SUB | NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Mathematische Annalen
Jahr: 1924
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN235181684_0092
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0092

LOG Id: LOG_0013
LOG Titel: Über Greensche Randbedingungen
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Über Greensche Randbedingungen.

Von

O. Haupt in Erlangen und E. Hilb in Würzburg.

§ 1.

Fragestellung.

1. Es bedeute $\mathfrak{K}$ die Peripherie des Einheitskreises in der Ebene der rechtwinkligen kartesischen Koordinaten x, y. Die Bogenlänge auf $\mathfrak{K}$ sei mit s bezeichnet $(0 \leqq s \leqq 2\pi)$, das Innere $x^2 + y^2 < 1$ des Einheitskreises mit $\mathfrak{K}^*$.

Eine bekannte *Randwertaufgabe* besteht dann in der Bestimmung aller Werte des Parameters λ, für welche die Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u = 0$ eine in $\mathfrak{K} + \mathfrak{K}^*$ stetig differenzierbare, eindeutige und *auf* $\mathfrak{K}$ *verschwindende Lösung* $u(x, y)$ besitzt. Wie man weiß, gibt es abzählbar unendlich viele, ausnahmslos reelle derartige Werte λ und dementsprechend abzählbar unendlich viele Lösungen $u_j(x, y)$, $j = 1, 2, \ldots$.

Es seien $u_l(x, y)$ und $u_k(x, y)$ irgend zwei derartige Lösungen. Ihre Werte auf $\mathfrak{K}$ (ihre „Randwerte") wollen wir kurz mit $u_l(s)$ und $u_k(s)$ bezeichnen und die Werte der Normalableitung von u_l bzw. u_k bezüglich $\mathfrak{K}$ mit $v_l(s) = \frac{\partial u_l}{\partial n}$ bzw. $v_k(s) = \frac{\partial u_k}{\partial n}$ $(0 \leqq s \leqq 2\pi)$. Wegen $u_l(s) = 0$, $u_k(s) = 0$ gilt dann die Relation

$$\text{(G)} \qquad \int_0^{2\pi} [u_l(s)\, v_k(s) - u_k(s)\, v_l(s)]\, ds = 0.$$

Wir wollen dafür sagen: „*Die Randwerte* (u_l, v_l) *und* (u_k, v_k) *stehen in G-Relation*".

Allgemein stehen irgend zwei lineare Aggregate von Randwerten: $(\sum_{\mu=1}^{m} c_\mu u_\mu, \sum_{\mu=1}^{m} c_\mu v_\mu)$ bzw. $(\sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu u_\nu, \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu v_\nu)$ mit konstanten Koeffizienten

c_μ, γ_ν in G-Relation; dies drücken wir so aus: „*Die* (u_l, v_l), $l = 1, 2, \ldots$, *bilden ein* G-*System*“. Die (u_l, v_l) nennen wir die „*Elemente*“ des Systems.

Unabhängig von diesem Ausgangspunkt legen wir den *Begriff eines* G-*Systems* fest wie folgt: Gegeben sei eine Menge von Funktionspaaren $(u(s), v(s))$, wo u und v *eindeutige, reellwertige endliche Funktionen der reellen Veränderlichen* s $(0 \leqq s < 2\pi)$ bedeuten, *die nebst ihrem Quadrate im Lebesgueschen Sinne integrierbar (summierbar) sind*; kurz gesagt: u und v sollen „*Funktionen der Klasse* L^2“ sein[1]). Die Menge liefert ein G-System, wenn irgend zwei ihrer „Elemente“ (u_1, v_1) und (u_2, v_2) in G-Relation stehen, d. h. wenn

$$\text{(G)} \qquad \int_0^{2\pi} [u_1(s)\, v_2(s) - u_2(s)\, v_1(s)]\, ds = 0.$$

Man beachte dabei, daß das Produkt uv im Lebesgueschen Sinne integrierbar ist, wenn u und v zur Klasse L^2 gehören.

