# Zur Bestimmung der metazyklischen Minimalbasis von Primzahlgrad.

Von

S. Breuer in Karlsruhe i. B.

Die vorliegende Arbeit bietet einen Beitrag zur Bestimmung einer *Minimalbasis für den Invariantenkörper der metazyklischen Permutationsgruppen von Primzahlgrad* $p$, d. h. einer aus $p$ algebraisch unabhängigen Funktionen bestehenden Basis, durch die alle Funktionen des Körpers sich rational darstellen lassen[1]). Eine solche Basis wurde dem Verfasser für die Grade $p = 5$ und $p = 7$ von Fräulein Noether mitgeteilt; die Noetherschen Formeln werden im § 2 in sachgemäßer Bezeichnung wiedergegeben, mit unwesentlichen Änderungen, die den allmählichen Aufstieg vom metazyklischen Invariantenkörper zu den darüber liegenden deutlicher hervortreten lassen sollen. Zur Basisbestimmung wird nämlich die Tatsache benutzt, daß der Körper aller rationalen Funktionen der Unbestimmten ein Galoisscher Körper über dem Invariantenkörper der metazyklischen Gruppe ist, und daß diese letztere seine Galoissche Gruppe wird. Das Verfahren zerfällt nun in zwei Schritte: Zuerst werden, in den genannten speziellen Fällen, drei bzw. vier Basisfunktionen angegeben — von denen übrigens jeweils die ersten beiden schon länger bekannt sind —, welche der Minimalbasis des Körpers aller rationalen Funktionen der Unbestimmten ebenso angehören können wie der gesuchten Minimalbasis des vollmetazyklischen Körpers, wie auch der jedes Galoisschen Zwischenkörpers. Durch ihre Einführung wird die Aufgabe darauf reduziert, die Minimalbasis für den *zyklischen* Körper von nur zwei bzw. drei Unbestimmten zu finden. Dieser erste Schritt wird im folgenden für den Primzahlgrad $p$ allgemein durchgeführt: Im § 1 werden nämlich $\frac{p+1}{2}$ solche Basisfunktionen an-

---

[1]) Vgl. E. Noether, Gleichungen mit vorgeschriebener Gruppe, Math. Annalen 78.

gegeben, welche ebenfalls allen in Betracht kommenden Minimalbasen angehören können und die Aufgabe der Aufstellung der vollmetazyklischen Basis auf das freilich noch ungelöste Problem zurückführen, die Minimalbasis für einen zyklischen Körper $\frac{p-1}{2}$-ten Grades zu finden; und zwar handelt es sich dabei um eine zyklische Gruppe von Cremona-Transformationen — birationalen Transformationen unabhängiger Variablen —, die nicht notwendig linear zu sein brauchen. Im speziellen Falle $p=5$ und $p=7$ handelt es sich jedoch um die zyklische *Permutationsgruppe* von $\frac{p-1}{2}$, d. h. zwei bzw. drei Unbestimmten selbst. Es kann daher in diesen beiden Fällen, die weiterhin (§ 2) ausschließlich behandelt werden, die Aufgabe restlos gelöst werden. Es werden nämlich, ausgehend von dem Körper der Unbestimmten selbst — der also wie alle jetzt noch zu behandelnden Körper nur noch zwei bzw. drei Unbestimmte enthält — nacheinander für alle Galoisschen Zwischenkörper Minimalbasen eingeführt, deren Elemente dann unter der metazyklischen Gruppe Substitutionen einer Gruppe erfahren, die der entsprechenden Faktorgruppe isomorph ist. Es brauchen also nur noch für die zu den betreffenden zyklischen Gruppen gehörigen Invariantenkörper die Minimalbasen gebildet zu werden, was leicht auszuführen ist. Diese Minimalbasen nun hatten in der ursprünglichen, eingangs erwähnten Mitteilung von Fräulein Noether — mit Ausnahme der vollmetazyklischen Basen selbst — noch Koeffizienten aus dem Körper der fünften bzw. siebenten Einheitswurzel. Der Verfasser konnte durch „Adjunktion natürlicher den Zwischenkörpern entnommener Funktionen" zu den vollmetazyklischen Basen, und anschließende Rechnung auch zu jedem dieser Zwischenkörper eine Minimalbasis mit *rationalen* Koeffizienten bestimmen. Auf Grund seiner Mitteilung bemerkte Fräulein Noether, daß ihre ursprüngliche Darstellung sich so umgestalten läßt, daß die erwähnte Rechnung überflüssig wird und unmittelbar für alle Zwischenkörper rationale Minimalbasen gewonnen werden (vgl. auch Fußnote 11). Die Kenntnis *rationaler* Minimalbasen auch für die Zwischenkörper ermöglicht es, über beliebigem (endlichen) algebraischen Zahlkörper als Grundkörper alle Galoisschen Körper der entsprechenden Gruppe direkt zu bilden und ist auch deshalb von Bedeutung, weil mit ihr zugleich die Möglichkeit erwiesen ist, die sämtlichen auflösbaren Gleichungen 5. und 7. Grades, *nach ihren Galoisschen Gruppen getrennt*, durch unabhängige Parameter darzustellen. Es ergibt sich eine sehr einfache „Wurzeldarstellung" für die gewählte, von $x_0, x_1, \ldots, x_4$ bzw. $x_0, x_1, \ldots, x_6$ freilich verschiedene, Basis des Körpers aller rationalen Funktionen der Unbestimmten $x_\nu$, woraus unmittelbar die oben erwähnte Bildung der Galoisschen Körper folgt. Dagegen spielen die symmetrischen Funktionen der $x_\nu$ gar keine ausgezeichnete Rolle unter den metazyklischen Funktionen überhaupt; ihre Darstellung durch die Funktionen der Minimalbasis, die zu der vorher erwähnten Parameterdarstellung der metazyklischen Gleichungen führt[1]), wird wenig übersichtlich, es ist daher von dieser abgesehen worden. Es werden jedoch im § 3 die notwendigsten Ergänzungsformeln zu der Noetherschen Minimalbasis für $p = 5$ gegeben, die zur Parameterdarstellung gewisser *spezieller* Gleichungen dieses Grades noch erforderlich sind. Die Darstellung der Gleichungskoeffizienten selbst konnte um so eher unterlassen werden, als Herr Wäisälä[2]) für die metazyklischen Gleichungen 5. Grades eine solche Parameterdarstellung bereits gegeben hat. Die dort auftretenden Parameter werden ebenfalls als Funktionen einer Minimalbasis erkannt. Sie sind speziell dem *Gleichungs*-Problem angepaßt und gestatten daher eine sehr einfache Darstellung der symmetrischen Funktionen und damit der Gleichungskoeffizienten. An sie anknüpfend werden für die über dem metazyklischen Körper liegenden Körper ebenfalls Minimalbasen bestimmt und damit auch für diese Darstellung der Einblick in die Struktur des Körpers eröffnet. Die Minimalbasen für den halbmetazyklischen und den zyklischen Körper sind, ebenso wie die ursprünglichen entsprechenden Noetherschen Basen, nicht frei von fünften Einheitswurzeln. Während man jedoch dort, wie erwähnt, infolge des gruppentheoretischen Standpunktes unmittelbar auch zu Minimalbasen mit *rationalen* Koeffizienten gelangen konnte, ist dies hier nicht der Fall und man müßte sich der vorerwähnten Rechnung des Verfassers bedienen, um von der vollmetazyklischen Basis des Herrn Wäisälä ausgehend auch für die Oberkörper Minimalbasen mit *rationalen* Koeffizienten zu finden. Während wir ferner im § 1 einen wesentlichen Teil des Noetherschen Verfahrens für allgemeinen Primzahlgrad durchführen konnten, zeigt es sich, daß die Anwendung des Verfahrens des Herrn Wäisälä auch nur auf Gleichungen 7. Grades schon rein rechnerisch auf fast unüberwindliche Schwierigkeiten stößt.

## § 1.

Im folgenden bezeichne $p = 2n + 1$ eine Primzahl, $\varepsilon$ eine beliebig, aber fest gewählte primitive $p$-te Einheitswurzel, $g$ eine feste primitive Kongruenzwurzel von $p$. Die auftretenden Indizes sollen folgende Werte durchlaufen: $j = 0, 1, \ldots, n-1$; $t = 1, 2, \ldots, n-1$; $\mu = 0, 1, \ldots, p-2$; $\nu = 0, 1, \ldots, p-1$. Mit $x_\nu$ bezeichnen wir $p$ Unbestimmte, und es bedeute:

$$(1) \qquad (\varepsilon, x) = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots + \varepsilon^{p-1} x_{p-1}.$$

[2]) Über die algebraisch auflösbaren Gleichungen 5. Grades. Diss. Helsingfors 1916.

