Über eine Klasse meromorpher Funktionen.

Von

Rolf Nevanlinna in Helsingfors.

Auf den folgenden Seiten wird ein Kriterium dafür gegeben, daß eine analytische Funktion, die innerhalb eines zusammenhängenden Gebietes G eindeutig und meromorph ist, sich als Quotient von zwei *beschränkten* Funktionen darstellen läßt. In dem besonderen Fall, wo G ein Kreis ist, können unsere Ergebnisse in folgendem Satze zusammengefaßt werden:

Sei $f(x)$ eine analytische Funktion der komplexen Variablen $x = re^{i\varphi}$, die für $|x| < R$ eindeutig und meromorph ist und für $x = 0$ einen endlichen Wert annimmt. Es bezeichne ferner $n(t)$ die Anzahl der Pole von $f(x)$ für $|x| < t$, und $\overset{+}{\log}|f|$ die Zahl $\log|f|$ oder Null, je nachdem $|f| \geqq 1$ oder $|f| < 1$.

Unter diesen Voraussetzungen ist die Summe

$$T(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|f(re^{i\varphi})|\, d\varphi + \int_0^r \frac{n(t)}{t}\, dt$$

eine wachsende, konvexe Funktion von $\log r$.

Notwendig und hinreichend, damit die Funkton $f(x)$ als Quotient von zwei innerhalb des Kreises $|x| < R$ beschränkten Funktionen dargestellt werden kann, ist, daß $T(r)$ für $r < R$ beschränkt ist.

Wenn $f(x)$ insbesondere für $|x| < R$ *regulär* ist, so verschwindet $n(t)$ identisch, und es wird also

$$T(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|f(re^{i\varphi})|\, d\varphi.$$

In diesem speziellen Fall wurde der obige Satz früher in einer Arbeit von F. Nevanlinna und dem Verfasser bewiesen[1])[2]).

Unter Anwendung eines bekannten Fatouschen Satzes über die Existenz von Randwerten beschränkter Funktionen folgt aus unserem Satze u. a., daß eine für $|x| < R$ meromorphe Funktion, für welche der Ausdruck $T(r)$ für $r < R$ beschränkt ist, bei radialer Annäherung an die Punkte $|x| = R$ fast überall wohlbestimmte Randwerte besitzt. Im Falle einer für $|x| < R$ regulären Funktion wurde dieser Satz zuerst in der in der Fußnote [1]) zitierten Arbeit bewiesen; unabhängig hiervon hat ihn auch Ostrowski[3]) gefunden.

1. Es sei $f(x)$ eine analytische Funktion der komplexen Variablen $x = re^{i\varphi}$, die innerhalb eines zusammenhängenden Gebietes G^* eindeutig und meromorph ist. Sei ferner G ein von einer endlichen Anzahl analytischer Kurvenstücke Γ begrenztes, zusammenhängendes Gebiet, dessen Rand vollständig innerhalb G^* verläuft; ein solches Gebiet werden wir kurz ein *inneres* Gebiet von G^* nennen. Wenn x ein innerer Punkt von G ist, so läßt sich $\log|f(x)|$ durch die Formel

$$(1) \quad \log|f(x)| = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \log|f(\xi)| \frac{\partial g(\xi, x)}{\partial n} ds - \sum_{G} g(x, a_\mu) + \sum_{G} g(x, b_\nu)$$

berechnen, wo $g(x, z)$ die Greensche Funktion des Gebietes G mit ihrem Pol in dem Punkt $x = z$ bezeichnet, und die Summen rechts über sämtliche innerhalb G gelegenen Nullstellen a_μ und Pole b_ν der Funktion $f(x)$ zu erstrecken sind[4]). Um diese Formel auf eine für die folgende Unter-

---

[1]) F. und R. Nevanlinna, Über die Eigenschaften analytischer Funktionen in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie, Acta Soc. Sc. Fennicae, **50** (1922), N. 5.

