Über nichtholonome Systeme.

Von

Georg Hamel in Berlin.

Den Anstoß zu dieser Arbeit gaben zwei Noten des Herrn Ivan Tzénoff: „Sur les équations du mouvement des systèmes matériels non holonomes", die 1920 in Liouvilles Journal[1]) und soeben 1924 in diesen Annalen[2]) erschienen sind. Herr Tzénoff leitet Bewegungsgleichungen ab, die einen Mischtyp aus Lagrange und Appell darstellen; die Rechnung kann erheblich vereinfacht werden, so daß man das Resultat sofort einsieht: das soll in § 1 geschehen.

Weiter vergleicht Herr Tzénoff seine Gleichungen mit denen, die Herr Woronetz in seiner Arbeit[3]): „Über die Bewegung eines starren Körpers, der ohne Gleitung auf einer beliebigen Fläche rollt" 1911 in § 5 abgeleitet hat und die inhaltlich mit den von mir in meiner Habilitationsschrift 1903 (auch in der Zeitschrift für Math. und Physik[4]) 1904): „Die Lagrange-Eulerschen Gleichungen der Mechanik" sowie in der Annalenarbeit[5]) „Über die virtuellen Verschiebungen in der Mechanik" gegebenen Bewegungsgleichungen übereinstimmen, nur daß meine Gleichungen erheblich weiterreichen, indem sie die Verwendung beliebiger nichtholonomer Geschwindigkeitsparameter gestatten. In der Form aber sind meine Gleichungen so übersichtlich wie die Lagrangeschen, was man von denen des Herrn Woronetz nicht behaupten kann. Da meine Arbeiten offenbar wenig bekannt sind — Herr Tzénoff nennt sie nicht —, möchte ich in § 2 kurz zeigen, wie die Gleichungen des Herrn Woronetz als Spezialfall in meinen enthalten sind.

---

[1]) Journal de Math. pures et appliquées (8) **3**.

[2]) Math. Annalen **91**.

[3]) Math. Annalen **70**.

[4]) Zeitschr. f. Math. u. Physik **50**.

[5]) Math. Annalen **59**.

Drittens erwähnt Herr Tzénoff am Schlusse seiner Arbeit einen bemerkenswerten Satz des Herrn Woronetz über das Hamiltonsche Prinzip (§ 7 der genannten Arbeit): aber sowohl Herr Woronetz wie auch Herr Tzénoff beweisen die Richtigkeit nur so, daß sie die Übereinstimmung mit ihren Bewegungsgleichungen dartun, während man den Satz auch sofort, fast ohne Rechnung aus dem richtig verstandenen Hamiltonschen Prinzip einsehen kann, wenn man sich der Überlegungen meiner Arbeiten bedient. Das soll in § 3 dieser Note ausgeführt werden. Ich bediene mich der Bezeichnungen meines Lehrbuches über „Elementare Mechanik" (Teubner, Leipzig 1912, 2. Aufl. 1922.)

§ 1.

Die Gleichungen des Herrn Tzénoff.

Es liege ein rheonomes System von einer endlichen Anzahl von Freiheitsgraden vor, d. h. es lasse sich der Ortsvektor nach irgendeinem Punkte des Systems durch

$$\bar{r} = \bar{r}(q_1, q_2, \ldots, q_n, q_{n+1}, \ldots, q_{n+k}; t) \tag{1}$$

darstellen, so daß die kinetische Energie E eine quadratische Funktion der $\dot{q}$ wird, mit Koeffizienten, die noch von den q und von der Zeit t abhängen können.

Ferner mögen noch die folgenden, im allgemeinen nichtholonomen Bedingungen gegeben sein:

$$\dot{q}_{n+m} = \sum_{s=1}^{n} a_{m,s}\,\dot{q}_s + a_m \qquad (m = 1, 2, \ldots, k), \tag{2}$$

denen die Bedingungen für die virtuellen Verschiebungen

$$\delta q_{n+m} = \sum_s a_{m,s}\,\delta q_s \tag{2'}$$

entsprechen. Nach (2) gilt

$$\ddot{q}_{n+m} = \sum_s a_{m,s}\,\ddot{q}_s + \cdots \tag{3}$$

und daher

$$\frac{\partial \ddot{q}_{n+m}}{\partial \ddot{q}_s} = a_{m,s}. \tag{4}$$

Aus (1) folgt in bekannter Weise für die Geschwindigkeit eines Systempunktes

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}\,\dot{q}_i + \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_{n+s}}\,\dot{q}_{n+s} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}$$

und für die Beschleunigung

$$\bar{w} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \sum \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}\ddot{q}_i + \sum \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_{n+s}}\ddot{q}_{n+s} + \dots$$

und daher

$$(5) \qquad \frac{\partial \bar{w}}{\partial \ddot{q}_i} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \dots, n+k).$$