Ist weiter[3])

$$(2)\qquad \frac{1}{p}(1, x) = \frac{1}{p}\sum x_\nu = \varphi_0(x) \quad\text{und}\quad \frac{1}{p}(\varepsilon^{g^\mu}, x) = k_\mu,$$

so wird

$$(3)\qquad x_\nu = \varepsilon^{-\nu} k_0 + \varepsilon^{-g\cdot\nu} k_1 + \varepsilon^{-g^2\cdot\nu} k_2 + \ldots + \varepsilon^{-g^{p-2}\cdot\nu} k_{p-2} + \varphi_0(x).$$

Es sei ferner

$$(4)\qquad \frac{k_{n+j}}{k_j} = q_j,\quad \frac{k_j}{k_0} = r_j;\quad \text{entsprechend}\quad q_{n+j} = \frac{1}{q_j},^{4)}\quad r_{n+j} = \frac{k_{n+j}}{k_0} = q_j r_j.$$

Dabei ist also $r_0 = r_{2n} = 1$, $r_n = q_0$, und nur die $r_t$ sind von den $q_j$ verschiedene Unbestimmte, d. h. algebraisch unabhängige Funktionen; es ist, wegen $r_{2n+j} = r_j = \frac{r_{n+j}}{q_j}$, auch $r_{2n+j} = q_{n+j} r_{n+j}$, was wir für späteren Gebrauch anmerken. Wir bezeichnen ferner die erzeugenden Elemente der vollen linearen Permutationsgruppe der $x_\nu$ mit

$$(5)\qquad S = \binom{\nu}{\nu+1} = (x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}),\quad T = \binom{\nu}{g\nu} = (x_1, x_g, x_{g^2}, \ldots, x_{g^{p-2}}).$$

Unter „zyklischen oder metazyklischen Funktionen der Größen $k_\mu$, $q_j$, $r_t$“ sind im folgenden stets Ausdrücke verstanden, welche die Vertauschungen $S$ bzw. $S$ und $T$ (5) dulden. Die „einförmige“ ganze rationale Funktion der $k_\mu$

$$(6)\qquad v_0 = k_0^{\lambda_0} k_1^{\lambda_1} \ldots k_{p-2}^{\lambda_{p-2}}$$

ist dann und nur dann zyklisch, wenn

$$(7)\qquad \lambda_0 + g^1\lambda_1 + g^2\lambda_2 + \ldots + g^{p-2}\lambda_{p-2} \equiv 0 \pmod p,$$

da $k_\mu$ (2) bei Anwendung von $S$ (5) mit $\varepsilon^{-g^\mu}$ multipliziert wird. Bei Anwendung von $T$ (5) geht dagegen $k_\mu$ in $k_{\mu-1}$ über, d. h. die $k_\mu$ werden in der Reihenfolge $(k_{p-2}, k_{p-3}, \ldots, k_2, k_1, k_0)$ vertauscht. *Ersetzt* man andererseits die Einheitswurzel $\varepsilon$ durch $\varepsilon^g$ — es handelt sich *nicht* um ein *gegenseitiges* Vertauschen dieser beiden Größen —, so werden die $k_\mu$ ersichtlich in der umgekehrten Reihenfolge vertauscht wie vorher durch $T$. Die Summe — ebenso natürlich *jede* zyklische Funktion — der aus $v_0$ (6) durch zyklische Verschiebung der $k_\mu$ oder der $\lambda_\mu$ hervorgehenden Glieder $v_\mu$

$$(8)\qquad \sum v_\mu = [v_0] = [k_0^{\lambda_0} k_1^{\lambda_1} \ldots k_{p-2}^{\lambda_{p-2}}]$$

---

[3]) Vgl. Wäisälä a. a. O. sowie Breuer, Das Abelsche Gleichungsproblem bei Euler, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1922, S. 165ff.

[4]) Zunächst ist $q_{n+j} = \frac{k_{2n+j}}{k_{n+j}}$; die Indizes von $k, q, r$ sind aber überall auf den kleinsten positiven Rest $(\operatorname{mod} 2n)$ zu reduzieren.

ist daher eine vollmetazyklische Funktion der $k_\mu$ bzw. $x_\nu$, sie ist überdies, im Gegensatz zu $v_0$ selbst, auch als Funktion der $x_\nu$ rational, d. h. frei von $\varepsilon$. Denn da sie sich nicht ändert, wenn $\varepsilon$ durch $\varepsilon^g$ ersetzt wird, gestatten ihre Koeffizienten die Gruppe der Kreisteilungsgleichung $\frac{x^p-1}{x-1}=0$, sind also rational. Endlich kann jede rationale metazyklische Funktion der $x_\nu$ aus $\varphi_0$ (2) und Ausdrücken $[v_\mu]$ (8) zusammengesetzt werden[5]. Unter den $v_\mu$ kann als „Leitglied" $v_0$ irgendein beliebiges herausgegriffen werden. Zwei Leitglieder $v_0$, $v_0'$ bezeichnen wir als unabhängig, wenn sie nicht durch zyklische Verschiebung der $k_\mu$ oder der $\lambda_\mu$ auseinander hervorgehen, d. h. wenn $[v_0] \neq [v_0']$.

Nun seien unter $f_m([v_0])$, $g_m([v_0])$ ganze rationale, aus einem oder mehreren Ausdrücken (8) zusammengesetzte, homogene Funktionen $m$-ten Grades der $k_\mu$ und damit der $x_\nu$ verstanden, wobei also $\lambda_0+\lambda_1+\ldots+\lambda_{p-2}=m$. Dann ist

$$\varphi_1(x)=\frac{f_{m_1+1}([v_0])}{g_{m_1}([v_0])} \tag{9}$$

eine rationale metazyklische homogene Funktion 1. Grades der $x_\nu$, und

$$\varphi_{t+1}(x)=\frac{f_{m_{t+1}}([v_0])}{g_{m_{t+1}}([v_0])} \tag{10}$$

sind ebensolche Funktionen 0-ten Grades, die auch als Funktionen der Größen $q_j$ und $r_t$ (4) statt der $k_\mu$ geschrieben werden können. Da also jede rationale metazyklische Funktion der $x_\nu$ mit Hilfe von (3) durch $\varphi_0(x)$ (2), die beliebig zu wählende Funktion $\varphi_1(x)$ (9) und metazyklische Funktionen der Größen (4) ausgedrückt werden kann, so kann eine metazyklische Minimalbasis der $x_\nu$ aus $\varphi_0$, $\varphi_1$ und einer nur noch $p-2$ Funktionen enthaltenden Basis der metazyklischen Funktionen der $q_j$, $r_t$ (4) zusammengesetzt werden. Diese Reduktion ist schon lange bekannt[6]. Wiederholt sei bemerkt, daß dabei $\varepsilon$ nicht als dem zugrunde gelegten Rationalitätsbereich adjungiert gedacht ist und auch nur scheinbar in die Darstellung eingeht.

Eine wesentliche Reduktion erfährt das Basisproblem nun durch den folgenden Umstand:

*Es ist stets möglich, $n-1$ metazyklische Funktionen* (10) *anzugeben, mit deren Hilfe die $r_t$ rational durch die $q_j$ ausgedrückt werden können.*

Dazu genügt es, $n-1$ Funktionen (10) anzugeben, die gebrochene *lineare* Funktionen mit nichtverschwindender Determinante der „Unbe-

[5] Vgl. Weber, Lehrbuch der Algebra, 2. Aufl. (1898), I, §§ 191, 192.

[6] Vgl. E. Noether a. a. O. S. 227 sowie Breuer, Über die irreduktiblen auflösbaren trinomischen Gleichungen 5. Grades, Diss. Frankfurt 1918, S. 17ff.

