphi}{dp^2}$ entnehmen und rechter Hand von (40) eintragen, so wird

$$\frac{d}{dp}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dp}\right)=\left(\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2}-2\operatorname{ctg}\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{d\varphi}\right)^2\right)r^2\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2.$$

Die Gleichung (37) nimmt damit die Gestalt an:

$$\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2}-2\operatorname{ctg}\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{d\varphi}\right)^2=\sin\vartheta\cos\vartheta,$$

eine Differentialgleichung, deren allgemeines Integral

$$\sin\vartheta\cos(\varphi+a)+b\cos\vartheta=0$$

lautet, wo a, b Integrationskonstante bedeuten.

Hiermit ist der gewünschte Nachweis geführt und es genügt daher zur weiteren Diskussion der geodätischen Linien, allein den Wert $\vartheta=\frac{\pi}{2}$ in Betracht zu ziehen. Alsdann vereinfacht sich das Variationsproblem wie folgt

$$\delta\int\left\{\frac{r}{r-\alpha}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2-\frac{r-\alpha}{r}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2\right\}dp=0,$$

und die drei aus demselben entspringenden Differentialgleichungen erster Ordnung lauten

$$(41)\quad \frac{r}{r-\alpha}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2-\frac{r-\alpha}{r}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2=A,$$

$$(42)\quad r^2\frac{d\varphi}{dp}=B,$$

$$(43)\quad \frac{r-\alpha}{r}\frac{dt}{dp}=C.$$

Die Lagrangesche Differentialgleichung für r

$$(44)\quad \frac{d}{dp}\left(\frac{2r}{r-\alpha}\frac{dr}{dp}\right)+\frac{\alpha}{(r-\alpha)^2}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2-2r\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2+\frac{\alpha}{r^2}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2=0$$

ist notwendig mit den vorigen Gleichungen verkettet und zwar haben wir, wenn die linken Seiten von (41), (42), (43), (44) bzw. mit [1], [2], [3], [4] bezeichnet werden, identisch

$$\frac{d[1]}{dp} - 2\frac{d\varphi}{dp}\frac{d[2]}{dp} + 2\frac{dt}{dp}\frac{d[3]}{dp} = \frac{dr}{dp}[4]. \tag{45}$$

Indem wir $C=1$ nehmen, was auf eine Multiplikation des Parameters p mit einer Konstanten hinausläuft, und dann aus (41), (42), (43) p und t eliminieren, gelangen wir zu derjenigen Differentialgleichung für $\varrho = \frac{1}{r}$ als Funktion von φ, welche Einstein und Schwarzschild gefunden haben, nämlich:

$$\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1+A}{B^2} - \frac{A\alpha}{B^2}\varrho - \varrho^2 + \alpha\varrho^3. \tag{46}$$

Diese Gleichung stellt die Bahnkurve des Massenpunktes in Polarkoordinaten dar; aus ihr folgt in erster Annäherung für $\alpha = 0$ bei $B = \sqrt{\alpha}\, b$, $A = -1 + \alpha a$ die Keplersche Bewegung und die zweite Annäherung führt sodann zu einer der glänzendsten Entdeckungen der Gegenwart: der Berechnung des Vorrückens des Merkurperihels.

Nach dem obigen Axiom soll die Weltlinie für die Bewegung eines Massenpunktes Zeitlinie sein; aus der Definition der Zeitlinie folgt mithin stets $A < 0$.

Wir fragen nun insbesondere, ob der Kreis d. h. $r =$ konst. die Bahnkurve einer Bewegung sein kann. Die Identität (45) zeigt, daß in diesem Falle — wegen $\frac{dr}{dp} = 0$ — die Gleichung (44) keineswegs eine Folge von (41), (42), (43) ist; letztere drei Gleichungen sind daher zur Bestimmung der Bewegung nicht ausreichend; vielmehr sind (42), (43), (44) die notwendig zu erfüllenden Gleichungen. Aus (44) folgt

$$-2r\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 + \frac{\alpha}{r^2}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2 = 0 \tag{47}$$

oder für die Geschwindigkeit v in der Kreisbahn

$$v^2 = \left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{\alpha}{2r}. \tag{48}$$

Andererseits ergibt (41) wegen $A < 0$ die Ungleichung

$$r^2\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 - \frac{r-\alpha}{r}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2 < 0 \tag{49}$$

oder mit Benutzung von (47)

$$r > \frac{3\alpha}{2}. \tag{50}$$

Wegen (48) folgt hieraus für die Geschwindigkeit des im Kreise sich bewegenden Massenpunktes die Ungleichung [14])

$$v < \frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{51}$$

Die Ungleichung (50) gestattet folgende Deutung. Nach (48) ist die Winkelgeschwindigkeit des kreisenden Massenpunktes für $r = r_0$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{\alpha}{2r_0^3}}.$$