Weiter folgt aus (1) für die virtuellen Verrückungen

$$(6) \qquad \delta\bar{r} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}\delta q_i + \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_{n+s}}\delta q_{n+s}$$

und daher aus dem Lagrangeschen Prinzip (Vereinigung des Prinzips der virtuellen Arbeiten mit dem von d'Alembert),

$$S\,dm\,\bar{w}\cdot\delta\bar{r} = S\,d\bar{k}\cdot\delta\bar{r},$$

durch Einsetzen von (6)

$$(7) \qquad \sum_{i=1}^{n} Q_i\delta q_i + \sum_{s=1}^{k} Q_{n+s}\delta q_{n+s} = \sum_{i=1}^{n} K_i\delta q_i + \sum_{s=1}^{k} K_{n+s}\delta q_{n+s},$$

wo die Q die Lagrangeschen Beschleunigungskomponenten $S\,dm\,\bar{w}\frac{\partial \bar{r}}{\partial q}$ und die K die Kraftkomponenten $S\,d\bar{k}\frac{\partial \bar{r}}{\partial q}$ sind. (S bedeutet die Summation über das System.)

Setzt man nun (2') in (7) ein und beachtet, daß die δq_i nun ganz willkürlich sind, so bekommt man die *Bewegungsgleichungen in der Rohform*

$$(8) \qquad Q_i + \sum_{m=1}^{k} a_{m,i} Q_{n+m} = K_i + \sum_{m=1}^{k} a_{m,i} K_{n+m} \equiv K_i'.$$

Nun ist bekanntlich

$$(9) \qquad Q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_i},$$

aber nach (5) auch gleich

$$(10) \qquad S\,dm\,\bar{w}\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} = S\,dm\,\bar{w}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \ddot{q}_i} = \frac{\partial W}{\partial \ddot{q}_i},$$

wo W die bekannte Appellsche Beschleunigungsfunktion $\frac{1}{2}S\,dm\,\bar{w}^2$ ist.

Nehmen wir in (8) für Q_i den Ausdruck (9), für Q_{n+m} den Ausdruck (10), so bekommen wir

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} + \sum_{m=1}^{k} a_{m,i}\frac{\partial W}{\partial \ddot{q}_{n+m}} = K_i',$$

oder wegen (4)

$$\text{(I)} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} + \frac{\partial W'}{\partial \ddot q_i} = K_i' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

wo der Strich an W' andeuten soll, daß die Differentiation nach den q_ι nur insofern vorgenommen werden soll, als sie in den $\ddot q_{n+m}$ enhalten sind (nach (3)).

Dies sind die Gleichungen des Herrn Tzénoff in der zweiten Form.

Seine erste Form läßt sich aber auch sofort gewinnen:

Bezeichnet man das E, in das man die $\dot q_{n-m}$ nach (2) eingesetzt hat, mit E'', so ist

$$(11) \qquad \frac{\partial E''}{\partial \dot q_\iota} = \frac{\partial E}{\partial \dot q_i} + \sum_m \frac{\partial E}{\partial \dot q_{n+m}} \frac{\partial \dot q_{n+m}}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial E}{\partial \dot q_i} + \frac{\partial E'}{\partial \dot q_i}.$$

wenn auch hier der Strich an E' ähnlich wie oben bei W' andeuten soll, daß nur nach den Variablen differenziert werden soll, die in den $\dot q_{n+m}$ vorkommen (nach (2)).

Ebenso ist

$$(12) \qquad \frac{\partial E''}{\partial q_i} = \frac{\partial E}{\partial q_\iota} + \sum_m \frac{\partial E}{\partial \dot q_{n+m}} \frac{\partial \dot q_{n+m}}{\partial q_i} = \frac{\partial E}{\partial q_\iota} + \frac{\partial E'}{\partial q_\iota}.$$

Löst man (11) und (12) nach $\frac{\partial E}{\partial \dot q_i}$ bzw. nach $\frac{\partial E}{\partial q_i}$ auf und setzt in (I) ein, so erhält man die *erste Form des Herrn Tzénoff:*

$$\text{(II)} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E''}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial E''}{\partial q_i} + \frac{\partial E'}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E'}{\partial \dot q_i}\right) + \frac{\partial W'}{\partial q_\iota} = K_i'.$$

§ 2.