kannten“ $r_t$ sind, da diese alsdann aus dem „linearen Gleichungssystem“ (10) berechnet werden können. [Die „Unbestimmten“ $x_\nu$ sollen nur so spezialisiert werden, daß die Determinante dieses Systems und alle Nenner $g_{m_{t+1}}([v_0])$ von Null verschieden bleiben.] Im *speziellen* Fall wird man die $\varphi_{t+1}(x)$ durch Tabulierung der überhaupt möglichen Funktionen $[v_0]$ niederer Grade je nach dem beabsichtigten Zweck möglichst einfach bilden. Zum *allgemeinen* Beweis unserer Behauptung genügt die Angabe irgendeines Systems (10) (von dem die im § 2 anzugebenden Systeme dann freilich wesentlich unterschieden sind). Sei eine Funktion (10) etwa

$$\varphi_2(x) = \frac{[k_0^{\lambda_0} k_1^{\lambda_1} \dots k_{p-2}^{\lambda_{p-2}}]}{[k_0^{l_0} k_1^{l_1} \dots k_{p-2}^{l_{p-2}}]},$$

wo $\sum \lambda_\mu = \sum l_\mu = m_2$, so wird bei Kürzung durch $k_0^{m_2}$ nach (4)

$$\varphi_2(x) = \frac{[r_1^{\lambda_1} r_2^{\lambda_2} \dots r_{n-1}^{\lambda_{n-1}} q_0^{\lambda_n} (q_1 r_1)^{\lambda_{n+1}} (q_2 r_2)^{\lambda_{n+2}} \dots (q_{n-1} r_{n-1})^{\lambda_{2n-1}}]}{[r_1^{l_1} r_2^{l_2} \dots r_{n-1}^{l_{n-1}} q_0^{l_n} (q_1 r_1)^{l_{n+1}} (q_2 r_2)^{l_{n+2}} \dots (q_{n-1} r_{n-1})^{l_{2n-1}}]}$$

$$= \frac{[q_0^{\lambda_n} q_1^{\lambda_{n+1}} q_2^{\lambda_{n+2}} \dots q_{n-1}^{\lambda_{2n-1}} \cdot r_1^{\lambda_1+\lambda_{n+1}} r_2^{\lambda_2+\lambda_{n+2}} \dots r_{n-1}^{\lambda_{n-1}+\lambda_{2n-1}}]}{[q_0^{l_n} q_1^{l_{n+1}} q_2^{l_{n+2}} \dots q_{n-1}^{l_{2n-1}} \cdot r_1^{l_1+l_{n+1}} r_2^{l_2+l_{n+2}} \dots r_{n-1}^{l_{n-1}+l_{2n-1}}]}.$$

Die eckigen Klammern in Zähler und Nenner bedeuten die Summation über alle Glieder, die aus dem „Leitglied“ durch zyklische Vertauschung der $\lambda_\mu$ bzw. $l_\mu$ entstehen. Es ist also $\varphi_2(x)$ *linear* in sämtlichen $r_t$, wenn die Zahlen: $\lambda_0 + \lambda_n$, $\lambda_t + \lambda_{n+t}$, $l_0 + l_n$, $l_t + l_{n+t}$ nicht *sämtlich* einander gleich sind, und nur die beiden Werte $2u$ oder $2u + 1$, letzteren nur einmal, bzw. $2u$, $2u - 1$, für irgendein $u \geqq 0$ annehmen, da man alsdann durch $(r_1 r_2 \dots r_{n-1})^{2u}$ kürzen kann. Das gleiche gilt für alle $\varphi_{t+1}(x)$. Ein einfaches System (10) gewinnen wir folgendermaßen. Das Leitglied

$$(11) \qquad v_{0,1} = (k_0 k_1 \dots k_{n-1})^\pi k_0, \quad \text{wo} \quad p^2 + n(1-g) = \pi$$

gesetzt ist[7]), genügt sowohl der Bedingung (7) wie der soeben für die $\lambda_\mu$ aufgestellten Bedingung. Denn

$$\pi(g^0 + g^1 + \dots + g^{n-1}) + g^0 \equiv n(1-g)\frac{g^n - 1}{g - 1} + 1 \equiv 2n + 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

da $g^n \equiv -1 \pmod{p}$; ferner ist $\lambda_t + \lambda_{n+t} = \pi$, $\lambda_0 + \lambda_n = \pi + 1$. Die beiden erwähnten Bedingungen werden nun auch von den Leitgliedern

$$(12) \qquad v_{0,t+1} = (k_0 k_1 \dots k_{n-1})^\pi k_0 \left(\frac{k_n}{k_0}\right)^{tp},$$

---

[7]) Ebenso könnte man auch $\pi = fp + n(1-g)$ setzen, wo $f$ eine beliebige ganze Zahl ist, wenn nur $\pi + 1 \geqq (n-1)p$ ist, damit die Größen $v_{0,t+1}$ (12) ganze Funktionen bleiben.

die ganze Funktionen auch von $k_0$ sind, erfüllt. Denn der Faktor $\left(\frac{k_n}{k_0}\right)^{tp}$ genügt der Bedingung (7) und ändert nicht die Zahlen $\lambda_j + \lambda_{n+j}$. Die Leitglieder (11) und (12) sind ferner „unabhängig" in dem oben definierten Sinne, wie eine einfache Betrachtung lehrt. Daher bilden die Funktionen

$$(13) \qquad \varphi_{t+1}(x) = \frac{[v_{0,t+1}]}{[v_{0,1}]}$$

ein System der verlangten Art (10), sobald das Nichtverschwinden der Determinante gezeigt ist. Führt man in der ausführlich geschriebenen Formel (13) mit Kürzung durch $k_0^{n\pi+1}$ die Größen (4) ein und kürzt erneut durch $(r_1 r_2 \dots r_{n-1})^\pi$, so erhält man

$$(14) \qquad \varphi_{t+1}(x) = \frac{Z_{t+1}}{N},$$

wobei

$$(14\text{a}) \qquad \begin{aligned} N = r_0 + q_0^\pi r_1 + (q_0 q_1)^\pi r_2 + \dots + (q_0 q_1 \dots q_{n-1})^\pi r_n \\ + (q_1 q_2 \dots q_{n-1})^\pi r_{n+1} + (q_2 q_3 \dots q_{n-1})^\pi r_{n+2} + \dots \\ + (q_{n-2} q_{n-1})^\pi r_{2n-2} + q_{n-1}^\pi r_{2n-1}, \end{aligned}$$

und wobei $Z_{t+1}$ aus $N$ entsteht, indem der Koeffizient von $r_u$ mit $q_u^{tp}$ multipliziert wird. Da nun nach (4) $r_{n+j} = q_j r_j$, $r_0 = 1$, so wird

$$(14\text{b}) \qquad \begin{aligned} N = [1 + q_0 (q_0 q_1 \dots q_{n-1})^\pi] + [q_0^\pi + q_1 (q_1 q_2 \dots q_{n-1})^\pi] r_1 \\ + [(q_0 q_1)^\pi + q_2 (q_2 q_3 \dots q_{n-1})^\pi] r_2 + \dots \\ + [(q_0 q_1 \dots q_{j-1})^\pi + q_j (q_j q_{j+1} \dots q_{n-1})^\pi] r_j + \dots \\ + [(q_0 q_1 \dots q_{n-3})^\pi + q_{n-2} (q_{n-2} q_{n-1})^\pi] r_{n-2} \\ + [(q_0 q_1 \dots q_{n-2})^\pi + q_{n-1} \cdot q_{n-1}^\pi] r_{n-1}, \end{aligned}$$

und $Z_{t+1}$ entsteht aus $N$, indem in der $j$-ten eckigen Klammer das erste Glied mit $q_j^{tp}$, das zweite mit $q_{n+j}^{tp}$, d. h. mit $q_j^{-tp}$ multipliziert wird. Bezeichnen wir nun die Koeffizienten der $r_j$ im Polynom $N$ mit $a_{0j}$, in den Polynomen $Z_{t+1}$ mit $a_{tj}$, so können wir allgemein schreiben

$$(15) \qquad a_{hj} = (q_0 q_1 \dots q_{j-1})^\pi q_j^{hp} + q_j (q_j q_{j+1} \dots q_{n-1})^\pi q_j^{-hp} \qquad (h, j = 0, 1, \dots, n-1).$$

Zum Beweise unserer Behauptung, daß *die* $r_t$ *mit Hilfe der* $n-1$ *metazyklischen Funktionen* $\varphi_{t+1}$ (13) *rational durch die* $q_j$ *ausgedrückt werden können*, haben wir nunmehr noch zu zeigen, daß die Determinante $D$ des Gleichungssystems (14), d. h. die Determinante $\{a_{h,j}\}$ nicht *identisch* verschwindet, da die *speziellen* Werte (der $x_\nu$), für die sie verschwindet, schon früher ausgeschlossen worden sind. Hierzu genügt es, da die $q_j$

algebraisch unabhängige Funktionen, also Unbestimmte sind, *ein* Wertesystem der $q_j$ anzugeben, für welches $D = \{a_{h,j}\} \neq 0$ ist. Wir wählen für die $q_j$ nun $n$ verschiedene, paarweise zueinander reziproke Zahlen — es sei stets $q_{2i} q_{2i+1} = 1$ —, die sonst nur der Bedingung unterliegen, daß $q_j^{2\pi} \neq 1$ sei; nur wenn $n$ ungerade ist, sei $q_{n-1} = 1$ gesetzt. Dann wird in leichtverständlicher Bezeichnung

$$(15\,a) \qquad a_{h,2i} = q_{2i}^{hp} + q_{2i}^{1-hp}; \qquad a_{h,2i+1} = q_{2i}^{\pi-hp} + q_{2i}^{-\pi-1+hp}.$$

Für ungerades $n$ wird weiter $a_{h,n-1} = 2$. Zieht man nun das $q_{2i}^{-\pi-1}$-fache der $2i$-ten Spalte von der $2i+1$-ten ab, so wird

$$\bar{a}_{h,2i+1} = q_{2i}^{-hp}\,(q_{2i}^{\pi} - q_{2i}^{-\pi}) \neq 0$$

nach der Voraussetzung, daß $q_j^{2\pi} \neq 1$. Zieht man weiter das $\dfrac{q_{2i}}{q_{2i}^{\pi} - q_{2i}^{-\pi}}$-fache der so transformierten $2i+1$-ten Spalte von der $2i$-ten ab, so wird $\bar{a}_{h,2i} = q_{2i}^{hp}$. Dividiert man also $D$ durch die sämtlichen Faktoren $q_{2i}^{\pi} - q_{2i}^{-\pi}$ und allenfalls, für ungerades $n$, noch durch 2, so erhält man die bekannte Darstellung des Differenzenproduktes der $q_j$, das nach unserer Wahl der $q_j$ von Null verschieden ist. Für diese $q_j$ ist daher $D \neq 0$, w. z. b. w.

