Werk

Titel: Mathematische Annalen
Jahr: 1924
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN235181684_0092
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0092

LOG Id: LOG_0020
LOG Titel: Aufstellung einer Transformationstheorie für eine neue Klasse aufeinander abwickelbarer Flächen
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684

Terms and Conditions

Contact

Aufstellung einer Transformationstheorie für eine neue Klasse aufeinander abwickelbarer Flächen.

Von

Hans Jonas in Berlin-Steglitz.

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

Die im folgenden entwickelte Transformationstheorie der Biegungsflächen vom Typus

$$(\mathrm{I}) \qquad ds^2 = \frac{9}{4}(u\,du^2 - 2\,du\,dv + v\,dv^2),$$

als dessen einfachster Vertreter die Translationsfläche

$$z = \frac{3}{2}(x^{2/3} - y^{2/3})$$

anzusprechen ist, stützt sich auf eine von Tzitzéica[1]) gefundene Flächentransformation, die im Bereiche derjenigen Flächen gilt, für die das Krümmungsmaß proportional mit der 4. Potenz des Abstandes der Tangentialebene vom Koordinatenanfang ist. Tzitzéicas Transformation der durch die Beziehung $\frac{K}{W^4} = \text{konst.}$ charakterisierten Flächen gehört zu den *asymptotischen* Flächentransformationen, bei denen die gegebene und die transformierte Fläche die beiden Brennflächenmäntel einer W-Kongruenz[2]) bilden. Man gelangt zu ihr, wie ich in einer unlängst in den Annali di Matematica erschienenen Abhandlung[3]) gezeigt habe, durch Spezialisierung einer allgemeineren asymptotischen Transformation, die zwischen den Flächen derjenigen Klasse vermittelt, die bei Beziehung auf die Parameter der Asymptotenlinien durch das Bestehen der Relation $\left\{ {11 \atop 2} \right\} = \left\{ {22 \atop 1} \right\}$ ausgezeichnet ist. Die Anwendung des allgemeinen Bianchischen Kompositionstheorems für die Moutardschen Transformationen gestattete die Aufstellung eines Vertauschbarkeitssatzes, demzufolge sich die Tzitzéicaschen Transformationen, die ich unter Hervorhebung einer charakteristischen Konstanten mit T_n bezeichnet habe, zu geschlossenen viergliedrigen Zyklen zusammensetzen lassen. Als von ganz besonderer Bedeutung für die gegenwärtige Untersuchung erwies sich ein am Schluß der genannten Abhandlung gewonnenes Ergebnis: Es lassen sich je drei zu dem gleichen Werte von n gehörige Transformationen T_n in der Weise aneinanderreihen, daß die erste und die letzte der vier durch sie verbundenen Flächen ähnlich und in bezug auf den Koordinatenanfang ähnlich gelegen sind.

Verbindet man nun mit einer Fläche der Tzitzéicaschen Klasse eine zweite, die ihr durch Polarreziprozität bezüglich einer (reellen oder imagi-

---

[1]) Tzitzéica, Sur une nouvelle classe de surfaces. C. R. de l'Acad. des Sc. **150** (1910), S. 955 u. 1227.

[2]) Auf den Brennflächenmänteln einer W-Kongruenz entsprechen sich bekanntlich die Asymptotenlinien und damit gleichzeitig die konjugierten Systeme.

[3]) Jonas, Sopra una classe di trasformazioni asintotiche etc. Annali di Mat. (3) **30** (1921), S. 223.

nären) Einheitskugel um den Koordinatenanfang zugeordnet ist, so führt eine einfache Überlegung, die von der bekannten Weingartenschen Behandlung des Biegungsproblems [4]) Gebrauch macht, zu der bemerkenswerten Tatsache, daß sich die Flächen der durch (I) definierten isometrischen Klasse mittels der Tzitzéicaschen Flächen konstruieren lassen. Wie weit Tzitzéica selber seine Untersuchungen in dieser Richtung ausgedehnt hat, geht aus seinen Veröffentlichungen nicht hervor. Den einzigen Anhaltspunkt bieten die folgenden Zeilen, mit denen er die erste seiner beiden, 1908 und 1909 in den Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo erschienenen Abhandlungen [5]) über die „neue Flächenklasse" einleitet: „L'étude de la déformation des surfaces tétraédrales

$$\text{(II)} \qquad A x^{2/3} + B y^{2/3} + C z^{2/3} = 1$$

conduit à la recherche des surfaces pour lesquelles la courbure totale est proportionnelle à la 4me puissance de la distance d'un point fixe au plan tangent." Zu bemerken ist hierzu aber einmal, daß sich der typische Ausdruck (I) für das Quadrat des Linienelements in dem erwähnten Zusammenhange *nicht* findet und ebensowenig in zwei zeitlich voraufgehenden, von Tzitzéica [6]) und von Egorof [7]) herrührenden Noten in den Comptes Rendus, die sich auf die Eigentümlichkeit der Flächen der tetraedralen Klasse (II) beziehen, isometrische Deformationen innerhalb dieser selben Flächenklasse zuzulassen [8]). Überdies ist anzunehmen, daß Tzitzéica, als er die angeführten Worte schrieb, noch nicht im Besitze der Transformation T_n gewesen ist; diese ist nämlich in den beiden Abhandlungen noch nicht enthalten, ist vielmehr erst Gegenstand der unter [1]) zitierten Noten vom Jahre 1910.

---

[4]) Siehe z. B. Bianchi, Lezioni di geom. diff. 2 (1903), Cap. XIX.

[5]) Tzitzéica, Sur une nouvelle classe de surfaces. Palermo Rend. **25** (1908), S. 180; **28** (1909), S. 210.

[6]) Tzitzéica, Sur la déformation de certaines surfaces liées aux surfaces du second degré. C. R. de l'Ac. des Sc. **128** (1899), S. 1276.

[7]) Égorov, Une classe nouvelle de surfaces algébriques. C. R. de l'Ac. des Sc. **132** (1901), S. 302.

[8]) Die beiden Noten beschränken sich im wesentlichen auf den Nachweis, daß innerhalb der tetraedralen Klasse (II) stetige Verbiegungen mit Erhaltung eines konjugierten Systems möglich sind. Betreffs der Reduktion des Linienelements auf die Form

$$ds^2 = \frac{9}{4} \varkappa^2 (u\,du \pm 2\,du\,dv + v\,dv^2)$$

($\varkappa$ ist eine durch die Koeffizienten A, B, C bestimmte Konstante) und der besonderen Stellung dieser stetigen Deformationen innerhalb einer *zwei*-parametrigen Biegungsuntergruppe sei verwiesen auf: Jonas, Über eine mit den Flächen 2. Grades zusammenhängende zweifach-unendliche Schar aufeinander abwickelbarer Flächen. Berl. Math. Ges. Ber. **22** (1923), S. 49.

Hinsichtlich unserer neuen, im Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit stehenden Transformation Θ_n, vermöge deren man aus einer Biegungsfläche vom Typus (I) beliebig viele weitere solche Flächen gewinnt, sei hier zunächst festgestellt, daß ihre geometrischen Eigenschaften ihr eine durchaus selbständige Stellung neben der Tzitzéicaschen Transformation T_n sichern. Zwischen den Transformationen Θ_n und T_n besteht ein ähnliches Verhältnis wie zwischen der Transformation der auf die Paraboloide abwickelbaren Flächen und der Transformation der Flächen von konstanter Krümmung. Es lassen sich übrigens, wenn man das Biegungsproblem für das Linienelement (I) und das durch die klassischen Arbeiten von Thybaut, Calapso und Bianchi durchaus noch nicht erschöpfte Problem der Verbiegung der Paraboloide gemeinsam ins Auge faßt, sehr weitgehende Analogien aufdecken, und zwar, ohne daß irgendwelche Anzeichen auf einen inneren Zusammenhang zwischen den beiden Differentialgleichungen

$$\theta_{\alpha\beta} = e^{\theta} - e^{-2\theta} \quad \text{und} \quad \theta_{\alpha\beta} = e^{\theta} - e^{-\theta}$$

schließen ließen, deren Transformation den analytischen Kern der beiden Theorien ausmacht. Erwähnt sei, daß gleichzeitig und in eigentümlicher Wechselwirkung mit der vorliegenden Arbeit eine andere, ihr in geometrischer Hinsicht eng verwandte entstanden ist, in der ich die Transformationen der Biegungsflächen des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids behandelt habe [9]).

Die nachfolgenden Entwicklungen, deren Gliederung aus der voraufgeschickten Inhaltsangabe zu ersehen ist, sind auch dort, wo es sich um Formeln der Transformation T_n handelt, unabhängig und ohne Bezugnahme auf die eingangs erwähnte Abhandlung in den Annali di Matematica durchgeführt. Es schien an sich schon geboten, an Stelle des dort benutzten Umwegs über eine Transformation allgemeineren Charakters hier einen neuen, direkten Weg einzuschlagen. Überdies fiel der Umstand ins Gewicht, daß unsere Transformation Θ_n nicht schlechthin gleichwertig mit zwei simultanen Transformationen T_n und $T_{\frac{1}{n}}$ der beiden zur Tzitzéicaschen Klasse gehörigen Hilfsflächen ist; die Koordinaten der transformierten Hilfsflächen müssen nämlich erst durch Multiplikation mit gewissen Konstanten *normiert* werden, damit die gewünschte Beziehung zu der transformierten Biegungsfläche hergestellt wird. Infolgedessen ließen sich Änderungen in den Bezeichnungen nicht umgehen.