Beispiel eines G-Systems ist die Menge der Elemente (u, v), wobei $u(s) = 0$ in $0 \leqq s < 2\pi$, während $v(s)$ eine *beliebige* Funktion der Klasse L^2 ist. Dieses G-System Γ_0 hat zudem die Eigenschaft, daß es keiner Erweiterung mehr fähig ist im folgenden Sinne: Irgendein zur Klasse L^2 gehöriges Element (u, v), welches zu *allen* Elementen von Γ_0 in G-Relation steht, gehört selbst zu Γ_0, d. h. es ist $u(s) = 0$, $0 \leqq s < 2\pi$. In der Tat: Ist $u = f(s)$, $v = g(s)$ gegeben und soll dieses Element mit allen Elementen von Γ_0 in G-Relation stehen, so muß das insbesondere für das Element $u_1 = 0$, $v_1 = f(s)$ von Γ_0 gelten, also

$$\int_0^{2\pi} [u(s)\, v_1(s) - u_1(s)\, v(s)]\, ds = 0 = \int_0^{2\pi} [f(s)]^2\, ds,$$

woraus $f(s) = 0$ (bis auf eine Nullmenge[1])) in $0 \leqq s < 2\pi$ sich ergibt.

Ein in diesem Sinne vollständiges G-System, wie es Γ_0 ist, nennen wir kurz ein „*komplettes* G-*System*“. Und die, eine „willkürliche“ Funktion $\varphi(s)$, d. h. eine beliebige Funktion $\varphi(s)$ der Klasse L^2, enthaltende Darstellung $u(s) = 0$, $v(s) = \varphi(s)$ für die Elemente von Γ_0 heiße die „*Parameterdarstellung von* Γ_0“.

---

[1]) Wir betrachten also im folgenden nur *endliche* Funktionen. Dies ist keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit, da es zu *jeder* über $0 \leqq s < 2\pi$ summierbaren Funktion eine zu ihr *äquivalente*, d. h. höchstens in den Punkten einer Nullmenge von der ersten verschiedene, *endliche* Funktion gibt. Vgl. etwa C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen (Leipzig 1918, § 387 und 391). Im Interesse einer kurzen Ausdrucksweise werden wir übrigens im folgenden durchweg *zwei* (endliche) *Funktionen als nicht verschieden ansehen, wenn sie äquivalent sind.*

Jedes komplette G-System gibt Anlaß zu einer Greenschen Randbedingung bzw. zu einer Greenschen Randwertaufgabe[2]).

2. Außer Γ_0 sind noch andere Beispiele von kompletten G-Systemen (bzw. Greenschen Randbedingungen) bekannt[2]), die wir kurz anführen wollen:

a) Der Randwertaufgabe, bei welcher $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ gefordert wird, entspricht das komplette G-System mit der Parameterdarstellung $u = \psi(s)$, $v = 0$, unter $\psi(s)$ wieder eine „willkürliche“ Funktion verstanden. („Zweite Randwertaufgabe“.)

b) Ein komplettes G-System bildet ferner die Gesamtheit aller (zur Klasse L^2 gehörigen) Elemente (u, v), für welche

$$f_1(s)\, u(s) + f_2(s)\, v(s) = 0,$$

unter $f_1(s)$, $f_2(s)$ gegebene beschränkte Funktionen der Klasse L^2 verstanden, für die etwa $f_2(s) \geqq 1$, $(0 \leqq s < 2\pi)$ bleibt. („Sturmsche Aufgabe“.) Eine Parameterdarstellung des Systems ist: $u = \varphi(s)$, $v = -\frac{f_1(s)}{f_2(s)}\varphi(s)$.[3]) Man verifiziert wie oben, daß die so dargestellten Elemente tatsächlich ein komplettes G-System bilden.

c) Die „allgemeinste Sturmsche Aufgabe“ wird bestimmt durch ein komplettes G-System mit der Parameterdarstellung

$$u(s) = \varphi(s), \qquad v(s) = f(s)\,\varphi(s) + \int_0^{2\pi} K(s,t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Dabei ist $f(s)$ eine gegebene beschränkte Funktion der Klasse L^2, so daß auch $f(s)\cdot\varphi(s)$ zur Klasse L^2 gehört[3]); $K(s, t)$ hängt von den beiden reellen Variablen s und t ab, ist symmetrisch in s und t und überdies so beschaffen, daß für willkürliches $\varphi(s)$ der Klasse L^2 auch $\int_0^{2\pi} K(s,t)\,\varphi(t)\,dt$ zur Klasse L^2 gehört; dies ist gewiß der Fall, wenn $\iint [K(s,t)]^2\,ds\,dt$ existiert.

d) Die „pseudoperiodische Randwertaufgabe“ entspricht einem G-System, dessen sämtliche Elemente (u, v) den Bedingungen genügen

$$\left.\begin{aligned} u(s+\pi) &= v(s) + \int_0^{\pi} \Lambda(s,t)\,u(t)\,dt \\ u(s) &= v(s+\pi) \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad 0 \leqq s < \pi.$$

[2]) Vgl. R. Bär, Über Greensche Randwertaufgaben bei der Schwingungsgleichung (Diss. Würzburg 1915, S. 18—25).

