

Werk

Titel: Mathematische Annalen

Jahr: 1924

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN235181684_0092

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0092

LOG Id: LOG_0009

LOG Titel: Über die Abbildung der projektiven Ebene auf eine geschlossene singularitätenfreie Fläche im erreichbaren Gebiet des Raumes

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Über die Abbildung der projektiven Ebene auf eine geschlossene singularitätenfreie Fläche im erreichbaren Gebiet des Raumes.

Von

Friedrich Schilling in Danzig-Langfuhr.

Auf Anregung von Herrn D. Hilbert hat W. Boy zum ersten Male die interessante Aufgabe gelöst, die projektive Ebene punktweise eindeutig abzubilden auf eine geschlossene, singularitätenfreie Fläche, die in einem erreichbaren Gebiet des Raumes gelegen ist (z. B. innerhalb einer Kugel mit gegebenem Radius um einen uns vor Augen liegenden Punkt des Raumes)¹⁾. Herr Boy hat zur Lösung der Aufgabe sehr viel weiter reichende Untersuchungen der Analysis situs benutzt; auch läßt seine Methode es vermischen, daß die Abbildung der projektiven Ebene selbst auf die Fläche hinsichtlich der Zuordnung der einzelnen Punkte erfaßt wird.

Wir wollen daher im folgenden diese Abbildung nach einer neuen, überraschend einfachen Methode durchführen, die so elementar und an-

¹⁾ Werner Boy, *Über die Curvatura integra und die Topologie geschlossener Flächen*, Dissertation, Göttingen 1901, abgedruckt in den *Math. Annalen* **57**, S. 151 ff. Im Auszug gibt das Resultat seiner Untersuchungen die Arbeit: *Über die Abbildung der projektiven Ebene auf eine im Endlichen geschlossene, singularitätenfreie Fläche*, Göttinger Nachrichten 1901, S. 1–14. Die von Boy konstruierten zugehörigen beiden Modelle sind gleichzeitig im Verlage von Martin Schilling in Leipzig als Serie XXX Nr. 1 und 2 erschienen.

Im Gegensatz zu Boy habe ich im Text statt „im Endlichen“ geschlossene Fläche ausdrücklich „Fläche in einem erreichbaren Gebiet des Raumes“ gesagt, um damit sogleich anzudeuten, daß nicht nur für Euklidische, sondern auch für elliptische und hyperbolische Geometrie unsere Aufgabe formuliert sein soll. In der elliptischen Geometrie würde ja die projektive Ebene selbst schon die Forderung erfüllen, eine im Endlichen geschlossene, singularitätenfreie Fläche zu sein.

Wegen der weiteren Literatur sei auf die Arbeit von Boy verwiesen. Die von uns konstruierte Fläche wird man leicht mit der ersten Fläche von Boy vergleichen können.

Es stellt also eine solche Kreisfläche mit der Zuordnung des Randes gewiß das einfachste erreichbare, singularitätenfreie Abbild der projektiven Ebene dar. Dieses Abbild ist auch stets ebenso zu verwenden, wie die später von uns konstruierte geschlossene Fläche \mathfrak{F}^2 .

Folgende kleine etwas abschweifende Bemerkung sei noch einzufügen gestattet: Wir denken diese Kreisfläche so auf die Ebene \mathfrak{E} gelegt, daß ihr Mittelpunkt M mit dem Berührungspunkt M_0 der Ebene \mathfrak{E} und der Kugel zusammenfällt und die Durchmesser der Kreisfläche mit den entsprechenden Strahlen durch M_0 . Wird dann diese so entstandene Figur in der Ebene \mathfrak{E} um irgendeinen Strahl dieser Ebene durch den Punkt M_0 gedreht, so erhalten wir aus der Kreisfläche eine Kugel, deren diametrale Punkte einander zugeordnet sind, und der von dieser Kugel eingeschlossene Raum ist das Abbild des ganzen durch die Drehung aus der Ebene \mathfrak{E} entstandenen projektiven Raumes. Somit kann man also die Euklidische, elliptische und hyperbolische Geometrie des Raumes mit allen eigentlichen und uneigentlichen Punkten, Geraden und Ebenen, mit der absoluten Fläche 2. Grades und dem zugehörigen absoluten Polarsystem in diesem durch die Zuordnung der Begrenzung geschlossenen Kugelraum deuten, insbesondere hinsichtlich eines anschaulichen axiomatischen Aufbaus dieser Geometrien, worauf wir jedoch hier nicht näher eingehen können.

