Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen.

Von

A. Khintchine in Moskau.

In der vorliegenden Arbeit behandle ich einige Gesetze über die Approximation irrationaler Zahlen mittels rationaler Brüche. Diese Gesetze gelten *fast überall*, d. h. für alle Irrationalzahlen mit Ausnahme einer Menge vom Lebesgueschen Maße Null. Sie gehören also, wenn ich mich so ausdrücken darf, zur metrischen Theorie der Diophantischen Approximationen. Als Stütze gebrauche ich hierbei einige Sätze über Kettenbrüche, welche vielleicht auch ein selbständiges Interesse bieten.

§ 1.

Das geometrische Mittel der Kettenbruchnenner.

Hilfssatz I. *Es ist*

$$\sum_{a_1 a_2 \dots a_n \geqq g} \frac{1}{(a_1 a_2 \dots a_n)^2} \leqq 2^n \cdot \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lg g)^i}{i!}}{g};$$

dabei ist $g \geqq 1$, *n ganz positiv, und die Summation erstreckt sich über alle ganzen positiven Wertkombinationen der* $a_1, a_2, \dots, a_n$, *deren Produkt* $\geqq g$ *ist.*

Beweis. Für ein beliebiges Glied der linksstehenden Summe findet man die Abschätzung

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2} = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{a_i}\right) \cdot \frac{1}{a_i(a_i+1)} \leqq 2^n \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i(a_i+1)}$$

$$= 2^n \prod_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{a_i+1} \frac{dx_i}{x_i^2} = 2^n \int_{a_1}^{a_1+1} \int_{a_2}^{a_2+1} \dots \int_{a_n}^{a_n+1} \frac{dx_1\, dx_2 \dots dx_n}{x_1^2\, x_2^2 \dots x_n^2}.$$

Folglich ist

$$\sum_{\Pi a_i \geqq g} \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2} \right) \leqq 2^n \cdot \int\int \cdots \int \frac{d x_1 \, d x_2 \ldots d x_n}{x_1^2 \, x_2^2 \ldots x_n^2} = 2^n \cdot J_n(g),$$

wo das n-fache Integral über den durch

$$x_1 \, x_2 \ldots x_n \geqq g, \qquad x_i \geqq 1 \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

bestimmten Bereich zu erstrecken ist. Mittels einer einfachen Substitution findet man leicht

$$J_n(g) = \frac{1}{g} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lg g)^i}{i!},$$

womit Hilfssatz I bewiesen ist.

Im folgenden sollen $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ die Kettenbruchnenner der regelmäßigen Kettenbruchentwicklung einer Irrationalzahl bedeuten.

Satz I. *Es ist fast überall*

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_1 \, a_2 \ldots a_n} \leqq e^{e^{\sqrt{2 \lg 2}}}.$$

Beweis. Bekanntlich[1]) bilden die Zahlen, deren n erste Kettenbruchnenner $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sind, ein Intervall, dessen Länge

$$\delta < \frac{1}{q^2 \, a_n^2}$$

ist, wo q den Nenner des endlichen Kettenbruchs

$$\frac{p}{q} = [a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}]$$

bedeutet. Wegen

$$q \geqq a_1 \, a_2 \ldots a_{n-1}$$

ist also

$$\delta < \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2}.$$

Folglich ist das Maß der Menge der Zahlen, welche der Bedingung

$$a_1 \, a_2 \ldots a_n \geqq g$$

genügen, nach Hilfssatz I kleiner als

$$2^n \cdot \frac{1}{g} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lg g)^i}{i!}.$$

---

[1]) Siehe z. B. F. Bernstein, Math. Ann. 71 (1912), S. 417.

Ich bezeichne diese Menge mit $E_n(g)$ und setze jetzt $g = e^{An}$, wo $A > e^{\sqrt{2\lg 2}}$ konstant und sonst beliebig sein soll. Ich erhalte somit[2])

$$\mathfrak{M} E_n(g) < 2^n e^{-An} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(An)^i}{i!}.$$

Nun ist, wie leicht einzusehen, jedes Glied der Summe rechts kleiner als $\frac{(An)^n}{n!}$, also

$$\mathfrak{M} E_n(g) < 2^n e^{-An} \cdot n \frac{(An)^n}{n!} < 2^n e^{-An} \cdot n \cdot C_1 \frac{A^n n^n}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}$$
$$< C_2 \sqrt{n}\, e^{-n[A - \lg 2 - \lg A - 1]},$$

wo C_1 und C_2 absolute Konstanten bedeuten.

