NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

## Werk

**Titel:** Mathematische Annalen
**Jahr:** 1924
**Kollektion:** Mathematica
**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
**Werk Id:** PPN235181684_0092
**PURL:** http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0092

**LOG Id:** LOG_0012
**LOG Titel:** Bemerkung über die ebenen Elementarkurven 3. Ordnung
**LOG Typ:** article

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN235181684
**PURL:** http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684
**OPAC:** http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

# Bemerkung über die ebenen Elementarkurven 3. Ordnung.

Von

Otto Haupt in Erlangen.

---

1. *Einleitung.* Unter einer *„völlig stetigen“* (ebenen) Kurve versteht man nach Herrn Juel[1]) eine stückweise stetig differenzierbare Kurve, also eine (im projektiven Sinne geschlossene) Kurve, für welche, mit Ausnahme höchstens endlich vieler Stellen, an jeder Stelle genau *eine* vordere und *eine* hintere Halbtangente existiert, die entgegengesetzt gerichtet sind und sich stetig mit der Stelle ändern[2]). Kurven, die sich aus einer endlichen Anzahl von konvexen Bogen („Elementarbogen“[3])) zusammensetzen, heißen *„Elementarkurven“*[1]).

Herr Juel hat nun den Satz bewiesen[4]): *Die völlig stetigen, ebenen Kurven* 3. *Ordnung sind Elementarkurven.*

Im nachstehenden soll gezeigt werden, daß die Voraussetzung der völligen Stetigkeit entbehrt werden kann, daß also folgende Behauptung richtig ist: *Die ebenen Kurven* 3. *Ordnung sind Elementarkurven.*

Nachdem man einmal weiß, daß die Kurven 3. Ordnung stets Ele-

---

[1]) a) C. Juel, Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven 3. und 4. Ordnung (D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, 7. R., Naturvidensk. og Mathem. Afd., **11**, 2, Kopenhagen 1914, S. 113 und 125);

b) vgl. auch C. Juel, Einige Sätze über ein- und mehrteilige Elementarkurven 4. Ordnung (Math. Ann. **76** (1915), S. 343–346, bes. § 2, S. 345).

[2]) Wegen der Begriffe: Kurve, stetig differenzierbare Kurve, Halbtangente usw. siehe A. Rosenthal, Über die Singularitäten der reellen ebenen Kurven (Math. Ann. **73** (1913), S. 481 ff.).

[3]) Juel, l. c. [1]), a) S. 116. Bezüglich der Definition des konvexen Bogens vgl. auch Nr. 3 der vorliegenden Arbeit. Die von uns benutzte Definition ist gleichbedeutend mit der von Herrn Juel zugrunde gelegten.

[4]) Juel, l. c. [1]), a) S. 136 ff. Auch mehrteilige Kurven können zugelassen werden. Der Satz gilt, wie Herr Juel (l. c., S. 114) hervorhebt, nicht mehr für Kurven 4. Ordnung.

mentarkurven sind, überträgt sich die von Herrn Juel[5]) (für völlig stetige Kurven) entwickelte Theorie im wesentlichen unverändert auf die allgemeinen Kurven 3. Ordnung.

2. Weil jeder Teilbogen eines konvexen Bogens wieder konvex ist, folgt — etwa mit Hilfe des Heine-Borelschen Überdeckungssatzes — zunächst[6]): Damit die (ebene) Kurve $\mathfrak{C}$ eine Elementarkurve sei, ist notwendig und hinreichend, daß zu jeder Stelle $P$ von $\mathfrak{C}$ eine Umgebung[7]) auf $\mathfrak{C}$ gehört, die in endlich viele Konvexbögen zerlegbar ist.

Zum Beweise unserer Behauptung genügt es deshalb, *Bogen* 3. Ordnung zu betrachten.