Die Transformation Θ_n der Flächen vom Linienelement (I) ist, wiewohl auch bei ihr Korrespondenz der Asymptotenlinien zwischen der gegebenen und der transformierten Fläche besteht, keine asymptotische Trans-

---

9) Jonas, Ricerche sulle trasformazioni delle superficie applicabili sul paraboloide iperbolico equilatero. Annali di Mat. (im Druck).

formation, sondern von komplizierterer Natur. Ein tieferes Eindringen in den geometrischen Zusammenhang wird durch eine Tatsache ermöglicht, die in eigenartiger Weise den Vertauschbarkeitssatz für die Transformation Θ_n ergänzt. Es ist das die Existenz *drei*gliedriger Transformationszyklen, die zu dem oben erwähnten Ergebnis am Schluß meiner früheren Arbeit in engster Beziehung steht. Auf Grund dieser Eigenschaft gelingt es, *die Transformation* Θ_n *in zwei aufeinanderfolgende asymptotische Transformationen aufzulösen,* d. h. zwischen der gegebenen und der transformierten Biegungsfläche eine dritte Fläche einzuschalten, deren Punkte mit den entsprechenden der beiden Biegungsflächen die Brennpunkte der Strahlen zweier W-Kongruenzen bilden. Dieser, soweit es sich um die geometrische Anschauung handelt, jedenfalls höchst einfache Sachverhalt erschien mir, zumal da er sich durchaus nicht mühelos feststellen ließ, eher überraschend als etwa im Hinblick auf bekannte Transformationstheorien selbstverständlich. Die Darstellung folgt hier genau dem Gang der ursprünglichen Untersuchung.

Das eben erwähnte Ergebnis, das unsere Transformationstheorie zu einem gewissen Abschluß bringt, darf insofern ein ganz besonderes Interesse beanspruchen, als es eine Erweiterung des von Bianchi verwendeten Prinzips der durch W-Kongruenzen vermittelten Transformation von Biegungsflächen bestimmter Typen darstellt. Die außerordentlichen Erfolge, die Bianchi selber im Bereiche der auf die Flächen 2. Grades abwickelbaren Flächen[10]) erzielte, sind der Anlaß zu, wie es scheint, allzu hoch gespannten Hoffnungen hinsichtlich der Leistungsfähigkeit dieses Prinzips gewesen. Jedenfalls hat das nächstliegende Problem, die Bianchische Methode auf die Biegungsflächen aller bzw. allgemeinerer Regelflächen auszudehnen, bis jetzt allen Versuchen beharrlich widerstanden, ja, es mehren sich neuerdings die Ergebnisse negativer Art, die darauf schließen lassen, daß die angestrebte Verallgemeinerung auch nicht annähernd in dem erwarteten Umfange gelingen wird. Um so bedeutungsvoller erscheint die Tatsache, daß man imstande ist, *ohne den Kreis der Bianchischen Ideen zu verlassen, lediglich durch Paarung der asymptotischen Transformationen ein Seitenstück zur Transformationstheorie der auf die Flächen 2. Grades abwickelbaren Flächen aufzubauen.*

In betreff der speziellen Biegungsflächen vom Typus (I), die der tetraedralen Flächenklasse (II) angehören, ist zu bemerken, daß sie in analytischer Hinsicht einen Ausartungsfall bilden und dementsprechend bei der Aufstellung der Transformation Θ_n auszuschließen waren. Auf den Nachweis, daß sich die gepaarten asymptotischen Transformationen auch

[10]) Siehe z. B. Bianchi, Lezioni di geometria diff. **3** (1909).

zwischen diesen Flächen verwirklichen lassen, wurde mit Rücksicht auf den Umfang der Arbeit verzichtet.

Hingewiesen sei schließlich auf die Beziehungen der durch $\frac{K}{W^4} = \text{konst.}$ charakterisierten Tzitzéicaschen Flächen zur *affinen Geometrie.* Eine engere Anpassung der ganzen Untersuchung an diesen jüngsten Zweig der Differentialgeometrie, wie sie vielleicht zeitgemäß gewesen wäre, erschien mir bei der metrischen Natur des im Mittelpunkte stehenden Biegungsproblems als unvorteilhaft.

§ 1.

Eigenschaften der Biegungsflächen vom Typus $ds^2 = \frac{9}{4}(u\,du^2 - 2\,du\,dv + v\,dv^2)$; Einführung der beiden zugehörigen Tzitzéicaschen Flächen, einer dritten Hilfsfläche und einer Schar von Flächen $(x^{(\nu)}, \ldots)$.

1. Es sei (x, y, z) eine Fläche, für die das Quadrat des Linienelements die Form

$$ds^2 = \sum dx^2 = \frac{9}{4}(u\,du^2 - 2\,du\,dv + v\,dv^2) \tag{1}$$ [11])

besitzt, also eine Biegungsfläche[12]) der Translationsfläche

$$x = (u-1)^{3/2}, \qquad y = (v-1)^{3/2}, \qquad z = \frac{3}{2}(u - v),$$

deren erzeugende Kurven in zueinander senkrechten Ebenen liegen und deren Koordinatengleichung

$$z = \frac{3}{2}(x^{2/3} - y^{2/3}) \tag{2}$$

lautet.

Wir bilden für die quadratische Differentialform (1) die Christoffelschen Symbole

$$\left\{\begin{aligned} &\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} = \frac{v}{2(uv-1)}, \qquad \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = \frac{1}{2(uv-1)}, \qquad \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = 0,\\ &\qquad \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = \frac{1}{2(uv-1)}, \qquad \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} = \frac{u}{2(uv-1)}\end{aligned}\right. \tag{3}$$

---

[11]) Die Hinzufügung des Faktors $\frac{9}{4}$ erweist sich erst später als zweckmäßig. Sie gestattet die Unterdrückung eines sonst auftretenden Faktors $\frac{2}{3}$ in einer Reihe von Formeln.

[12]) Die Ausdrücke *Biegungsfläche, abwickelbar* und *Isometrie* sind durchweg im allgemeinsten Sinne zu verstehen. Sie beziehen sich lediglich auf die formale Übereinstimmung im Bau des Linienelements, ohne daß gemeinsame Wertbereiche der Variablen ins Auge gefaßt werden.

und finden für das Krümmungsmaß den Ausdruck:

$$K = -\frac{1}{9(uv-1)^2}. \tag{4}$$

Mit X, Y, Z seien die Normalenkosinus, mit L, M, N die Fundamentalgrößen 2. Ordnung bezeichnet, so daß also

$$-\sum dx\,dX = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

ist. Mit Berücksichtigung von (3) erhält man:

$$x_{uu} = \frac{vx_u + x_v}{2(uv-1)} + LX, \quad x_{uv} = MX, \quad x_{vv} = \frac{x_u + ux_v}{2(uv-1)} + NX \tag{5}$$ [13])

und analoge Beziehungen für y und z.[14]) Die Gaußsche Relation und die Codazzischen Gleichungen haben die folgende Gestalt:

$$\left\{\begin{aligned} LN - M^2 &= -\frac{9}{16(uv-1)}, \\ L_v - M_u + \frac{u}{2(uv-1)}M + \frac{N}{2(uv-1)} &= 0, \\ N_u - M_v + \frac{u}{2(uv-1)}M + \frac{L}{2(uv-1)} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Ein Lösungssystem L, M, N von (6) definiert intrinsek eine Biegungsfläche (x, y, z) vom Typus (1).

2. Wir konstruieren nun zwei Hilfsflächen (ξ, η, ζ) und (ξ', η', ζ'), indem wir Parallelstrahlen zu den Tangenten der Kurven $v =$ konst. und $u =$ konst. vom Koordinatenanfang ausgehen lassen und auf ihnen die Längen $\sqrt{u}$ bzw. $\sqrt{v}$ abtragen. Dann ist:

$$\xi = \frac{2}{3}x_u, \quad \xi' = \frac{2}{3}x_v, \tag{7}$$

$$\sum \xi^2 = u, \quad \sum \xi'^2 = v, \quad \sum \xi\xi' = -1. \tag{8}$$

Hieraus folgt, wenn berücksichtigt wird, daß $\xi_v = \xi'_u$ ist:

$$\sum \xi'\,d\xi = 0, \quad \sum \xi\,d\xi' = 0. \tag{9}$$

Diese Relationen besagen im Verein mit der dritten Formel (8), daß *die beiden Hilfsflächen $(\xi, \ldots)$ und $(\xi', \ldots)$ polarreziprok bezüglich der imaginären Einheitskugel $x^2 + y^2 + z^2 = -1$ sind*[15]).

---

[13]) Die partiellen Ableitungen nach den Variablen u und v bzw. α und β deuten wir durch Buchstabenindizes an.

[14]) Der Kürze halber soll im folgenden der Hinweis auf das Bestehen der analogen Formeln bezüglich der beiden anderen Koordinatenachsen überall, wo ein Mißverständnis ausgeschlossen scheint, unterdrückt werden.

[15]) Die Flächen (ξ, η, ζ) und $(-\xi', -\eta', -\zeta')$ sind also polarreziprok in bezug auf die reelle Einheitskugel um den Koordinatenanfang.

Die Gleichungen (5) lassen sich jetzt folgendermaßen schreiben:

$$\xi_u = \frac{v\xi + \xi'}{2(uv-1)} + \frac{2}{3}LX, \qquad \xi_v = \frac{2}{3}MX,$$

$$\xi'_u = \frac{2}{3}MX, \qquad \xi'_v = \frac{u\xi' + \xi}{2(uv-1)} + \frac{2}{3}NX.$$

Mit Benutzung der ersten Relation (6) findet man weiter:

$$(10)\quad \begin{cases} \sum d\xi^2 = \dfrac{v\,du^2 + dv^2}{4(uv-1)} + \dfrac{4}{9}L(L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2), \\ \sum d\xi'^2 = \dfrac{du^2 + u\,dv^2}{4(uv-1)} + \dfrac{4}{9}N(L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2), \end{cases}$$

$$(11)\quad \sum d\xi\,d\xi' = \frac{4}{9}M(L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2).$$

Der letzten dieser drei Formeln entnehmen wir eine wichtige geometrische Beziehung: *Die Asymptotenlinien der beiden Hilfsflächen* $(\xi, \ldots)$ *und* $(\xi', \ldots)$ *entsprechen stets den Asymptotenlinien der Biegungsfläche* $(x, \ldots)$.