Jetzt soll nun aber aus der Kreisfläche der Fig. 2 eine neue Fläche \mathfrak{F} , natürlich unter Verzerrungen, zusammengebogen werden, indem man den Rand der Zuordnung entsprechend mit sich selbst vereinigt. Während wir also bisher projektiv verfahren sind, kommen nun die Anschauungen der Analysis situs zu ihrem Recht, in der wir uns Kurven und Flächen gleichsam aus beliebig zusammen- oder ausziehbarem Gummi zu denken haben. Die Verhältnisse sind vergleichsweise denen ganz analog, die beim Zusammenbiegen der Fläche eines Rechtecks mit zugeordneten Rändern gemäß der Fig. 3 zu einer Kreisringfläche vorliegen.



Fig. 3.

Zur Erreichung unseres Zieles zerlegen wir zunächst die Kreisfläche der Fig. 2 durch zwei vom Mittelpunkt M gleich weit abstehende Parallele, deren Abstand wir später noch festlegen werden, in drei Teile (Fig. 4). Diesen beiden Parallelen entsprechen übrigens in der Ebene \mathfrak{E} ersichtlich

²⁾ Man kann natürlich die untere Halbkugel auf die Ebene des begrenzenden Kreises auch von dem höchsten Punkt der Kugel aus *stereographisch* projizieren. Dann erhält man als Abbild der projektiven Ebene wieder eine Kreisfläche mit diametral zugeordnetem Rande. Die Geraden der projektiven Ebene sind dann durch Kreisbogen abgebildet, welche die Begrenzung der Kreisfläche in diametralen Punkten schneiden.

es von A über T nach C und von B über M nach D durch Linien zerschneiden, die den Rändern $A_1 C_1$ und $A_2 C_2$ bzw. der Strecke BD in Fig. 4 entsprechen sollen (Fig. 8a, b). Und zwar möge man sich die Entstehung der Teile dann folgendermaßen veranschaulichen: Man denke sich eine Ellipse mit vertikaler großer Achse MT . (Eine Ellipse statt eines Kreises ist nur deswegen gewählt, damit die Figuren, insbesondere Fig. 9, nicht unnötig groß werden.) Längs der einen durch die Punkte M, T begrenzten Hälfte der Ellipse möge eine Strecke so entlang gleiten, daß ihr Mittelpunkt auf der Ellipse bleibt und die Strecke selbst stets zur Ellipsenebene senkrecht steht. Die Strecke beschreibt dann also ein Stück eines

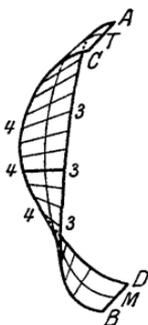


Fig. 8b.

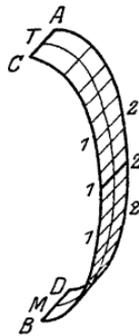


Fig. 8a.