Diese Bogen können wir überdies als (*beschränkte*) *Jordanbogen* voraussetzen. Bei der Bestimmung der „Ordnung" einer Kurve wird nämlich jeder *mehrfache Punkt* der Kurve mit seiner Vielfachheit in Anschlag gebracht[8]); eine Kurve 3. Ordnung kann demgemäß höchstens *einen* mehrfachen Punkt vom Vielfachheitsgrad 2 besitzen, sie ist also in endlich viele Bogen zerlegbar, von denen keiner einen mehrfachen Punkt besitzt. Und wir haben nur *beschränkte* derartige Bogen in Betracht zu ziehen, weil die Umgebung[9]) eines unendlich fernen Punktes auf $\mathfrak{C}$ (bzw. ein konvexer Bogen, der einen unendlich fernen Punkt enthält) definiert ist als das projektive Bild eines beschränkten (bzw. eines beschränkten konvexen) Bogens[3]).

Wir können uns sogar *damit begnügen, die Umgebung eines Endpunktes*[9]) $P_0$ *von Jordanbogen* 3. *Ordnung zu betrachten.* Denn die Umgebung $\mathfrak{U}$ eines *inneren*[9]) Punktes $P_0$ auf einem Jordanbogen $\mathfrak{B}$ ist die Vereinigung der beiden einseitigen Umgebungen $\mathfrak{U}^+$ und $\mathfrak{U}^-$ von $P_0$ auf $\mathfrak{B}$. Also ist $\mathfrak{U}$ in endlich viele Konvexbogen zerlegbar, wenn dies für $\mathfrak{U}^+$ sowohl als auch für $\mathfrak{U}^-$ zutrifft. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir schließlich *voraussetzen, daß der betrachtete Bogen keine den Endpunkt* $P_0$ *enthaltende Strecke als Teilbogen aufweist*; denn eine solche Strecke wäre bereits eine konvexe Umgebung von $P_0$ auf dem Bogen.

---

[5]) Juel, l. c. [1]), a) S. 137 ff.

[6]) Juel, l. c. [1]), a) S. 126.

[7]) Wegen des hier und im folgenden verwendeten Begriffes: Umgebung eines Punktes auf einer Kurve sei verwiesen auf die Arbeit „Über Kurven endlicher Ordnung" (Math. Zeitschr. **19** (1924), § 2, S. 288, Nr. 9). Im folgenden zitiert mit A.

[8]) Rosenthal, l. c. [2]), S. 487.

[9]) A., Nr. 9.

3. Ehe wir zum Beweise des in Nr. 1 aufgestellten Satzes, in der aus Nr. 2 sich ergebenden Fassung, übergehen, sei an folgendes erinnert[10]: Es bedeute $\mathfrak{B}$ einen Jordanbogen mit den (voneinander verschiedenen) Endpunkten $P_0$ und $P_1$. Dabei kann $\mathfrak{B}$ selbst eine Strecke sein oder $\mathfrak{B}$ kann Strecken als Teilbogen enthalten. *Wir bezeichnen mit $K_{\mathfrak{B}}$ die (abgeschlossene) konvexe Hülle von $\mathfrak{B}$, mit $\mathfrak{G}(K_{\mathfrak{B}})$ die Begrenzung von $K_{\mathfrak{B}}$. Ist $\mathfrak{B}$ Teilmenge von $\mathfrak{G}(K_{\mathfrak{B}})$ oder auch mit $\mathfrak{G}(K_{\mathfrak{B}})$ identisch, so heißt $\mathfrak{B}$ konvex.*

Im Falle $\mathfrak{B}$ ein beliebiger (nicht notwendig konvexer) Jordanbogen ist, besteht $\mathfrak{G}(K_{\mathfrak{B}})$ aus *Punkten der beiden folgenden Arten*:

I. Der Punkt $\mathsf{B}$ (Punkt erster Art) von $\mathfrak{G}(K_{\mathfrak{B}})$ gehört zu $\mathfrak{B}$. Falls $\mathfrak{B}$ keine Strecke ist, gibt es immer mindestens drei verschiedene derartige Punkte, die nicht der gleichen Geraden angehören.