Es soll nun gezeigt werden, daß *die beiden zueinander polarreziproken Hilfsflächen* $(\xi, \ldots)$ *und* $(\xi', \ldots)$ *der Tzitzéicaschen Klasse von Flächen angehören, bei denen das Krümmungsmaß proportional mit der 4. Potenz des Abstandes der Tangentialebene vom Koordinatenanfang ist.*

Wir beachten, daß

$$(12)\qquad -\frac{\xi'}{\sqrt{v}},\ -\frac{\eta'}{\sqrt{v}},\ -\frac{\zeta'}{\sqrt{v}} \quad \text{und} \quad -\frac{\xi}{\sqrt{u}},\ -\frac{\eta}{\sqrt{u}},\ -\frac{\zeta}{\sqrt{u}}$$

die Richtungskosinus der Flächennormalen von $(\xi, \ldots)$ und $(\xi', \ldots)$ sind, und erhalten für die Abstände w und w' der beiden Tangentialebenen vom Nullpunkt die Werte:

$$(13)\qquad w = -\sum \xi \frac{\xi'}{\sqrt{v}} = \frac{1}{\sqrt{v}}, \qquad w' = -\sum \xi' \frac{\xi}{\sqrt{u}} = \frac{1}{\sqrt{u}}.$$

Zwecks Berechnung der Krümmungsmaße k und k' bilden wir die zweiten quadratischen Fundamentalformen beider Hilfsflächen:

$$\sum d\xi\, d\left(\frac{\xi'}{\sqrt{v}}\right) = \frac{4}{9}\frac{M}{\sqrt{v}}(L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2),$$

$$\sum d\xi'\, d\left(\frac{\xi}{\sqrt{u}}\right) = \frac{4}{9}\frac{M}{\sqrt{u}}(L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2)$$

und finden mittels ihrer Koeffizienten und derjenigen der beiden ersten Fundamentalformen (10), wobei wieder die erste der Gleichungen (6) heranzuziehen ist, die Ausdrücke:

$$(14)\qquad k = -\frac{1}{v^2}, \qquad k' = -\frac{1}{u^2},$$

so daß sich also mit Berücksichtigung von (13) tatsächlich die Relationen

$$k = -w^4, \quad k' = -w'^4 \cdot$$

ergeben.

3. Wir definieren eine weitere Fläche $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ durch

$$(15) \qquad \mathfrak{x} = x - \frac{2}{3} u x_u - \frac{2}{3} v x_v = x - u\xi - v\xi' \text{ usw.}$$

und nennen sie die zur Biegungsfläche $(x, \ldots)$ gehörige *dritte Hilfsfläche.* Sie spielt weiterhin eine wichtige Rolle beim Aufbau der Transformationstheorie. Hier sei zunächst nur bemerkt, daß ihre Punkte in den Tangentialebenen der Fläche $(x, \ldots)$ eine feste, von den Biegungen unabhängige relative Lage besitzen, also mit den Flächenelementen von $(x, \ldots)$ *starr gekoppelt* sind.

Die gleiche Bemerkung gilt für eine Schar von ∞^1 Flächen $(x^{(\nu)}, y^{(\nu)}, z^{(\nu)})$, die wir mittels der Festsetzung

$$(16) \qquad x^{(\nu)} = \mathfrak{x} + \nu\xi + \frac{1}{\nu}\xi' = x - (u - \nu)\xi - \left(v - \frac{1}{\nu}\right)\xi' \text{ usw.}$$

einführen, wobei ν eine willkürliche Konstante bedeutet. Diese Flächen $(x^{(\nu)}, \ldots)$ sind durch die folgenden Eigenschaften ausgezeichnet: 1. *Ihre Normalen liegen in den Tangentialebenen der Fläche* $(x, \ldots)$ *und zwar ebenfalls in starrer Koppelung; die Normalenkosinus sind den Größen* $\xi + \nu\xi'$, $\eta + \nu\eta'$, $\zeta + \nu\zeta'$ *proportional.* 2. *Zwischen den sämtlichen Flächen* $(x^{(\nu)}, \ldots)$ *und der Fläche* $(x, \ldots)$ *besteht ohne Rücksicht auf die Biegungen, denen* $(x, \ldots)$ *unterworfen wird, stets Korrespondenz der Asymptotenlinien*[16]).

Die Herleitung dieser Sätze an der Hand der aufgestellten Formeln bietet keine Schwierigkeiten, erfordert aber eine längere Rechnung, auf deren Wiedergabe wir im Hinblick auf einen späteren Beweis verzichten, der am Schluß von § 3 mit anderen Hilfsmitteln geführt werden wird.

---

[16]) In bezug auf Flächenpaare mit rechtwinklig sich kreuzenden Normalen und korrespondierenden Asymptotenlinien, für die die Fläche $(x, \ldots)$ im Verein mit einer jeden der Flächen $(x^{(\nu)}, \ldots)$ ein spezielles Beispiel liefert, vgl. man Jonas, Sur une transformation qui dépend d'une équation aux dérivées partielles du 3me ordre. C. R. de l'Ac. des Sc. **156** (1913), S. 1816. — Ohne nähere Ausführungen sei noch erwähnt, daß die Existenz der Flächen $(x^{(\nu)}, \ldots)$ aufs engste mit der Tatsache zusammenhängt daß die betrachtete Fläche $(x, \ldots)$ auf ∞^2 Weisen durch Biegung in eine tetraedrale Fläche $Ax^{2/3} + By^{2/3} + Cz^{2/3} = 1$ übergeführt werden kann. Es gibt dann immer drei Werte von ν, für die die Punkte $(x^{(\nu)}, \ldots)$ die Schnittpunkte der Tangentialebenen mit den Koordinatenachsen werden.

§ 2.

Einführung der Parameter der Asymptotenlinien; Konstruktion der Biegungsfläche auf Grund einer Lösung der partiellen Differentialgleichung $\theta_{\alpha\beta} = e^{\theta} - e^{-2\theta}$.

1. Wir führen nun die Parameter α und β der Asymptotenlinien ein und richten unser Augenmerk besonders auf die quadratische Differentialform § 1 (11), die, auf α und β bezogen, sich folgendermaßen schreiben läßt:

(1) $$\sum d\xi\, d\xi' = 2\, e^{\theta}\, d\alpha\, d\beta.$$

Es ist bekannt, daß die *normierten*, d. h. durch die 4. Wurzel aus dem absoluten Betrag des Krümmungsmaßes dividierten Normalenkosinus einer Fläche als Funktionen der Parameter der Asymptotenlinien eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung vom Moutardschen Typus erfüllen. Wir wenden diesen Satz zunächst auf die Hilfsflächen $(\xi, \ldots)$ und $(\xi', \ldots)$ an, deren Asymptotenlinien, wie wir sahen, denen der Biegungsfläche $(x, \ldots)$ entsprechen, und schließen mit Rücksicht auf § 1 (12) und (14), daß eben diese Größen ξ, η, ζ und ξ', η', ζ' Integrale zweier Moutardscher Gleichungen

(2) $$\xi_{\alpha\beta} = \mathsf{M}\xi, \qquad \xi'_{\alpha\beta} = \mathsf{M}'\xi'$$

sind. Nach § 1 (8) und (9) ist aber:

(3) $$\sum \xi\xi' = -1, \quad \sum \xi_\alpha \xi' = 0, \quad \sum \xi_\beta \xi' = 0, \quad \sum \xi'_\alpha \xi = 0, \quad \sum \xi'_\beta \xi = 0.$$

Differentiiert man die zweite und die vierte dieser Gleichungen nach β, die dritte und die fünfte nach α und macht Gebrauch von (1) und (2), so findet man:

(4) $$\mathsf{M} = \mathsf{M}' = \sum \xi_\alpha \xi'_\beta = \sum \xi_\beta \xi'_\alpha = e^{\theta},$$

während außerdem infolge von (1)

(5) $$\sum \xi_\alpha \xi'_\alpha = 0, \qquad \sum \xi_\beta \xi'_\beta = 0$$

ist. Da aber ξ, η, ζ (Entsprechendes gilt von ξ', η', ζ') nicht nur normierte Normalenkosinus sind, sondern gleichzeitig die laufenden Koordinaten einer auf die Asymptotenlinien (α, β) bezogenen Fläche darstellen, so bestehen neben (2) je zwei weitere Reihen von Relationen von der Form:

$$\xi_{\alpha\alpha} = a\xi_\alpha + p\xi_\beta, \qquad \xi_{\beta\beta} = q\xi_\alpha + b\xi_\beta.$$

Um zunächst den Koeffizienten a zu bestimmen, multiplizieren wir die erste dieser beiden Gleichungen mit ξ'_β und addieren die beiden analogen Beziehungen. Unter Berücksichtigung von (4) ergibt sich:

$$\sum \xi_{\alpha\alpha}\xi'_\beta = a e^{\theta}.$$

Differentiiert man andererseits die Gleichung $\sum \xi_\alpha \xi'_\beta = e^\theta$ nach α, so findet man:

$$\sum \xi_{\alpha\alpha} \xi'_\beta = e^\theta \theta_\alpha .$$

Es wird also $a = \theta_\alpha$ und entsprechend $b = \theta_\beta$. Mithin haben wir für ξ, η, ζ das folgende System von Differentialgleichungen:

$$(6) \qquad \xi_{\alpha\alpha} = \theta_\alpha \xi_\alpha + p \xi_\beta, \qquad \xi_{\alpha\beta} = e^\theta \xi, \qquad \xi_{\beta\beta} = q \xi_\alpha + \theta_\beta \xi_\beta,$$

für das man als Integrabilitätsbedingungen die Relationen

$$(7) \qquad p_\beta + p\theta_\beta = 0, \qquad q_\alpha + q\theta_\alpha = 0, \qquad \theta_{\alpha\beta} + pq = e^\theta$$

erhält.