elliptischen Zylinderringes (Fig. 8a). Längs der anderen Ellipsenhälfte soll dagegen eine gleichgroße Strecke, auch stets horizontal bleibend, mit ihrem Mittelpunkt auf der Ellipse von derselben Anfangslage durch den Punkt M aus entlang gleiten, doch jetzt so, daß die Strecke sich proportional dem Höhersteigen dreht und zwar insgesamt um 180° . Dieser zweite Teil der Fläche ist also ein Stück einer Art Schraubenfläche (Fig. 8b), deren Gleichung leicht aufzustellen ist. Sind nun diese beiden Flächenteile zusammengesetzt, so daß ihre Ellipsenhälften sich ergänzen, dann sollen noch je der obere und der untere Teil dieser Fläche so durch Zusammendrücken verbogen werden, daß der höchste und der tiefste Punkt elliptische Flächenkrümmung bekommen und auch die beiden Teile ohne Knick sich aneinandersetzen (Fig. 5). Es sei gleich hier noch bemerkt: Den Teil der Fig. 8b kann man als Stück von einer rechts oder links gewundenen „Schraubenfläche“ annehmen. Demgemäß erhält man zwei verschiedene Möbiussche Blätter und daraus auch zwei verschiedene geschlossene Flächen \mathfrak{F} und \mathfrak{F}' für die projektive Ebene \mathfrak{E} . Diese verschiedenen Flächen sind jedoch als spiegelbildlich zueinander anzusehen, wie ein Paar Handschuhe, und es kann das eine Gebilde durch Umkrepelung in das andere übergeführt werden, indem man zunächst ein kleines Loch in die eine Fläche \mathfrak{F} eingeschnitten denkt und diese Fläche durch das Loch hindurchstülpt und dann das Loch wieder richtig schließt. Wir bevorzugen im folgenden eine *rechtsgewundene* Fläche, wie sie auch die Fig. 8b darstellt.

Um nun die Verhältnisse bei der immerhin komplizierten Fläche \mathfrak{F} leicht anschaulich uns vorstellen zu können, wollen wir weiterhin die „kotierte Projektion der Fläche“ benutzen. Wie ein Gelände durch seine

Höhenschnitte (Isohypsen) in einer Karte dargestellt ist, so wollen wir auch hier das Möbiussche Blatt und die sich daraus ergebende Fläche \mathcal{J} durch in gleichem Abstände aufeinander folgende Horizontalschnitte dargestellt denken. Wir können etwa annehmen, daß diese Schnitte im Ab-

stande von 2,5 mm aufeinander folgen. Dann würden als „Koten“ oder Höhenziffern x zu den gewählten 17 Schnitten hinzuzuschreiben sein: 0; 2,5; 5,0; ...; 40 mm, wobei wir die Höhe h der ganzen Fläche eben zu 40 mm angenommen haben (Fig. 9, entsprechend den verkleinert wiedergegebenen Fig. 5 und 8a, b).

Der besseren Übersicht wegen sind die einzelnen Horizontalschnitte übereinander gezeichnet; doch sind jedesmal an beiden Seiten durch kleine Kreise zwei Punkte angegeben, die beim richtigen Übereinanderlegen der Figuren im Raume in zwei senkrechten Geraden zu liegen kommen. In diesen Figuren geben die stark ausgezogenen Bogen oder Strecken 1—2 und 3—4 für sich die Höhenlinien für die bei-