Die Lagrange-Eulerschen Gleichungen.

In meinen zu Anfang zitierten Arbeiten habe ich folgendes bewiesen (man vergleiche auch die Darstellung in Heuns Lehrbuch der Mechanik **1**, Kinematik, Göschen 1906):

Es sei $\bar r$ eine bloße Funktion von $q_1, q_2, \ldots, q_n$, also E eine bloße Funktion der q und der $\dot q$. Man führe neue Geschwindigkeitsgrößen als unabhängige lineare Funktionen der $\dot q$ ein,

$$(13) \qquad \omega_\iota = \sum_{s=1}^{n} b_{i,s}\, \dot q_s \quad \text{oder aufgelöst} \quad \dot q_s = \sum_{i=1}^{n} c_{s,\iota}\, \omega_\iota .$$

Entsprechend virtuelle Verschiebungen,

$$(14) \qquad \delta\vartheta_\iota = \sum_{s=1}^{n} b_{i,s}\, \delta q_s \quad \text{oder aufgelöst} \quad \delta q_s = \sum_{i=1}^{n} c_{s,i}\, \delta\vartheta_\iota .$$

Aus diesen beiden Definitionen folgen unter der zulässigen, aber nicht gerade notwendigen Annahme

$$\delta d q_i = d \delta q_i, \tag{15}$$

welche mit

$$\delta d \bar{r} = d \delta \bar{r}$$

gleichwertig ist, die *Übergangsgleichungen*

$$d\delta\vartheta_m - \delta d\vartheta_m = \sum_{i,s} \beta_{i,s,m}\, \delta\vartheta_i\, d\vartheta_s, \tag{16}$$

wo $d\vartheta = \omega\, dt$ und

$$\beta_{i,s,m} = \sum_{h,l} \left(\frac{\partial b_{m,l}}{\partial q_h} - \frac{\partial b_{m,h}}{\partial q_l}\right) c_{l,i}\, c_{h,s} \tag{17}$$

gesetzt ist.

Nützlich, aber nicht notwendig ist es, die $\delta\vartheta_i$ als Konstante aufzufassen und die zweiten Gleichungen (14) als infinitesimale Punkttransformationen, dann geben die zweiten Gleichungen (13) zusammen mit den Übergangsgleichungen (16) die erweiterten Punkttransformationen $\delta d q_s$.

Aus dem Lagrangeschen Prinzip wird dann

$$\sum_i Q_i \delta\vartheta_i = \sum_i K_i \delta\vartheta_i, \tag{18}$$

wo die rechte Seite die virtuelle Arbeit der eingeprägten Kräfte $S dk \delta\bar{r}$ ist, während

$$Q_i = \frac{dJ_i}{dt} - X_i E \tag{19}$$

ist. Dabei bedeutet die Impulsgröße J_i die Ableitung von E nach ω_i, während $X_i E$ die zu $\delta\vartheta_i$ gehörende erweiterte Punkttransformation von E ist. Ausführlich geschrieben ist

$$Q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \omega_i}\right) + \sum_{s,m} \beta_{i,s,m}\, \omega_s \frac{\partial E}{\partial \omega_m} - \left(\frac{\partial E}{\partial \vartheta_i}\right). \tag{19'}$$

Hier ist $\left(\frac{\partial E}{\partial \vartheta_i}\right)$ eine Abkürzung für $\sum_s \frac{\partial E}{\partial q_s} c_{s,i}$. Sind die ϑ_i als wirkliche Koordinaten vorhanden, so ist dieser Ausdruck die Ableitung von E nach ϑ_i, die β sind null und wir haben in (19′) den bekannten Lagrangeschen Ausdruck (9) für die Q_i.

