Über zentrische Kollineation von Kegelschnitten.

Von

M. Frank in Simferopol (Krim Rußland).

In der Arbeit von M. Pasch: „Über zentrische Kollineation" (Math. Annalen **90**, 1/2, S. 103) steht: „Berühren die Kegelschnitte einander dreipunktig, so ist die Tangente des Berührungspunktes die eine jener beiden Schnittsehnen. Dies ist der einzige Fall, wo der Schnittpunkt gemeinsamer Tangenten auf einer zugeordneten Schnittsehne liegt" und weiter (S. 104) „Da Zentrum und Achse auseinanderliegen müssen, so kann ein Punkt mit Berührung höherer Ordnung zwischen K und K' nicht Zentrum, seine Tangente nicht Achse sein."

Beide Behauptungen, sowie alle Folgerungen aus ihnen sind irrtümlich. In der Tat, durch drei Paar zugeordnete Punkte A, B, C und A', B', C' ist eine zentrische Kollineation vollständig bestimmt, wobei fünf von ihnen willkürlich angenommen sein können, der sechste aber z. B. C' auf dem Strahle liegen muß, der durch das Kollineationszentrum P, das durch die Strahlen AA' und BB' bestimmt ist, und den Punkt C geht. Die Kollineationsachse wird aber nur durch die Lage des Punktes C' bestimmt. Nehmen wir also fünf willkürliche Punkte A, B, C, A', B' an, bestimmen das Kollineationszentrum P und einen Punkt G auf der Kollineationsachse, als Schnitt von AB und $A'B'$, so können wir immer die Gerade GP als Kollineationsachse annehmen, wobei der Punkt C' sich dann als Schnitt des Strahles PC mit der Geraden, die den Punkt F, Schnitt von GP mit AC (oder BC), mit A' (bzw. B') verbindet. Die Kollineation kann auch anders bestimmt werden, nämlich durch willkürliche Annahme von Zentrum und Achse, einem Paar zugeordneter Punkte A, A' auf einem Strahle, und einem Punkte B auf einem anderen. Daraus folgt, daß zu jedem Kegelschnitte K unendlich viele zentrisch kollineare Kegelschnitte K' konstruiert werden können und dabei so, daß die Kollineationsachse durch das Kollineationszentrum geht, wobei K und K' sich nicht notwendig berühren müssen.

Gerade diese Fälle zentrischer Kollineation, die M. Pasch für unmöglich hält, wollen wir etwas ausführlicher behandeln.

Nehmen wir bei gegebenem K das Kollineationszentrum P und die Kollineationsachse l ganz willkürlich an, nur so, daß P auf l liegt, ziehen durch P einen beliebigen Strahl, der K in A schneidet, und nehmen auf ihm den Punkt A' von K' an, so können alle anderen Punkte von K' konstruiert werden. Dabei wollen wir einstweilen P außerhalb von K annehmen. Man wird dann drei Fälle unterscheiden können.

1. Die Achse l geht durch P im Innern des Winkels der von den beiden Tangenten t und s aus P an K gebildet wird, dann schneidet l den Kegelschnitt K in zwei reellen Punkten N und M, die auch Schnittpunkte von K und K' sein müssen und durch die zwei Berührungspunkte T und S getrennt werden. Es müssen also dann außer N und M noch zwei reelle Schnittpunkte N' und M' der Kegelschnitte K und K' vorkommen. Die Kegelschnitte schneiden einander also in vier reellen Punkten. Die zweite, zum Zentrum P zugeordnete Achse l' ist $M'N'$.

Es ist bekannt (M. Pasch, l. c. S. 105), daß in diesem Falle im ganzen zwölf reelle verschiedene Kollineationen vorkommen. Sechs Schnitte von gemeinsamen Tangenten ergeben sechs Kollineationszentren, sechs gemeinsame Sehnen sechs Kollineationsachsen. Zu jedem von zwei Zentren, z. B. P und P' sind zwei Achsen l und l' und zu jeder von diesen Achsen dieselben zwei Zentren P und P' zugeordnet.