Die gesuchte Minimalbasis kann also jetzt zusammengesetzt werden aus den $n+1$ Funktionen $\varphi_0$ (2), $\varphi_1$ (9), $\varphi_{t+1}$ (13) — die rationale Funktionen der $x_\nu$ sind mit Koeffizienten aus dem absoluten Rationalitätsbereich — und einer aus nur noch $n$ Funktionen bestehenden Basis der metazyklischen Funktionen der $q_j$. Denn aus $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_{t+1}, q_j$ geht derselbe Körper hervor wie aus $\varphi_0, \varphi_1, q_j, r_t, r_{n+t}$; er ist vom Grade $p\,(p-1)$ über der gesuchten Minimalbasis.

Für die *zyklischen* Funktionen der $q_j$ bilden nun die Größen

$$(16) \qquad q_0^p, \quad q_t q_0^{-g^t}$$

eine freilich von $\varepsilon$ nicht freie Basis, denn nach Adjunktion der einen $p$-ten Wurzel $q_0$ sind alle $q_j$ bekannt. Durch $T^n$ (5) gehen sie in ihre reziproken Werte über. Die mit ihnen birational zusammenhängenden und also ebenfalls eine zyklische Basis bildenden Größen

$$(16\,a) \qquad \frac{q_0^p - 1}{q_0^p - 1}, \quad \frac{q_t q_0^{-g^t} - 1}{q_t q_0^{-g^t} + 1}$$

ändern also bei $T^n$ nur ihr Vorzeichen. Daher bilden die $n$ Größen

$$(17) \qquad \left(\frac{q_0^p - 1}{q_0^p + 1}\right)^2, \quad \frac{q_0^p - 1}{q_0^p + 1} \cdot \frac{q_t q_0^{-g^t} - 1}{q_t q_0^{-g^t} + 1}$$

eine Basis der die Vertauschungen $S$ und $T^n$ duldenden Funktionen[8]) der $q_j$, bzw. zusammen mit den $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_{t+1}$ eine solche in bezug auf die $x_\nu$ selbst. In gewissen Fällen wird es möglich sein, die $n$ Größen (17) durch solche zu ersetzen, die durch $T$ in einfacherer Weise geändert, möglicherweise nur zyklisch vertauscht werden. Zur Vervollständigung der gesuchten Minimalbesis bedarf man alsdann nur noch einer solchen für den Körper der zyklischen Funktionen dieser $n$ Unbekannten. Im *allgemeinen* Fall, der hier nicht weiter behandelt werden soll, erfahren die Größen (17) durch $T$ eine Gruppe von Cremona-Transformationen, die der im speziellen Fall auftretenden zyklischen Permutationsgruppe von $n$ Unbestimmten isomorph ist[9]). Diese selbst ist wieder nichts anderes als die letzte Faktorgruppe in unserer Kompositionsreihe der vollmetazyklischen Gruppe.

## § 2.

Im Falle $p = 5$ wählen wir $g = 2$. Nach Tabulierung der die Bedingung (7) erfüllenden Funktionen $v_0$ (6) der ersten Grade[10]) findet man als einfachste Ausdrücke:

$$(9\text{a}) \qquad \varphi_1 = \frac{k_0^2 k_3 - k_1^2 k_0 + k_2^2 k_1 - k_3^2 k_2}{k_0 k_2 - k_1 k_3} = k_0 \frac{q_1 r_1 + r_1^2 + q_0^2 r_1 + q_0 q_1^2 r_1^2}{q_0 + q_1 r_1^2},$$

$$(13\text{a}) \qquad \varphi_2 = \frac{k_0 k_1 k_2 k_3 (k_0^2 k_3 + k_1^2 k_0 + k_2^2 k_1 + k_3^2 k_2)}{k_0^4 k_1^3 + k_1^4 k_2^3 + k_2^4 k_3^3 + k_3^4 k_0^3} = q_0 q_1 \frac{q_1 - q_0^2 + (1 + q_0 q_1^2) r_1}{1 + q_0^4 q_1^3 - (q_0^3 + q_1^4) r_1},$$

woraus sich $k_0$ und $r_1$ als rationale Funktionen der $q_0, q_1, r_1, \varphi_1$ bzw. der $q_0, q_1, \varphi_2$ berechnen lassen. Für die zyklischen Funktionen der $q_0, q_1$ bilden

$$(18) \quad \psi_3 = q_0 q_1^2, \ \psi_4 = q_1 q_0^{-2} \quad \text{oder} \quad \chi_3 = \frac{\psi_3 - 1}{\psi_3 + 1}, \ \chi_4 = \frac{\psi_4 - 1}{\psi_4 + 1} \text{ (vgl. 16, 16a)}$$

eine Basis, da mit ihnen auch z. B. $q_0^5 = \psi_3 \psi_4^{-2}$ bekannt ist. Da $T$ unter ihnen die Substitution $(\chi_4, \chi_3, -\chi_4, -\chi_3)$ hervorruft, so bilden weiter die Funktionen

$$(19) \qquad \chi_3^2, \ \chi_3 \chi_4$$

---

[8]) Für $n = 2$ sind dies die halbmetazyklischen Funktionen.

[9]) Vgl. E. Fischer, Zur Theorie der endlichen Abelschen Gruppen, Mathematische Annalen 77. Daselbst werden jedoch nur solche Gruppen von Cremona-Transformationen behandelt, die — was *hier* nicht notwendig der Fall ist — durch Einführung einer geeigneten Basis in eine Gruppe linearer Transformationen verwandelt werden können.

[10]) Der Anfang einer solchen Tabelle findet sich bei Wäisälä a. a. O. S. 31.

eine Basis für die halbmetazyklischen Funktionen und ebenso die Größen

$$(20) \qquad \overline{\varphi}_3 = \frac{\chi_3^2 - \chi_4^2}{2\chi_3\chi_4}, \quad \overline{\varphi}_4 = \frac{\chi_3^2 + \chi_4^2}{2}$$

eine Basis für die vollmetazyklischen Funktionen der $q_0, q_1$. Genau so wie wir hier den Körper der rationalen Funktionen der Größen $q_0, q_1$ allmählich zu dem aus (20) hervorgehenden eingeschränkt haben, verläuft umgekehrt, ganz entsprechend der Zerlegung der linearen Gruppe in ihre Faktorgruppen, der Aufstieg von dem letztgenannten Körper zu dem ersten durch Adjunktion zweier Quadratwurzeln und einer fünften Wurzel:

$$(21) \qquad \chi_3\chi_4 = \frac{\overline{\varphi}_4}{\sqrt{\overline{\varphi}_3^2 + 1}}, \quad \begin{matrix}\chi_3^2 \\ \chi_4^2\end{matrix} = \overline{\varphi}_4 \pm \overline{\varphi}_3 \cdot \chi_3\chi_4; \quad \chi_3 = \sqrt{\chi_3^2}; \quad q_0 = \sqrt[5]{\psi_3\psi_4^{-2}}.$$

Von den Basen (18), (19), (20) besitzt jedoch nur die letzte (20) Koeffizienten aus dem absoluten Rationalitätsbereich, während die Größen (18), (19) sich noch ändern, wenn man $\varepsilon$ durch $\varepsilon^g$ ersetzt: es geht $\chi_3$ in $\chi_4$, $\chi_4$ in $-\chi_3$ über. (Vgl. das nach Formel (7), (8) Bemerkte.)[11]) Setzen wir aber

$$\eta_0 = \varepsilon - \varepsilon^{-1}, \quad \eta_1 = \varepsilon^2 - \varepsilon^{-2},$$