Wir wollen nun von der spezialisierenden Annahme absehen, daß eine der Größen p und q oder daß alle beide identisch verschwinden, wodurch sich die dritte der Relationen (7) auf die Liouvillesche Differentialgleichung für θ reduzieren würde. Das bedeutet also, daß die Hilfsfläche $(\xi, \ldots)$ nicht Regelfläche oder gar Fläche 2. Grades sein soll. Aus der Gesamtheit der Biegungsflächen vom Typus § 1 (1) scheiden damit als nicht ohne weiteres der im folgenden entwickelten Transformationstheorie zugänglich die in der Einleitung erwähnten tetraedralen Flächen aus, für die die beiden Hilfsflächen Flächen 2. Grades werden. Unter dieser die Allgemeinheit nicht beschränkenden, sondern nur die Ausartungsfälle ausschließenden Voraussetzung folgt aus (7):

$$p = \varphi(\alpha) e^{-\theta}, \qquad q = \psi(\beta) e^{-\theta},$$
$$(8) \qquad \theta_{\alpha\beta} + \varphi(\alpha)\psi(\beta) e^{-2\theta} = e^\theta .$$

An Stelle von α und β führen wir jetzt die Größen

$$\bar\alpha = \int \sqrt[3]{\varphi(\alpha)}\, d\alpha, \qquad \bar\beta = \int \sqrt[3]{\psi(\beta)}\, d\beta$$

als neue Variablen ein und setzen außerdem

$$e^\theta = e^{\bar\theta} \sqrt[3]{\varphi(\alpha)} \sqrt[3]{\psi(\beta)} .$$

Dabei behält die Differentialform (1) ihre Gestalt:

$$\sum d\xi\, d\xi' = 2 e^\theta\, d\alpha\, d\beta = 2 e^{\bar\theta}\, d\bar\alpha\, d\bar\beta,$$

während (8) in

$$\bar\theta_{\bar\alpha\bar\beta} = e^{\bar\theta} - e^{-2\bar\theta}$$

übergeht. Gleichzeitig vereinfachen sich die Koeffizienten im Gleichungssystem (6). Schreiben wir nachträglich wieder α, β, θ für $\bar\alpha, \bar\beta, \bar\theta$, so lauten die Formeln:

$$(9) \qquad \theta_{\alpha\beta} = e^\theta - e^{-2\theta},$$

$$(10) \qquad \xi_{\alpha\alpha} = \theta_\alpha \xi_\alpha + e^{-\theta} \xi_\beta, \qquad \xi_{\alpha\beta} = e^\theta \xi, \qquad \xi_{\beta\beta} = e^{-\theta} \xi_\alpha + \theta_\beta \xi_\beta .$$

Dies sind die von Tzitzéica[17]) aufgestellten Differentialgleichungen, von deren Integration die Bestimmung der nicht-geradlinigen Flächen mit der Eigenschaft $\frac{K}{W^4} =$ konst. abhängt. Bei Tzitzéica steht h an der Stelle von e^θ. Die Schreibung mittels der Exponentialfunktion soll negative Werte von e^θ, bei denen θ die imaginäre additive Konstante $i\pi$ aufnimmt, nicht ausschließen, schien aber aus formalen Gründen vorteilhaft.

Wird ein Integral θ von (9) als bekannt vorausgesetzt, so ist (10) als ein unbeschränkt integrabeles System simultaner totaler Differentialgleichungen für $\xi, \xi_\alpha, \xi_\beta$ aufzufassen. Die Integration desselben führt drei willkürliche Konstanten ein, nämlich die Anfangswerte von $\xi, \xi_\alpha, \xi_\beta$ für ein spezielles Wertepaar $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ der Parameter. Sind drei solcher Tripel von Anfangswerten so gewählt, daß

$$\left|\begin{matrix} \xi, & \xi_\alpha, & \xi_\beta \\ \eta, & \eta_\alpha, & \eta_\beta \\ \zeta, & \zeta_\alpha, & \zeta_\beta \end{matrix}\right|_{\substack{\alpha=\alpha_0 \\ \beta=\beta_0}} \neq 0$$

ist, so stellen ξ, η, ζ drei voneinander linear-unabhängige Integrale des Systems (10) dar, während jedes weitere Integral sich mittels konstanter Koeffizienten linear durch ξ, η, ζ ausdrücken läßt.

2. Es sei also ξ, η, ζ ein solches Tripel linear-unabhängiger Lösungen. Wir setzen

$$(\xi, \xi_\alpha, \xi_\beta) = \left|\begin{matrix} \xi, & \xi_\alpha, & \xi_\beta \\ \eta, & \eta_\alpha, & \eta_\beta \\ \zeta, & \zeta_\alpha, & \zeta_\beta \end{matrix}\right| = \Delta$$

und finden mit Hilfe von (10):

$$\frac{\partial \log \Delta}{\partial \alpha} = \theta_\alpha, \qquad \frac{\partial \log \Delta}{\partial \beta} = \theta_\beta,$$

so daß also $\Delta = c e^\theta$ ($c =$ konst.) folgt. Die Größen ξ, η, ζ mögen nun, was infolge der Homogenität der Differentialgleichungen (10) ohne weiteres möglich ist, durch Hinzufügung konstanter Faktoren so *normiert* werden, daß $c = -1$, also

$$(11) \qquad \Delta = -e^\theta$$

wird. Aus den Gleichungen

$$\sum \xi' \xi = -1, \qquad \sum \xi' \xi_\alpha = 0, \qquad \sum \xi' \xi_\beta = 0$$

ergibt sich dann:

$$(12) \qquad \xi' = e^{-\theta}(\eta_\alpha \zeta_\beta - \zeta_\alpha \eta_\beta) \quad \text{usw.}^{18)}$$

[17]) S. die Zitate in der Einleitung, besonders unter [5]).

[18]) Die beiden anderen Formeln erhält man stets durch zyklische Vertauschung.

und hieraus, indem man beim Differentiieren von (10) Gebrauch macht:

$$(13) \qquad \xi'_\alpha = -(\eta\zeta_\alpha - \zeta\eta_\alpha), \qquad \xi'_\beta = \eta\zeta_\beta - \zeta\eta_\beta.$$

Durch abermalige Differentiation gewinnt man das zu (10) duale System:

$$(14) \quad \xi'_{\alpha\alpha} = \theta_\alpha \xi_\alpha - e^{-\theta}\xi'_\beta, \qquad \xi'_{\alpha\beta} = e^\theta \xi', \qquad \xi'_{\beta\beta} = -e^{-\theta}\xi'_\alpha + \theta_\beta \xi'_\beta.$$

Man bestätigt ferner die Beziehungen:

$$\sum \xi\xi'_\alpha = 0, \quad \sum \xi\xi'_\beta = 0, \quad \sum \xi_\alpha\xi'_\alpha = 0, \quad \sum \xi_\beta\xi'_\beta = 0,$$
$$\sum \xi_\alpha\xi_\beta = \sum \xi_\beta\xi'_\alpha = e^\theta$$

und erhält als Gegenstücke zu (11), (12) und (13) die Formeln:

$$(15) \qquad \Delta' = (\xi', \xi'_\alpha, \xi'_\beta) = -e^\theta,$$

$$(16) \qquad \xi = e^{-\theta}(\eta'_\alpha\zeta'_\beta - \zeta'_\alpha\eta'_\beta),$$

$$(17) \qquad \xi_\alpha = -(\eta'\zeta'_\alpha - \zeta'\eta'_\alpha), \qquad \xi_\beta = \eta'\zeta'_\beta - \zeta'\eta'_\beta.$$

Wir beachten, daß die Relationen (17) und (13) für die Flächen $(\xi, \ldots)$ und $(\xi', \ldots)$ die Darstellung mittels der Lelieuvreschen Formeln bedeuten, und schließen unmittelbar aus dieser Tatsache, daß die Krümmungsmaße durch

$$k = -\frac{1}{v^2}, \qquad k' = -\frac{1}{u^2}$$

gegeben sind, wobei

$$(18) \qquad \sum \xi^2 = u, \qquad \sum \xi'^2 = v$$

gesetzt ist. Man verifiziert leicht die Zugehörigkeit der Flächen zur Tzitzéicaschen Klasse, nämlich das Bestehen der Relationen $k = -w^4$, $k' = -w'^4$.

3. Nach diesen Vorbereitungen erhalten wir die laufenden Koordinaten der gesuchten Biegungsfläche (x, y, z) durch drei Quadraturen:

$$(19) \qquad x = \frac{3}{2}\int(\xi\,du + \xi'\,dv) \quad \text{usw.}$$

In der Tat ergibt sich als Quadrat des Linienelements sofort der Ausdruck § 1 (1). Es bedarf nur noch des Nachweises, daß in (19) unter dem Integralzeichen ein exaktes Differential steht, d. h. daß

$$\Omega = \xi_\beta u_\alpha + \xi'_\beta v_\alpha - \xi_\alpha u_\beta - \xi'_\alpha v_\beta = 0$$

wird. Infolge von (18) kann man aber schreiben:

$$\frac{1}{2}\Omega = -\eta(\xi_\alpha\eta_\beta - \eta_\alpha\xi_\beta) + \zeta(\zeta_\alpha\xi_\beta - \xi_\alpha\zeta_\beta) - \eta'(\xi'_\alpha\eta'_\beta - \eta'_\alpha\xi'_\beta)$$
$$+ \zeta'(\zeta'_\alpha\xi'_\beta - \xi'_\alpha\zeta'_\beta)$$

und findet mit Berücksichtigung von (12) und (16) $\Omega = 0$.

