Ein Satz über Dirichletsche Reihen.

Von

Werner Rogosinski in Königsberg i. Pr

Im folgenden bezeichne die formal gebildete

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \tag{1}$$

mit

$$0 \leqq \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \lambda_{n+1} < \ldots; \qquad \lambda_n \to \infty \tag{2}$$

und komplexen Koeffizienten $a_n \neq 0$ eine allgemeine Dirichletsche Reihe der komplexen Variablen

$$s = \sigma + i t. \tag{3}$$

Wenn für irgendein $\varkappa \geqq 0$ und ein festes s der Grenzwert

$$\lim_{x \to \infty} \sum_{\lambda_n \leqq x} a_n e^{-\lambda_n s} \left(1 - \frac{\lambda_n}{x}\right)^{\varkappa} = f(s) \tag{4}$$

existiert, so soll für dieses s die Reihe (1) nach Riesz[1]) $(\lambda, \varkappa)$-summierbar zum Werte $f(s)$ heißen. $(\lambda, 0)$-Summabilität bedeutet also Konvergenz von (1).

Herr Bohr[2]) hat 1913 den folgenden, bei den damaligen Kenntnissen über die Reihen (1) sehr merkwürdigen Satz bewiesen:

Satz 1. *Es sei* (1) *in einer Halbebene* $\sigma > \alpha$ *absolut konvergent. Das durch* (1) *hier erklärte Funktionselement* $f(s)$ *sei in der Viertelebene*

$$\sigma > \gamma; \qquad t > \tau \tag{5}$$

[1]) Vgl. etwa G. H. Hardy und M. Riesz, The General Theory of Dirichlet's Series, Cambridge Tracts 18 (1915), S. 21 (*hinfort „H. R.“ zitiert*).

[2]) H. Bohr, Ein Satz über Dirichletsche Reihen, Sitzungsberichte der Königl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Mathem. physikalische Klasse (1913), S. 557–562.

regulär, und daselbst für ein $M > 0$

$$(6) \qquad |f(s)| \leqq M$$

erfüllt.

Dann ist $f(s)$ *sogar in der ganzen Halbebene* $\sigma > \gamma$ *regulär, und daselbst gilt* (6).

Neuere Untersuchungen des Herrn Bohr[3]) über die „*Quasiperiodizität*" der Reihen (1) machen die Aussage dieses Satzes im Rahmen der Theorie viel einleuchtender und legen seine Verallgemeinerungsfähigkeit nahe. In der Tat läßt er sich, und zwar in der Hauptsache unter Beibehaltung der Bohrschen Beweismethode, die auf der Anwendung von *diophantischen Approximationen* beruht, sehr wesentlich erweitern. Insbesondere erweist sich die Voraussetzung einer Halbebene *absoluter Konvergenz* als überflüssig. Ich behaupte nämlich den folgenden

Satz 2. *Es sei* (1) *in einer Halbebene* $\sigma > \alpha$ *für irgendein* $\varkappa \geqq 0$ $(\lambda, \varkappa)$*-summierbar. Das durch* (4) *hier erklärte Funktionselement* $f(s)$ *sei in der Viertelebene* (5) *regulär, und daselbst für zwei komplexe Werte* $a \neq b$

$$(7) \qquad f(s) \neq a \quad \textit{und} \quad \neq b.$$

Dann ist $f(s)$ *sogar in der ganzen Halbebene* $\sigma > \gamma$ *regulär und daselbst* (7) *erfüllt.*

Zunächst möchte ich an einige, im folgenden benötigte, einfache Haupttatsachen der durch (4) erklärten Summabilitätsmethode erinnern.

1. Wenn (1) in einem Punkte $s = s_0 = \sigma_0 + i\,t_0$ für ein $\varkappa \geqq 0$ $(\lambda, \varkappa)$-summierbar ist, so auch in der ganzen Halbebene $\sigma > \sigma_0$, und zwar gleichmäßig in jedem Winkelraum

$$|\text{ampl.}\,(s - s_0)| \leqq \vartheta < \frac{\pi}{2}.$$

Das durch (4) in $\sigma > \sigma_0$ erklärte Funktionselement $f(s)$ ist also daselbst regulär[4]).