II. Der Punkt $\Gamma$ (Punkt zweiter Art) von $\mathfrak{G}(K_{\mathfrak{B}})$ gehört nicht zu $\mathfrak{B}$, sondern ist innerer Punkt der abgeschlossenen Verbindungsstrecke $\overline{\mathsf{B}\mathsf{B}'}$ zweier Punkte $\mathsf{B}$ und $\mathsf{B}'$ erster Art von $\mathfrak{G}(K_{\mathfrak{B}})$. Jeder Punkt im Innern der Strecke $\overline{\mathsf{B}\mathsf{B}'}$ ist ebenfalls ein Punkt $\Gamma$ zweiter Art. Die Gerade $\beta$, welche $\mathsf{B}$ und $\mathsf{B}'$ verbindet, ist Stützgerade an $K_{\mathfrak{B}}$ längs der Strecke $\overline{\mathsf{B}\mathsf{B}'}$. Durch $\Gamma$ sind $\mathsf{B}$ und $\mathsf{B}'$ eindeutig bestimmt.

Es gilt der, für das Folgende nützliche, *Hilfssatz*: Es sei $\mathfrak{B}$ *nichtkonvex*, es bezeichne $\Gamma$ einen Punkt zweiter Art auf $\mathfrak{G}(K_{\mathfrak{B}})$, ferner $\mathsf{B}$ und $\mathsf{B}'$ die beiden, durch $\Gamma$ bestimmten, Punkte erster Art auf $\mathfrak{G}(K_{\mathfrak{B}})$ und $\beta$ ihre Verbindungsgerade. Dann gibt es auf $\mathfrak{G}(K_{\mathfrak{B}})$ immer Punkte $\Gamma$ der folgenden Beschaffenheit: Mindestens einer der Punkte $\mathsf{B}$ und $\mathsf{B}'$ ist weder ein Endpunkt von $\mathfrak{B}$ noch Endpunkt einer auf $\beta$ liegenden, nur Punkte von $\mathfrak{B}$ enthaltenden, abgeschlossenen Strecke, deren zweiter Endpunkt mit einem Endpunkt von $\mathfrak{B}$ zusammenfällt.

Der Beweis des Hilfssatzes wird in Nr. 7 nachgetragen.

4. Wir wenden uns zum Beweise unserer Behauptung, daß eine hinreichend kleine Umgebung des Endpunktes eines Jordanbogens 3. Ordnung konvex ist. Dieser Beweis soll indirekt geführt werden.

Der zu betrachtende Jordanbogen $\mathfrak{B}$ von 3. Ordnung sei umkehrbar eindeutiges und stetiges Abbild der Strecke $0 \leqq t \leqq 1$; dabei entspreche $P_0$ dem Parameterwerte $t_0 = 0$, in Zeichen: $P_0\{t_0\}$. Die zu untersuchende *Umgebung* $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ $\{t_0 \leqq t \leqq t_0 + \varepsilon = t_1\}$ *von* $P_0$ *auf* $\mathfrak{B}$ mit dem zweiten

[10]) Siehe etwa: J. Hjelmslev, Contribution à la géométrie infinitésimale de la courbe réelle (Oversigt over det Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Forh. 1911, Nr. 5, § 1, S. 434–442).

Endpunkte $P_1\{t_1\}$ sei *so gewählt*[11]), daß *erstens* $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ *von* $P_0$ *aus unter einem Winkel* $\varphi < \frac{\pi}{2}$ *erscheint* und daß *zweitens* $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ *relativ einfach ist bezüglich* $P_0$; letzteres soll besagen[12]), daß $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ mit jedem von $P_0$ ausgehenden Halbstrahle $s$ höchstens einen, von $P_0$ verschiedenen gewöhnlichen Punkt oder eine, $P_0$ nicht enthaltende, Strecke (d. h. einen „von $P_0$ verschiedenen, *auf s verlängerten*[12]) *Punkt von* $\mathfrak{B}$") gemeinsam hat.