Wenn nun die q_i alle unabhängig sind und daher die $\delta\vartheta$ alle willkürlich, *wenn wir also ein holonomes, skleronomes System haben, es aber für gut finden, die nichtholonomen Geschwindigkeitsgrößen ω einzuführen, so lauten die Bewegungsgleichungen nach* (18)

$$Q_i = K_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{III}$$

[6]

---

[6]) Die Gleichungen (III) mit (19′) schon 1898 bei Volterra: „Sopra una classe di equazioni dinamiche". Atti di Torino **33**. Ferner bei Woronetz, l. c. Gl. (25) § 8.

wo die Q_i nach (19) bzw. (19′) zu bestimmen sind und die

$$K_i = \sum_s c_{s,i} S d\bar{k} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_s} = S d\bar{k} \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \vartheta_i}\right).$$

Wenn aber das System nichtholonom und rheonom ist, so können wir es so einrichten, daß

(20) $$q_n = \vartheta_n = t \quad \text{und also} \quad \dot{q}_n = \omega_n = 1 \quad \text{ist,}$$

und entsprechend

(20′) $$\delta q_n = \delta \vartheta_n = 0,$$

daß ferner die nichtholonomen Bedingungsgleichungen die Form annehmen:

(21) $$\omega_{k+h} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-k-1)$$

und entsprechend die virtuellen Verschiebungen verschwinden:

(21′) $$\delta \vartheta_{k+h} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-k-1),$$

während die k ersten $\delta \vartheta$ frei bleiben.

Infolgedessen bestehen bei den nichtholonomen Bedingungen (21) nur die k ersten der Bewegungsgleichungen (III) und in diesen hat man dann noch (20) und (21) einzusetzen, so daß der Summationsbuchstabe s in (19′) nur die Werte 1 bis k und n annimmt. Ferner sieht man: wenn ein ϑ_i eine wirkliche Koordinate ist, sind nach (16) die β mit dem letzten Index i Null und die entsprechenden Glieder können in (19′) fortgelassen werden.

Das sind die von mir gegebenen und als Lagrange-Eulersche bezeichneten Gleichungen für nichtholonome Systeme.

Um die Gleichungen des Herrn Woronetz zu bekommen, brauchen wir das Ergebnis nur für den in § 1 geschilderten Fall hinzuschreiben.

Wir setzen

(22) $$\omega_i = \dot{q}_i \quad \text{und} \quad \delta \vartheta_i = \delta q_i \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

so daß die β mit einem Schlußindex kleiner oder gleich n null sind.

Weiter setzen wir

(23) $$\omega_{n+m} = \dot{q}_{n+m} - \sum_{s=1}^{k} a_{m,s} \dot{q}_s - a_m \dot{q}_{n+k+1} = 0 \quad \text{für} \quad m = 1, \ldots, k$$

und entsprechend

(23′) $$\delta \vartheta_{n+m} = \delta q_{n+m} - \sum_{s=1}^{k} a_{m,s} \delta q_s - a_m \delta q_{n+k+1} = 0 \quad \text{für} \quad m = 1, \ldots, k.$$

Endlich setzen wir

(24) $$\omega_{n+k+1} = \dot{q}_{n+k+1} = 1$$

und

$$\delta\vartheta_{n+k+1} = \delta q_{n+k+1} = 0\,, \tag{24'}$$

so daß auch die β mit dem letzten Index $n+k+1$ null sind.

Folglich lauten die Bewegungsgleichungen

$$\frac{dJ_i}{dt} + \sum_{\substack{s=1,2,\ldots,n\\ m=1,2,\ldots,k}} \beta_{i,s,n+m}\,\omega_s J_{n+m} + \sum_{m=1,2,\ldots,k} \beta_{i,n+k+1,n+m} J_{n+m} - \left(\frac{\partial E}{\partial \vartheta_i}\right) = K_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{V}$$

Dabei ist J_i für $i = 1, \ldots, n$ gleich $\frac{\partial E}{\partial \omega_i}$.

Weil aber in allen Fällen *nach* der Differentiation, hier aber auch schon *vor* der Differentiation die Gleichungen (22), (23) und (24) benutzt werden dürfen, ist auch für $i = 1, \ldots, n$

$$J_i = \frac{\partial E''}{\partial \dot{q}_i}.$$

Dagegen ist

$$J_{n+m} = \frac{\partial E}{\partial \omega_{n+m}} = \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_{n+m}},$$

und hier darf man erst *nach* der Differentiation von den Bedingungsgleichungen (23) und (24) Gebrauch machen.

Rechnet man noch die β nach (23) und (23′) aus, *so hat man in* (V) *genau die Gleichungen des Herrn Woronetz.*

Vergleicht man die verschiedenen Formen von Bewegungsgleichungen miteinander, so ist sicher die Form (19)

$$\frac{dJ}{dt} - XE = K$$

neben der Appellschen

$$\frac{\partial W}{\partial \ddot{q}} = K$$

die übersichtlichste. Bei welcher die Ausrechnung am einfachsten ist, das wird sehr von den besonderen Umständen abhängen. Oft wird die Rohform (8) unter Benutzung von (9) das einfachste sein. In jedem Falle aber sind die Formen der Herren Appell und Tzénoff deshalb zu beanstanden, weil sie die Funktion W brauchen, während man mit E und den Bedingungsgleichungen auskommt.