[3]) Da $\frac{f_1(s)}{f_2(s)}$ nach Voraussetzung eine beschränkte, $\varphi(s)$ bzw. $[\varphi(s)]^2$ eine endliche, summierbare Funktion ist, so wird auch $v(s)$ bzw. $[v(s)]^2$ summierbar. Vgl. Carathéodory, l. c. [1]), § 398.

Die gegebene Funktion $\Lambda(s, t)$ erfüllt die gleichen Bedingungen wie $K(s, t)$ in c); speziell ist also $\Lambda(s, t) = \Lambda(t, s)$. Als Parameterdarstellung für die Elemente des Systems hat man

$$\begin{aligned} u(s) &= \varphi(s), & 0 \leqq s < 2\pi, \\ v(s) &= \varphi(s+\pi) - \int_0^\pi \Lambda(s,t)\,\varphi(t)\,dt, & 0 \leqq s < \pi, \\ &= \varphi(s-\pi), & \pi \leqq s < 2\pi. \end{aligned}$$

Dabei ist wieder $\varphi(s)$ die „willkürliche" Funktion. Das System erweist sich ebenfalls als komplett.

e) Schließlich sind zu erwähnen die Aufgaben, bei denen längs der Strecke $0 \leqq s < 2\pi$ stückweise verschiedene der eben aufgeführten Randbedingungen vorgeschrieben sind.

3. Allen bisher betrachteten Beispielen ist gemeinsam, daß die betreffenden kompletten G-Systeme eine *Parameterdarstellung* besitzen im folgenden Sinne: Es kann entweder $u(s)$ oder $v(s)$ oder, allgemein zu reden, ein linearer Ausdruck $\alpha(s)\,u(s) + \beta(s)\,v(s)$ als *willkürliche* Funktion von s vorgeschrieben werden: $\varphi(s) = \alpha(s)\,u(s) + \beta(s)\,v(s)$. [4]) Ferner war dann $u(s) = L_1(\varphi)$, $v(s) = L_2(\varphi)$, wobei L_1 und L_2 je eine passend gewählte Schar von Linearoperationen bedeuten. Durch die Parameterdarstellung war das G-System jeweils vollkommen bestimmt.

Um *alle diese Beispiele als spezielle Fälle einer allgemeinen Klasse von kompletten G-Systemen einzuordnen*, haben wir daher folgende *Aufgabe* zu stellen:

Gegeben seien die beiden beschränkten Funktionen $\alpha(s)$ und $\beta(s)$ der Klasse L^2; überdies sei $[\alpha(s)]^2 + [\beta(s)]^2 \geqq 1$, $0 \leqq s < 2\pi$.

Gesucht werden alle (kompletten[5])) G-Systeme (bzw. ihre Parameterdarstellungen), in welchen zu willkürlich vorgegebenem, zur Klasse L^2 gehörigem $\varphi(s)$ ein Element (u, v) existiert, so daß

$$\alpha(s)\,u(s) + \beta(s)\,v(s) = \varphi(s),$$

wobei u und v ebenfalls der Klasse L^2 angehören sollen[6]).

---

[4]) Die über $\alpha(s)$ und $\beta(s)$ zu machenden Annahmen werden weiter unten angegeben.

[5]) Es ergibt sich hinterher, daß das G-System ohne weiteres komplett ist, falls es die übrigen Bedingungen erfüllt (vgl. Nr. 7).

[6]) Zufolge der über $\alpha(s)$ und $\beta(s)$ gemachten Annahmen gehört $\varphi(s)$ zur Klasse L^2, wenn letzteres für $u(s)$ und $v(s)$ zutrifft. Vgl. Carathéodory l. c. [3]).

§ 2.

Lösung.