[2]) In einer neuerdings erschienenen Arbeit (Über die Randwerte einer analytischen Funktion, Math. Zeitschrift, **18**, Heft 1/2, (1923), S. 87–95) hat F. Riesz folgenden Zerlegungssatz bewiesen: Wenn $f(x)$ eine innerhalb des Einheitskreises reguläre, analytische Funktion ist, wofür das Integral $T(r)$ für $r \to 1$ beschränkt ist, so kann sie in der Form $f(x) = g(x)\,h(x)$ geschrieben werden, wo $h(x)$ für $|x| < 1$ beschränkt, und $g(x)$ eine im Einheitskreise nirgends verschwindende, reguläre Funktion ist, für welche der Mittelwert $T(r)$ ebenfalls beschränkt ist. Dieses Ergebnis ist offenbar in unserem oben angegebenen Satze (in der spezielleren Fassung, in welcher er schon in der in der Fußnote [1]) zitierten Arbeit bewiesen wurde) enthalten; nach diesem Satze ist nämlich $f = \frac{\varphi}{\psi}$, wo φ und ψ im Einheitskreise *beschränkt* sind, und $\psi \neq 0$ ist.

[3]) A. Ostrowski, Über die Bedeutung der Jensenschen Formel für einige Fragen der komplexen Funktionentheorie, Acta litt. ac scient. regiae univ. hung. Francisco-Josephinae **1** (1923), f. 2, S. 1–8.

[4]) Vgl. die in der Fußnote [1]) zitierte Arbeit von F. und R. Nevanlinna, insbesondere S. 7.

suchung zweckmäßige Form zu bringen, führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$(2)\qquad U_G(x,f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\overset{+}{\log}|f(\xi)|\frac{\partial g(\xi,x)}{\partial n}ds,\qquad V_G(x,f)=\sum_G g(x,b_\nu).$$

Setzt man noch

$$(3)\qquad T_G(x,f)=U_G(x,f)+V_G(x,f),$$

so läßt sich die Formel (1) in der einfachen Form

$$(1)'\qquad \log|f(x)|=T_G(x,f)-T_G\left(x,\frac{1}{f}\right)$$

schreiben. Man bemerke, daß der Ausdruck $T_G(x,f)$ nach seiner Definition eine innerhalb G *nichtnegative*, harmonische Funktion ist, die auf Γ die Randwerte $\overset{+}{\log}|f(x)|$ annimmt und in den innerhalb G gelegenen Polen der Funktion $f(x)$ positive, logarithmische Stellen besitzt.

2. Der Ausdruck $T_G(x,f)$ besitzt folgende fundamentale Eigenschaft:

Satz I. *Wenn G_1 und G_2 innere Gebiete von G^* sind, und G_1 als Teilgebiet in G_2 enthalten ist, so gilt für jedes x innerhalb G_1*

$$T_{G_1}(x,f)\leqq T_{G_2}(x,f).$$

Zum Beweise nehmen wir einen beliebigen Punkt x_0 innerhalb G_1. Nach (1)' ist in jedem Punkt x innerhalb G_2

$$\log|f(x)|=T_{G_2}(x,f)-T_{G_2}\left(x,\frac{1}{f}\right)\leqq T_{G_2}(x,f),$$

und, da die rechte Seite *nichtnegativ* ist, auch

$$\overset{+}{\log}|f(x)|\leqq T_{G_2}(x,f).$$

Diese Ungleichung besteht insbesondere in jedem Randpunkt von G_1. Multipliziert man beide Seiten mit $\frac{\partial g_1(x,x_0)}{\partial n}$, wo $g_1(x,x_0)$ die Greensche Funktion von G_1 ist, so folgt durch Integration längs der Randkurve Γ_1 von G_1, daß

$$(4)\qquad U_{G_1}(x_0,f)\leqq\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_1}T_{G_2}(x,f)\frac{\partial g_1(x,x_0)}{\partial n}ds.$$

Zur Berechnung des letzten Integrals bemerke man, daß die Funktion $T_{G_2}(x,f)-V_{G_1}(x,f)$ innerhalb G_1 harmonisch und regulär ist und auf der Randkurve Γ_1 die Randwerte $T_{G_2}(x,f)$ annimmt. Daher wird:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_1}T_{G_2}(x,f)\frac{\partial g_1(x,x_0)}{\partial n}ds=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_1}\left(T_{G_2}(x,f)-V_{G_1}(x,f)\right)\frac{\partial g_1}{\partial n}ds$$
$$=T_{G_2}(x_0,f)-V_{G_1}(x_0,f).$$