2. Wenn (1) in s_0 $(\lambda, \varkappa)$-summierbar ist zum Werte $f(s_0)$, so auch $(\lambda, \varkappa_1)$ mit $\varkappa_1 > \varkappa$ zum gleichen Werte[5]).

3. Wenn (1) in s_0 $(\lambda, \varkappa)$-summierbar ist, so gilt für jedes feste $\varepsilon > 0$

$$(8) \qquad f(s) = o(|t|^{\varkappa+1})$$

gleichmäßig in $\sigma \geqq \sigma_0 + \varepsilon$.[6])

---

[3]) H. Bohr, Über eine quasi-periodische Eigenschaft Dirichletscher Reihen ..., Math. Annalen **85** (1922), S. 115—122.

[4]) H. R., Theorem 23, S. 39.

[5]) H. R., Theorem 16, S. 29.

[6]) H. R., Theorem 38, S. 49.

Nunmehr will ich zuerst zeigen, daß unsere Voraussetzung (7) nicht wesentlich mehr als (6) besagt. Es gilt nämlich in leichter Modifikation eines Satzes von Herrn Wennberg [7]) der folgende

Hilfssatz. *Es sei* δ *und* $\varepsilon > 0$. *Unter den Voraussetzungen von Satz* 2 *gibt es ein* $M = M(\delta, \varepsilon) > 0$, *so daß in jeder Viertelebene*

$$\sigma \geqq \gamma + \varepsilon; \quad t \geqq \tau + \delta$$

sogar (6) *erfüllt ist.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei

(a) $$a = 0 \quad \text{und} \quad b = 1,$$

anderenfalls man $\frac{f(s) - a}{b - a}$ statt $f(s)$ betrachte.

Für $\sigma > \alpha$ ist

(b) $$f(s) = a_0 e^{-\lambda_0 s}\left\{1 + e^{-(\lambda_1 - \lambda_0)s} \cdot \lim_{x \to \infty} \sum_{\lambda_1 \leqq \lambda_n \leqq x} \frac{a_n}{a_0}\left(1 - \frac{\lambda_n}{x}\right)^{\varkappa} e^{-(\lambda_n - \lambda_1)s}\right\}$$
$$= a_0 e^{-\lambda_0 s}\{1 + e^{-(\lambda_1 - \lambda_0)s} \cdot \varphi(s)\}.$$

Hierin ist, da $f(s)$ nach Bemerkung 1 jedenfalls auf der Halbgeraden

(c) $$\sigma \geqq \alpha + 1; \quad t = \tau + \delta$$

gleichmäßig $(\lambda, \varkappa)$-summabel ist, daselbst für ein passendes $K > 0$

(d) $$|\varphi(s)| < K.$$

Es bezeichne nunmehr

(e) $$\zeta = J(z) = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27 g_3^2}$$

mit

(f) $$g_2 = 60 \sum_{\substack{m, n \\ |m| + |n| \neq 0}}' \frac{1}{(m + nz)^4}; \quad g_3 = 140 \sum_{\substack{m, n \\ |m| + |n| \neq 0}}' \frac{1}{(m + nz)^6}.$$

die „Modulfunktion“ [8]), welche die Halbebene $\Im(z) > 0$, wo sie regulär ist, auf die bei $\zeta = 0, 1, \infty$ verzweigte, unendlichblättrige „Modulfläche“ der ζ-Ebene abbildet.

Die inverse Funktion $z = \omega(\zeta)$ ist umgekehrt für alle $\zeta \neq 0, 1, \infty$ regulär, jedoch unendlich-vieldeutig. Stets ist aber $\Im(\omega) > 0$.

---

[7]) Sven Wennberg, Zur Theorie der Dirichletschen Reihen, Inauguraldissertation, Uppsala (1920). Vgl. Satz VI auf S. 30, dessen Beweis hier, nur für unsere Zwecke zurecht gemacht, wiedergegeben ist.

[8]) Vgl. etwa Hurwitz-Courant, Allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, Berlin bei Springer (1922), II. Abschn., 4. Kapitel, S. 206–216 und III. Abschn., 4. Kapitel, § 9, S. 312–317.