---

[11]) Die Formeln (9a), (13a), (18), (19), (20) geben, von der Bezeichnung abgesehen, die urspünglichen Noetherschen Formeln für $p = 5$ wieder, ebenso weiter unten die Formeln (9b), (10b) und (25b) in Fußnote 13 die für den Fall $p = 7$. Der Verfasser erhielt nun, indem er der Basis (20) die rationale halbmetazyklische Funktion $(\varepsilon + \varepsilon^4 - \varepsilon^2 - \varepsilon^3)\chi_3\chi_4$ hinzufügte, eine halbmetazyklische Rationalbasis, und ebenso durch Adjunktion von $\alpha_3$ (18a) eine zyklische Rationalbasis mit zunächst je sechs Basisfunktionen, die aber sodann mit Hilfe der zwischen ihnen bestehenden Gleichung leicht auf fünf reduziert werden konnten, womit für beide Zwischenkörper *rationale* Minimalbasen gewonnen waren. Fräulein Noether bemerkte sodann, daß diese Rechnung zu ersparen ist, indem man neben $\alpha_3$ gleichzeitig die durch die Substitution $(\varepsilon, \varepsilon^2)$ in den $\eta$ aus ihr hervorgehende Funktion $\alpha_4$ einführt. In gleicher Weise hatte der Verfasser weiter unten im Falle $p = 7$ immer nur *eine*, zu dem betreffenden Zwischenkörper gehörige Funktion eingeführt und sodann durch Rechnung die sämtlichen rationalen Minimalbasen bestimmt, während Fräulein Noether sodann bemerkte, daß man nur die drei Funktionen (23a) gleichzeitig einzuführen braucht, um ohne Rechnung zum gleichen Ziele zu gelangen. Die von $\varepsilon$ freie Basis $Q_3, Q_4$ des Körpers der Unbestimmten selbst und die für die halbmetazyklischen Funktionen waren dann leicht auf dem gleichen Wege zu bestimmen. Daß die hier benutzten Funktionen, z. B. $\alpha_3$ (18a), von $\varepsilon$ frei sind, rührt davon her, daß die Größen $\eta_0, \eta_1$ unter $(\varepsilon, \varepsilon^2)$ die gleiche Substitution erfahren wie $\chi_3, \chi_4$. Eine lineare Kombination beider bleibt daher ungeändert. Im wesentlichen das gleiche Prinzip, nur noch auf die Anzahl $p$ statt hier auf $\frac{p-1}{2}$ angewendet, liegt schon der Formel (3) zugrunde, in der die $x_\nu$ aus den Lagrangeschen Resolventen $k_\mu$ und den Größen $\varepsilon^{-g^{\mu \cdot \nu}}$ linear zusammengesetzt wurden, welche unter $(\varepsilon, \varepsilon^g)$ die gleiche zyklische Vertauschung erleiden.

wobei unter $\varepsilon$ die (zu Beginn des § 1) fest gewählte 5-te Einheitswurzel verstanden ist, so leisten die Funktionen

$$(18\text{a}) \qquad \alpha_3 = \eta_0 \chi_3 + \eta_1 \chi_4, \qquad \alpha_4 = \eta_1 \chi_3 - \eta_0 \chi_4$$

$$(19\text{a}) \qquad \alpha_3^2, \quad \alpha_3 \alpha_4$$

$$(20\text{a}) \qquad \varphi_3 = \frac{\alpha_3^2 - \alpha_4^2}{2\,\alpha_3 \alpha_4}, \qquad \varphi_4 = \frac{\alpha_3^2 + \alpha_4^2}{2}$$

offenbar den gleichen Dienst wie die Funktionen (18), (19), (20), sind aber im Gegensatz zu diesen *sämtlich* frei von $\varepsilon$, da sich bereits $\alpha_3$ und $\alpha_4$ nicht ändern, wenn man $\varepsilon$ durch $\varepsilon^2$ ersetzt. Die Funktionen (20a) unterscheiden sich übrigens nur unwesentlich von denen (20). Bezeichnen wir weiter

$$Q_0 = \frac{q_0 - 1}{q_0 - 1}, \qquad Q_1 = \frac{q_1 - 1}{q_1 + 1}; \qquad Q_3 = \eta_0 Q_0 + \eta_1 Q_1; \qquad Q_4 = \eta_1 Q_0 - \eta_0 Q_1,$$

so bilden $Q_3$, $Q_4$ eine Basis für diejenigen rationalen Funktionen der $q_0$, $q_1$, die als Funktionen der $x_\nu$ Koeffizienten aus dem absoluten Rationalitätsbereich haben, da einerseits auch $q_0$, $q_1$ mit Hilfe von $\varepsilon$ rational durch $Q_3$, $Q_4$ ausdrückbar sind, letztere aber sich nicht ändern, wenn man $\varepsilon$ durch $\varepsilon^2$ ersetzt. Mithin bilden schließlich

$$(22, 1) \qquad \varphi_0, \ \varphi_1, \ \varphi_2, \ Q_3, \ Q_4$$

$$(22, 2) \qquad \varphi_0, \ \varphi_1, \ \varphi_2, \ \alpha_3, \ \alpha_4$$

$$(22, 3) \qquad \varphi_0, \ \varphi_1, \ \varphi_2, \ \alpha_3^2, \ \alpha_3 \alpha_4$$

$$(22, 4) \qquad \varphi_0, \ \varphi_1, \ \varphi_2, \ \varphi_3, \ \varphi_4$$

je eine Minimalbasis für die rationalen Funktionen der $x_\nu$ überhaupt, bzw. für die zyklischen, halbmetazyklischen und vollmetazyklischen Funktionen der $x_\nu$, und sie besitzen sämtlich Koeffizienten aus dem absoluten Rationalitätsbereich. Der Aufstieg vom Körper (22, 4) zu (22, 1) erfolgt jeweils durch Änderung nur der beiden letzten Basisfunktionen, er entspricht genau dem durch die Gleichungen (21) dargestellten und ist aus diesen fast unmittelbar abzulesen bzw. zu übertragen.

Im Falle $p = 7$ wählen wir $g = 3$ und finden, gleichfalls durch Tabulierung,

$$(9\text{b}) \qquad \varphi_1 = \frac{k_0^2 k_5 + \ldots + k_5^2 k_4 + 2\,(k_0 k_2 k_4 + k_1 k_3 k_5)}{k_0 k_3 + k_1 k_4 + k_2 k_5} \qquad \text{(vgl. § 3, Fußnote 15)},$$

$$(10\text{b}) \qquad \varphi_2 = \frac{k_0^3 k_1 k_2^2 k_4 + \ldots + k_5^3 k_0 k_1^2 k_3}{k_0^3 k_4^2 k_5^2 + \ldots + k_5^3 k_3^2 k_4^2}, \qquad \varphi_3 = \frac{k_0^2 k_1^2 k_2 k_3 k_5 + \ldots + k_5^2 k_0^2 k_1 k_2 k_4}{k_0^3 k_1 k_2^2 k_4 + \ldots + k_5^3 k_0 k_1^2 k_3}.$$

Aus (10b) erhalten wir bei Kürzung durch $k_0^7$ zwei lineare Gleichungen für $r_1$, $r_2$, aus denen letztere „berechnet“ werden können.

Für die zyklischen Funktionen der $q_0, q_1, q_2$ bilden

$$(23)\qquad \psi_4 = q_0 q_1^2,\ \psi_5 = q_1 q_2^2,\ \psi_6 = q_2 q_0^{-2} \quad \text{oder} \quad \chi_e = \frac{\psi_e - 1}{\psi_e + 1} \ldots (e = 4, 5, 6),$$