Nach (4) ist somit

$$U_{G_1}(x_0, f) \leqq T_{G_2}(x_0, f) - V_{G_1}(x_0, f),$$

oder also, gemäß der Definition (3) des Ausdrucks T_G,

$$T_{G_1}(x_0, f) \leqq T_{G_2}(x_0, f), \text{ w. z. b. w.}$$

3. Es sei G ein inneres Gebiet von G^*, und x_0 ein innerer Punkt von G; die Greensche Funktion des Gebietes G mit ihrem Pol in $x = x_0$ wird wie vorher mit $g(x, x_0)$ bezeichnet. Wir betrachten das von der Niveaulinie

$$g(x, x_0) = \lambda \qquad (\lambda \geqq 0)$$

begrenzte Gebiet G_λ, das für $\lambda = 0$ in G übergeht, und für $\lambda \to \infty$ sich zu dem Punkt x_0 zusammenzieht. Nach dem Satz I ist der Ausdruck $T_{G_\lambda}(x_0, f)$ eine niemals zunehmende Funktion von λ. Wir werden jetzt folgenden Zusatz beweisen, von dem wir zwar in der Folge keinen Gebrauch machen werden, der aber an sich nicht ohne Interesse sein dürfte:

Satz II. *Der Ausdruck $T_{G_\lambda}(x_0, f)$ ist eine konvexe Funktion von λ.*

Beweis. Wir wählen zwei beliebige positive Zahlen λ_1 und λ_2 $(\lambda_1 > \lambda_2)$; das von den Niveaulinien $g = \lambda_1$ und $g = \lambda_2$ begrenzte Gebiet bezeichnen wir mit H. Nach der Grundformel $(1)'$ ist dann in jedem Punkt x dieses Gebietes

$$\log |f(x)| = T_H(x, f) - T_H\left(x, \frac{1}{f}\right) \leqq T_H(x, f),$$

und also auch, da $T_H(x, f)$ nichtnegativ ist,

$$\overset{+}{\log} |f| \leqq T_H(x, f).$$

Diese Ungleichung besteht demnach insbesondere auf der Niveaulinie $g = \lambda$, falls $\lambda_1 \geqq \lambda \geqq \lambda_2$. Durch Multiplikation mit $\frac{\partial g(x, x_0)}{\partial n}$ und Integration längs der genannten Niveaulinie folgt also, daß

$$U_{G_\lambda}(x_0, f) \leqq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{g=\lambda} T_H(x, f) \frac{\partial g(x, x_0)}{\partial n} ds. \tag{5}$$

Andererseits ergibt sich, da die Funktion $V_{G_{\lambda_2}}(x, f) - V_{G_\lambda}(x)$ innerhalb G_λ harmonisch und regulär ist und auf der Kurve $g = \lambda$ die Werte $V_{G_{\lambda_2}}(x, f)$ annimmt, daß

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{g=\lambda} V_{G_{\lambda_2}}(x, f) \frac{\partial g(x, x_0)}{\partial n} ds = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{g=\lambda} \left(V_{G_{\lambda_2}}(x, f) - V_{G_\lambda}(x, f)\right) \frac{\partial g}{\partial n} ds$$
$$= V_{G_{\lambda_2}}(x_0, f) - V_{G_\lambda}(x_0, f),$$

woraus für $V_{G_\lambda}(x_0, f)$ der Wert

$$V_{G_\lambda}(x_0, f) = V_{G_{\lambda_2}}(x_0, f) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{g=\lambda} V_{G_{\lambda_2}}(x, f)\frac{\partial g}{\partial n}ds$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{g=\lambda}(V_{G_{\lambda_2}}(x_0, f) - V_{G_{\lambda_2}}(x, f))\frac{\partial g}{\partial n}ds$$

folgt.