Nun kann man bekanntlich[8]) einen solchen „Zweig“ von $\omega(\zeta)$ herausgreifen, daß

$$\text{(g)}\quad \omega(\zeta)-\omega(\zeta_0) = (\zeta-\zeta_0)\mathfrak{P}_1(\zeta-\zeta_0) \text{ für } \begin{array}{l}\zeta_0 \neq 0,\,1\\ |\zeta-\zeta_0| < \operatorname{Min}\{|\zeta_0|, |\zeta_0-1|\},\end{array}$$

$$\text{(h)}\quad \omega(\zeta)-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \zeta^{\frac{1}{3}}\mathfrak{P}_2(\zeta) \qquad \text{für } |\zeta|<1;\ \zeta \neq 0,$$

$$\text{(i)}\quad \omega(\zeta)-i = \sqrt{\zeta-1}\,\mathfrak{P}_3(\zeta-1) \text{ für } |\zeta-1|<1;\ \zeta \neq 1$$

wird, wo $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ gewisse Potenzreihen ihres Arguments symbolisieren.

Die Funktion

$$\text{(j)}\qquad g(s) = \omega(f(s))$$

ist in der Viertelebene (5) unserer Voraussetzung nach regulär, aber natürlich unendlich vieldeutig. Ein willkürlich herausgegriffener Zweig von ω führt aber zu einer in (5) eindeutigen regulären Funktion. Stets ist in (5)

$$\text{(k)}\qquad \mathfrak{I}\, g(s) > 0.$$

I. $\lambda_0 = 0$. Auf der Halbgeraden (c) ist nach (b) und (d)

$$\text{(l)}\qquad |f(s)-a_0| < |a_0|\cdot K\cdot e^{-\lambda_1\sigma}.$$

Es gibt daher ein $\beta_1 \geqq \alpha+1$, so daß insbesondere für $\sigma \geqq \beta_1$, $t = \tau+\delta$

$$\text{(m)}\qquad |f(s)-a_0| < \begin{cases}\frac{1}{2}\operatorname{Min}\{|a_0|, |a_0-1|\}, & \\ & \text{falls} \\ \frac{1}{2}, & \end{cases}\quad \begin{array}{l} a_0 \neq 1,\\ \\ a_0 = 1.\end{array}$$

Für diese s ist dann nach (g), (i) und (l), nachdem der Zweig von ω fixiert ist, für ein gewisses $K_1 > 0$

$$\text{(n)}\qquad \begin{array}{ll} |g(s)-\omega(a_0)| < e^{-\lambda_1\sigma}\cdot K_1, & \\ & \text{falls} \\ |g(s)-i| \quad < e^{-\lambda_1\frac{\sigma}{2}} K_1, & \end{array}\quad \begin{array}{l} a_0 \neq 1,\\ \\ a_0 = 1.\end{array}$$

II. $\lambda_0 > 0$. Jetzt gilt auf (c)

$$\text{(o)}\qquad |f(s)| < |a_0|\cdot e^{-\lambda_0\sigma}\{1+e^{-(\lambda_1-\lambda_0)\sigma}\cdot K\}.$$

Für $\sigma \geqq \beta_2$, $t = \tau+\delta$ wird daher

$$\text{(p)}\qquad |f(s)| < \frac{1}{2}$$

und also nach (h) für den betrachteten Zweig von ω und ein gewisses $K_2 > 0$

$$\text{(q)}\qquad \left|g(s)-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right| < e^{-\lambda_0\frac{\sigma}{3}}\cdot K_2.$$

Es bezeichne nunmehr, je nach dem vorliegenden Falle, $h(s)$ die in (n) bzw. (q) links auftretende Funktion, $\mu > 0$ den daselbst rechts auftretenden Faktor von $-\sigma$ und K_3 die Konstante K_1 oder K_2, so daß also für alle $\sigma \geqq \beta_3$, $t = \tau + \delta$ bei genügend großem β_3

(r) $$|h(s)| < e^{-\mu\sigma} K_3$$

gilt.