Diese Wahl von $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ ist möglich: Es gibt ein $\eta_0 > 0$, so daß für $0 < \varepsilon \leqq \eta_0$ alle $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ diese Eigenschaften besitzen. Denn erstens ist jeder Bogen endlicher Ordnung überall vorn und hinten differenzierbar[13]), so daß eine genügend kleine, einseitige Umgebung jedes Punktes von eben diesem Punkte aus unter beliebig kleinem Winkel erscheint; zweitens ist jeder Bogen 3. Ordnung in endlich viele, relativ einfache Bogen zerlegbar[14]).

Es sei von jetzt ab *immer* $0 < \varepsilon \leqq \eta_0$ *vorausgesetzt.* Jeder auf einem Halbstrahl $s$ durch $P_0$ gelegene innere (gewöhnliche oder auf $s$ verlängerte) Punkt $P$ von $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ ist dann *Schnitt*punkt auf $s$ [15]).

*Ist* $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ *nicht konvex*, so gibt es nach dem Hilfssatze der Nr. 3 mindestens zwei voneinander verschiedene gewöhnliche Punkte $\mathsf{B}\{t(\varepsilon)\}$ und $\mathsf{B}'\{t'(\varepsilon)\}$ von $\mathfrak{U}(\varepsilon)$, deren Verbindungsstrecke $\overline{\mathsf{B}\mathsf{B}'}$ zwar zu $\mathfrak{G}(K_{\mathfrak{U}(\varepsilon)})$ nicht aber zu $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ gehört und wobei $\mathsf{B}$ und $\mathsf{B}'$ nicht gleichzeitig mit den beiden (gewöhnlichen oder auf der Verbindungsgeraden $\beta$ von $\mathsf{B}$ und $\mathsf{B}'$ verlängerten) Endpunkten von $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ zusammenfallen[16]). Dabei sei etwa $t_0 \leqq t(\varepsilon) < t'(\varepsilon) \leqq t_1 = t_0 + \varepsilon$.

Unter der *weiteren Annahme*, daß $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ *von* 3. *Ordnung*[17]) sei, werden wir jetzt (Nr. 5) zeigen: Der eben genannte Punkt $\mathsf{B}'$ muß für *jedes* $\varepsilon$ $(0 < \varepsilon \leqq \eta_0)$ zusammenfallen mit dem (von $P_0$ verschiedenen) Endpunkte $P_1$ von $\mathfrak{U}(\varepsilon)$, der evtl. auf $\beta$ verlängert ist; dabei ist, um es nochmals hervorzuheben, $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ als nicht-konvex angenommen. Und von da aus werden wir schließlich (Nr. 6) zu einem Widerspruch gelangen.

---

[11]) Dabei ist $\varepsilon > 0$ eine reelle, beliebig klein gewählte Zahl. $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ ist nach den in Nr. 2 gemachten Voraussetzungen keine Strecke.

[12]) A., Nr. 6.

[13]) A., Nr. 21, Fußnote [21]).

[14]) A., Nr. 19.

[15]) A., Nr. 16. — Definition von „Schnittpunkt" und „Stützpunkt" a. a. O. (Nr. 12).

[16]) Die Ausdrucksweise: „$\mathsf{B}$ (bzw. $\mathsf{B}'$) fällt mit einem *auf* $\beta$ *verlängerten* inneren Punkte (bzw. Endpunkt) von $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ zusammen" soll besagen, daß z. B. $\mathsf{B}$ einer auf $\beta$ liegenden abgeschlossenen, nur aus Punkten von $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ bestehenden Strecke angehört, die nur innere Punkte (bzw. die einen Endpunkt) von $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ enthält.

[17]) Wir nehmen an, daß $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ von 3. Ordnung sei, weil jeder Bogen von 2. (bzw. 1.) Ordnung konvex ist.

5. Zunächst können die eben (Nr. 4) erwähnten Punkte B und B′ nicht beide mit *inneren* (gewöhnlichen oder auf $\beta$ verlängerten) Punkten von $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ zusammenfallen. Denn andernfalls ist $\beta$ (die Verbindungsgerade von B und B′) Stützgerade von $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ mit den *Stützpunkten*[18]) B und B′; folglich[15]) hätte eine zu $\beta$ hinreichend benachbarte Parallele mit $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ mindestens vier verschiedene (gewöhnliche oder verlängerte[19])) Punkte gemeinsam, während doch $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ von der Ordnung 3 sein soll.