Wir fassen das gewonnene Ergebnis zusammen:

Um eine (nicht spezielle) Biegungsfläche vom Typus

$$\sum dx^2 = \frac{9}{4}(u\,du^2 - 2\,du\,dv + v\,dv^2)$$

zu konstruieren, hat man von einem Integral θ der partiellen Differentialgleichung

$$\theta_{\alpha\beta} = e^{\theta} - e^{-2\theta}$$

auszugehen, ein Tripel ξ, η, ζ von linear unabhängigen und nach geeigneter Normierung die Bedingung $\Delta = (\xi, \xi_\alpha, \xi_\beta) = -e^{\theta}$ erfüllenden Lösungen des Systems

$$\xi_{\alpha\alpha} = \theta_\alpha \xi_\alpha + e^{-\theta}\xi_\beta, \qquad \xi_{\alpha\beta} = e^{\theta}\xi, \qquad \xi_{\beta\beta} = e^{-\theta}\xi_\alpha + \theta_\beta \xi_\beta$$

aufzusuchen und

$$\xi' = e^{-\theta}(\eta_\alpha\zeta_\beta - \zeta_\alpha\eta_\beta), \quad \eta' = e^{-\theta}(\zeta_\alpha\xi_\beta - \xi_\alpha\zeta_\beta), \quad \zeta' = e^{-\theta}(\xi_\alpha\eta_\beta - \eta_\alpha\xi_\beta),$$
$$u = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \qquad v = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2$$

zu bilden. Alsdann sind

$$x = \frac{3}{2}\int(\xi\,du + \xi'\,dv), \quad y = \frac{3}{2}\int(\eta\,du + \eta'\,dv), \quad z = \frac{3}{2}\int(\zeta\,du + \zeta'\,dv)$$

die laufenden Koordinaten der Biegungsfläche.

4. Wir fügen noch eine Bemerkung in bezug auf die beiden zueinander dualen Systeme (10) und (14) hinzu. Ist ϑ ein Integral von (10), ϑ' ein beliebiges Integral von (14), so besteht, wovon man sich leicht durch Differentiieren überzeugt, eine Relation von der Form:

$$e^{-\theta}(\vartheta_\alpha\vartheta'_\beta + \vartheta_\beta\vartheta'_\alpha) - \vartheta\vartheta' = \text{konst.}$$

Insbesondere ist

$$e^{-\theta}(\xi_\alpha\xi'_\beta + \xi_\beta\xi'_\alpha) = \xi\xi' - 1$$

usw., während für zwei verschiedene Buchstaben, z. B. η und ζ', die Konstante verschwindet, also

$$(20) \qquad e^{-\theta}(\eta_\alpha\zeta'_\beta + \eta_\beta\zeta'_\alpha) - \eta\zeta' = 0$$

wird. Man bestätigt diese Beziehungen an der Hand von (12) und (13) durch Einsetzen der Ausdrücke für die gestrichenen Größen.

§ 3.

Satz über die Bestimmung der Asymptotenlinien auf den betrachteten Biegungsflächen; Vorbereitung der Transformationstheorie mittels der Lelieuvreschen Relationen.

1. Die Betrachtung der quadratischen Differentialform

$$(1) \qquad \sum d\xi\,d\xi' = \frac{4}{9}M(L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2) = 2e^{\theta}\,d\alpha\,d\beta$$

führt zur Auffindung einer bemerkenswerten Eigenschaft, die die Flächen der in Rede stehenden isometrischen Klasse mit den auf die Flächen 2. Grades abwickelbaren Flächen teilen. Es gilt der Satz:

Auf den Biegungsflächen vom Typus

$$ds^2 = \frac{9}{4}(u\,du^2 - 2\,du\,dv + v\,dv^2)$$

lassen sich die Asymptotenlinien mit Hilfe von Quadraturen bestimmen.

Es sei nämlich K das Krümmungsmaß der Form (1), das, wenn eine durch L, M, N definierte Biegungsfläche vorliegt, als Funktion der Parameter u und v dargestellt werden kann. Andererseits erhält man auf Grund der Differentialgleichung § 2 (9):

$$\mathsf{K} = -e^{-\theta}\theta_{\alpha\beta} = -1 + e^{-3\theta}.\quad {}^{19})$$

Es bietet sich demnach in

$$e^{-\theta} = \sqrt[3]{1+\mathsf{K}}$$

ein Multiplikator, durch den (1) in das Produkt zweier Differentiale, also in eine Form von der Krümmung 0 übergeht. Es ist aber bekannt, daß bei einer quadratischen Differentialform von verschwindender Krümmung die Zerlegung in das Produkt zweier Differentiale durch Quadraturen gelingt; und zwar sind im allgemeinen *drei* Quadraturen erforderlich, eine zur Bestimmung der beiden zueinander reziproken integrierenden Faktoren und zwei weitere zur Bestimmung der neuen Variablen.

Der hiermit bewiesene Satz liegt übrigens wesentlich tiefer als der gleichlautende für die Biegungsflächen der Flächen 2. Grades. Dort gelingt es nämlich, bei Beziehung der Fläche auf die verbogenen Erzeugenden die integrierenden Faktoren ohne Quadratur durch die zweiten Fundamentalgrößen L, M, N in geschlossener Form auszudrücken [20]), während man im vorliegenden Falle bereits bei dem Versuch, den Beweis unmittelbar auf die Gestalt des Linienelements und auf die von L, M, N erfüllten Gleichungen (6) von § 1 zu stützen, auf außerordentliche rechnerische Schwierigkeiten stößt.

Wir erinnern noch daran, daß nach Beltrami [21]) der Multiplikator λ, durch den eine quadratische Differentialform in das Produkt zweier Differentiale verwandelt wird, der partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\frac{1}{2}\Delta_2 \log\lambda = \mathsf{K}$$

---

[19]) Bekanntlich ist das Krümmungsmaß einer auf Minimalparameter bezogenen quadratischen Differentialform $2f\,d\alpha\,d\beta$ durch die Formel: $\mathsf{K} = -\frac{1}{f}\frac{\partial^2 \log f}{\partial\alpha\,\partial\beta}$ gegeben.

[20]) Jonas, Über eine neue partielle Differentialgleichung des Deformationsproblems usw. Berl. Math. Ges. Ber. **13** (1914), S. 52.

[21]) Siehe z. B. Knoblauch, Grundlagen der Differentialgeometrie (1913), S. 581.

genügt, in der K das Krümmungsmaß der gegebenen Form und der Operator Δ_2 den 2. Differentialparameter bedeutet. Danach besteht für die Form (1) die Relation:

$$\frac{1}{6}\Delta_2 \log(1+\mathsf{K}) = \mathsf{K},$$

durch die die Differentialgleichung

$$\theta_{\alpha\beta} = e^{\theta} - e^{-2\theta}$$

unabhängig von der Wahl der Bezugsparameter dargestellt wird.

2. An der Hand der Entwicklungen von § 2 gelingt nun auch die Aufstellung der Lelieuvreschen Formeln und der Moutardschen Gleichung für die Biegungsfläche $(x, \ldots)$. Da für diese nach § 1 (4)

$$K = -\frac{1}{9(uv-1)^2}$$

ist, sind die normierten Normalenkosinus:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{-K}} X = \sqrt{3}(\eta\zeta' - \zeta\eta') \quad \text{usw.}$$

Wir ziehen es vor, unter Fortlassung des Faktors $\sqrt{3}$ die Größen

(2) $$\Xi = \eta\zeta' - \zeta\eta', \qquad \mathsf{H} = \zeta\xi' - \xi\zeta', \qquad \mathsf{Z} = \xi\eta' - \eta\xi'$$

zu benutzen, was nur zur Folge hat, daß die sich ergebenden Ausdrücke für x_α und x_β sich von der gewöhnlichen Gestalt der Lelieuvreschen Formeln durch das Auftreten des Faktors 3 unterscheiden.

Man findet mittels einer leichten Umformung:

$$-(\mathsf{H}\mathsf{Z}_\alpha - \mathsf{Z}\mathsf{H}_\alpha) = -\xi\sum\xi(\eta'\zeta'_\alpha - \zeta'\eta'_\alpha) - \xi'\sum\xi'(\eta\zeta_\alpha - \zeta\eta_\alpha);$$

die rechte Seite geht mit Benutzung von § 2 (13) und (17) in

$$\xi\sum\xi\xi_\alpha + \xi'\sum\xi'\xi'_\alpha = \frac{1}{2}u_\alpha\xi + \frac{1}{2}v_\alpha\xi'$$

über. Wir erhalten also, wobei wir den entsprechenden Ausdruck für die Ableitung nach β hinzufügen:

(3) $$\begin{cases} x_\alpha = \frac{3}{2}(u_\alpha\xi + v_\alpha\xi') = -3(\mathsf{H}\mathsf{Z}_\alpha - \mathsf{Z}\mathsf{H}_\alpha), \\ x_\beta = \frac{3}{2}(u_\beta\xi + v_\beta\xi') = 3(\mathsf{H}\mathsf{Z}_\beta - \mathsf{Z}\mathsf{H}_\beta). \end{cases}$$

Die erste der Formeln (2) werde nun nacheinander nach α und β differentiiert. Berücksichtigt man, daß $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$ die Differentialgleichung $\vartheta_{\alpha\beta} = e^{\theta}\vartheta$ befriedigen und daß infolge von § 2 (20)

$$\eta_\alpha\zeta'_\beta + \eta_\beta\zeta'_\alpha - \eta'_\beta\zeta_\alpha - \eta'_\alpha\zeta_\beta = e^{\theta}(\eta\zeta' - \zeta\eta') = e^{\theta}\,\Xi$$

ist, so ergibt sich die von Ξ, H, Z erfüllte Moutardsche Differentialgleichung:

(4) $$\Xi_{\alpha\beta} = 3\, e^{\theta}\, \Xi.$$

Von ihr hängt die infinitesimale Verbiegung der Fläche $(x, \ldots)$ ab sowie die Konstruktion der W-Kongruenzen, für die $(x, \ldots)$ den einen Brennflächenmantel bildet. Wir werden von dieser Bemerkung später Gebrauch machen.