Die Funktion

(s) $$F(s) = e^{\mu s}(e^{ih(s)} - 1)$$

ist in der Viertelebene (5) regulär, und daselbst gilt unter Beachtung von (k) die Abschätzung

(t) $$F(s) = O(e^{\mu\sigma}).$$

Insbesondere ist also $F(s)$ auf der vertikalen Halbgeraden $\sigma = \beta_3$, $t \geqq \tau + \delta$ gleichmäßig beschränkt. Dasselbe ist aber auch auf der horizontalen Halbgeraden $\sigma \geqq \beta_3$, $t = \tau + \delta$ der Fall, wie aus (r) unmittelbar folgt. Ein bekanntes Theorem von Lindelöf-Phragmén[9]) lehrt jetzt unter Beachtung von (t), daß $F(s)$ sogar in der ganzen Viertelebene $\sigma \geqq \beta_3$, $t \geqq \tau + \delta$ gleichmäßig beschränkt ist. Es gibt also ein $K_4 > 0$, so daß daselbst

(u) $$|e^{ih(s)} - 1| \leqq K_4 e^{-\mu\sigma}$$

gilt. Da nun nach (r) auf $\sigma \geqq \beta_3$, $t = \tau + \delta$ mit wachsendem σ $h(s) \to 0$ gilt, so folgt aus (u), daß $h(s)$ sogar in unserer Viertelebene mit wachsendem σ gleichmäßig gegen 0 strebt. $g(s)$ muß also daselbst, je nach dem vorliegenden Falle, gleichmäßig gegen $\omega(a_0)$, i oder $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ mit wachsendem σ streben. Daraus folgt nun aber weiter, daß

(v) $$f(s) = J\big(\omega(f(s))\big) = J(g(s))$$

gleichmäßig daselbst gegen a_0 strebt; jedenfalls gibt es also ein $M_1 = M_1(\delta) > 0$, so daß bei genügend großem β_4 in der Viertelebene $\sigma \geqq \beta_4$, $t \geqq \tau + \delta$

(w) $$|f(s)| \leqq M_1$$

gilt.

---

[9]) E. Lindelöf et E. Phragmén, Sur une extension d'un principe classique de l'analyse ..., Acta Math. **31** (1908); vgl. S. 385—386. Wir können den Satz so formulieren:

„Es sei $F(s)$ im Innern und auf dem Rande eines Winkelraums der Öffnung ψ in der s-Ebene eindeutig regulär. Auf den Schenkeln gelte für ein $K > 0$, daß $|F(s)| \leqq K$ ist, während im Innern mit wachsendem r für jedes $\varepsilon > 0$ eine gleichmäßige Abschätzung $F(s) = O\left(e^{\varepsilon r^{\frac{\pi}{\psi}}}\right)$ gilt, wo r den Abstand von s gegen den Scheitel bezeichnet. Dann ist sogar im ganzen Winkelraum $|F(s)| \leqq K$ richtig."

In unserem Falle ist $\psi = \frac{\pi}{2}$, und die Abschätzung (t) kann für jedes $\varepsilon > 0$ in der Form $F(s) = O(e^{\varepsilon r^2})$ geschrieben werden.

Wir dürfen uns weiterhin auf $\beta_4 > \gamma + \varepsilon$ beschränken. Dann ist die Existenz eines $M_2 = M_2(\varepsilon, \delta) > 0$ evident, so daß in dem Rechteck $\gamma + \varepsilon \leqq \sigma \leqq \beta_4$, $\tau + \delta \leqq t \leqq \tau + \delta + \left(\beta_4 - \gamma - \frac{\varepsilon}{2}\right)$

(x) $$|f(s)| \leqq M_2$$

richtig ist.

Jeder Punkt des restlichen Halbstreifens

(y) $$\gamma + \varepsilon \leqq \sigma \leqq \beta_4; \qquad \tau + \delta + \left(\beta_4 - \gamma - \frac{\varepsilon}{2}\right) \leqq t$$

liegt nun im Innern oder auf dem Rande eines Kreises $\mathfrak{K}(t)$, der um den Punkt $\beta_4 + it$ mit dem Radius $\beta_4 - (\gamma + \varepsilon)$ geschlagen ist. In dem konzentrischen größeren Kreise mit dem Radius $\beta_4 - \left(\gamma + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ ist $f(s)$ regulär, und daselbst ist $f(s) \neq 0$ und $\neq 1$. Im übrigen beachte man (w).

Aus einem Zusatz von Herrn Landau[10]) zu dem bekannten Schottkyschen Satze ergibt sich nun unmittelbar die Existenz eines $M_3 = M_3(\varepsilon, \delta) > 0$, so daß in (y)

(z) $$|f(s)| \leqq M_3$$

gilt.

Mit (w), (x) und (z) ist aber die Behauptung bewiesen.