Ferner können die in Rede stehenden Punkte B und B′ auch nicht mit $P_0$ zusammenfallen. Für B′ ist dies wegen der oben getroffenen Festsetzung $t_0 \leqq t < t' \leqq t_1$ von selbst ausgeschlossen. Nimmt man aber an, es falle B mit $P_0$ zusammen, so würde (vgl. Nr. 4) der durch B mitbestimmte Punkt B′ mit einem *inneren* (gewöhnlichen oder auf $\beta$ verlängerten) Punkt $S$ von $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ zusammenfallen; einer der von $P_0$ ausgehenden, auf $\beta$ liegenden, Halbstrahlen hätte also mit $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ den *Stützpunkt* $S$ gemeinsam, während doch (gemäß Nr. 4) $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ als relativ einfach bezüglich $P_0$ vorausgesetzt war. $P_0$ kann übrigens nach den (in Nr. 2) gemachten Annahmen auf keiner Geraden verlängerter Endpunkt von $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ sein.

Falls $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ nicht-konvex, ist es also, wie behauptet, immer möglich, durch den Endpunkt $P_1$ von $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ eine Gerade $\beta$ zu legen, welche $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ in einem, von $P_1$ verschiedenen, inneren Punkte B stützt. $P_1$ und B können dabei auf $\beta$ verlängerte Punkte von $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ sein[19]). Außer $P_1$ und B hat $\beta$ keine Punkte mit $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ gemeinsam, weil $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ von 3. Ordnung sein soll und weil B Stützpunkt ist[15]).

6. Es sei jetzt $\varepsilon = \varepsilon_0$ fest gewählt gemäß der Bedingung $0 < \varepsilon_0 \leqq \eta_0$ und es werde wieder $\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{U}(\varepsilon_0)$ als nicht-konvex angenommen. Es bezeichne weiter $\beta_0$ die (zufolge Nr. 5 vorhandene) durch den Endpunkt $P_1$ von $\mathfrak{U}_0$ laufende Gerade, welche $\mathfrak{U}_0$ in dem von $P_1$ verschiedenen inneren Punkte $\mathsf{B}_0$ von $\mathfrak{U}_0$ stützt. Schließlich bedeute $\mathfrak{H}_0^+$ diejenige der beiden, von $\beta_0$ gebildeten offenen Halbebenen, in der, weil $\beta_0$ Stützgerade von $K_{\mathfrak{U}}$ ist, $P_0$ und überhaupt alle Punkte von $\mathfrak{U}_0$ liegen, mit Ausnahme der (evtl. auf $\beta_0$ verlängerten) Punkte $P_1$ und $\mathsf{B}_0$.

Sei *zunächst* $\mathsf{B}_0\{t(\varepsilon_0)\}$ *gewöhnlicher Punkt von* $\mathfrak{U}_0$ *auf* $\beta_0$. Der von $\mathsf{B}_0$ ausgehende, in $\mathfrak{H}_0^+$ verlaufende Halbstrahl $s_0$ durch $P_0$ zerlegt $\mathfrak{H}_0^+$ in zwei (offene) Winkelgebiete: $\sphericalangle[P_1\mathsf{B}_0P_0]$ und $\sphericalangle[P_0\mathsf{B}_0R_0]$; dabei bedeutet

[18]) A., Nr. 12. Fällt B oder B′ mit einem auf $\beta$ verlängerten Punkt von $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ zusammen, so ist unter dem „Stützpunkt" eben dieser verlängerte Punkt zu verstehen. — Die Bezeichnungen der Nr. 4 des Textes sind auch in gegenwärtiger Nr. 5 beibehalten.

[19]) Zwei verlängerte Punkte eines Bogens auf der gleichen Geraden heißen „verschieden", wenn die sie bildenden, abgeschlossenen Strecken punktfremd sind.