Nun ist

$$A - 1 - \lg A > \frac{1}{2} \lg^2 A > \lg 2,$$

also

$$\alpha = A - \lg 2 - \lg A - 1 > 0,$$

und folglich ist

$$\mathfrak{M} E_n(g) < C_2 \sqrt{n}\, e^{-\alpha n}$$

in bezug auf n das allgemeine Glied einer konvergenten Reihe.

In bekannter Weise folgert man daraus, daß jede Zahl mit eventueller Ausnahme einer Menge vom Maße Null höchstens einer endlichen Anzahl der Mengen E_n angehören kann und folglich für genügend großes n der Bedingung

$$\prod_{i=1}^{n} a_i < e^{An}$$

Genüge leisten muß. Damit ist aber Satz I bewiesen, denn A darf beliebig nahe an $e^{\sqrt{2\lg 2}}$ genommen werden.

Folgerung. Ich bezeichne mit $\frac{p_n}{q_n}$ den n-ten Näherungsbruch einer irrationalen Zahl. Dann ist $q_1 = a_1$, und für $n > 1$

$$q_n < q_{n-1}(a_n + 1) \leqq 2 a_n q_{n-1},$$

also

$$q_n < 2^n \prod_{i=1}^{n} a_i,$$

also, wegen Satz I, fast überall für genügend großes n und $B > e^{\sqrt{2\lg 2}} - \lg 2$

$$q_n < e^{Bn}.$$

---

[2]) $\mathfrak{M}E$ bedeutet das Maß der Menge E (im Lebesgueschen Sinne).

§ 2.

Ordnung der Annäherung.

Wenn x eine beliebige Irrationalzahl bedeutet, kann man bekanntlich unendlich viele irreduzible Brüche $\frac{p}{q}$ finden von der Beschaffenheit, daß

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}\, q^2}$$

gilt. Größer als $\sqrt{5}$ kann der konstante Faktor im Nenner rechts bekanntlich im allgemeinen nicht gemacht werden[3]). A fortiori kann also auch die Ordnung (in bezug auf q) der Annäherung im allgemeinen nicht vergrößert werden. Nun fragt es sich aber, wie die Sache steht, wenn man auf eine Menge vom Maße Null von Irrationalzahlen verzichten will. Wie weit kann unter dieser Bedingung die Annäherung gefördert werden?

Vollständige Auskunft darüber gibt der folgende

Satz II. *Es sei $f(x)$ eine positive stetige Funktion des positiven Argumentes x, und $x f(x)$ nehme beständig ab. Die Ungleichung*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{f(q)}{q}$$

hat fast überall (in bezug auf α) eine unendliche Anzahl von Lösungen in ganzen p, q, wenn $\int^{\infty} f(x)\,dx$ divergiert, und hat fast überall höchstens eine endliche Zahl von Lösungen, wenn $\int^{\infty} f(x)\,dx$ konvergiert.

Beweis. 1. Das Integral $\int^{\infty} f(x)\,dx$, also auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, sei konvergent. Ich bezeichne mit M_n die Menge der Zahlen α des Intervalls $(0, 1)$, welche bei geeignet gewähltem ganzen k der Ungleichung

$$\left| \alpha - \frac{k}{n} \right| < \frac{f(n)}{n}$$

genügen. Offenbar ist

$$\mathfrak{M}\, M_n \leqq 2 f(n),$$

also das allgemeine Glied einer konvergenten Reihe. Bekanntlich gehört daher jede Zahl α der Strecke $(0, 1)$ mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null höchstens einer endlichen Anzahl der Mengen M_n an. Damit ist aber die zweite Hälfte von Satz II bewiesen, denn die Beschränkung auf das Intervall $(0, 1)$ ist natürlich unwesentlich.

2. Das Integral $\int^{\infty} f(x)\,dx$, also auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ sei divergent. Man setze

$$\varphi(x) = e^{Bx} f(e^{Bx}), \qquad B > e^{\sqrt{2 \lg 2}} + \lg 2 \text{ konst.}$$

---

[3]) Vgl. z. B. Hurwitz, Math. Ann. **39** (1891), S. 279–284.