Wir beginnen nunmehr mit dem

B e w e i s v o n S a t z 2. Durch eine einfache Variablentransformation können wir offenbar die Normierung

(a) $$\alpha = \tau = 0$$

verwirklichen. Mit $\beta = \mathrm{Max}(0, \gamma)$ ist dann (1) für $\sigma > \beta$ und ein gewisses $\varkappa \geqq 0$ nach Voraussetzung $(\lambda, \varkappa)$-summierbar. Daher gilt gleichmäßig in $\sigma \geqq \beta + \frac{1}{4}$ nach (8) die Abschätzung

(b) $$f(s) = o(|t|^{\varkappa + 1}).$$

Ferner gibt es nach unserem Hilfssatze ein $M(\varepsilon) > 0$, so daß in der Viertelebene $\sigma \geqq \gamma + \varepsilon$, $t \geqq 1$, wo $0 < \varepsilon \leqq \frac{1}{4}$ sei,

(c) $$|f(s)| \leqq M$$

gilt.

---

[10]) C. Carathéodory und E. Landau, Beiträge zur Konvergenz von Funktionenfolgen, Sitzungsberichte der Berliner Akademie (1911), Satz V auf S. 596. Wir wollen ihn so formulieren:

„*Es sei für* $|z| < 1$ *die Funktion* $f(z)$ *eindeutig regulär,* $\neq 0$ *und* $\neq 1$, $|f(0)| \leqq C$. *Dann gibt es ein nicht von* $f(z)$ *abhängendes* $M = M(\vartheta, C) > 0$, *so daß für* $|z| \leqq \vartheta$ *mit* $0 \leqq \vartheta < 1$ *die Beschränkung* $|f(z)| \leqq M$ *gilt.*“

Nun können wir für $\sigma \geqq \beta + \frac{1}{2}$, alle reellen x und ganzes $m \geqq \varkappa + 2$ die Identität[11])

$$\text{(d)} \qquad \sum_{\lambda_n \leqq x} a_n e^{-\lambda_n s} (1 - e^{\lambda_n - x})^m = \frac{m!}{2\pi i} \int_{(1)} \frac{e^{x\zeta} f(\zeta + s)}{\zeta(\zeta+1)(\zeta+2)\dots(\zeta+m)} d\zeta$$

ansetzen, in der das Integral rechts, über die Gerade $\Re(\zeta) = 1$ erstreckt, wegen (b) gewiß sogar absolut konvergiert.

Nach Cauchy können wir hierin wegen (b) das Integral unter Beachtung des Residuums des Integranden für $\zeta = 0$ auf die Gerade $\Re(\zeta) = -\frac{1}{4}$ übertragen, und erhalten

$$\text{(e)} \qquad \sum_{\lambda_n \leqq x} a_n e^{-\lambda_n s} (1 - e^{\lambda_n - x})^m = f(s) + \frac{m!}{2\pi i} \int_{(-\frac{1}{4})} \frac{e^{x\zeta} f(\zeta + s)}{\zeta(\zeta+1)(\zeta+2)\dots(\zeta+m)} d\zeta.$$

Es ist aber wegen (b) gleichmäßig für alle $\sigma \geqq \beta + \frac{1}{2}$ und alle x bei festem m

$$\text{(f)} \qquad \int_{(-\frac{1}{4})} \frac{e^{x\zeta} f(\zeta + s)}{\zeta(\zeta+1)(\zeta+2)\dots(\zeta+m)} d\zeta$$

$$= O\left(e^{-\frac{x}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tau + t|^{\varkappa+1}}{\left|-\frac{1}{4} + i\tau\right| \left|\frac{3}{4} + i\tau\right| \left|\frac{7}{4} + i\tau\right| \dots \left|\frac{4m-1}{4} + i\tau\right|} d\tau\right)$$

$$= O\left(e^{-\frac{x}{4}} |t|^{\varkappa+1}\right),$$

und in der Viertelebene $\sigma \geqq \beta + \frac{1}{2}$, $t \geqq 1$ sogar gleichmäßig wegen (c)

$$\text{(g)} \qquad \int_{(-\frac{1}{4})} \frac{e^{x\zeta} f(\zeta + s)}{\zeta(\zeta+1)(\zeta+2)\dots(\zeta+m)} d\zeta$$

$$= O\left(e^{-\frac{x}{4}} \left\{ \int_{-\infty}^{-t} \frac{|\tau|^{\varkappa+1}}{\left|-\frac{1}{4} - i\tau\right| \left|\frac{3}{4} + i\tau\right| \dots \left|\frac{4m-1}{4} + i\tau\right|} d\tau + \int_{-t}^{\infty} \frac{d\tau}{\left|-\frac{1}{4} + i\tau\right| \left|\frac{3}{4} + i\tau\right| \dots \left|\frac{4m-1}{4} + i\tau\right|} \right\}\right)$$

$$= O\left(e^{-\frac{x}{4}}\right).$$ [12])