Wir wollen jetzt den Satz beweisen, *daß, falls eine Achse l durch das zugeordnete Zentrum P geht, auch die zweite zu P zugeordnete Achse l' durch das zweite, zu l zugeordnete Zentrum P' geht.* In der Tat, bilden die vier Schnittpunkte $MNM'N'$ ein gemeinsames, in die Kegelschnitte K und K' eingeschriebenes vollständiges Viereck, so bestimmen die drei Nebenpunkte des Vierecks E, F, G ein gemeinsames autopolares Dreieck von K und K'. Liegt der Punkt E im Innern der Kegelschnitte, so werden die anderen Punkte F und G auf der Geraden FG durch die Schnittpunkte mit den Seiten MN und $M'N'$ harmonisch geteilt. Andererseits bestimmen vier gemeinsame Tangenten s, t, s', t' ein Vierseit, dessen Nebenseiten e, f, g dasselbe autopolare Dreieck EFG bestimmen müssen, da zwei Kegelschnitte nur ein gemeinsames autopolares Dreieck haben können. Daraus folgt, daß die Zentren P und P' auf der Geraden FG (die wir auch e nennen können) liegen müssen. Die beiden anderen Nebenseiten g und f fallen mit EF und EG zusammen. Die Punkte P und P' werden durch G und F harmonisch geteilt. Daraus folgt, daß, falls eine von den Sehnen NM, die als zu P zugehörige Kollineationsachse angesehen werden kann, durch P geht, auch $N'M'$ durch P' durchgehen muß.

Eine Folgerung aus diesem Satz ist u. a., daß das Viereck $SS'TT'$, das durch vier Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten aus P gebildet wird, als Nebenecken die Zentren P, P' und den Punkt E hat, wobei die zugeordneten Achsen l und l' mit den Seiten PE und $P'E$ zusammenfallen. Dasselbe gilt von dem Viereck der Berührungspunkte gemeinsamer Tangenten aus P'.

2. Die Achse l läuft außerhalb des Winkels der beiden Tangenten, der die Kegelschnitte enthält. Dann schneidet l K nicht mehr. Dabei kann es vorkommen, daß

a) K und K' zwei reelle Schnittpunkte haben, durch welche die zweite zugeordnete Achse l' hindurchgeht.

b) K und K' sich berühren, und

c) keine gemeinsamen Punkte haben, aber in den letzten zwei Fällen muß jedenfalls der eine Kegelschnitt außerhalb des anderen liegen.

Der für den Fall 1 bewiesene Satz, daß auch die zweite zugeordnete Achse durch das zweite Zentrum geht, gilt auch hier, trotzdem in diesem Falle kein *reelles gemeinschaftliches autopolares* Dreieck existiert. Es ist aber auch hier der Pol E und die gemeinsame Polare PP' vorhanden, und die als Folgerung zu dem Satze gegebene Konstruktion mittels des Vierecks $SS'TT'$ ergibt die Lage von P' und E, also auch von l'.

3. Fällt die Achse l mit einer der Tangenten von P an K zusammen, so können wir diesen Fall als Grenzfall ansehen, wenn l, um den Punkt P sich drehend, aus dem Inneren des Tangentenwinkels in den Nebenwinkel übergeht. Die Schnittpunkte M und N fallen beide mit dem Berührungspunkte T zusammen, aber noch ein dritter Schnittpunkt M' oder N' muß dann auch mit T zusammenfallen. Die Kegelschnitte K und K' berühren sich dreipunktig. Die zweite zugeordnete Achse ist dann die Schnittsehne, das zweite Zentrum P' ist der Berührungspunkt T beider Kegelschnitte. Zum Berührungspunkte T als Zentrum ist aber nur eine Achse — die Schnittsehne — zugeordnet, weil jeder Strahl durch T jeden Kegelschnitt nur noch in einem Punkte schneidet.

Es bleiben noch die Fälle zu untersuchen, wo das Zentrum P im Innern von K oder auf K liegt.