Die Funktion $\varphi(x)$ ist stetig, positiv und abnehmend, und wir erhalten

$$\lim_{A\to\infty}\int_a^A \varphi(x)\,dx = \lim_{A\to\infty}\frac{1}{B}\int_{e^{Ba}}^{e^{BA}} f(u)\,du = +\infty.$$

Daher folgt nach einem Satze von Herrn F. Bernstein[4]), daß fast überall für unendlich viele i

$$a_{i+1} > \frac{1}{\varphi(i)}$$

ist; daraus folgt aber

$$\left|\alpha - \frac{p_i}{q_i}\right| < \frac{1}{q_i\,q_{i-1}} < \frac{1}{a_{i+1}\,q_i^2} < \frac{\varphi(i)}{q_i^2}.$$

Nun ist aber nach Satz I für genügend große i fast überall

$$q_i < e^{Bi}, \qquad \text{also} \qquad i > \frac{\lg q_i}{B},$$

und folglich

$$\left|\alpha - \frac{p_i}{q_i}\right| < \frac{\varphi\left(\frac{\lg q_i}{B}\right)}{q_i^2} = \frac{f(q_i)}{q_i},$$

womit auch die erste Häfte von Satz II bewiesen ist.

§ 3.

Das arithmetische Mittel der Kettenbruchnenner.

Hilfssatz II. *Es seien* $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$ *ganze positive Zahlen und* $g > 0$. $E_r(g)$ *sei die Menge der Zahlen*[5]), *welche den Bedingungen* $a_{i_k} > g$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$ *genügen. Dann ist*

$$\mathfrak{M}E_r(g) < \left(\frac{2}{g}\right)^r.$$

Beweis. 1. $r = 1$. Die Zahlen, für welche $a_1, a_2, \ldots, a_{i_1-1}$ bestimmte Werte haben, bilden ein Intervall, dessen Länge ich mit $\delta_{a_1, a_2, \ldots, a_{i_1}-1}$ bezeichne. Die Punkte dieses Intervalls, welche der Bedingung $a_{i_1} > g$ genügen, bilden ein Intervall, dessen Länge nach Herrn F. Bernsteins zitierten Resultaten kleiner als

$$\frac{2}{[g]+1}\,\delta_{a_1, a_2, \ldots, a_{i_1}-1} < \frac{2}{g}\,\delta_{a_1, a_2, \ldots, a_{i_1}-1}.$$

Folglich ist

$$\mathfrak{M}E_1(g) < \frac{2}{g}\sum\delta = \frac{2}{g}.$$

---

[4]) l. c. [1]).

[5]) Wir beschränken uns hier und im folgenden auf das Intervall (0, 1).

2. r sei >1, und für $r-1$ der Satz wahr. Alles bleibt wie für den Fall $r=1$; nur betrachten wir jetzt natürlich ausschließlich solche $\delta_{a_1, a_2, \ldots, a_{i_r-1}}$, für welche $a_{i_k} > g$ für $k = 1, 2, \ldots, r-1$ ist. Wir erhalten

$$\mathfrak{M} E_r(g) < \frac{2}{g} \sum \delta < \frac{2}{g}\left(\frac{2}{g}\right)^{r-1} = \left(\frac{2}{g}\right)^r,$$

w. z. b. w.

Hilfssatz III. *$i_1 < i_2 < \ldots < i_n$ seien ganz positiv, $g > 0$, $E_{n,r}(g)$ sei die Menge der Zahlen, für welche mehr als r*[6]*) von den Zahlen $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}$ größer als g ausfallen. Dann ist (C absolut konstant)*

$$\mathfrak{M} E_{n,r}(g) < C\left(\frac{2en}{gr}\right)^r.$$

Beweis. G sei eine bestimmte Kombination von $[r]+1$ aus den n Indizes $i_1, i_2, \ldots, i_n$ und E_G bedeute die Menge der Zahlen, für welche alle a_i mit den zur gewählten Kombination gehörigen Indizes größer als g sind. Offenbar gehört jeder Punkt der Menge $E_{n,r}(g)$ wenigstens einer der Mengen E_G; nach Hilfssatz II ist aber