---

[11]) H. R., Theorem 40 auf S. 51. Wir arbeiten hier also mit Rieszschen (l, m)-Mitteln, was wegen Theorem 30 auf S. 45 natürlich gestattet ist. Die Identität (d) gilt sogar für $m \geqq \varkappa$. Beachte auch unsere Bemerkung 2.

[12]) Dies ist die entscheidende Stelle des Beweises, von der an der Bohrsche Beweisgang kaum verändert einsetzt.

Es sei nunmehr $s_1 = \sigma_1 + i t_1$ ein beliebiger Punkt mit $\sigma_1 > \gamma$. Unser Satz ist bewiesen, wenn wir zeigen können, daß $f(s)$ in s_1 regulär und daselbst $\neq a$ und $\neq b$ ist.

Es bezeichne $\sigma_1' = \operatorname{Max}(\sigma_1, \beta + 1)$, $s_1' = \sigma_1' + i t_1$, $\mathfrak{K}$ den Kreis um s_1' mit dem Radius $\varrho = \sigma_1' - \gamma - \varepsilon$, wo das bei (c) auftretende ε noch überdies $< \sigma_1 - \gamma$ gewählt werde, $\mathfrak{K}'$ den konzentrischen kleineren Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2}$. s_1 liegt jedenfalls im Innern von $\mathfrak{K}$.

Ferner sei mit

$$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k, \ldots \to 0 \tag{h}$$

eine positive Nullfolge vorgelegt.

Für zwei Punkte $s = \sigma + it$ und $s' = \sigma + it'$ mit $\sigma \geqq \sigma_1' - \frac{1}{2}$ gilt nach (e)

$$\begin{aligned} &\sum_{\lambda_n \leqq x} a_n e^{-\lambda_n \sigma} \left(e^{-\lambda_n i t} - e^{-\lambda_n i t'}\right) \left(1 - e^{\lambda_n - x}\right)^m \\ &= f(s) - f(s') + \frac{m!}{2\pi i} \int\limits_{(-\frac{1}{4})} \frac{e^{x\zeta}\{f(\zeta + s) - f(\zeta + s')\}}{\zeta(\zeta+1)(\zeta+2)\ldots(\zeta+m)}\, d\zeta. \end{aligned} \tag{i}$$

Ist hierin s' auf den Kreis $\mathfrak{K}'$ und s auf $t \geqq 1$ beschränkt, so folgt aus (f) und (g), da ja bei festem s_1 die $|t'|$ beschränkt sind, gleichmäßig in diesen s und s' für ein geeignetes $x = x_k = x(\eta_k)$ bei festem m

$$\left| \frac{m!}{2\pi i} \int\limits_{(-\frac{1}{4})} \frac{e^{x_k \zeta}\{f(\zeta + s) - f(\zeta + s')\}}{\zeta(\zeta+1)(\zeta+2)\ldots(\zeta+m)}\, d\zeta \right| \leqq \frac{\eta_k}{2}. \tag{j}$$

Ferner kann sodann, wegen

$$\begin{aligned} &\left|\sum_{\lambda_n \leqq x_k} a_n e^{-\lambda_n \sigma} \left(e^{-\lambda_n i t} - e^{-\lambda_n i t'}\right) \left(1 - e^{\lambda_n - x_k}\right)^m\right| \\ &\leqq \sum_{\lambda_n \leqq x_k} a_n \; e^{-\lambda_n (\beta + \frac{1}{2})} \left| e^{-\lambda_n i (t - t')} - 1 \right|, \end{aligned} \tag{k}$$

nach einem klassischen Dirichlet-Kroneckerschen Satze[13]) über diophantische Approximationen die Differenz $d = t - t'$ als ein $d_k = d(\eta_k)$, und zwar

---

[13]) Siehe etwa die einfache Darstellung bei F. Lettenmeyer, Neuer Beweis des allgemeinen Kroneckerschen Approximationssatzes, Proc. of the London Math. Soc. 21 (1922), S. 306—314.