4. Zur Lösung der Aufgabe sei vorerst bemerkt: Zu $\alpha(s)$ und $\beta(s)$ kann man auf mannigfach verschiedene Arten zwei zur Klasse L^2 gehörige, beschränkte Funktionen $\gamma(s)$ und $\delta(s)$ bestimmen, so daß

$$\alpha(s)\,\delta(s)-\beta(s)\,\gamma(s)=1,\quad 0\leqq s<2\pi.\,{}^{7})$$

Setzt man

$$\text{(S)}\qquad \begin{aligned} U(s)&=\alpha(s)\,u(s)+\beta(s)\,v(s),\\ V(s)&=\gamma(s)\,u(s)+\delta(s)\,v(s),\end{aligned}\qquad 0\leqq s<2\pi,$$

so gilt der

Satz. *Einem kompletten G-System (u, v) entspricht vermöge* (S) *wiederum ein komplettes G-System (U, V) und umgekehrt.*

Zum Beweise muß man vorab bemerken, daß zugleich mit $u(s)$ und $v(s)$ auch $U(s)$ und $V(s)$ zur Klasse L^2 gehören[6]).

Ist ferner $U_j=\alpha\,u_j+\beta\,v_j$, $V_j=\gamma\,u_j+\delta\,v_j$, $j=1, 2$, so gilt

$$\int_0^{2\pi}[U_1V_2-U_2V_1]\,ds=\int_0^{2\pi}(\alpha\delta-\beta\gamma)(u_1v_2-u_2v_1)\,ds=\int_0^{2\pi}(u_1v_2-u_2v_1)\,ds.$$

Es stehen also (U_1, V_1) und (U_2, V_2) in G-Relation, wenn dies für (u_1, v_1) und (u_2, v_2) zutrifft und umgekehrt.

Schließlich ist das G-System (U, V) dann und nur dann komplett, wenn das System der (u, v) komplett ist. Es sei nämlich (U^*, V^*) irgendein zur Klasse L^2 gehöriges Funktionenpaar, welches mit allen Elementen $(U=\alpha u+\beta v,\ V=\gamma u+\delta v)$ in G-Relation steht, unter (u, v) die Elemente eines kompletten G-Systems verstanden. Aus

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}[V^*(\alpha u+\beta v)-U^*(\gamma u+\delta v)]\,ds=0\\ &=\int_0^{2\pi}[u(\alpha V^*-\gamma U^*)-v(\delta U^*-\beta V^*)]\,ds\end{aligned}$$

folgt, daß die (zur Klasse L^2 gehörigen) Funktionen $\bar u=\delta U^*-\beta V^*$ und $\bar v=\alpha V^*-\gamma U^*$ ebenfalls dem (kompletten) G-System der (u, v) ange-

---

[7]) Beispiel: $\gamma(s)=0$, $\delta(s)=\dfrac{1}{\alpha(s)}$ für alle s aus $0\leqq s<2\pi$, für welche $|\alpha(s)|\geqq 1:\sqrt{2}$. $\gamma(s)=-1:\beta(s)$, $\delta(s)=0$ für alle s mit $|\alpha(s)|<1:\sqrt{2}$. Es ist somit $\gamma(s)$ und $\delta(s)$ meßbar auf $0\leqq s<2\pi$. Überdies gilt: $|\delta(s)|\leqq\sqrt{2}$ und $|\gamma(s)|\leqq\sqrt{2}$; letztere Ungleichung folgt aus $|\beta(s)|^2\geqq 1-|\alpha(s)|^2>\frac{1}{2}$ für alle s mit $|\alpha(s)|<1:\sqrt{2}$.

hören; denn sie stehen mit *allen* (u, v) in G-Relation. Demnach gehören $U^* = \alpha \bar{u} + \beta \bar{v}$, $V^* = \gamma \bar{u} + \delta \bar{v}$ zum G-System der (U, V); dieses ist mithin komplett. Ebenso ergibt sich die Umkehrung.

5. Den in Nr. 4 gemachten Feststellungen zufolge haben wir zur Lösung unserer Aufgabe, d. h. zur Bestimmung aller in Nr. 3 charakterisierten, kompletten G-Systeme, lediglich diejenigen Systeme zu betrachten, für welche $\alpha(s) \equiv 1$, $\beta(s) \equiv 0$ ist. Denn das (vermöge (S) transformierte) System (U, V) ist so beschaffen, daß $U(s) = \alpha(s)\, u(s) + \beta(s)\, v(s) = \varphi(s)$ willkürlich (aus der Klasse L^2) gewählt werden kann, und wenn alle derartigen G-Systeme bekannt sind, erhält man durch eine Transformation (S) das allgemeine G-System von der in Nr. 3 festgelegten Art.