Wird diese Gleichung zu der Ungleichung (5) addiert, so ergibt sich

$$T_{G_\lambda}(x_0, f) \leqq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{g=\lambda} W(x)\frac{\partial g(x, x_0)}{\partial n}ds, \tag{6}$$

wo

$$W(x) = T_H(x, f) - V_{G_{\lambda_2}}(x, f) + V_{G_{\lambda_2}}(x_0, f).$$

Die Funktion $W(x)$ ist innerhalb H harmonisch und regulär; mittels der Greenschen Formel folgt hieraus leicht, daß der Ausdruck rechts in (6) eine *lineare* Funktion von λ ist[5]. Für $\lambda = \lambda_1$ und $\lambda = \lambda_2$ kann sein Wert leicht ermittelt werden. Auf der Kurve $g = \lambda_1$ ist nämlich

$$T_H(x, f) = \overset{+}{\log}|f| = T_{G_{\lambda_1}}(x, f),$$

und daher

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{g=\lambda_1} W(x)\frac{\partial g}{\partial n}ds = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{g=\lambda_1}(T_{G_{\lambda_1}}(x, f) - V_{G_{\lambda_2}}(x, f) + V_{G_{\lambda_2}}(x_0, f))\frac{\partial g}{\partial n}ds$$
$$= T_{G_{\lambda_1}}(x_0, f).$$

Für $g = \lambda_2$ ist wieder $T_H(x, f) = \overset{+}{\log}|f|$, $\quad V_{G_{\lambda_2}}(x, f) = 0$, und also

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{g=\lambda_2} W(x)\frac{\partial g}{\partial n}ds = U_{G_{\lambda_2}}(x_0, f) + V_{G_{\lambda_2}}(x_0, f) = T_{G_{\lambda_2}}(x_0, f).$$

Die Ungleichung (6), wo die rechte Seite im Intervall $\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2$ eine lineare Funktion von λ ist, geht also für $\lambda = \lambda_1$ und $\lambda = \lambda_2$ in eine *Gleichheit* über. Hieraus folgt die Behauptung unmittelbar.

---

[5]) Wird nämlich die Formel $\int\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds = 0$ in dem von den Niveaulinien $g = \lambda_1$ und $g = \lambda$ begrenzten Gebiete mit $u = W$ und $v = g - \lambda$ angewandt, so folgt unmittelbar, daß

$$\int\limits_{g=\lambda} W\frac{\partial g}{\partial n}ds = c_1\lambda + c_2,$$

wo c_1 und c_2 die von λ unabhängigen Größen

$$c_1 = \int\limits_{g=\lambda_1}\frac{\partial W}{\partial n}ds, \qquad c_2 = \int\limits_{g=\lambda_1} W\frac{\partial g}{\partial n}ds - c_1\lambda_1$$

bezeichnen.

4. Wir betrachten jetzt eine unendliche Folge von Gebieten

$$G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots,$$

die sämtlich innere Gebiete von G^* sind, und von denen G_n für jedes n als Teilgebiet in G_{n+1} enthalten ist. Für $n \to \infty$ nähere sich die Randkurve Γ_n von G_n dem Rande Γ^* von G^* derart, daß jedes vorgegebene innere Gebiet von G^* schließlich innerhalb G_n liegt. Nach dem Satz I ist dann

$$T_{G_1}(x, f) \leqq T_{G_2}(x, f) \leqq \ldots \leqq T_{G_n}(x, f) \leqq \ldots. \tag{7}$$

Wir wollen jetzt annehmen, es existiere innerhalb G^* ein Punkt x_0, in welchem die Folge $T_{G_n}(x, f)$ *beschränkt* ist. Dann existiert der endliche Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} T_{G_n}(x_0, f),$$

woraus durch eine wohlbekannte Schlußweise folgt, daß die Folge (7) in *jedem* Punkt x innerhalb G^* konvergiert und zwar gleichmäßig in jedem inneren Gebiet von G^*. Der Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} T_{G_n}(x, f) = T(x, f)$$

ist eine innerhalb G^* nichtnegative, endliche, harmonische Funktion, mit Ausnahme der Pole von $f(x)$, wo $T(x, f)$ positive, logarithmische Pole besitzt.