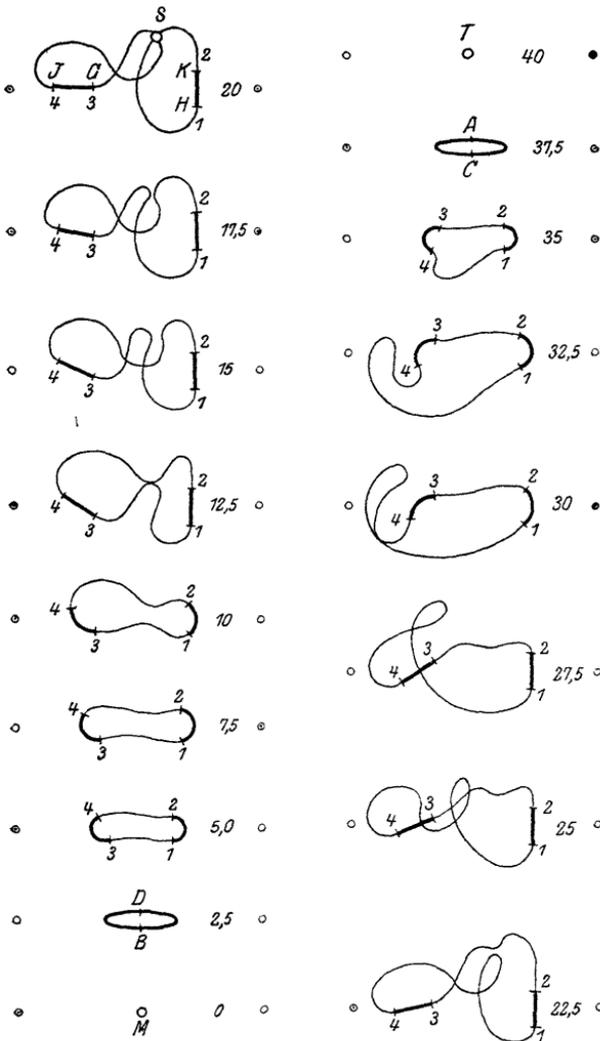


Fig. 9.

den Teile der Fig. 5 von dem Möbiusschen Blatt wieder und die schwach ausgezogenen Bogen die Höhenlinien für die verzerrte Kreisfläche der Fig. 6. Diese letzteren Höhenlinien sollen nun den in Fig. 6 eingezeichneten Kurven entsprechen, die wir speziell als Hyperbeläste wählen, worauf wir sogleich zurückkommen.

Beim Übergang von dem Schnitt 12,5 mm zu dem Schnitt 15 mm sind zwei Doppelkurven der Fläche \mathfrak{F} entstanden, was keine Singularität bedingt. Analoges gilt beim Übergang vom Schnitt 22,5 mm zum Schnitt 25 mm. Die vier Schnittpunkte mit den Doppelkurven verschwinden dann wieder beim Übergang vom Schnitt 25 mm zum Schnitt 27,5 mm und von diesem zum Schnitt 30 mm. Besonders zu beachten ist jedoch der Übergang vom Schnitt 17,5 mm über den Schnitt 20 mm zum Schnitt 22,5 mm. Beim Schnitt 20 mm ist der Doppelpunkt S zu erkennen, der in verschiedener Weise vorher und nachher aufgelöst ist. Die Verhältnisse sind hier ganz analog, als wenn wir die kotierte Projektion bei einem hyperbolischen Paraboloid mit horizontal gelegener Tangentialebene im Scheitelpunkte S betrachten, wo die Umgebung des Scheitelpunktes S vor und nach dem Horizontalschnitt in den beiden Erzeugenden des

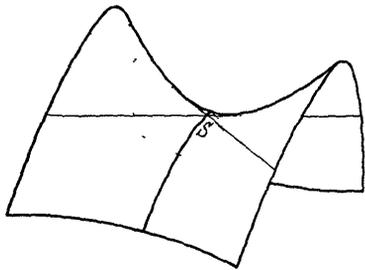


Fig. 10a.

Scheitelpunktes Hyperbëläste in dem einen oder anderen Paar Winkelräumen liefert (Fig. 10a, b). Ja, man kann, wenn man will, die Umgebung des Punktes S unserer Fläche \mathfrak{F} geradezu als solchen Teil eines hyperbolischen Paraboloids ausgebildet denken.

Wenn man nun auch unsere so gewonnene Fläche sich in ihrer Gesamtheit vielleicht schwer vorzustellen vermag, so ist doch leicht ein anschauliches Bild von ihren einzelnen Teilen zu gewinnen, in die man sie sich zerlegt denken kann. Und zwar möge man sich außer dem Möbiusschen Blatt an der Hand der Fig. 9 jeden der vier Teile der Fläche \mathfrak{F} vorstellen, die durch Verbiegen und Verzerren aus denjenigen vier Quadranten der Kreisfläche der Fig. 6 entstehen, wie sie durch die Durchmesser GI und KH geliefert werden. Den zugehörigen Halbmessern dieser Quadranten entsprechen ja die vier feingezeichneten Linien, die vom Punkte S des Schnittes 20 mm der Fig. 9 auslaufen. Man überzeugt sich dann vollends auch leicht, daß diese vier Teile der Fläche in der Tat zusammen der schlichten Kreisfläche der Fig. 6 entsprechen.