Die hier allein benötigte Formulierung lautet: „*Es seien $y_1, y_2, \ldots, y_r$ beliebige reelle Zahlen. Dann gibt es zu jedem D und jedem $\varepsilon > 0$ ein $d = d(\varepsilon) > D$. so daß für $i = 1, 2, \ldots, r$ zugleich $d y_i - [d y_i] < \varepsilon$ oder $[d y_i] + 1 - d y_i < \varepsilon$ wird.*“

In unserem Falle ist $y_i = \frac{\lambda_i}{2\pi}$ zu setzen.

beliebig groß, so gewählt werden, daß die rechts in (k) auftretenden $|e^{-\lambda_n i(t-t')} - 1|$ sämtlich genügend klein werden, um auch

$$\text{(l)} \qquad \left| \sum_{\lambda_n \leqq x_k} a_n e^{-\lambda_n \sigma} \left(e^{-\lambda_n i(t'+d_k)} - e^{-\lambda_n i t'}\right) \left(1 - e^{\lambda_n - x_k}\right)^m \right| \leqq \frac{\eta_k}{2}$$

zu machen, und zwar gleichmäßig für alle unsere s' aus $\mathfrak{K}'$.

Aus (i), (j) und (l) folgt jetzt für alle s' aus $\mathfrak{K}'$

$$\text{(m)} \qquad |f(s'+i d_k) - f(s')| \leqq \eta_k,$$

wenn noch $t' + d_k \geqq 1$ wird, was durch die erfüllbare Auswahl

$$\text{(n)} \qquad d_k \geqq \varrho - t_1 + 1$$

reichlich geschieht.

Setzen wir nun

$$\text{(o)} \qquad f_k(s) = f(s + i d_k),$$

so wird nach (c) und (n) für alle $k = 1, 2, 3, \ldots$ $f_k(s)$ in $\mathfrak{K}$ regulär sein und daselbst

$$\text{(p)} \qquad |f_k(s)| \leqq M$$

gelten, während nach (m) gleichmäßig im konzentrischen $\mathfrak{K}'$

$$\text{(q)} \qquad f_k(s) \to f(s)$$

ist.

Nach einem bekannten Lemma von Stieltjes[14]) folgt nun aus (p) und (q) die Regularität von $f(s)$ im Innern von $\mathfrak{K}$ und also insbesondere im Punkte s_1.

$f(s)$ ist also in der ganzen Halbebene $\sigma > \gamma$ regulär. Wir haben noch zu zeigen, daß $f(s_1) \neq a$ und $\neq b$ wird[15]).

Es bezeichne $\mathfrak{K}_1$ einen zu $\mathfrak{K}$ konzentrischen kleineren Kreis, der aber auch noch s_1 in seinem Innern enthalte. Nach dem Lemma von Stieltjes bleibt dann (q) auch in $\mathfrak{K}_1$ gleichmäßig richtig.

Da $f(s)$ in s_1 regulär ist, kann man offenbar einen gewissen Kreis $\mathfrak{C}$ um s_1, der überdies ganz in $\mathfrak{K}_1$ liegt, angeben, so daß für ein geeignetes $\delta > 0$ auf der Peripherie von $\mathfrak{C}$

$$\text{(r)} \qquad |f(s) - f(s_1)| > 2\delta,$$

---

[14]) Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, Paris 1905, **II**, S. 369—370.

Das Lemma lautet: „*Es seien für alle* $k = 1, 2, 3, \ldots$ *die Funktionen* $f_k(z)$ *in* $|z| < 1$ *regulär und daselbst* $|f_k(z)| \leqq M$, *während in* $|z| < \varrho$ *mit* $0 < \varrho < 1$ *gleichmäßig* $f_k(z) \to f(z)$ *gilt. Dann gilt dies letztere sogar gleichmäßig in* $|z| \leqq \vartheta$ *mit irgendeinem* $0 \leqq \vartheta < 1$, *und insbesondere ist also* $f(z)$ *in* $|z| < 1$ *regulär.*"

Über die weitgehenden Verallgemeinerungen dieses Satzes, die wir hier aber nicht benötigen, vgl. die Abhandlg. unter [10]).