Diese Fälle sind aber, einen ausgenommen, in den oben behandelten enthalten, weil im Falle 2a das zweite Zentrum P' im Innern von K liegen muß, und im Falle 2b sowie 3 auf K selbst. Es ist nur noch ein Fall übrig, wenn P und P' zusammenfallen, und das kommt vor, wenn K und K' sich vierpunktig berühren. Die gemeinsame Tangente ist dann die Kollineationsachse.

Wir können somit auf Grund des Vorangehenden behaupten, daß die Kollineationsachse durch das Zentrum hindurchgehen kann, bei verschiedenster Lage der Kegelschnitte, nur den Fall ausgenommen, wo der eine Kegelschnitt vollständig im Innern des anderen liegt und die Kegelschnitte dabei keine Berührung höherer Ordnung miteinander haben. Im Falle doppelter Berührung beider Kegelschnitte erhalten wir zwar mittels zweier Tangenten und einer Sehne drei Achsen und drei Zentren, die auf den Achsen liegen und ein Dreieck bilden, aber jedem Zentrum ist die *gegenüberliegende* Seite des Dreiecks als Achse zugeordnet[1]). Die behandelten speziellen Fälle zentrischer Kollineation führen zur Lösung vieler Aufgaben, von denen wir nur auf folgende aufmerksam machen.

Aufgabe I. *Zu einem Kegelschnitte K in einem gegebenen Punkte P den Krümmungskreis zu konstruieren.*

Der Krümmungskreis, der mit dem Kegelschnitte eine dreipunktige Berührung hat, steht mit ihm in zentrischer Kollineation, wobei als Zentrum der Berührungspunkt P erscheint. Zeichnen wir einen beliebigen Kreis K_1, der im Punkte P den Kegelschnitt einfach berührt, und bestimmen die Kollineationsachse l_1 von K und K_1, so ist leicht zu beweisen, daß für einen anderen Kreis K_2, der ebenso den Kegelschnitt in P berührt, die zugehörige Kollineationsachse l_2 zu l_1 parallel sein muß. Nehmen wir also l' parallel zu l_1 durch den Punkt P, so ist das die gesuchte Achse für den Krümmungskreis und Kegelschnitt. Der Durchschnitt von l' und K gibt einen zweiten Punkt des Kreises und damit ist die Aufgabe gelöst.

Falls vom Kegelschnitt K nur fünf Punkte gegeben sind, konstruieren wir im Punkte P die Tangente und Normale, nehmen ebenso einen Kreis durch P mit Zentrum auf der Normale, bestimmen mittels dreier anderer Punkte von K die Achse l_1 und ziehen dann zu ihr die Parallele l' durch P. Es bleibt dann noch ein weiterer Punkt des Krümmungskreises K zu bestimmen.

Aufgabe II. *Einen Kegelschnitt zu konstruieren, der zentrisch kollinear dem Krümmungskreise in seinem Scheitel ist.*

Ziehen wir die Tangente l im Punkte P des Krümmungskreises und einen Durchmesser PA, der den Kreis im Punkte A zum zweiten Male schneidet, und nehmen wir auf PA den zu A zugehörigen Punkt A' des gesuchten Kegelschnitts an, so bestimmen sich alle anderen Punkte von K mittels einfacher Konstruktion: Schneidet ein beliebiger Strahl g

---

[1]) Bei M. Pasch (l. c. S. 105) steht irrtümlich, daß in diesem Falle vier Kollineationen vorkommen.

durch P den Kreis in B und ziehen wir die Gerade AB bis zum Schnitte C mit der Tangente l, so erhalten wir den Punkt B' als Schnitt von CA' und g.

PA' ist eine der Hauptachsen des Kegelschnittes. Liegt der Punkt A' mit dem Kreise K auf der gleichen Seite der Tangente l, so erhalten wir eine Ellipse, wobei, falls A' innerhalb des Kreises liegt, PA' die kleine Achse ist, falls außerhalb, die große. Liegen A' und K auf verschiedenen Seiten von l, so erhalten wir eine Hyperbel. Ist A' im Unendlichen, so erhalten wir eine Parabel.

(Eingegangen am 16. 12. 1924.)