(vgl. (16), (16a)) eine Basis. Die $\chi_e$ werden durch $T$ in der Reihenfolge $(\chi_6, \chi_5, \chi_4, -\chi_6, -\chi_5, -\chi_4)$ vertauscht, genügen also einer rationalen zyklischen Gleichung 6. Grades, in der nur die quadratischen Glieder auftreten. Daher[12]) dulden

$$(24)\qquad \zeta_4 = \chi_5 \chi_6, \quad \zeta_5 = -\chi_6 \chi_4, \quad \zeta_6 = \chi_4 \chi_5 \qquad \text{(vgl. 17)}$$

die Vertauschung $T^3$ und bilden eine Basis der gegenüber $S$ und $T^3$ invarianten Funktionen der $q_0, q_1, q_2$. Sie werden durch $T$ nur zyklisch vertauscht und somit bilden

$$(25)\qquad \begin{cases} \bar\varphi_4 = \dfrac{\zeta_4 + \zeta_5 + \zeta_6}{3}, \qquad \bar\varphi_5 = -\dfrac{3}{2}\dfrac{\bar\xi_4 \bar\xi_5 \bar\xi_6}{\bar\xi_4 \bar\xi_5 + \bar\xi_5 \bar\xi_6 + \bar\xi_6 \bar\xi_4}, \\[2ex] \bar\varphi_6 = -\dfrac{1}{6}\dfrac{(\zeta_4 - \zeta_5)(\zeta_5 - \xi_6)(\zeta_6 - \zeta_4)}{\bar\xi_4 \zeta_5 - \bar\xi_5 \bar\xi_6 + \bar\xi_6 \bar\xi_4}, \end{cases}$$

wobei $\zeta_e - \bar\varphi_4 = \bar\xi_e$ gesetzt ist, eine Basis für die metazyklischen Funktionen der $q_0, q_1, q_2$ [13]). Den Formeln (21) entsprechen, wie unten noch näher ausgeführt wird, hier die folgenden, in denen $\bar\xi_4$ nur zur Vereinfachung der Schreibweise herausgegriffen ist, ohne jedoch eine bevorzugte Rolle zu spielen:

$$(26)\qquad \begin{cases} \bar\xi_4 = A + \dfrac{\bar\varphi_5^2 + 3\bar\varphi_6^2}{A}, \quad \text{wobei } A = \sqrt[3]{(\bar\varphi_5^2 + 3\bar\varphi_6^2)(\bar\varphi_5 + \bar\varphi_6 \sqrt{-3})}, \\[2ex] \bar\xi_{5,6} = -\dfrac{1}{2}\bar\xi_4 \mp 3\bar\varphi_6 \dfrac{\bar\varphi_5^2 - 3\bar\varphi_6^2}{\bar\xi_4^2 - (\varphi_5^2 - 3\bar\varphi_6^2)}, \qquad \zeta_e = \bar\varphi_4 + \bar\xi_e; \\[2ex] \chi_4 = \sqrt{-\dfrac{\zeta_5 \zeta_6}{\zeta_4}}; \quad q_0 = \sqrt[7]{\dfrac{\psi_5^2}{\psi_4 \psi_6^4}}. \end{cases}$$

Daß hier in der Größe $A$ die $\sqrt{-3}$ auftritt, darf nicht verwundern. Die „Entfernung des Faktors 3" aus der linearen Gruppe erfolgt rein durch Adjunktion einer Wurzel der Abelschen Gleichung *dritten* Grades, der die $\bar\xi_e$ genügen. Bei der Darstellung dieser Wurzel durch *Radikale*

---

[12]) Zu den hier folgenden Formeln, die von den Noetherschen etwas abweichen (siehe Einleitung) vgl. Breuer, Zyklische Gleichungen 6. Grades und Minimalbasis, Math. Annalen **86**, S. 108ff.

[13]) In den Noetherschen Formeln traten an Stelle von (25) die folgenden Funktionen auf:

$$(25\text{b})\qquad \varphi_4' = \frac{\xi_4^2 \xi_5 - \xi_5^2 \xi_6 - \xi_6^2 \xi_4}{\xi_4 \xi_5 \xi_6}, \quad \varphi_5' = \xi_4^2 - \xi_5^2 + \xi_6^2, \quad \varphi_6' = \frac{\varrho}{\xi_4 \xi_5 \xi_6},$$

wobei

$$\varrho = \chi_4 - \chi_5 + \chi_6, \quad \xi_4 = \chi_4 - \frac{\varrho}{3}, \quad \xi_5 = \chi_5 + \frac{\varrho}{3}, \quad \xi_6 = \chi_6 - \frac{\varrho}{3}.$$

tritt aber die $\sqrt{-3}$ als akzessorische Irrationalität auf. Die zyklische Gleichung für $\bar{\xi}$, die zu den Formeln (26) führt, hat die Form:

$$(27) \qquad \bar{\xi}^3 - 3(\bar{\varphi}_5^2 + 3\bar{\varphi}_6^2)\bar{\xi} - 2\bar{\varphi}_5(\bar{\varphi}_5^2 + 3\bar{\varphi}_6^2) = 0 \text{ [12]}.$$

Nun gilt für jede kubische Gleichung $f(y) \equiv y^3 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3 = 0$, daß $y_{2,3} = -\frac{1}{2}\left(a_1 + y_1 \pm \frac{\Delta}{f'(y_1)}\right)$, wobei unter $\Delta$ das Differenzenprodukt $(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)$ verstanden ist und das obere Vorzeichen sich auf $y_2$ bezieht. Durch Anwendung auf die Gleichung (27), für welche das Differenzenprodukt $\Delta \equiv (\bar{\xi}_4 - \bar{\xi}_5)(\bar{\xi}_5 - \bar{\xi}_6)(\bar{\xi}_6 - \bar{\xi}_4) = +18\bar{\varphi}_6(\bar{\varphi}_5^2 + 3\bar{\varphi}_6^2)$ ist, wie sich aus der Bedeutung von $\bar{\varphi}_6$ in (25) ergibt, wird die mittlere Formel (26) erhalten, in der sich also das obere Vorzeichen auf $\bar{\xi}_5$ bezieht. Bezeichnen wir mit $G_{42}$, $G_{21}$, $G_{14}$, $G_7$ die durch $S$ und $T$, bzw. $S$ und $T^2$, bzw. $S$ und $T^3$, bzw. $S$ erzeugte Permutationsgruppe, so gehören also die Größen $\bar{\varphi}_e$ (25) und $\varphi'_e$ (25b) zu $G_{42}$, die Größen $\zeta_e$, $\bar{\xi}_e$ (24), (25) zu $G_{14}$, $\varrho$ (25b) zu $G_{21}$, endlich die Größen $\chi_e$ (23) und $\xi_e$ (25b) zu $G_7$. Zwei Kompositionsreihen von $G_{42}$ werden durch $G_{42}$, $G_{21}$, $G_7$, $E$ und $G_{42}$, $G_{14}$, $G_7$, $E$ dargestellt. Die zugehörigen Faktorgruppen sind isomorph zu zyklischen Permutationsgruppen 2., 3., 7., bzw. 3., 2., 7. Ordnung. Die zweite Kompositionsreihe liegt offenbar *unserer* Auflösung zugrunde, die Gleichungen, aus denen in (26) die Größen $\bar{\xi}_e$ und $\chi_e$ gewonnen werden, besitzen zyklische Gruppen vom 3. bzw. 2. Grade. In den nicht ganz so durchsichtigen Noetherschen Formeln (25b) wird die erste Kompositionsreihe benutzt, die unschwer aufzustellenden Gleichungen, denen $\varrho$ bzw. nach dessen Adjunktion die Größen $\xi_e$ genügen, besitzen zyklische Gruppen vom 2. bzw. 3. Grade. Die Gruppen der einzuführenden Hilfsgleichungen sind also isomorph zu den Faktorgruppen der jeweils benutzten Kompositionsreihe, wie dies nicht anders zu erwarten war.

In den Formeln (25b, Fußnote 13) tritt für die aus $S$ und $T^2$ erzeugte halbmetazyklische Zwischengruppe eine Basis nicht explizit auf. Der Vollständigkeit halber und mit Rücksicht auf das Folgende bemerken wir, daß sie sich in einfachster Weise bilden läßt als Minimalbasis der die Vertauschung $(\chi_4, -\chi_5, \chi_6)$ duldenden Funktionen dieser Größen, d. h. analog zu Formel (25) etwa in der Form

$$(28) \qquad \begin{cases} \omega_4 = \frac{1}{3}\varrho = \frac{\chi_4 - \chi_5 + \chi_6}{3}, \qquad \omega_5 = -\frac{3}{2}\frac{\xi_4\xi_5\xi_6}{\xi_4\xi_5 + \xi_5\xi_6 - \xi_6\xi_4}, \\ \omega_6 = -\frac{1}{6}\frac{(\chi_4 - \chi_5)(\chi_5 + \chi_6)(\chi_6 - \chi_4)}{\xi_4\xi_5 + \xi_5\xi_6 - \xi_6\xi_4}. \end{cases}$$

Genau wie vorhin im Falle $p = 5$, so besitzt auch hier diese Basis (28) so wenig wie die Basen (23), (24) Koeffizienten aus dem absoluten Rationalitätsbereich, und nur die vollmetazyklische Basis (25) selbst — ebenso natürlich die in Fußnote 13 auftretende vollmetazyklische Basis (25 b) — hat rationale Koeffizienten. Setzen wir aber wieder

$$\eta_0 = \varepsilon - \varepsilon^{-1}, \qquad \eta_1 = \varepsilon^3 - \varepsilon^{-3}, \qquad \eta_2 = \varepsilon^2 - \varepsilon^{-2},$$

so leisten die Funktionen

$$(23\text{a}) \qquad \begin{cases} \alpha_4 = \eta_0 \chi_4 + \eta_1 \chi_5 + \eta_2 \chi_6, \qquad \alpha_5 = \eta_1 \chi_4 + \eta_2 \chi_5 - \eta_0 \chi_6, \\ \qquad \alpha_6 = \eta_2 \chi_4 - \eta_0 \chi_5 - \eta_1 \chi_6, \text{ [14]} \end{cases}$$

$$(24\text{a}) \qquad \beta_4 = \alpha_5 \alpha_6, \qquad \beta_5 = -\alpha_6 \alpha_4, \qquad \beta_6 = \alpha_4 \alpha_5$$

offenbar denselben Dienst wie die Funktionen (23), (24), sind aber im Gegensatz zu jenen frei von $\varepsilon$. Die Funktionen

$$(25\text{a}) \qquad \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6,$$

die sich aus den $\beta_e$ ebenso zusammensetzen wie die Größen (25) aus den $\zeta_e$, können an deren Stelle treten, unterscheiden sich übrigens nur unwesentlich von ihnen. Bilden wir ferner Größen

$$(28\text{a}) \qquad \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6,$$

die sich aus den $\alpha_e$ (23 a) ebenso zusammensetzen wie die $\omega_e$ (28) aus den $\chi_e$ (23) $\left[\text{wobei zu beachten ist, daß nach Fußnote 13 } \xi_4 = \chi_4 - \frac{\varrho}{3} \text{ usw.}\right]$, so erhält man eine gleichfalls von $\varepsilon$ freie halbmetazyklische Basis.