§ 3.

Der Satz des Herrn Woronetz.

Aus der Lagrangeschen Zentralgleichung

$$S\,dm\,\overline{w}\cdot\delta\overline{r} \equiv \frac{d}{dt} S\,dm\,\overline{v}\cdot\delta\overline{r} - \delta E = \delta A$$

ergibt sich sofort durch Integration

$$S\,dm\,\bar{v}\cdot\delta\bar{r}\,\Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2}(\delta E + \delta A)\,dt,$$

und wenn man an den Enden des Zeitintervalls nicht verschiebt, das Hamiltonsche Prinzip:

$$\int(\delta E + \delta A)\,dt = 0. \tag{25}$$

Da die Gültigkeit der Lagrangeschen Zentralgleichung durchaus an die Annahme

$$d\,\delta\bar{r} - \delta\,d\bar{r} = 0$$

geknüpft ist (siehe darüber meine zweite Arbeit), so hat man auch

$$d\,\delta q = \delta\,d q \tag{26}$$

für alle q ohne Ausnahme anzunehmen und hat deshalb, wenn

$$\omega_i = 0$$

eine nichtholonome Bedingung ist, wohl

$$\delta\vartheta_i = 0$$

zu nehmen, aber *nicht*

$$\delta\omega_i = 0,$$

da sonst nach den Übergangsgleichungen die vorstehenden Bedingungen im allgemeinen nicht zu erfüllen wären. Infolgedessen darf man auch in dem Hamiltonschen Prinzip nicht vor Ausführung der Variation von den nichtholonomen Bedingungen Gebrauch machen, sondern erst hinterher.

Nun ist aber, wenn wir wieder von den Annahmen des § 2, insbesondere den Gleichungen (20) bis (21′) Gebrauch machen,

$$(\delta E)_{\omega_{k+h}=0,\ \omega_n=1} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial E}{\partial q_i}\right)_{\omega_{k+h}=0,\ \omega_n=1}\delta q_i + \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial E}{\partial \omega_i}\right)_{\omega_{k+h}=0,\ \omega_n=1}\delta\omega_i$$
$$+ \sum_{l=1}^{n-k-1}\left(\frac{\partial E}{\partial \omega_{k+l}}\right)_{\omega_{k+h}=0,\ \omega_n=1}\delta\omega_{k+l} + \left(\frac{\partial E}{\partial \omega_n}\right)_{\omega_{k+h}=0,\ \omega_n=1}\delta\omega_n.$$

In den beiden ersten Gliedern darf man auch *vor* Ausführung der Differentiation $\omega_{k+h}=0$ und $\omega_n = 1$ setzen, so daß die beiden ersten Glieder zusammen $\delta E''$ ergeben, d. h. die Variation von E unter Berücksichtigung der nichtholonomen Bedingungsgleichungen; das letzte Glied fällt fort, da $\delta\omega_n = \frac{\delta\,d q_n}{dt} = \frac{d\,\delta t}{dt} = 0$ ist.

Mithin bleibt

$$\delta E = \delta E'' + \sum_{l=1,\ldots,n-k-1} J_{k-l}\,\delta\omega_{k+l}$$

und das Hamiltonsche Prinzip (25) nimmt die Form an

$$\text{(VI)} \qquad \int \Big(\delta E'' + \sum_{l=1,2,\ldots,n-k-1} J_{k+l}\,\delta\omega_{k+l} + \delta A\Big)\,dt = 0,$$

wobei (26) für alle q zu beachten ist.

Das ist der Satz des Herrn Woronetz:

„Man darf im Hamiltonschen Prinzip in der kinetischen Energie vor Ausführung der Variation von den nichtholonomen Bedingungen Gebrauch machen, wenn man zur Korrektur dieses Fehlers die Variation der linken Seiten der nichtholonomen Bedingungsgleichungen $\omega_{k+l} = 0$, jede mit dem zugehörenden Impuls multipliziert, unter dem Integral hinzufügt."

Berlin, den 3. März 1924.

(Eingegangen am 4. 3. 1924.)