Zur Vereinfachung der Schreibweise in weiterhin folgenden Entwickelungen, die sich an die Moutardsche Transformation knüpfen, führen wir ein abkürzendes Symbol ein. Es sei allgemein, wenn φ und ψ zwei Integrale einer Moutardschen Gleichung sind,

$$\int [-(\varphi\psi_\alpha - \psi\varphi_\alpha)\, d\alpha + (\varphi\psi_\beta - \psi\varphi_\beta)\, d\beta] = \langle \varphi, \psi \rangle$$

gesetzt. Wir schreiben danach (3) in der Form:

$$x = 3\langle \mathsf{H}, \mathsf{Z} \rangle, \qquad y = 3\langle \mathsf{Z}, \Xi \rangle, \qquad z = 3\langle \Xi, \mathsf{H} \rangle.$$

3. Wir betrachten ferner die in § 1, **3** eingeführte *dritte Hilfsfläche* $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$, gegeben durch

$$\mathfrak{x} = x - u\,\xi - v\,\xi' \quad \text{usw.}$$

Differentiiert man $\mathfrak{x}$ nach α und beachtet dabei, daß $u = \sum \xi^2$, $v = \sum \xi'^2$ ist, so ergibt sich zunächst:

$$\mathfrak{x}_\alpha = \eta\,(\xi\eta_\alpha - \eta\xi_\alpha) - \zeta\,(\zeta\xi_\alpha - \xi\zeta_\alpha) + \eta'(\xi'\eta'_\alpha - \eta'\xi'_\alpha) - \zeta'(\zeta'\xi'_\alpha - \xi'\zeta'_\alpha).$$

Die weitere Umformung gelingt wieder mittels der Relationen (13) und (17) von § 2. Analog ist $\mathfrak{x}_\beta$ zu bilden. Es wird:

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_\alpha &= -(\eta\zeta'_\alpha - \zeta'\eta_\alpha + \eta'\zeta_\alpha - \zeta\eta'_\alpha), \\ \mathfrak{x}_\beta &= \eta\zeta'_\beta - \zeta'\eta_\beta + \eta'\zeta_\beta - \zeta\eta'_\beta \end{aligned}$$

oder, wenn wir uns der eben eingeführten Bezeichnung bedienen:

(5) $$\mathfrak{x} = \langle \eta, \zeta' \rangle + \langle \eta', \zeta \rangle \quad \text{usw.}$$

Die Aufstellung dieser Formelgruppe ist einer der wichtigsten vorbereitenden Schritte für unsere Zwecke. Wir sind damit im Besitze eines Systems *erweiterter* Lelieuvrescher Formeln, das bei einer Moutardschen Transformation der sechs Größen $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$ die gleiche Verwendung gestattet wie die eigentlichen Lelieuvreschen Formeln bei der Konstruktion der W-Kongruenzen.

4. Im Anschluß an (5) und mit besonderer Berücksichtigung der Relationen § 2 (13) und (17) findet man für eine jede der in § 1, **3** betrachteten und durch

(6) $$x^{(\nu)} = \mathfrak{x} + \nu\,\xi + \frac{1}{\nu}\,\xi' = x - (u - \nu)\,\xi - \left(v - \frac{1}{\nu}\right)\xi'$$

definierten Flächen $(x^{(\nu)}, y^{(\nu)}, z^{(\nu)})$ die Darstellung:

$$x^{(\nu)} = \frac{1}{\nu} \langle \eta + \nu\eta', \zeta + \nu\zeta' \rangle \quad \text{usw.} \tag{7}$$

Das sind aber die Lelieuvreschen Formeln für eine auf ihre Asymptotenlinien bezogene Fläche, deren Normalenkosinus sich wie $\xi + \nu\xi' : \eta + \nu\eta' : \zeta + \nu\zeta'$ verhalten. Damit sind die am Schluß von § 1 ausgesprochenen Eigenschaften der Flächen $(x^{(\nu)}, \ldots)$ bewiesen.

Erwähnt sei noch eine weitere Eigentümlichkeit dieser Flächen: *Das Krümmungsmaß einer Fläche $(x^{(\nu)}, \ldots)$ ändert sich nicht, wenn die Fläche $(x, \ldots)$ verbogen wird.*

Es ergibt sich nämlich auf Grund von (7) der folgende, u und v nur explizite enthaltende Ausdruck für $K^{(\nu)}$:

$$K^{(\nu)} = -\frac{\nu^2}{[\Sigma(\xi + \nu\xi')^2]^2} = -\frac{1}{\left(\frac{1}{\nu}u + \nu v - 2\right)^2}.$$

§ 4.

Anwendung der inhaltstreuen Affinität auf die Tzitzéicaschen Hilfsflächen und Gegenstück zur Lieschen Transformation der Flächen von konstanter Krümmung.

1. Ehe wir an unsere Hauptaufgabe, die Aufstellung einer Transformationstheorie für die Flächen der betrachteten isometrischen Klasse, herantreten, mögen noch zwei Eigenschaften der zu ihrer Bestimmung dienenden Differentialgleichungen zur Sprache gebracht werden, die ihrerseits übrigens auch schon die Konstruktion neuer Biegungsflächen aus einer gegebenen gestatten. Es ist das einmal die leicht ersichtliche Tatsache, daß das Lösungstripel ξ, η, ζ des Systems § 2 (10) einer homogenen linearen Transformation unterworfen werden kann, deren Determinante mit Rücksicht auf § 2 (11) den Wert 1 haben muß. Geometrisch bedeutet dies eine inhaltstreue affine Raumtransformation mit dem Zentrum im Koordinatenanfang. Da nun aber eine Drehung der Hilfsfläche $(\xi, \ldots)$ keine neue Biegungsfläche entstehen läßt[22]), haben wir eine von Drehung freie Affinität zu nehmen, die von fünf willkürlichen Konstanten abhängt.

Wir wollen zeigen, daß die Darstellung der zugehörigen ∞^5 neuen Biegungsflächen im allgemeinen von drei Quadraturen abhängt. Dabei mögen die Koordinatenachsen mit den Hauptdilatationsachsen zusammenfallen, was zur Folge hat, daß drei der verfügbaren Konstanten nicht in

---

[22]) Man beachte die Invarianz der Ausdrücke $u = \Sigma\xi^2$ und $v = \Sigma\xi'^2$ den Drehungen gegenüber.

Erscheinung treten. An Stelle von ξ, η, ζ ist $c_1 \xi, c_2 \eta, c_3 \zeta$ zu schreiben, wobei die Konstanten c_1, c_2, c_3 die Relation

(1) $$c_1 c_2 c_3 = 1$$

erfüllen müssen. Man erkennt unschwer, daß ξ', η', ζ' durch $\frac{1}{c_1}\xi', \frac{1}{c_2}\eta', \frac{1}{c_3}\zeta'$ zu ersetzen sind. Wird

$$c_1^2 \xi^2 + c_2^2 \eta^2 + c_3^2 \zeta^2 = \tilde{u}, \qquad \frac{1}{c_1^2}\xi'^2 + \frac{1}{c_2^2}\eta'^2 + \frac{1}{c_3^2}\zeta'^2 = \tilde{v}$$

gesetzt, so ist die neue Biegungsfläche $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ durch

$$\tilde{x} = \frac{3}{2}\int\left(c_1^2 \xi \, d\tilde{u} + \frac{1}{c_1^2}\xi' d\tilde{v}\right) \quad \text{usw.}$$

bestimmt. Führt man die Integration teilweise aus und beachtet (1), so findet man:

(2) $$\tilde{x} = c_1^3 \xi^3 + \frac{1}{c_1^3}\xi'^3 + 3\frac{c_2}{c_3}\int(\xi\eta\, d\eta + \xi'\zeta' d\zeta') + 3\frac{c_3}{c_2}\int(\xi\zeta\, d\zeta + \xi'\eta' d\eta')$$

usw.; $\tilde{y}$ und $\tilde{z}$ folgen durch zyklische Permutation innerhalb der Tripel $\xi\eta\zeta$, $\xi'\eta'\zeta'$ und $c_1 c_2 c_3$. Daß unter den Integralzeichen exakte Differentiale stehen, bestätigt man auch ohne Benutzung von α und β an der Hand der Formeln von § 1. Die Anzahl der durch (2) geforderten Quadraturen reduziert sich (c_1, c_2, c_3 als verschieden vorausgesetzt) auf drei, da die Summen

$$3\int(\xi\eta\, d\eta + \xi'\zeta' d\zeta') + 3\int(\xi\zeta\, d\zeta + \xi'\eta' d\eta') = x - \xi^3 - \xi'^3 \quad \text{usw.}$$

bekannt sind.

Wir beachten noch, daß an die Stelle von Ξ, H, Z die Größen

$$\frac{c_2}{c_3}\eta\zeta' - \frac{c_3}{c_2}\zeta\eta', \qquad \frac{c_3}{c_1}\zeta\xi' - \frac{c_1}{c_3}\xi\zeta', \qquad \frac{c_1}{c_2}\xi\eta' - \frac{c_2}{c_1}\eta\xi'$$

treten, und schließen hieraus auf die auch leicht direkt erweisbare Tatsache, daß die Produkte $\eta\zeta'$, $\zeta\eta'$ usw. einzeln der Moutardschen Gleichung § 3 (4):

(3) $$\Theta_{\alpha\beta} = 3e^{\theta}\,\Theta$$

genügen. Allgemein sei bemerkt, daß, wenn ϑ und ϑ' zwei Integrale der Systeme § 2 (10) und (14) darstellen, so daß nach § 2, **4** gleichzeitig die Beziehung

(4) $$e^{-\theta}(\vartheta_\alpha \vartheta'_\beta + \vartheta_\beta \vartheta'_\alpha) - \vartheta\vartheta' = 3C \qquad (C = \text{konst.})$$

besteht, der Ausdruck $\vartheta\vartheta' + C$ ein Integral von (3) ist.