Bezeichnen wir nun noch, wie vorher im Falle $p = 5$,

$$Q_0 = \frac{q_0 - 1}{q_0 + 1}, \qquad Q_1 = \frac{q_1 - 1}{q_1 + 1}, \qquad Q_2 = \frac{q_2 - 1}{q_2 - 1};$$

$$Q_4 = \eta_0 Q_0 + \eta_1 Q_1 + \eta_2 Q_2, \qquad Q_5 = \eta_1 Q_0 + \eta_2 Q_1 - \eta_0 Q_2,$$
$$Q_6 = \eta_2 Q_0 - \eta_0 Q_1 - \eta_1 Q_2,$$

so bilden wiederum $Q_4, Q_5, Q_6$ eine Basis für diejenigen rationalen Funktionen der $q_0, q_1, q_2$, die als Funktionen der $x_\nu$ Koeffizienten aus dem absoluten Rationalitätsbereich besitzen. Mithin bilden

$$(29, 1) \qquad \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \quad Q_4, Q_5, Q_6;$$

$$(29, 2) \qquad \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \quad \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6;$$

$$(29, 3) \quad \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6; \quad (29, 4) \quad \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6;$$

$$(29, 5) \qquad \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \quad \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$$

je eine Minimalbasis für die rationalen Funktionen der $x_\nu$ überhaupt bzw. für die Invarianten gegenüber $S$, $S$ und $T^3$, $S$ und $T^2$, $S$ und $T$. Der

[14]) Die Determinante dieser drei Gleichungen ist, ebenso wie oben die der Gleichungen (18a), von Null verschieden.

Aufstieg von den letzteren, nämlich dem vollmetazyklischen Körper (29, 5) über den halbmetazyklischen (29, 4) oder den gegenüber $S$ und $T^3$ invarianten Körper (29, 3) zum zyklischen (29, 2) und weiter zum „rationalen“ Körper (29, 1), vollzieht sich durch Adjunktionen, d. h. durch Auflösung von Hilfsgleichungen, die nach dem früher Gesagten leicht aufgestellt und daher hier übergangen werden können.

## § 3.

Das im vorstehenden behandelte Problem war, wie nochmals hervorgehoben sei, ein solches der Körper gewisser Funktionen von $p$ Unbestimmten. Wir konnten die Gewinnung einer Basis für die *verschiedenen* bei einer und derselben Anzahl $p$ der Unbestimmten zu untersuchenden Körper vereinfachen, indem wir zeigten, daß die $n+1$ *ersten* Basisfunktionen für alle zu untersuchenden Körper — nämlich die der rationalen und der metazyklischen Funktionen und alle Zwischenkörper — gemeinsam auftreten, so daß nur die restlichen $n$ Basisfunktionen mit der Natur des Körpers sich änderten und diese bestimmten. Ein ganz anderes Problem — für dessen Lösung freilich die Existenz der Basis eine hinreichende Voraussetzung bildet[1]) — liegt aber vor, wenn die Koeffizienten und Wurzeln der in irgendeinem Bereich metazyklischen Gleichungen durch $p$ Parameter dargestellt werden sollen. Denn dann sucht man nicht eine Basis für den Körper der metazyklischen Funktionen überhaupt nebst dem möglichst bequemen Aufstieg zum *Körper* der Unbestimmten selbst, sondern man sucht für alle *speziellen* Größen $x_\nu$, deren metazyklische Funktionen dem gegebenen Rationalitätsbereich angehören, eine Darstellung *spezieller* metazyklischer — nämlich der symmetrischen — Funktionen durch geeignete Basisfunktionen, und sucht weiter den Aufstieg von letzteren zu den Größen $x_\nu$ selbst, nicht nur zu deren Körper. Hierzu ist der von Herrn Wäisälä[2]) eingeschlagene Weg der geeignetere. Herr Wäisälä drückt zunächst nach dem Vorgang von Euler die Koeffizienten (ebenso auch die Wurzeln) auflösbarer Gleichungen 5. Grades durch die $k_\mu$ aus und führt bei ersteren für gewisse zyklische Verbindungen der $k_\mu$, die also Wurzeln rationaler zyklischer biquadratischer Gleichungen sein müssen, die Webersche bzw. Abelsche Parameterdarstellung solcher Wurzeln ein. Dadurch ergibt sich auf verhältnismäßig einfachem Wege eine Parameterdarstellung für die Koeffizienten der Gleichung 5. Grades, zu der freilich auch mehrere, von Herrn W. gleichfalls ausgeführte Ergänzungsdarstellungen erforderlich werden. Nach dem Vorstehenden kann es nicht überraschen — wenngleich Herr W. diese Tatsache nicht erwähnt hat —, daß auch die bei Herrn W. zuletzt auftretenden Parameter, obwohl auf ganz anderem Wege gewonnen, selbst wieder metazyklische Funktionen der Wurzeln sind und somit eine Minimalbasis bilden (s. u.). Umgekehrt kann man nicht erwarten, daß unsere in § 2 gewonnenen Basisfunktionen zur Koeffizientendarstellung besonders geeignet seien. Betrachtet man, was ohne wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit möglich ist, nur Gleichungen der Form

$$x^p + a_2 x^{p-2} + a_3 x^{p-3} + \ldots + a_{p-1} x + a_p = 0\,,$$

so stehen freilich die Funktionen $\varphi_0$ (2) und $\varphi_1$ (9a), (9b) in einfacher Beziehung zu den Koeffizienten, da $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = \frac{a_3}{a_2}$ [15]). Aber schon die Berechnung des Koeffizienten $a_2$ für $p = 5$ wird vollkommen unübersichtlich. Um aber auch nur zu der *Basis* (22, 4) alle für *spezielle* Werte $x_\nu$ erforderlichen Ergänzungsdarstellungen anzugeben, müßte man vorerst die Koeffizienten durch die Basis (22, 4) ausdrücken. Denn letztere wird nicht nur für solche Werte unbrauchbar, in denen etwa einzelne Basisfunktionen verschwinden oder unendlich werden — z. B. also für $a_2 = 0$ wegen $\varphi_1 = \infty$, desgleichen für $a_3 = 0$ wegen $k_0 = \infty$ —, sondern auch für solche Werte $x_\nu$, die etwaige in den Ausdrücken der Koeffizienten auftretende Nenner zum Verschwinden bringen. Wir verzichten daher, namentlich auch im Hinblick auf die vorliegende Wäisäläsche Darstellung, auf Durchführung der Diskussion unserer Basis (22, 4) und wollen nur beispielsweise die Ergänzungsdarstellungen angeben, die für den Parameter 1. Grades $\varphi_1$ nötig werden, wobei wir der Einfachheit halber alle $k_\mu$ als von 0 verschieden voraussetzen. Um hier nur eine einzige Ausnahme betrachten zu müssen, wählen wir $\varphi_1' = \frac{a_3^2}{a_5}$ $\left(\text{statt } \varphi_1 = \frac{a_3}{a_2}\right)$, brauchen — da uns nur irreduzible Gleichungen interessieren — nur

$$1. \quad a_3 = 0$$

in Betracht zu ziehen und setzen in diesem Falle $\varphi_1'' = \frac{a_5}{a_2^2}$. Alsdann brauchen wir keine Basisfunktion $\varphi_2$ einzuführen, da die Bedingung $a_3 = 0$, d. h. $k_0^2 k_3 + \ldots + k_3^2 k_2 = 0$, allein hinreicht, um $r_1$ durch $q_0, q_1$ auszudrücken in der Form $r_1 = -\frac{q_0^2 + q_1}{1 + q_0 q_1^2}$. Es bilden also in diesem Falle $\varphi_0, \varphi_1'', \varphi_3, \varphi_4$ die Minimalbasis. Ist aber

$$2. \quad a_2 = a_3 = 0\,,$$

[15]) Zu (9a) vgl. Wäisälä a. a. O. S. 32 oder Breuer a. a. O. Fußnote 3, S. 167. Für (9b) ergibt eine einfache Rechnung die Richtigkeit unserer Behauptung. Wir hätten natürlich in (9a), (9b) unmittelbar $\varphi_1 = \frac{a_3}{a_2}$ oder gleich sonst irgendeiner symmetrischen Funktion 1. Grades der $x_\nu$ setzen können, ohne diese erst durch die $k_\mu$ auszudrücken.