Wir wenden dann unseren Satz I auf die Funktion $\frac{1}{f}$ an und finden so:

$$T_{G_1}\left(x, \frac{1}{f}\right) \leqq T_{G_2}\left(x, \frac{1}{f}\right) \leqq \ldots \leqq T_{G_n}\left(x, \frac{1}{f}\right) \leqq \ldots. \tag{8}$$

Man nehme zunächst an, daß die betrachtete Funktion $f(x)$ nicht identisch verschwindet; sei dann x_1 ein Punkt, wo $f(x) \neq 0$ und endlich ist. Die Ausdrücke (7) sind für $x = x_1$ nicht größer als die endliche Zahl $T(x_1, f)$; wendet man nun die Formel (1)' für $x = x_1$ an, so folgt also, daß

$$T_{G_n}\left(x_1, \frac{1}{f}\right) = \log\left|\frac{1}{f(x_1)}\right| + T_{G_n}(x_1, f) \leqq \log\left|\frac{1}{f(x_1)}\right| + T(x_1, f).$$

Die Ausdrücke (8) sind somit für $x = x_1$ gleichmäßig beschränkt, woraus man schließt, daß auch der Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} T_{G_n}\left(x, \frac{1}{f}\right) = T\left(x, \frac{1}{f}\right)$$

in jedem inneren Punkt von G^* existiert. Die Grenzfunktion $T\left(x, \frac{1}{f}\right)$ ist innerhalb G^* nichtnegativ und harmonisch, außer in den Polen von $\frac{1}{f}$ (Nullstellen von f), wo sie positive logarithmische Pole besitzt.

Mittels der Grundformel (1) ergibt sich nun, wenn man G_n statt G schreibt und n unbeschränkt wachsen läßt, für $\log|f(x)|$ der Wert

$$\log|f(x)| = T(x, f) - T\left(x, \frac{1}{f}\right). \tag{9}$$

Es sei $\overline{T}(x, f)$ die bis auf eine reelle Konstante wohlbestimmte, zu $T(x, f)$ konjugierte harmonische Funktion, und

$$\varphi(x, f) = e^{-T(x,f) - i\overline{T}(x,f)}. \tag{10}$$

Diese Funktion, die innerhalb G^* regulär ist, genügt der Bedingung

$$|\varphi(x, f)| \leqq 1$$

und verschwindet in den Polen von $f(x)$. Durch geeignete Wahl der in $\overline{T}$ enthaltenen willkürlichen Konstante findet man nach (9) für $f(x)$ die innerhalb G^* gültige Darstellung

$$f(x) = \frac{\varphi\left(x, \frac{1}{f}\right)}{\varphi(x, f)}. \tag{11}$$

Dieses Resultat haben wir unter der Annahme hergeleitet, daß $f(x)$ nicht identisch verschwindet. Ist nun $f(x) \equiv 0$, so bleibt die Darstellung (11) gültig, falls man $T\left(x, \frac{1}{f}\right) \equiv +\infty$, und also $\varphi\left(x, \frac{1}{f}\right) \equiv 0$ setzt. Zusammenfassend haben wir somit folgendes Ergebnis:

Satz III. *Es sei $f(x)$ eine innerhalb eines zusammenhängenden Gebietes G^* eindeutige meromorphe Funktion, und $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$ eine Folge von inneren Gebieten, von denen G_n für jedes n als Teilgebiet in G_{n+1} enthalten ist. Die Randkurve Γ_n von G_n nähere sich mit wachsendem n unbeschränkt dem Rande von G^*, so daß schließlich jedes gegebene innere Gebiet von G^* vollständig innerhalb G_n liegt.*

Existiert innerhalb G^* ein Punkt, wo der Ausdruck $T_{G_n}(x, f)$ unter einer festen, von n unabhängigen, endlichen Schranke liegt, so konvergiert er für $n \to \infty$ in jedem inneren Punkt von G^* gegen eine harmonische Funktion $T(x, f)$. Die meromorphe Funktion $f(x)$ läßt sich dann als Quotient von zwei, durch die Formel (10) *definierten, beschränkten Funktionen $\varphi\left(x, \frac{1}{f}\right)$ und $\varphi(x, f)$ darstellen, von denen wenigstens die letztgenannte nicht identisch verschwindet.*