$$\mathfrak{M} E_G < \left(\frac{2}{g}\right)^{[r]+1}.$$

Folglich erhalten wir

$$\mathfrak{M} E_{n,r}(g) \leqq \sum_G \mathfrak{M} E_G < \binom{n}{[r]+1} \cdot \left(\frac{2}{g}\right)^{[r]+1}$$
$$< C' \left(\frac{2en}{g([r]+1)}\right)^{[r]+1} < C' \left(\frac{2en}{rg}\right)^{[r]+1},$$

also auch

$$\mathfrak{M} E_{n,r}(g) < C\left(\frac{2en}{rg}\right)^r$$

(denn im Falle $2en > rg$ können wir ja immer durch $C > 1$ die Behauptung trivial machen), w. z. b w.

Hilfssatz IV. *$\psi(n)$ sei eine positive zunehmende Funktion; dabei sei $\psi(n) < n^2$ für $n \geqq 1$ und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\psi(n)}$ konvergent. Ferner seien m und $i_1 < i_2 < \ldots < i_{2^m}$ ganze positive Zahlen. Endlich sei E_m die Menge der Zahlen, welche folgender Bedingung genügen: Für wenigstens ein ganzes k, $0 < k \leqq m$, sind mehr als*

$$\frac{2e^2 \cdot 2^k}{\psi(k)}$$

[6]) $0 \leqq r < n$.

unter den Zahlen $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \ldots, a_{i_{2m}}$ *größer als*

$$2^{m-k}\psi(m).$$

Dann ist, wenn C_1 *eine absolute Konstante bedeutet,*

$$\mathfrak{M}E_m < \frac{C_1}{\psi(m)}.$$

Beweis. Ich bezeichne mit $E_{m,k}$ die Menge der Zahlen, für welche die Bedingung des Satzes für ein bestimmtes k erfüllt ist. Dann folgt aus Hilfssatz III, daß

$$\mathfrak{M}E_{m,k} < C\left(\frac{2e2^m\psi(k)}{2e^2 2^k\cdot 2^{m-k}\psi(m)}\right)^{\frac{2e^2\cdot 2^k}{\psi(k)}} = C\left(\frac{\psi(k)}{e\psi(m)}\right)^{\frac{2e^2 2^k}{\psi(k)}}$$

ist. Andererseits gehört jeder Punkt der Menge E_m wenigstens einer der Mengen $E_{m,k}$ $(0 < k \leqq m)$ an. Folglich ist

$$\mathfrak{M}E_m < C\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\psi(k)}{e\psi(m)}\right)^{\frac{2e^2 2^k}{\psi(k)}}.$$

Die Glieder der rechtsstehenden Summe teilen wir nun in zwei Gruppen, Σ_1 und Σ_2. Dabei nehmen wir in Σ_1 solche Glieder auf, für welche $\sqrt{k}\,\psi(k) \leqq \sqrt{\psi(m)}$ ist. Die Anzahl solcher Glieder sei

$$K-1 \qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, K-1).$$

Es ist leicht einzusehen, daß unter den über $\psi(n)$ gemachten Voraussetzungen immer

$$\frac{2e^2 2^k}{\psi(k)} > 2$$

ist. Folglich ist jedes Glied von Σ_1 kleiner als

$$\left(\frac{\psi(K-1)}{\psi(m)}\right)^2 \leqq \frac{\psi(m)}{(K-1)[\psi(m)]^2} = \frac{1}{(K-1)\psi(m)},$$

also

$$(1) \qquad \Sigma_1 < \frac{K-1}{K-1}\cdot\frac{1}{\psi(m)} = \frac{1}{\psi(m)}$$

(K wächst ersichtlich mit m ins Unendliche). Andererseits ist in Σ_2 jedes Glied offenbar nicht größer als

$$e^{-\frac{2e^2 2^K}{\psi(K)}} < e^{-\frac{2e^2\cdot 2^K}{K^2}}.$$

Nun ist

$$\sqrt{K}\cdot K^2 > \sqrt{K}\,\psi(K) > \sqrt{\psi(m)},$$

und folglich

$$K > \sqrt[5]{\psi(m)};$$

ferner ist, wie aus den Voraussetzungen über $\psi(n)$ folgt, für große m-Werte

$$\psi(m) > m,$$

also

$$K > m^{\frac{1}{5}};$$

endlich ist die Anzahl der Glieder von $\sum_2$ nicht größer als m.