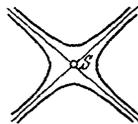


Fig. 10b.

Um nun auch bequem die punktweise eindeutige Abbildung der projektiven Ebene \mathfrak{G} auf unsere Fläche \mathfrak{F} der Fig. 9 überblicken zu können, wollen wir auf der Ebene \mathfrak{G} in einfacher Weise ein Kurvennetz einzeichnen und dieses über die Halbkugel (Fig. 1 oder 7) und die Kreisfläche (Fig. 2) auf die Fläche \mathfrak{F} übertragen. Zu dem Zweck führen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt M

und vertikaler z -Achse ein (Fig. 1). Die Gleichung der gegebenen Kugel sei:

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Die Hyperbeln der Fig. 6 und die zu ihnen deswegen noch hinzuzudenkenden Hyperbeln derselben Ebene, weil ja die Begrenzung der Fig. 6 kein größter Kugelkreis ist, liegen ferner auf den hyperbolischen Zylindern:

$$(2) \quad y^2 - z^2 = c \quad (-r^2 \leq c \leq +r^2),$$

entsprechen also den durch die beiden Gleichungen (1) und (2) gegebenen Kurven auf der Kugel. Die orthogonalen Projektionen dieser Kurven auf die horizontale Kreisfläche der Fig. 4 sind gegeben durch die Gleichungen:

$$(3) \quad x^2 + 2y^2 = r^2 + c,$$

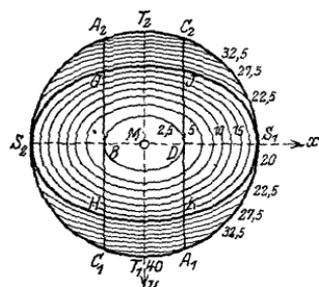


Fig. 11.

sind also Ellipsenbogen (Fig. 11). Für $c = 0$ erhält man eine Ellipse mit den Scheitelpunkten S_1, S_2 , und zwar entspricht diese Ellipse den Durchmessern GT und HK der Fig. 6. Für $c = -r^2$ ergibt sich der Punkt M und für $c = +r^2$ ergeben sich die Schnittpunkte T_1, T_2 der y -Achse mit dem begrenzenden Kreise der Fig. 11.

Vom Mittelpunkte M der Kugel aus werden die Kurven auf der Halbkugel durch die Kegel

$$(4) \quad cx^2 + (c - r^2) \cdot y^2 + (c + r^2) \cdot z^2 = 0$$

projiziert. Die Kurven der Halbkugel entsprechen also in der Ebene \mathcal{E} , in die wir die vom Berührungspunkte M_0 ausgehenden ξ, η -Achsen parallel zu den x, y -Achsen einführen, den Kurven:

$$(5) \quad c \cdot \xi^2 + (c - r^2) \cdot \eta^2 + (c + r^2) \cdot r^2 = 0 \quad (\text{Fig. 12}).$$

Für $c = 0$ ergeben sich also die Parallelgeraden $\eta = \pm r$ und für $-r^2 \leq c < 0$ Ellipsen, für $0 < c \leq r^2$ Hyperbeln, die sich für $\lim c = r^2$ auf den unendlich fernen Punkt T_0^∞ der η -Achse zusammenziehen. In der Fig. 12 ist außer diesen Kurven auch die den Parallelgeraden der Fig. 4 entsprechende Hyperbel eingezeichnet.

Es ist nun leicht zu übersehen, daß wir diese Kurvenschar in der Ebene \mathcal{E} unmittelbar den Höhenkurven unserer Fläche \mathcal{F} in der Fig. 9 zugeordnet annehmen können, so daß wir auch die zugehörigen Koten κ der Fig. 9 auf die Kurvenschar der Ebene \mathcal{E} übertragen können (vgl.