so setzen wir $\varphi_1''' = \frac{a_5}{a_4}$, wonach wiederum die $k_u$ durch $\varphi_1'''$, $q_0$, $q_1$, $r$ ausgedrückt werden können. Aus $a_2 = 0$, d. h. $k_0 k_2 + k_1 k_3 = 0$ folgt $q_0 + q_1 r_1^2 = 0$. Ersetzt man hierin $r_1$ durch den soeben gewonnenen Ausdruck, so erhält man aus (18) leicht die Beziehung

$$\psi_4 (1 + \psi_3)^2 + \psi_3 (1 + \psi_4)^2 = 0, \tag{30}$$

die gestattet, an Stelle von $\psi_3$, $\psi_4$ einen einzigen Parameter

$$\psi_2 = \frac{\psi_3 + 1}{\psi_4 + 1}$$

zu setzen; denn führt man diesen in (30) ein, so wird erhalten

$$\psi_3 = \frac{\psi_2 - 1}{\psi_2 + 1} \psi_2, \qquad \psi_4 = \frac{\psi_2 - 1}{\psi_2 + 1} \cdot \frac{-1}{\psi_2}.$$

Setzt man noch

$$2\omega_2 = \psi_2 - \frac{1}{\psi_2}, \qquad 2\varphi_2 = \omega_2 - \frac{1}{\omega_2},$$

so erkennt man leicht, daß die Funktionen

$$\varphi_0, \varphi_1''', \psi_2; \qquad \varphi_0, \varphi_1''', \omega_2; \qquad \varphi_0, \varphi_1''', \varphi_2$$

die entsprechenden früheren ersetzen, ebenso die Gleichungen

$$\omega_2 = \varphi_2 + \sqrt{\varphi_2^2 + 1}, \qquad \psi_2 = \omega_2 + \sqrt{\omega_2^2 + 1}, \qquad q_0 = \sqrt[5]{\psi_2^3 \frac{\psi_2 + 1}{\psi_2 - 1}}$$

die Gleichung (21).

3. Der Fall $a_2 = a_3 = a_4 = 0$ führt auf die binomischen Gleichungen und bedarf keiner besonderen Behandlung.

Wir merken hier noch die Bedeutung der Basisfunktionen einer der bei Herrn Wäisälä implizite auftretenden Minimalbasen an. In dem ersten Hauptfall (a. a. O. S. 34, Formel (79)) sind dies neben unserem $\varphi_0$ (2), das dort gleich Null angenommen ist, die Parameter $p$, $q$, $s$, $t$, deren Bedeutung sich durch eine einfache Rechnung wie folgt ergibt, wenn wir hier mit Herrn Wäisälä speziell $v_\mu = k_\mu^2 k_{u+3}$ setzen:

$$\tag{31, 4} \left\{ \begin{aligned} p &= \frac{(v_0 + v_2) + (v_1 + v_3)}{k_0 k_2 - k_1 k_3} \cdot \frac{(v_0 - v_2)^2 + (v_1 - v_3)^2}{4 (v_0 - v_2)(v_1 - v_3)} \\ &= -\frac{a_3}{20} \cdot \frac{(v_0 - v_2)^2 + (v_1 - v_3)^2}{(k_0 k_2 - k_1 k_3)(v_0 - v_2)(v_1 - v_3)}, \\ q &= \frac{(v_0 + v_2) - (v_1 + v_3)}{2 (k_0 k_2 - k_1 k_3)}, \qquad s = \frac{(v_0 - v_2)^2 - (v_1 - v_3)^2}{2 (v_0 - v_2)(v_1 - v_3)}, \\ t &= \frac{(v_0 - v_2)^2 + (v_1 - v_3)^2}{2 (k_0 k_2 - k_1 k_3)^2}. \end{aligned} \right.$$

Die Formeln (31, 4) können also an Stelle von (22, 4) treten, wobei in ersteren $\varphi_0$ hinzuzufügen ist. Der Aufstieg zum Körper der halbmetazyklischen Funktionen erfolgt durch Adjunktion der Quadratwurzel $\sqrt{\alpha} = \sqrt{1+s^2} = \frac{(v_0-v_2)^2+(v_1-v_3)^2}{2(v_0-v_2)(v_1-v_3)}$ (vgl. (21)), so daß zunächst die Größen

$$\varphi_0,\ p,\ q,\ s,\ t,\ \sqrt{1+s^2}$$

eine halbmetazyklische Basis bilden, die aber noch sechs Basisfunktionen enthält. Setzt man aber zur Abkürzung

$$(32) \qquad u = s + \sqrt{1+s^2} = \frac{v_0-v_2}{v_1-v_3},$$

so wird $2\sqrt{1+s^2} = u + \frac{1}{u}$, $2s = u - \frac{1}{u}$, d. h. die Größen $s$ und $\sqrt{1+s^2}$ sind beide durch $u$ allein rational darstellbar, und die Größen

$$(31, 3) \qquad \varphi_0,\ p,\ q,\ t,\ u$$

bilden eine halbmetazyklische *Minimal*basis, deren Koeffizienten aber, ganz wie dies für (19) galt, im Gegensatz zu denen von (31, 4) nicht mehr von $\varepsilon$ frei sind, wie sich leicht ergibt. Der Aufstieg zum Körper der zyklischen Funktionen wird dann weiter durch Ausziehen z. B. der Quadratwurzel

$$(33) \qquad w = \sqrt{t(\alpha + s\sqrt{\alpha})} = \frac{(v_0-v_2)^2-(v_1-v_3)^2}{2(v_1-v_3)(k_0k_2-k_1k_3)}$$

vollzogen, so daß

$$(31, 2) \qquad \varphi_0,\ p,\ q,\ u,\ w$$

eine zyklische Minimalbasis bilden. Denn da mit $u$ (32) auch $s$ und $\sqrt{\alpha}$ bekannt sind, ist mit $u, w$ auch $t$ bekannt nach (33) [16]). Durch Adjunktion einer fünften Wurzel, deren Radikand sich rational aus den Größen (31, 2) zusammensetzt (vgl. a. a. O. bei Herrn Wäisälä, Formel (81)), wird sodann z. B. $k_0$ selbst bekannt und damit einerseits der Aufstieg zum Körper der $x_\nu$ vollzogen, andererseits eine sehr einfache Darstellung der Größen $x_\nu$ selbst gewonnen.

Nach dem (zu Eingang dieses Paragraphen kurz beschriebenen) Verfahren des Herrn Wäisälä könnte man nun theoretisch auch die Gleichung 7. Grades behandeln — die Berechnung der Koeffizienten aus *unseren* Basisfunktionen $\varphi_\nu$ ist natürlich so wenig ratsam wie bei der Gleichung 5. Grades —, da die Wurzeln zyklischer Gleichungen 6. Grades als Funk-

[16]) Die vorstehenden Angaben wurden mit Rücksicht darauf so ausführlich gehalten, daß Herr Wäisälä, entsprechend *seiner* Problemstellung, die hier behandelten Fragen der Invariantenkörper und deren Minimalbasen überhaupt nicht berührt.

tionen von sechs Parametern bekannt sind[12]) und es auch keine Schwierigkeiten bereitet, die Koeffizienten der metazyklischen Gleichungen 7. Grades durch die $k_\mu$ auszudrücken. Während jedoch die Ausdrücke der Potenzsummen durch die $k_\mu$ — aus denen man zweckmäßig die der Koeffizienten selbst erst berechnet — bei der Gleichung 5. Grades nur aus einem bzw. drei „Leitgliedern" $v_0$ (6) bestehen, setzen sich die Potenzsummen $s_2, s_3, \ldots, s_7$ für die Gleichung 7. Grades, wie eine Aufstellung der Formeln ergibt, aus bzw. 1, 2, 4, 6, 9, 18 Leitgliedern zusammen. Es würden daher schon die rein rechnerischen Schwierigkeiten die vollständige Durchführung äußerst mühsam gestalten.

(Eingegangen am 1. 2. 1924.)