Zur Lösung der gestellten Aufgabe müssen wir also lediglich *feststellen, auf welche Weise in einem kompletten*[5]) *G-System von Elementen (U, V), in welchem $U(s)$ willkürlich (aus der Klasse L^2) vorgeschrieben werden kann, die Funktion $V(s)$ von $U(s)$ abhängt.*

6. Es sei ein G-System (U, V) der eben erwähnten Beschaffenheit gegeben. Wir wählen für die willkürliche Funktion $U(s)$ der Reihe nach die (sicher zur Klasse L^2 gehörigen) Elemente $f_1(s)$, $f_2(s)$, ... eines normierten, vollständigen Orthogonalsystems von stetigen Funktionen in bezug auf das Intervall $0 \leqq s \leqq 2\pi$. Es seien bezeichnet: Eine, zu $U(s) = f_\varrho(s)$ im gegebenen G-System gehörige, Funktion $V(s)$ mit $g_\varrho(s)$, ferner die Fourierkoeffizienten von $U(s)$ bzw. $V(s)$ bzw. $g_\nu(s)$ bezüglich des Orthogonalsystems der $f_\varrho(s)$ mit U_ϱ bzw. V_ϱ bzw. $g_{\nu\varrho}$ $(\nu, \varrho = 1, 2, \ldots)$.

Die G-Relation zwischen $(f_\varrho(s), g_\varrho(s))$ und einem beliebigen anderen Elemente $(U(s), V(s))$ des gegebenen G-Systems liefert

$$0 = \int_0^{2\pi} [f_\varrho(s)\, V(s) - g_\varrho(s)\, U(s)]\, ds = \int_0^{2\pi} f_\varrho(s)\, V(s)\, ds - \int_0^{2\pi} g_\varrho(s)\, U(s)\, ds.$$

Bedenkt man, daß das erste Integral rechter Hand V_ϱ ist, und wendet auf das zweite Integral den Parsevalschen Satz an, so kommt:

$$(\mathrm{G}_\varrho^*) \qquad V_\varrho = \sum_{\tau=1}^{\infty} g_{\varrho\tau}\, U_\tau \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots).$$

Da sämtliche vorkommende Funktionen zur Klasse L^2 gehören, konvergieren $\sum_{\tau=1}^{\infty} U_\tau^2$, $\sum_{\tau=1}^{\infty} g_{\varrho\tau}^2$; und daher konvergiert auch $\sum_{\tau=1}^{\infty} g_{\varrho\tau}\, U_\tau$. Umgekehrt gehört nach dem Riesz-Fischerschen Satze zu jeder Folge reeller Zahlen $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \ldots$ mit konvergenter Quadratsumme eine Funktion $\tilde{U}(s)$ der

Klasse L^2, für die $\int\limits_0^{2\pi}\tilde{U}(s)f_\varrho(s)\,ds=\tilde{U}_\varrho$.[8]) Daraus folgt, daß die in (G_ϱ^*) auftretenden Koeffizienten U_τ nur konvergente Quadratsumme zu besitzen brauchen und im übrigen beliebig sind, entsprechend der Willkürlichkeit von $U(s)$. Weiter folgt, daß die zu *jedem* beliebigen derartigen System von Zahlen $U_1, U_2, \ldots$ aus (G_ϱ^*) sich ergebenden Zahlen V_ϱ, als Fourierkoeffizienten einer Funktion der Klasse L^2, wiederum konvergente Quadratsumme besitzen müssen. Die Bilinearform, welche durch das System der $g_{\nu\varrho}$ $(\nu, \varrho=1, 2, \ldots)$ definiert wird, ist mithin *beschränkt*[9]). Die eben genannte Bilinearform $\sum\limits_{\varrho\nu} g_{\varrho\nu}x_\varrho y_\nu$ muß überdies *symmetrisch* sein, d. h. es muß $g_{\varrho\nu}=g_{\nu\varrho}$ gelten $(\nu, \varrho=1, 2, \ldots)$, falls die Gleichungen (G_ϱ^*) zu einem G-System gehören sollen. Betrachtet man nämlich zwei Elemente $(U(s), V(s))$ und $(U^*(s), V^*(s))$ des vorgelegten G-Systems, so liefert die G-Relation zwischen (U, V) und (U^*, V^*):

$$0=\int\limits_0^{2\pi}(UV^*-U^*V)\,ds=\sum_{\varrho=1}^{\infty}(U_\varrho V_\varrho^*-U_\varrho^* V_\varrho).$$