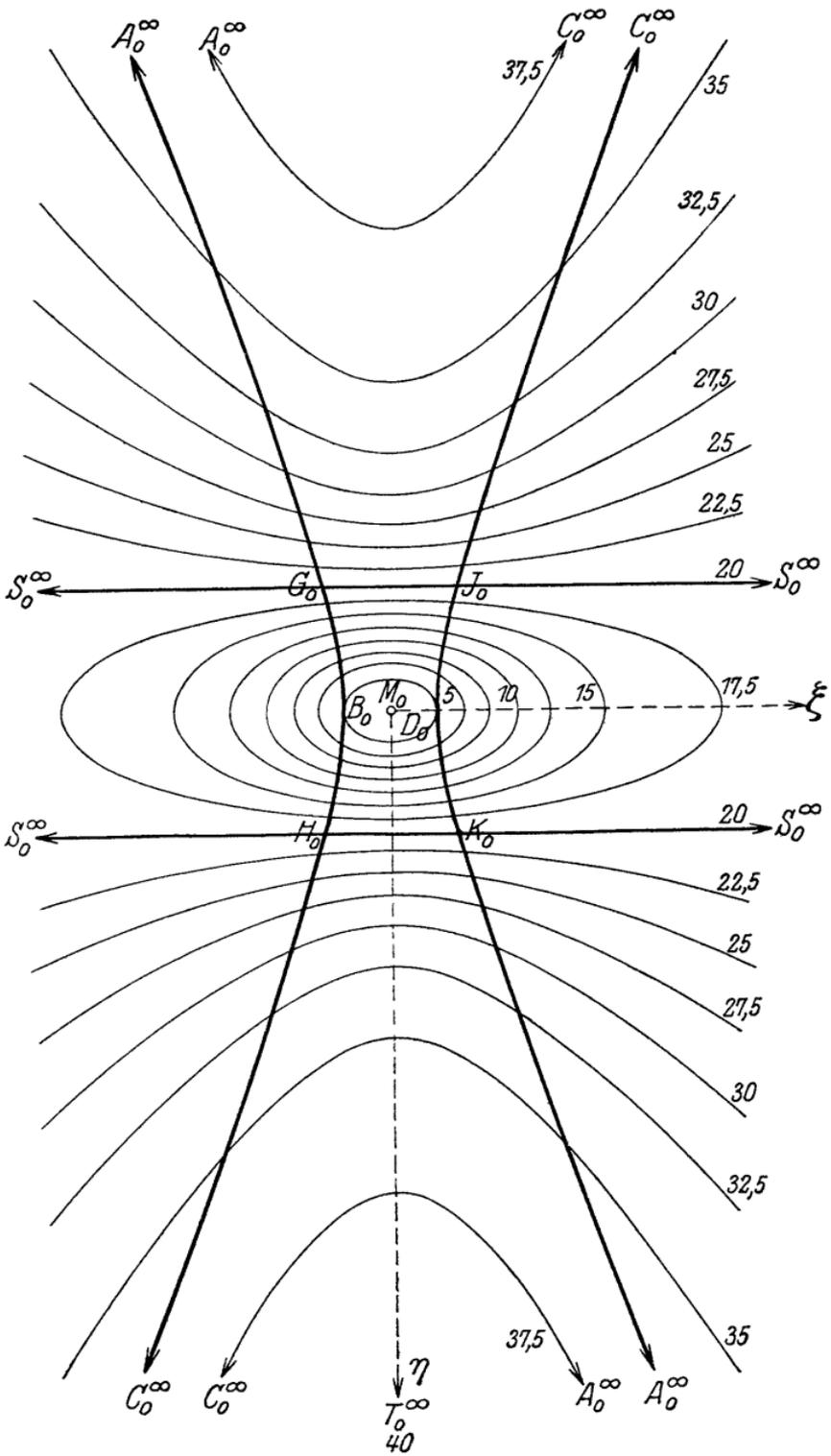


Fig. 12.

Fig. 12). Wir wollen einfach folgende Beziehung zwischen den Parametern c und \varkappa festsetzen:

$$(6) \quad \varkappa = \frac{c+r^2}{2r^2} \cdot h \quad \text{oder} \quad (6a) \quad c = r^2 \left(\frac{2\varkappa}{h} - 1 \right),$$

wo h wieder die gesamte Höhe der Fläche, bei unserer Annahme also $h = 40$ mm, ist.