Folglich ist für große m-Werte

$$(2) \qquad \sum\nolimits_2 < m e^{-\frac{2e^2 2^K}{K^2}} < m e^{-\frac{2e^2 2^{m^{\frac{1}{5}}}}{m^{\frac{2}{5}}}} < \frac{1}{m^2} < \frac{1}{\psi(m)}.$$

Aus (1) und (2) folgt, daß für große m

$$\mathfrak{M} E_m < C(\sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2) < \frac{2C}{\psi(m)}$$

ist, womit Hilfssatz IV bewiesen ist.

Hilfssatz V. *Unter denselben Voraussetzungen sei F_m die Menge der Zahlen, für welche wenigstens eine der Zahlen $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{2m}}$ größer als $2^m \psi(m)$ ist. Dann ist*

$$\mathfrak{M} F_m < \frac{2}{\psi(m)}.$$

Beweis. Folgt sofort aus Hilfssatz II, $r = 1$.

Hilfssatz VI. *Unter denselben Voraussetzungen ist für jeden Punkt, welcher weder der Menge E_m noch der Menge F_m angehört,*

$$s = a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_{2m}} < C_2 \cdot 2^m \psi(m),$$

wo C_2 von m unabhängig ist.

Beweis. Ich bezeichne mit n_k die Anzahl derjenigen unter den Zahlen $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{2m}}$, welche zwischen $2^{m-k}\psi(m)$ exkl. und $2^{m-k+1}\psi(m)$ inkl. $(k = 1, 2, \ldots, m)$ enthalten sind. Ferner soll N die Anzahl derer unter diesen Zahlen bezeichnen, welche $\psi(m)$ nicht übersteigen. Da der gewählte Punkt F_m nicht angehört, ist

$$\begin{aligned} s \leqq N\psi(m) + n_m 2\psi(m) + n_{m-1} 2^2 \psi(m) + \cdots \\ + n_2 \cdot 2^{m-1}\psi(m) + n_1 \cdot 2^m \psi(m) \\ = \psi(m)\{N + 2\sum_{k=1}^{m} n_k 2^{m-k}\}. \end{aligned}$$

Nun ist, da der gewählte Punkt nicht der Menge E_m angehört, jedes $n_k \leqq \frac{2e^2 \cdot 2^k}{\psi(k)}$, also

$$s \leqq \psi(m)\left\{N + 4e^2 \cdot 2^m \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\psi(k)}\right\},$$

oder, da $N \leqq 2^m$ ist, wenn noch $D = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)}$ gesetzt wird,

$$s < 2^m \psi(m)[1 + 4e^2 D],$$

womit Hilfssatz VI bewiesen ist.

Satz III. *Unter denselben Voraussetzungen über die Funktion $\psi(n)$ ist fast überall*

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i = O(\psi(\lg n)).\ ^{7})$$

Beweis. Ich setze $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, also $\sigma_n = \frac{s_n}{n}$.

Aus den Hilfssätzen IV und V entnimmt man in bekannter Weise folgendes.

E_m' sei die Menge E_m unter der Voraussetzung $i_k = k$, und E_m'' die ähnliche Menge unter der Voraussetzung $i_k = 2^m + k$. Die Mengen F_m des Hilfssatzes V seien für diese beiden Voraussetzungen resp. F_m' und F_m'' genannt. Dann ist jeder Punkt, mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null, höchstens für eine endliche Anzahl von m-Werten in einer der Mengen E_m', F_m', E_m'', F_m'' enthalten.

Nun ist wegen Hilfssatz VI für einen solchen Punkt, wenn L eine nur von der Natur der Funktion $\psi(n)$ abhängende Konstante bedeutet, für große m-Werte erstens

$$s_{2^m} < L\, 2^m \psi(m)$$

und zweitens

$$s_{2^{m+1}} - s_{2^m} < L\, 2^m \psi(m),$$

also, wenn

$$2^m \leqq n < 2^{m+1}$$

ist,

$$s_n < s_{2^{m+1}} = s_{2^m} + (s_{2^{m+1}} - s_{2^m}) < 2L\, 2^m \psi(m) \leqq 2Ln\psi(\lg n),$$

womit Satz III bewiesen ist.