5. Es seien umgekehrt $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$ zwei beliebige analytische Funktionen, die innerhalb G^* regulär und beschränkt sind:

$$|\psi_1(x)| \leqq 1, \qquad |\psi_2(x)| \leqq 1, \tag{12}$$

und von denen ψ_2 nicht identisch gleich Null ist. Wir werden zeigen, daß die meromorphe Funktion

$$f(x) = \frac{\psi_1(x)}{\psi_2(x)}$$

zu der oben betrachteten Klasse gehört, d. h. daß die Folge $T_{G_n}(x, f)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ in jedem von den Polen der Funktion $f(x)$ verschiedenen Punkt von G^* beschränkt ist.

Sei in der Tat x_0 ein Punkt, wo $\psi_2(x) \neq 0$. Nach den Bedingungen (12) ist $|f| = \left|\frac{\psi_1}{\psi_2}\right| \leqq \left|\frac{1}{\psi_2}\right|$, und also

$$\overset{+}{\log} |f(x)| \leqq \overset{+}{\log} \left|\frac{1}{\psi_2(x)}\right|.$$

Sobald die Kurve Γ_n den Punkt x_0 umfaßt, ist demnach

$$U_{G_n}(x_0, f) \leqq U_{G_n}\left(x_0, \frac{1}{\psi_2}\right).$$

Weil die Pole von $f(x)$ sämtlich in den Nullstellen von $\psi_2(x)$ enthalten sind, so wird auch

$$V_{G_n}(x_0, f) \leqq V_{G_n}\left(x_0, \frac{1}{\psi_2}\right).$$

Durch Addition der letzten zwei Ungleichungen folgt nun, daß

$$T_{G_n}(x_0, f) \leqq T_{G_n}\left(x_0, \frac{1}{\psi_2}\right). \tag{13}$$

Der Wert des letzten Ausdruckes kann leicht berechnet werden. Nach den Ungleichungen (12) ist nämlich $\overset{+}{\log} |\psi_2| \equiv 0$, und also $U_{G_n}(x_0, \psi_2) = 0$; weil $\psi_2(x)$ innerhalb G^* *regulär* ist, so verschwindet auch der Ausdruck $V_{G_n}(x_0, \psi_2)$, und es ist also

$$T_{G_n}(x_0, \psi_2) = 0.$$

Mittels der Formel $(1)'$ ergibt sich nun für die rechte Seite von (13) der endliche Wert

$$T_{G_n}\left(x_0, \frac{1}{\psi_2}\right) = \log \left|\frac{1}{\psi_2(x_0)}\right|.$$

Man sieht also, daß die Ungleichung

$$T_{G_n}(x_0, f) \leqq \log \left|\frac{1}{\psi_2(x_0)}\right| \tag{14}$$

für jedes n besteht, womit die Behauptung nachgewiesen ist. Wir haben also den

Satz IV. *Notwendig und hinreichend, damit eine innerhalb G^* meromorphe Funktion sich als Quotient von zwei beschränkten Funktionen darstellen läßt, ist, daß ein innerer Punkt existiert, wo die Folge $T_{G_n}(x, f)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ gleichmäßig beschränkt ist.*

6. Wenn eine meromorphe Funktion zu der oben betrachteten Klasse gehört, so kann sie selbstverständlich in unendlich vielen Weisen als Quotient von zwei beschränkten Funktionen dargestellt werden. Unter

diesen Darstellungen zeichnet sich die in (11) gegebene, wo $\varphi(x, f)$ durch die Formel (10) definiert ist, durch folgende Eigenschaft aus:

Satz V. *Es seien* $\psi_1(x)$ *und* $\psi_2(x)$ *zwei innerhalb* G^* *reguläre, beschränkte Funktionen* ($|\psi_1| \leqq 1$, $|\psi_2| \leqq 1$), *und*

$$f(x) = \frac{\psi_1(x)}{\psi_2(x)}.$$

Dann gilt in jedem inneren Punkt von G

$$|\varphi(x, f)| \geqq |\psi_2(x)|, \qquad \left|\varphi\left(x, \frac{1}{f}\right)\right| \geqq |\psi_1(x)|.$$

Der Nachweis ergibt sich unmittelbar aus der oben bewiesenen Ungleichung (14), die für jeden inneren Punkt x_0 des Gebietes G besteht. Weil nämlich $\lim\limits_{n=\infty} T_{G_n}(x, f) = T(x, f)$, so ist demnach auch

$$T(x, f) \leqq \log\left|\frac{1}{\psi_2(x)}\right|,$$

oder also, nach der Definition (10),

$$|\varphi(x, f)| \geqq |\psi_2(x)|.$$

Der die Funktion $\varphi\left(x, \frac{1}{f}\right)$ betreffende Teil folgt, wenn man dieselbe Schlußweise auf die Funktion $\frac{1}{f(x)}$ anwendet.

Aus dem Satz V geht insbesondere hervor, daß die zu einer meromorphen Funktion gehörigen beschränkten Funktionen $\varphi(x, f)$ und $\varphi\left(x, \frac{1}{f}\right)$ *eindeutig* bestimmt sind, d. h. daß sie von der besonderen Wahl der Gebietfolge G_n unabhängig sind, wenn diese nur den im Satz III angegebenen Bedingungen genügt.

7. Um zu dem in der Einleitung angegebenen Satz zu gelangen, wollen wir zum Schluß die oben erzielten Ergebnisse auf den Fall anwenden, wo das Gebiet G^* ein Kreis $|x| < R$ ist. Wählen wir als Gebiet G_n einen konzentrischen Kreis C_ϱ vom Radius ϱ ($\varrho < R$), so wird für $x = re^{i\varphi}$ ($r < \varrho$)

$$(15) \qquad T_{C_\varrho}(x, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|f(\varrho e^{i\vartheta})| \frac{\varrho^2 - r^2}{\varrho^2 + r^2 - 2\varrho r\cos(\vartheta - \varphi)}\, d\vartheta$$
$$+ \sum_{|b_\nu| < \varrho} \log\left|\frac{\varrho^2 - \bar{b}_\nu x}{\varrho(x - b_\nu)}\right|,$$

wo b_ν die Pole von $f(x)$ bezeichnen. Der in der Einleitung angegebene Satz ergibt sich nun aus den oben bewiesenen Sätzen I, II, III und IV, wenn man in (15) insbesondere $x = 0$ wählt und bemerkt, daß dieser Ausdruck durch eine leichte Umformung auf die Form

$$(16) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\,|f(\varrho e^{i\vartheta})|\,d\vartheta + \int_0^{\varrho} \frac{n(r)}{r}\,dr$$

gebracht werden kann, wobei $n(r)$ die Anzahl der Pole von $f(x)$ für $|x| < r$ bezeichnet.

Man sieht leicht ein, daß das Integral

$$\int_0^R \frac{n(r)}{r}\,dr$$

mit der Reihe

$$(17) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty}(R - |b_\nu|)$$

gleichzeitig konvergent oder divergent ist. Das genannte Integral ist nämlich in bezug auf Konvergenz und Divergenz mit dem Integral

$$\int_0^R n(r)\,dr$$

gleichwertig; und aus der Identität

$$\int_0^{\varrho} n(r)\,dr = \int_0^{\varrho} n(r)\,d(r-R) = -(R-\varrho)\,n(\varrho) + \sum_{|b_\nu|<\varrho}(R - |b_\nu|)$$

ersieht man unmittelbar, daß das linksstehende Integral mit der Reihe (17) gleichzeitig konvergent oder divergent ist.

Das in der Einleitung angegebene Kriterium (Beschränktheit des Ausdruckes (16)) *ist also damit gleichbedeutend, daß das Integral*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\,|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi$$

für $r < R$ *beschränkt und die Reihe* (17) *konvergent ist.*

(Eingegangen am 3. 2. 1924.)