Setzt man für V_ϱ und V_ϱ^* ihre Werte aus (G_ϱ^*) ein, so ergibt sich:

$$(G^{**})\qquad \begin{aligned}0&=\sum_{\varrho=1}^{\infty}\Big[U_\varrho\Big(\sum_{\nu=1}^{\infty}g_{\varrho\nu}U_\nu^*\Big)-U_\varrho^*\Big(\sum_{\nu=1}^{\infty}g_{\varrho\nu}U_\nu\Big)\Big]\\&=\sum_{\varrho=1}^{\infty}U_\varrho\Big[\sum_{\nu=1}^{\infty}(g_{\varrho\nu}-g_{\nu\varrho})U_\nu^*\Big].\end{aligned}$$ [10])

Wählt man jetzt speziell $U(s)$ und $U^*(s)$ so, daß ihre Fourierkoeffizienten mit Ausnahme je eines einzigen sämtlich verschwinden, setzt also etwa:

$$\begin{aligned}U_\varrho&=0,\quad \varrho\neq k_1, &\qquad U_\varrho^*&=0,\quad \varrho\neq k_2,\\&=1,\quad \varrho=k_1, & &=1,\quad \varrho=k_2,\end{aligned}$$

wo k_1 und k_2 voneinander verschiedene natürliche Zahlen bedeuten, so liefert die letzte Beziehung:

$$g_{k_1k_2}-g_{k_2k_1}=0.$$

Umgekehrt läßt (G^{**}) erkennen, daß die Gleichungen (G_ϱ^*) immer dann zu einem G-System Anlaß geben, falls die Bilinearform $\sum\limits_{\nu\varrho}g_{\nu\varrho}x_\nu y_\varrho$ beschränkt und symmetrisch ist.

---

[8]) $\tilde{U}(s)$ kann immer als endlich vorausgesetzt werden. Vgl. Fußnote [1]).

[9]) E. Hellinger und O. Toeplitz, Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen. Math. Ann. **69** (1910), § 10. Vgl. auch F. Riesz, Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues (Paris 1913, S. 81).

[10]) Die Summationen nach ν und ϱ sind miteinander vertauschbar, weil die Bilinearform beschränkt ist. Vgl. Hellinger-Toeplitz, l. c. [9]), § 2.

Jedes durch Vermittelung einer derartigen Bilinearform definierte G-System ist von selbst komplett. Sei nämlich irgendein der Klasse L^2 angehöriges Element $(U^*(s), V^*(s))$ gegeben, welches zu allen Elementen eines G-Systems der eben erwähnten Art in G-Relation steht, so liefert die G-Relation bei Benutzung der Beziehungen (G_ϱ^*) wie oben:

$$0 = \sum_{\varrho=1}^{\infty}[U_\varrho V_\varrho^* - V_\varrho U_\varrho^*] = \sum_{\varrho=1}^{\infty}[U_\varrho V_\varrho^* - U_\varrho^*(\sum_{\varrho=1}^{\infty} g_{\varrho\nu} U_\nu)]$$
$$= \sum_{\varrho=1}^{\infty} U_\varrho [V_\varrho^* - \sum_{\varrho=1}^{\infty} g_{\varrho\nu} U_\nu^*].$$

Wählt man wieder $U(s)$ so, daß etwa: $U_\varrho = 0$, $\varrho \neq k$; $U_k = 1$, so folgt

$$V_k^* = \sum_{\nu=1}^{\infty} g_{k\nu} U_\nu^* \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

und $(U^*(s), V^*(s))$ ist demnach selbst ein Element unseres G-Systems, w. z. b. w.