[15]) Vgl. die Wennbergsche Dissertation unter [7]), S. 23.

wird. Ebenda wird aber nach (q) für ein genügend großes $k = k(\delta)$

(s) $$|f_k(s) - f(s)| < \delta,$$

woraus, immer auf der Peripherie von $\mathfrak{C}$,

(t) $$|f_k(s) - f(s_1)| \geqq |f(s) - f(s_1)| - |f_k(s) - f(s)| > \delta > |f_k(s) - f(s)|$$

folgt.

Wäre nun etwa $f(s_1) = a$, also $f_k(s) - f(s_1) = f(s + i\,d_k) - a$ wegen (7) $\neq 0$ im Innern und auf dem Rande von $\mathfrak{C}$, so folgte ebenda überall aus (t)

(u) $$\left| \frac{f_k(s) - f(s)}{f_k(s) - a} \right| < 1.$$

Die in $\mathfrak{C}$ gültige Identität

(v) $$f(s) - a = (f_k(s) - a) \left[1 - \frac{f_k(s) - f(s)}{f_k(s) - a} \right]$$

führte nun mit $s = s_1$ zum Widerspruch.

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Als interessante Folgerung aus Satz 2 wollen wir noch formulieren

Satz 3. *Es sei* (1) *in einer Halbebene* $\sigma > \alpha$ *für irgendein* $\varkappa \geqq 0$ $(\lambda, \varkappa)$*-summierbar. Das hier erklärte* $f(s)$ *sei für* $\sigma \geqq \gamma$, $t \geqq \tau$ *regulär, und es gelte daselbst für ein gewisses* k *gleichmäßig mit wachsendem* t

(9) $$f(s) = O(t^k).$$

Ferner sei auf dem Halbstrahle $\sigma = \gamma$, $t \geqq \tau$ *etwa die „einseitige" Beschränkung*

(10) $$\Re(f(s)) = u(s) \geqq 0$$

erfüllt.

Dann ist $f(s)$ *sogar in der ganzen Halbebene* $\sigma > \gamma$ *regulär und daselbst* (10) *erfüllt.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\tau = 0$. Ferner setzen wir zum Beweise in (1) $\lambda_0 = 0$ voraus und lassen dafür eventuell $a_0 = 0$ zu.

Wegen

(a) $$\lim_{\sigma \to \infty} f(\sigma) = a_0$$

(nach Bemerk. 1) existiert

(b) $$m = \operatorname*{Min}_{\sigma \geqq \gamma} u(\sigma).$$ [16])

[16]) Min soll hier als „untere Grenze" verstanden sein.

Aus (10), (b) und (9) folgt nun leicht[17]) durch Betrachtung von $F(s) = e^{-f(s)}$ nach Lindelöf--Phragmén[9]), daß in der Viertelebene $\sigma \geqq \gamma$, $t \geqq 0$

$$\text{(c)} \qquad u(s) \geqq \operatorname{Min}\{m, 0\} = m_1$$

ist.

Satz 2 lehrt also die Regularität von $f(s)$ in $\sigma > \gamma$ und die Gültigkeit von (c) daselbst. Wenn nun $m_1 = m$ ist, so folgt, da doch $u(s)$ in keinem Punkte $s = \sigma$ mit $\sigma > \gamma$ ein Minimum haben kann (außer wenn $f(s) \equiv a_0$ ist) in jedem Falle

$$\text{(d)} \qquad m = u(\gamma) \quad \text{oder} \quad = \Re(a_0).$$

Im ersteren Falle muß dann wegen $u(\gamma) \geqq 0$, $m = 0$ also $m_1 = 0$ sein. Aber auch im zweiten Falle folgt, wie ich a. a. O.[18]) gezeigt habe, zunächst, daß $f(s) \equiv a_0$ ist, und also wegen (10), daß $m = 0$ ist.

(c) ist also mit

$$\text{(e)} \qquad u(s) \geqq 0$$

gleichbedeutend, wie behauptet.

Königsberg i. Pr., den 1. Januar 1924.

---

[17]) Vgl. des Verfassers Zur Theorie der Dirichletschen Reihen, Mathem. Zeitschrift **20** (1924), S. 280—320, Beweis von Satz III.

[18]) Siehe unter [17]), S. 307.

(Eingegangen am 20. 2. 1924.)