Wollen wir also statt r, φ die Polarkoordinaten eines um den Nullpunkt mitrotierenden Koordinatensystems einführen, so haben wir nur nötig,

$$\varphi \text{ durch } \varphi + \sqrt{\frac{\alpha}{2r_0^3}}\,t$$

zu ersetzen. Die Maßbestimmung

$$\frac{r}{r-\alpha}dr^2 + r^2 d\varphi^2 - \frac{r-\alpha}{r}dt^2$$

geht durch die betreffende Raum-Zeit-Transformation über in

$$\frac{r}{r-\alpha}dr^2 + r^2 d\varphi^2 + \sqrt{\frac{2\alpha}{r_0^3}}\,r^2 d\varphi\, dt + \left(\frac{\alpha}{2r_0^3}r^2 - \frac{r-\alpha}{r}\right)dt^2.$$

Für $r = r_0$ erhält man hieraus

$$\frac{r_0}{r_0-\alpha}dr^2 + r_0^2 d\varphi^2 + \sqrt{2\alpha r_0}\,d\varphi\, dt + \left(\frac{3\alpha}{2r_0} - 1\right)dt^2$$

und da hier, wegen $r_0 > \frac{3\alpha}{2}$, die Ungleichungen (21) erfüllt sind, so ist für die Umgebung der Bahn des kreisenden Massenpunktes die betrachtete Transformation des Massenpunktes auf Ruhe eine *eigentliche* Raum-Zeit-Transformation.

Andererseits hat auch die in (51) gefundene obere Grenze $\frac{1}{\sqrt{3}}$ für die Geschwindigkeit eines kreisenden Massenpunktes eine einfache Bedeutung. Nach dem Axiom für die Lichtbewegung wird nämlich diese durch eine geodätische Nullinie dargestellt. Setzen wir demnach in (41) $A = 0$, so ergibt sich für die kreisende Lichtbewegung anstatt der Ungleichung (49) die Gleichung

$$r^2\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 - \frac{r-\alpha}{r}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2 = 0;$$

[14]) Die Angabe von Schwarzschild l. c., wonach sich die Geschwindigkeit des Massenpunktes auf der Kreisbahn bei Verkleinerung des Bahnradius der Grenze $\frac{1}{\sqrt{2}}$ nähert, entspricht der Ungleichung $r \geqq \alpha$ und dürfte nach obigem nicht zutreffend sein.

zusammen mit (47) folgt hieraus für den Radius der Lichtbahn:

$$r = \frac{3\alpha}{2}$$

und für die Geschwindigkeit des kreisenden Lichtes der als obere Grenze in (51) auftretende Wert:

$$v = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Allgemein erhalten wir für die Lichtbahn aus (46) wegen $A = 0$ die Differentialgleichung

$$\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{B^2} - \varrho^2 + \alpha\varrho^3; \tag{52}$$

dieselbe besitzt für $B = \frac{3\sqrt{3}}{2}\alpha$ den Kreis $r = \frac{3\alpha}{2}$ als Poincaréschen „Zykel" — entsprechend dem Umstande, daß alsdann $\varrho - \frac{2}{3\alpha}$ rechts als Doppelfaktor auftritt. In der Tat besitzt in diesem Falle die Differentialgleichung (52) — für die allgemeinere Gleichung (46) gilt Entsprechendes — unendlich viele Integralkurven, die jenem Kreise in Spiralen sich unbegrenzt nähern, wie es die allgemeine Zykeltheorie von Poincaré verlangt.

Betrachten wir einen vom Unendlichen herkommenden Lichtstrahl und nehmen α klein gegenüber seiner kürzesten Entfernung vom Gravitationszentrum, so hat der Lichtstrahl angenähert die Gestalt einer Hyperbel mit Brennpunkt im Zentrum. Daraus ergibt sich auch die Ablenkung, die ein Lichtstrahl durch ein Gravitationszentrum erfährt; dieselbe wird nämlich gleich $\frac{2\alpha}{B}$.

Ein Gegenstück zu der Bewegung im Kreise ist die Bewegung in einer Geraden, die durch das Gravitationszentrum geht. Wir erhalten die Differentialgleichung für diese Bewegung, wenn wir in (44) $\varphi = 0$ setzen und dann aus (43) und (44) p eliminieren; die so entstehende Differentialgleichung für r als Funktion von t lautet:

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{3\alpha}{2r(r-\alpha)}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{\alpha(r-\alpha)}{2r^3} = 0 \tag{53}$$

mit dem aus (41) folgenden Integral

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(\frac{r-\alpha}{r}\right)^2 + A\left(\frac{r-\alpha}{r}\right)^3. \tag{54}$$

Nach (53) fällt die Beschleunigung negativ oder positiv aus, d. h. die Gravitation wirkt anziehend oder abstoßend, je nachdem der Absolutwert der Geschwindigkeit

$$\left|\frac{dr}{dt}\right| < \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{r-\alpha}{r}$$

oder

$$> \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{r-\alpha}{r}$$

ausfällt.

Für das Licht ist wegen (54)

$$\left|\frac{dr}{dt}\right| = \frac{r-\alpha}{r};$$

das geradlinig zum Zentrum gerichtete Licht wird in Übereinstimmung mit der letzten Ungleichung stets abgestoßen; seine Geschwindigkeit wächst von 0 bei $r=\alpha$ bis 1 bei $r=\infty$.

Wenn sowohl α wie $\frac{dr}{dt}$ klein sind, geht (53) angenähert in die Newtonsche Gleichung

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{\alpha}{2} \frac{1}{r^2}$$

über.

(Eingegangen am 29. 12. 1923.)