Zusammenfassend können wir somit sagen: *Ein System von Elementen $(U(s), V(s))$, wo $U(s)$ irgendeine willkürliche Funktion (der Klasse L^2) sein kann, ist dann und nur dann ein komplettes G-System, wenn die Fourierkoeffizienten von $V(s)$ durch lineare Transformation aus den Fourierkoeffizienten von $U(s)$ hervorgehen und wenn dabei diejenige Bilinearform (in unendlich vielen Variablen), welche mit den Koeffizienten jener Transformation gebildet wird, beschränkt und symmetrisch ist.*

7. Durch *Rückgang zu den Funktionen*[11]) erhält man jetzt die *Parameterdarstellung* für unsere kompletten G-Systeme.

Wir gehen aus von den Beziehungen

$$(\mathrm{G}_\varrho^*) \qquad V_\varrho = \sum_{\nu=1}^{\infty} g_{\varrho\nu} U_\nu \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots)$$

und bilden

$$(1) \qquad \sum_{\varrho=1}^{\infty} V_\varrho l_\varrho(s) = \sum_{\varrho=1}^{\infty}(\sum_{\nu=1}^{\infty} g_{\varrho\nu} U_\nu) l_\varrho(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} U_\nu [\sum_{\nu=1}^{\infty} g_{\nu\varrho} l_\varrho(s)];$$

dabei ist gesetzt

$$(\mathrm{I}) \qquad l_\varrho(s) = \int_0^s f_\varrho(\sigma)\, d\sigma \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots);$$

und wegen $\sum_{\varrho=1}^{\infty}(l_\varrho(s))^2 \leqq 1$ konvergiert $\sum_{\varrho=1}^{\infty} V_\varrho l_\varrho(s)$, während die weiter vor-

[11]) Nach Hellinger, Die Orthogonalinvarianten quadratischer Formen von unendlich vielen Variablen. Diss. Göttingen 1907, Anhang (§ 12), S. 83/84.

genommene Vertauschung der Summationsfolgen wegen der Beschränktheit der Bilinearform $\sum_{\nu\varrho} g_{\nu\varrho} x_\nu y_\varrho = B(x, y)$ zulässig ist [10]).

Nun gibt es aber eine zur Klasse L^2 gehörige Funktion $\Phi(s, t)$ von t, welche außerdem von s abhängt und die Eigenschaft hat, daß [12])

$$(2) \qquad \int_0^{2\pi} \Phi(s, t)\, U(t)\, dt = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Big[\sum_{\varrho=1}^{\infty} g_{\nu\varrho}\, l_\varrho(s)\Big] U_\nu .$$

Bei diesem Schlusse ist ebenfalls die Beschränktheit von $B(x, y)$ benutzt. Des näheren ist (fast überall): [11])

$$(\mathrm{II}) \qquad \Phi(s, t) = \frac{d}{dt}[K(s, t)], \quad \text{wobei} \quad K(s, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\varrho=1}^{\infty} g_{\nu\varrho}\, l_\nu(s)\, l_\varrho(t).$$

Aus (1) und (2) folgt

$$(3) \qquad \sum_{\varrho=1}^{\infty} V_\varrho\, l_\varrho(s) = \int_0^{2\pi} \Phi(s, t)\, U(t)\, dt .$$

Aus (3) ergibt sich schließlich [13]) (höchstens mit Ausnahme einer Nullmenge):

$$(\mathrm{III}) \qquad V(s) = \frac{d}{ds}\Big[\int_0^{2\pi} \Phi(s, t)\, \varphi(t)\, dt\Big], \quad U(s) = \varphi(s) \qquad (0 \leqq s < 2\pi).$$

Und dies ist die gewünschte Parameterdarstellung.

Zusammenfassung. *Jedes G-System der in Nr. 5 festgelegten Art ist charakterisiert durch eine Funktion $K(s, t)$ von der in Formel* (II) *angegebenen Form, wobei die Konstanten $g_{\nu\varrho}$ die Koeffizienten einer beschränkten symmetrischen Bilinearform darstellen und die Funktionen $l_\nu(s)$ durch* (I) *definiert sind. Vermittelst $K(s, t)$ ergibt sich die Parameterdarstellung des Systems in der durch* (II) *und* (III) *bezeichneten Weise. Das G-System ist komplett.*

---

[12]) Hahn, Über die Integrale des Herrn Hellinger usw. Monatshefte f. Math. u. Physik **23** (1912), S. 184/185.

[13]) Hellinger, l. c. [11]), S. 81/82.

(Eingegangen am 26. 11. 1923.)