$R_0$ einen von $\mathsf{B}_0$ verschiedenen Punkt des auf $\beta_0$ liegenden, von $\mathsf{B}_0$ ausgehenden, $P_1$ nicht enthaltenden Halbstrahles. Die den Intervallen $t_0 \leqq t \leqq t(\varepsilon_0)$ bzw. $t(\varepsilon_0) \leqq t \leqq t_1$ entsprechenden Teilbogen $\widehat{P_0 \mathsf{B}_0}$ bzw. $\widehat{\mathsf{B}_0 P_1}$ von $\mathfrak{U}_0$ verlaufen, abgesehen von den Endpunkten $P_0$ und $\mathsf{B}_0$ bzw. $\mathsf{B}_0$ und (dem evtl. auf $\beta_0$ verlängerten Endpunkte) $P_1$, ganz in $\sphericalangle[P_0 \mathsf{B}_0 R_0]$ bzw. in $\sphericalangle[P_1 \mathsf{B}_0 P_0]$ [20]). Denn $\mathfrak{U}_0$ ist (Nr. 4) relativ einfach bezüglich $P_0$, kann also mit dem von $\mathsf{B}_0$ ausgehenden Halbstrahl $s_0$, außer $P_0$ und $\mathsf{B}_0$, höchstens *einen* weiteren Punkt gemeinsam haben, der überdies *nicht* auf der Strecke $\overline{\mathsf{B}_0 P_0}$ liegen darf. Dies ist aber ausgeschlossen, weil $\mathfrak{U}_0$ von $P_0$ aus unter einem Winkel $\varphi < \frac{\pi}{2}$ erscheint (Nr. 4). $\mathsf{B}_0$ ist überdies Schnittpunkt von $\mathfrak{U}_0$ auf $s_0$.

Wäre nun auch $\widehat{P_0 \mathsf{B}_0}$, d. h. $\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{U}(\varepsilon_1)\{t_0 \leqq t \leqq t(\varepsilon_0) = t_0 + \varepsilon_1\}$ $(0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0)$, nicht konvex, so ließe sich durch $\mathsf{B}_0$ die Gerade $\beta_1$ legen, welche $\mathfrak{U}_1$ in dem inneren (evtl. auf $\beta_1$ verlängerten) Punkte $\mathsf{B}_1$ stützt. $\mathsf{B}_1$ ist verschieden von $P_0$ und von dem (evtl. auf $\beta_1$ verlängerten) Endpunkte von $\mathfrak{U}_1$, mit welchem $\mathsf{B}_0$ zusammenfällt. Folglich ist $\mathsf{B}_1$ innerer Punkt von $\sphericalangle[P_0 \mathsf{B}_0 R_0]$ und $P_0$ ist daher (innerer) Punkt des Winkelgebietes $\sphericalangle[P_1 \mathsf{B}_0 \mathsf{B}_1]$. Auf $\beta_1$ muß $\mathsf{B}_0$ Schnittpunkt von $\mathfrak{U}_0$ sein oder mit einem auf $\beta_1$ verlängerten derartigen Schnittpunkte zusammenfallen [21]); denn sonst würde $\mathsf{B}_0$ mit einem Stützpunkte von $\mathfrak{U}_0$ auf $\beta_1$ zusammenfallen und dann hätte eine geeignet gewählte, zu $\beta_1$ benachbarte Gerade mit $\mathfrak{U}_0$ mindestens vier verschiedene Punkte gemeinsam — einerlei ob die Umgebungen von $\mathsf{B}_1$ und $\mathsf{B}_0$ auf $\mathfrak{U}_0$ beide in der gleichen, durch $\beta_1$ bestimmten Halbebene verlaufen oder in verschiedenen Halbebenen [15]).