Sollen die Punkte B, D der Fig. 11 auf der Ellipse für $\varkappa = 2,5$ mm oder $c = -\frac{7}{8}r^2$ gelegen sein und analog die Punkte A_1, C_1, A_2, C_2 auf der Ellipse für $\varkappa = 37,5$ mm oder $c = +\frac{7}{8}r^2$, so muß ersichtlich der Abstand $MB = MD = \frac{r}{2\sqrt{2}}$ gewählt sein, wie es in den Figuren auch der Fall ist, für die noch $r = 14$ mm gewählt ist. In den Fig. 6, 11 und 12 ist dann den einzelnen Kurven noch die Kote \varkappa der ihnen entsprechenden Höhenkurven der Fig. 9 hinzugefügt.

Wir wollen weiter in der Ebene \mathfrak{E} noch eine zweite Kurvenschar hinzunehmen, nämlich z. B. die konzentrischen Kreise mit dem Mittelpunkte M_0 . Es ist einfach, diese Kreise auf die Halbkugel der Fig. 1, auf die Kreisfläche der Fig. 2 und auf die Kreisfläche der Fig. 6 zu übertragen. In der Fig. 2 ergeben sich dann die Kreise um M und in der Fig. 6 parallele Sehnen zum Durchmesser A_2C_1 . Auch diese Kurven wollen wir je mit einer Indeziffer versehen denken, und zwar können wir als solche Indeziffer λ etwa den Radius der konzentrischen Kreise in der Fig. 2 oder 11 wählen, so daß die Indeziffer λ von 0 bis r variiert. Die Schnittpunkte dieser Kreise in der Fig. 11 mit der anderen Kurvenschar wollen wir auch auf die Kurven der Fig. 9 übertragen denken, so daß jede von diesen dann auch eine Skala trägt, der Indeziffer λ der Schnittpunkte entsprechend. Es hat keinen Zweck, dies, etwa auch durch Vervollständigung der Figuren, im einzelnen noch auszuführen, was ja gar keine Schwierigkeit bieten würde. Jedenfalls erkennt man:

Auf solche Weise läßt sich die punktweise eindeutige Zuordnung der projektiven Ebene \mathfrak{E} und unserer konstruierten Fläche \mathfrak{F} vollständig übersehen.

Man kann dann auch jede Figur der projektiven Ebene \mathfrak{E} auf die Fläche \mathfrak{F} übertragen, insbesondere ein rechtwinkliges Koordinatensystem oder ein projektives Dreieckskoordinatensystem. Im Falle der Euklidischen Geometrie entspricht insbesondere der unendlichfernen Geraden von \mathfrak{E} , d. h. dem begrenzenden Kreise der Fig. 11, eine bestimmt angebbare Kurve der Fläche \mathfrak{F} , die auch durch die Punkte S, A, C und T der Höhenkurven 20, 37,5 und 40 mm der Fig. 9 hindurchgeht. Im Falle der hyperbolischen Maßbestimmung können wir etwa den begrenzenden Kreis

der Fig. 6 als Abbild des reellen absoluten Kegelschnittes ansehen und werden dann besser als die abzubildende projektive Ebene die Tangentialebene im Punkte S_2 der Fig. 7 (an Stelle der früheren Ebene \mathfrak{E}) wählen. Dann umfaßt der von den dünnen Linien der Fig. 9 gebildete Flächenteil, die Verbiegung der Kreisfläche der Fig. 6, noch abgesehen von der Begrenzung, die Gesamtheit der *eigentlichen* Punkte der hyperbolischen Ebene, während das Möbiussche Blatt einschließlich der Begrenzung die Gesamtheit aller *uneigentlichen* Punkte darstellt. Man kann also die Maßbestimmung in allen drei Arten der Geometrien unmittelbar auf unsere Fläche \mathfrak{F} übertragen denken.

(Eingegangen am 8. 3. 1924.)