Korollar. *Es sei $\varphi(n)$ eine positive Funktion, so daß $\frac{\varphi(n)}{n}$ beständig zunimmt und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)}$ konvergiert. Dann ist fast überall*

$$s_n = O(\varphi(n)).$$

---

[7]) Der Bequemlichkeit halber nehme ich die Logarithmen zur Basis 2.

Beweis. Ich setze $\psi(n) = \frac{1}{2^n}\varphi(2^n)$. Dann ist $\psi(n)$ eine zunehmende positive Funktion, und bekanntlich ist

$$\sum \frac{1}{\psi(n)} = \sum \frac{2^n}{\varphi(2^n)}$$

konvergent. Die Annahme $\psi(n) < n^2$, die wir in Hilfssatz IV gemacht haben, kann natürlich bei Satz III ohne weiteres weggelassen werden. Wir können somit Satz III anwenden, und erhalten fast überall

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = O(n\,\psi(\lg n)) = O(\varphi(n)),$$

w. z. b. w.

Das bewiesene Korollar ist eine wesentliche Verschärfung des Hauptsatzes der zitierten Betrachtungen Herrn F. Bernsteins. Dieser Hauptsatz behauptet nämlich, daß unter der Voraussetzung der Konvergenz von $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ fast überall

$$a_n = O(\varphi(n))$$

ist. Unser Korollar zeigt, daß auch

$$s_n = O(\varphi(n))$$

fast überall erfüllt ist; und zwar braucht dazu $\varphi(n)$ nicht schneller zu wachsen, als es der Bernsteinsche Satz verlangt. Nur ist die Forderung an die Regelmäßigkeit des Wachstums hier eine größere, denn $\frac{\varphi(n)}{n}$ muß immer zunehmen.

§ 4.

Die Hardy-Littlewoodschen Summen.

Die grundlegenden Arbeiten der Herren Hardy und Littlewood über die Summen der Gestalt

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(kx - [kx] - \tfrac{1}{2}\right),$$

die mit dem Problem der Anzahl der Gitterpunkte in Polygonen eng zusammenhängen, sind mir leider nicht zugänglich geworden. Einiges habe ich darüber veröffentlicht[8]). Dank einer liebenswürdigen Sendung von

[8]) Bulletin de l'Institut Polytechnique à Jvanowo-Wosniessensk Nr. 5, Janvier 1922, p. 27—41. Vgl. auch meine während des Druckes erschienene Abhandlung „Ein Satz über Kettenbrüche usw.", Mathematische Zeitschrift **18** (1923), S. 289—306.

Herrn Ostrowski habe ich erfahren, daß ihm einige von meinen Resultaten schon 1921 bekannt und von ihm publiziert waren[9]).

Insbesondere reichen die Formeln der Seite 80 der zitierten Arbeit von Herrn Ostrowski (sowie auch die Formeln der Seiten 33—34 meiner Abhandlung) vollständig aus, um folgenden Satz sehr leicht zu beweisen:

Satz IV. *Es sei* $\varphi(n)$ *eine positive Funktion und* $\frac{\varphi(n)}{n}$ *beständig zunehmend. Die Abschätzung*

$$S_n(x) = O(\varphi(\lg n))$$

ist fast überall richtig oder fast überall falsch, je nachdem die Reihe $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ *konvergent oder divergent ist.*

Die Stütze beim Beweise bilden Satz I und Satz III mit ihren Folgerungen.

Endlich sei noch bemerkt, daß mit der von Herrn Ostrowski und mir entwickelten Methode die bewiesenen kettenbruchtheoretischen Abschätzungen noch auf viele andere metrischen Probleme der Theorie der Diophantischen Approximationen Anwendung finden können. So erhält man zum Beispiel ein Analogon zu Satz IV über die Häufigkeit der Zahlen $kx - [kx]$ in bestimmten Intervallen u. dgl. m.

Moskau, den 7. IX. 1923.

---

[9]) Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität **1** (1921), Heft 1, S. 77—98.

(Eingegangen am 15. 9. 1923.)