Es tritt also $\mathfrak{U}_0$ im Punkte $\mathsf{B}_0$ aus dem Gebiete $\sphericalangle[P_1 \mathsf{B}_0 \mathsf{B}_1]$ über in das Gebiet $\sphericalangle[\mathsf{B}_1 \mathsf{B}_0 R_0]$. Da $P_0$ in $\sphericalangle[P_1 \mathsf{B}_0 \mathsf{B}_1]$ liegt, so muß $\mathfrak{U}_0$, außer $\mathsf{B}_0$, noch mindestens einen weiteren *Schnittpunkt* auf $\beta_1$ besitzen [22]). Da andererseits $\beta_1$ mit $\mathfrak{U}_0$ außer dem Schnittpunkt $\mathsf{B}_0$ und dem Stützpunkt $\mathsf{B}_1$ weitere Punkte nicht gemeinsam haben kann (Nr. 5), sind wir bei einem Widerspruche angelangt.

Die oben gemachte Einschränkung, daß $\mathsf{B}_0$ gewöhnlicher Punkt von $\mathfrak{U}_0$ auf $\beta_0$ sei, sollte nur eine bequemere Formulierung unserer Überlegungen ermöglichen. Diese lassen sich unverändert durchführen auch *im Falle eines auf* $\beta_0$ *verlängerten Punktes* $\mathsf{B}_0$ *von* $\mathfrak{U}_0$.

---

[20]) $\mathsf{B}_0$ kann nicht mit einem auf $s_0$ verlängerten Punkte von $\mathfrak{U}_0$ zusammenfallen. Denn sonst würde $\mathsf{B}_0$ anf $\beta_1$ (siehe im Text weiter unten) einen Stützpunkt von $\mathfrak{U}_0$ liefern. Vgl. auch [21]).

[21]) Das wäre nicht der Fall, wenn $\mathsf{B}_0$ mit einem auf $s_0$ verlängerten Punkte von $\mathfrak{U}_0$ zusammenfiele.

[22]) A., Nr. 13.

7. Nachtrag zu Nr. 3. Der *Beweis des Hilfssatzes* der Nr. 3 läßt sich etwa so führen: Es gibt Punkte Γ zweiter Art auf $\mathfrak{G}(K_{\mathfrak{B}})$. Denn andernfalls wären *alle* Punkte der einfachen geschlossenen Jordankurve $\mathfrak{G}(K_{\mathfrak{B}})$ Punkte B erster Art; diese geschlossene Kurve wäre also Teilmenge des Bogens $\mathfrak{B}$, was unmöglich ist.

Es seien $P_0$ und $P_1$ die Endpunkte von $\mathfrak{B}$. Angenommen nun, der Hilfssatz wäre nicht richtig, dann müßte die Gesamtheit der Punkte Γ von $\mathfrak{G}(K_{\mathfrak{B}})$ das Innere einer *einzigen* Strecke $\overline{P_0' P_1'}$ bilden, welche Teilmenge der Strecke $\overline{P_0 P_1}$ oder (wenn $P_0$ mit $P_0'$ und $P_1$ mit $P_1'$ zusammenfällt) mit ihr identisch ist; die abgeschlossenen Strecken $\overline{P_0 P_0'}$ und $\overline{P_1 P_1'}$ gehören zu $\mathfrak{G}(K_{\mathfrak{B}})$.[23]) Die nicht zum Innern von $\overline{P_0' P_1'}$ gehörigen Punkte von $\mathfrak{G}(K_{\mathfrak{B}})$ wären somit *sämtlich* von erster Art und folglich der von ihnen gebildete Jordanbogen $\mathfrak{B}^*$ mit den Endpunkten $P_0'$ und $P_1'$ Teilmenge von $\mathfrak{B}$. Da andererseits aber $P_0$ und $P_1$ innere oder Endpunkte von $\mathfrak{B}^*$ sind, so muß $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{B}^*$ identisch sein; d. h. $\mathfrak{B}$ ist konvex gegen die Voraussetzung.

Erlangen, Math. Seminar d. Univ., 1. XII. 1923.

---

[23]) Dabei soll $P_0'$ auf $\overline{P_0 P_1}$ zwischen $P_0$ und $P_1'$ liegen.

(Eingegangen am 8. 12. 1923.)