2. Die zweite Bemerkung betrifft die Tatsache, daß die Differentialgleichung

(5) $$\theta_{\alpha\beta} = e^{\theta} - e^{-2\theta}$$

wie jede Gleichung der Form $\theta_{\alpha\beta} = f(\theta)$ neben einem gegebenen Integral $\theta(\alpha, \beta)$ noch ∞^1 Lösungen $\theta\left(c\alpha, \frac{\beta}{c}\right)$ zuläßt, wobei c eine willkürliche Konstante bedeutet. Man erkennt, daß es sich hier um ein *Gegenstück zur Lieschen Transformation der pseudosphärischen Flächen* handelt. Die Einführung des neuen Integrals $\theta\left(c\alpha, \frac{\beta}{c}\right)$ verändert das System der Differentialgleichungen § 2 (10), das in der neuen Gestalt erst wieder integriert werden muß, so daß, abgesehen von der Kenntnis des Integrals θ, sich keine Vereinfachung erzielen läßt. Schreiben wir α und β an Stelle von $c\alpha$ und $\frac{\beta}{c}$, so behält die Funktion $\theta(\alpha, \beta)$ die ursprüngliche Form, während das System § 2 (10), von dem die Bestimmung der neuen ξ, η, ζ, also der Koordinaten einer, wie wir sagen können, *Lieschen Transformierten der Tzitzéicaschen Fläche* abhängt, in:

$$(6) \qquad \vartheta_{\alpha\alpha} = \theta_\alpha \vartheta_\alpha + \varkappa e^{-\theta} \vartheta_\beta, \qquad \vartheta_{\alpha\beta} = e^\theta \vartheta, \qquad \vartheta_{\beta\beta} = \frac{1}{\varkappa} e^{-\theta} \vartheta_\alpha + \theta_\beta \vartheta_\beta$$

übergeht, wobei $\varkappa = c^3$ ist. Gleichzeitig lautet das duale System:

$$(7) \qquad \vartheta'_{\alpha\alpha} = \theta_\alpha \vartheta'_\alpha - \varkappa e^{-\theta} \vartheta'_\beta, \qquad \vartheta'_{\alpha\beta} = e^\theta \vartheta', \qquad \vartheta'_{\beta\beta} = -\frac{1}{\varkappa} e^{-\theta} \vartheta'_\alpha + \theta_\beta \vartheta'_\beta.$$

Hiernach ist es, ohne daß es der bestätigenden Rechnung bedarf, klar, daß ebenso wie § 2 (10) und (14) auch die vorliegenden allgemeineren Systeme von Differentialgleichungen unbeschränkt integrabel sind, daß zwei Lösungen ϑ und ϑ' von (6) und (7) wieder die Relation (4) befriedigen und daß der aus ihnen gebildete Ausdruck $\vartheta\vartheta' + C$ wieder ein Integral von (3) ist.

Das System (6) ist von fundamentaler Bedeutung. Es beherrscht nämlich, wenn $\varkappa = \frac{1+n}{1-n}$ gesetzt wird, die Tzitzéicasche Transformation T_n der durch $\frac{K}{W^4} =$ konst. charakterisierten Flächen und gleichzeitig unsere in analytischer Beziehung damit äquivalente Transformation Θ_n, die im nächsten Paragraphen für die Biegungsflächen der betrachteten Klasse aufgestellt werden soll. Das weiterhin mit R bezeichnete Integral von (6), dem die Rolle einer *transformierenden Funktion* zufallen wird, ist auf Grund der letzten, das Analogon zur Lieschen Transformation betreffenden Bemerkung einer geometrischen Interpretation fähig, die wir hier ohne die Absicht späterer Verwendung voraufschicken: *R läßt sich als Koordinate (Abstand des laufenden Punktes von einer festen Ebene) für eine neue Fläche der Tzitzéicaschen Klasse auffassen, die aus (ξ, η, ζ) durch den zur Lieschen Transformation analogen Prozeß hervorgeht.*

Auffallend ist die Tatsache, daß eine solche Verwandtschaft zwischen zwei Transformationen der gleichen Klasse von Biegungsflächen, von denen die eine, hier die Transformation Θ_n, in Gestalt einer geometrischen Konstruktion auftritt, während die andere, hier also das Gegenstück zur Lieschen Transformation, einen ausschließlich analytischen Charakter besitzt, sich in gleicher Weise bereits bei den Biegungsflächen der Pseudosphäre findet. In der Tat läßt sich — ein darauf bezüglicher Hinweis scheint übrigens in der Literatur zu fehlen — auf die Riccatische Gleichung, von der die Bäcklundsche Transformation einer speudosphärischen Fläche abhängt, auch die Darstellung der Koordinaten einer allerdings imaginären Lieschen Transformierten zurückführen.

§ 5.

Aufstellung der Transformation Θ_n für die betrachtete Klasse von Biegungsflächen.

1. Es sei wieder eine auf ihre Asymptotenlinien bezogene und an der Hand der Entwicklungen von § 2 konstruierte Biegungsfläche (x, y, z) vom Typus

$$(1) \qquad \sum dx^2 = \frac{9}{4}(u\,du^2 - 2du\,dv + v\,dv^2)$$

als gegeben vorausgesetzt. Da die sechs Größen $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$ Integrale der gleichen Moutardschen Differentialgleichung:

$$(2) \qquad \xi_{\alpha\beta} = e^{\theta}\,\xi \quad \text{bzw.} \quad \xi'_{\alpha\beta} = e^{\theta}\,\xi'$$

sind, so liegt es nahe, sie einer gemeinsamen Moutardschen Transformation zu unterwerfen, die durch eine weitere, noch näher zu bestimmende Lösung R der Differentialgleichung (2):

$$(3) \qquad R_{\alpha\beta} = e^{\theta} R$$

definiert sein mag. Wir versuchen dann, über R so zu verfügen, daß sich die sechs transformierten Größen zur Konstruktion einer neuen Biegungsfläche verwenden lassen. Das gelingt nun, wie sich zeigen wird, insofern nicht unmittelbar, als man die beiden durch die Moutardsche Transformation gewonnenen Tripel, die wir mit $\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1, \bar{\zeta}_1$ und $\bar{\xi}'_1, \bar{\eta}'_1, \bar{\zeta}'_1$ bezeichnen wollen, erst mit je einem konstanten Faktor zu multiplizieren hat, damit sie in die den Forderungen von § 2 vollständig genügenden Größen ξ_1, η_1, ζ_1 und $\xi'_1, \eta'_1, \zeta'_1$ übergehen.

Wir schreiben zunächst die bekannten Differentialrelationen der Moutardschen Transformation[23])

[23]) Bianchi, Lezioni di geometria diff. 2 (1903), § 241.

$$(4)\quad \begin{cases} R(\bar{\xi}_1)_\alpha + R_\alpha \bar{\xi}_1 = -R\xi_\alpha + R_\alpha \xi, & R(\bar{\xi}_1)_\beta + R_\beta \bar{\xi}_1 = R\xi_\beta - R_\beta \xi, \\ R(\bar{\xi}'_1)_\alpha + R_\alpha \bar{\xi}'_1 = -R\xi'_\alpha + R_\alpha \xi', & R(\bar{\xi}'_1)_\beta + R_\beta \bar{\xi}'_1 = R\xi'_\beta - R_\beta \xi' \end{cases}$$

und verlangen, daß analog zu § 2 (3) wieder die Gleichungen:

$$(5)\quad \begin{cases} \sum \bar{\xi}_1 \bar{\xi}'_1 = -1, & \sum (\bar{\xi}_1)_\alpha \bar{\xi}'_1 = 0, \quad \sum (\bar{\xi}_1)_\beta \bar{\xi}'_1 = 0, \\ & \sum (\bar{\xi}'_1)_\alpha \bar{\xi}_1 = 0, \quad \sum (\bar{\xi}'_1)_\beta \bar{\xi}_1 = 0 \end{cases}$$

erfüllt sind, die zum Ausdruck bringen, daß auch die transformierten Hilfsflächen $(\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1, \bar{\zeta}_1)$ und $(\bar{\xi}'_1, \bar{\eta}'_1, \bar{\zeta}'_1)$ polarreziprok in bezug auf die imaginäre Einheitskugel um den Nullpunkt sind. Multipliziert man die beiden ersten Formeln (4) mit $\bar{\xi}'_1$, die beiden anderen mit $\bar{\xi}_1$ und addiert jedesmal die analogen Beziehungen, so findet man mit Benutzung von (5):

$$(6)\quad \begin{cases} -R_\alpha = -R\sum \bar{\xi}'_1 \xi_\alpha + R_\alpha \sum \bar{\xi}'_1 \xi, & -R_\beta = R\sum \bar{\xi}'_1 \xi_\beta - R_\beta \sum \bar{\xi}'_1 \xi, \\ -R_\alpha = -R\sum \bar{\xi}_1 \xi'_\alpha + R_\alpha \sum \bar{\xi}_1 \xi', & -R_\beta = R\sum \bar{\xi}_1 \xi'_\beta - R_\beta \sum \bar{\xi}_1 \xi'. \end{cases}$$

Da $\Delta = (\xi, \xi_\alpha, \xi_\beta) = -e^\theta \neq 0$ ist, ist für $\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1, \bar{\zeta}_1$ ein Ansatz von der Form

$$\bar{\xi}_1 = l\,\xi_\alpha + m\,\xi_\beta + n\,\xi \quad \text{usw.}$$

statthaft; entsprechend kann man

$$\bar{\xi}_1 = l'\,\xi'_\alpha + m'\,\xi'_\beta + n'\,\xi' \quad \text{usw.}$$

setzen. Mittels der Relationen von § 2, **2** gewinnt man dann aus (6):

$$l = -(n+1)e^{-\theta}\frac{R_\beta}{R}, \qquad m = -(n-1)e^{-\theta}\frac{R_\alpha}{R},$$

$$l' = -(n'+1)e^{-\theta}\frac{R_\beta}{R}, \qquad m' = -(n'-1)e^{-\theta}\frac{R_\alpha}{R}.$$

Die erste der Relationen (5) läßt sich jetzt in die folgende verwandeln:

$$(nn'-1)\left(2e^{-\theta}\frac{R_\alpha R_\beta}{R^2} - 1\right) = 0.$$

Das identische Verschwinden der zweiten Klammer wäre mit der Differentialgleichung

$$(7)\qquad \theta_{\alpha\beta} = e^\theta - e^{-2\theta}$$

unvereinbar[24]); es muß also $n' = \frac{1}{n}$ sein. Demnach bestehen Formeln von der folgenden Gestalt:

---

[24]) Differentiiert man nämlich die Gleichung $2R_\alpha R_\beta = e^\theta R^2$ nach α, so ergibt sich: $2R_{\alpha\alpha}R_\beta = e^\theta \theta_\alpha R^2$, also: $R_{\alpha\alpha} = \theta_\alpha R_\alpha$. Differentiiert man abermals nach β, so wird

$$(e^\theta R)_\alpha = \theta_{\alpha\beta} R_\alpha + \theta_\alpha e^\theta R,$$

also: $\theta_{\alpha\beta} = e^\theta$ im Widerspruch mit (7).

$$(8)\qquad \begin{cases} \bar{\xi}_1 = n\left\{\xi - \dfrac{e^{-\theta}}{R}\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)R_\beta\,\xi_\alpha + \left(1-\dfrac{1}{n}\right)R_\alpha\,\xi_\beta\right]\right\}, \\ \bar{\xi}'_1 = \dfrac{1}{n}\left\{\xi' - \dfrac{e^{-\theta}}{R}\left[(1+n)\,R_\beta\,\xi'_\alpha + (1-n)\,R_\alpha\,\xi'_\beta\right]\right\}. \end{cases}$$

Setzt man den ersten dieser beiden Ausdrücke wieder in die Differentialrelationen (4) der Moutardschen Transformation ein, die man hierzu zweckmäßig in der Form

$$(R\,\bar{\xi}_1)_\alpha + R\,\xi_\alpha - R_\alpha\,\xi = 0, \qquad (R\,\bar{\xi}_1)_\beta - R\,\xi_\beta + R_\beta\,\xi = 0$$

schreibt, und drückt darauf die zweiten Ableitungen von ξ an der Hand von § 2 (10) durch ξ, ξ_α, ξ_β aus, so findet man, da wegen $\varDelta \neq 0$ die Faktoren von ξ, ξ_α, ξ_β einzeln verschwinden müssen:

$$n_\alpha = 0, \qquad n_\beta = 0, \quad \text{also} \quad n = \text{konst.}$$

und außerdem zwei neue Differentialgleichungen für R, zu denen wir (3) wieder hinzunehmen:

$$(9)\qquad \begin{cases} R_{\alpha\alpha} = \theta_\alpha R_\alpha + \dfrac{1+n}{1-n}\,e^{-\theta}\,R_\beta, \\ R_{\alpha\beta} = e^\theta R, \\ R_{\beta\beta} = \dfrac{1-n}{1+n}\,e^{-\theta}\,R_\alpha + \theta_\beta\,R_\beta. \end{cases}$$

Das zweite Formelpaar (4) führt zu demselben Ergebnis. Die *willkürliche* Konstante n muß von 0 und 1 verschieden sein.

2. Es sei also R ein Integral des nach § 4, 2 unbeschränkt integrablen Systems (9), auf das Tzitzéica die Transformation der durch $\dfrac{K}{W^4} = \text{konst.}$ charakterisierten Flächen zurückgeführt hat. Es fragt sich jetzt, wie weit die nach (8) mit Hilfe von R gebildeten Größen $\bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}'_1, \ldots$ den Bedingungen von § 2 entsprechen. Zunächst wissen wir, daß die Differentialrelationen (4) der Moutardschen Transformation *erfüllt* sind, und schließen auf Grund der bekannten Eigenschaften derselben, daß

$$(10)\qquad (\bar{\xi}_1)_{\alpha\beta} = e^{\theta_1}\bar{\xi}_1, \qquad (\bar{\xi}'_1)_{\alpha\beta} = e^{\theta_1}\bar{\xi}'_1$$

wird, wobei

$$e^{\theta_1} = R\left(\frac{1}{R}\right)_{\alpha\beta} = -\,e^\theta + 2\,\frac{R_\alpha R_\beta}{R^2}$$

ist. Wir bestätigen mittels (8) die Beziehung

$$(11)\qquad \sum \bar{\xi}_1\,\bar{\xi}'_1 = -1$$

und bilden die Hilfsformeln:

$$(12)\qquad \sum \bar{\xi}_1\,\xi' = -n, \qquad \sum \bar{\xi}'_1\,\xi = -\frac{1}{n},$$

$$(13)\quad \begin{cases} \sum \bar{\xi}_1 \xi'_\alpha = -(n-1)\frac{R_\alpha}{R}, & \sum \bar{\xi}_1 \xi'_\beta = -(n+1)\frac{R_\beta}{R}, \\ \sum \bar{\xi}'_1 \xi_\alpha = -\left(\frac{1}{n}-1\right)\frac{R_\alpha}{R}, & \sum \bar{\xi}'_1 \xi_\beta = -\left(\frac{1}{n}+1\right)\frac{R_\beta}{R}, \end{cases}$$

Wir multiplizieren nun das erste Gleichungspaar (4) mit $\bar{\xi}'_1$, das zweite mit $\bar{\xi}_1$, addieren jedesmal die beiden analogen Relationen und finden, indem wir (11), (12) und (13) beachten:

$$(14)\quad \sum(\bar{\xi}_1)_\alpha \bar{\xi}'_1 = 0, \quad \sum(\bar{\xi}_1)_\beta \bar{\xi}'_1 = 0, \quad \sum(\bar{\xi}'_1)_\alpha \bar{\xi}_1 = 0, \quad \sum(\bar{\xi}'_1)_\beta \bar{\xi}_1 = 0.$$

Damit sind die Formeln (5) verifiziert, die uns zur Spezialisiernng der Moutardschen Transformation gedient haben. Wir multiplizieren ferner jede Gleichung des esten Paares (4) mit jeder des zweiten, addieren wieder die analogen Relationen und erhalten nach entsprechenden Reduktionen:

$$(15)\quad \sum(\bar{\xi}_1)_\alpha (\bar{\xi}'_1)_\alpha = 0, \qquad \sum(\bar{\xi}_1)_\beta (\bar{\xi}'_1)_\beta = 0,$$

$$(16)\quad \sum(\bar{\xi}_1)_\alpha (\bar{\xi}'_1)_\beta = \sum(\bar{\xi}_1)_\beta (\bar{\xi}'_1)_\alpha = -e^\theta + 2\frac{R_\alpha R_\beta}{R^2} = e^{\theta_1}.$$

Auf den beiden neuen Flächen $(\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1, \bar{\zeta}_1)$ und $(\bar{\xi}'_1, \bar{\eta}'_1, \bar{\zeta}'_1)$ wird das Kurvennetz (α, β), wie aus (15) hervorgeht, wiederum von den Asymptotenlinien gebildet. Es bestehen demnach wie in § 2 Beziehungen von der Form:

$$(17)\quad (\bar{\xi}_1)_{\alpha\alpha} = (\theta_1)_\alpha (\bar{\xi}_1)_\alpha + p_1 (\bar{\xi}_1)_\beta,$$

und wir wissen, daß p_1 sich von $e^{-\theta_1}$ nur durch einen von α allein abhängigen Faktor unterscheiden kann. Es ist von Wichtigkeit, festzustellen, daß $p_1 = e^{-\theta_1}$ ist. Zu diesem Zwecke differentiieren wir die erste der Differentialrelationen (4) nach α und drücken dabei $(\bar{\xi}_1)_{\alpha\alpha}$ durch (17) sowie $\xi_{\alpha\alpha}$ durch § 2 (10) aus. Multiplizieren wir sodann mit $(\bar{\xi}'_1)_\alpha$ und addieren die beiden analogen Gleichungen, so folgt mit Berücksichtigung von (14), (15) und (16):

$$(18)\quad R p_1 e^{\theta_1} = -R\theta_\alpha \sum(\bar{\xi}'_1)_\alpha \xi_\alpha - R e^{-\theta} \sum(\bar{\xi}'_1)_\alpha \xi_\beta + R_{\alpha\alpha} \sum(\bar{\xi}'_1)_\alpha \xi.$$

Die drei hier auftretenden Summen erhält man, indem man für $(\bar{\xi}'_1)_\alpha$ den durch (4) gegebenen Ausdruck benutzt und von den Formeln (13) Gebrauch macht:

$$\sum(\bar{\xi}'_1)_\alpha \xi_\alpha = \frac{1-n}{n}\left(\frac{R_\alpha}{R}\right)^2, \qquad \sum(\bar{\xi}'_1)_\alpha \xi_\beta = \frac{1+n}{n}\frac{R_\alpha R_\beta}{R^2} - e^\theta.$$

$$\sum(\bar{\xi}'_1)_\alpha \xi = -\sum \bar{\xi}'_1 \xi_\alpha = \frac{1-n}{n}\frac{R_\alpha}{R}.$$

Setzt man diese Werte, ebenso den aus (9) entnommenen Ausdruck für $R_{\alpha\alpha}$ in (18) ein, so ergibt sich tatsächlich $p_1 = e^{-\theta_1}$.

Auf die gleiche Weise bilden wir $(\bar{\xi}_1)_{\beta\beta}$ und erhalten so das System:

$$(\xi_1)_{\alpha\alpha} = (\theta_1)_\alpha (\bar{\xi}_1)_\alpha + e^{-\theta_1}(\bar{\xi}_1)_\beta, \qquad (\bar{\xi}_1)_{\alpha\beta} = e^{\theta_1}\bar{\xi}_1,$$
$$(\bar{\xi}_1)_{\beta\beta} = e^{-\theta_1}(\xi_1)_\alpha + (\theta_1)_\beta(\bar{\xi}_1)_\beta,$$

aus dem wir unter Bezugnahme auf § 2 unmittelbar schließen, daß

$$(\theta_1)_{\alpha\beta} = e^{\theta_1} - e^{-2\theta_1}$$

wird, daß also *durch*

$$e^{\theta_1} = -e^{\theta} + 2\frac{R_\alpha R_\beta}{R^2} \tag{19}$$

ein neues Integral θ_1 *der partiellen Differentialgleichung* (7) *gegeben ist*[25]).

Um endlich den Wert der Determinante

$$\bar{\Delta}_1 = (\bar{\xi}_1, (\bar{\xi}_1)_\alpha, (\xi_1)_\beta)$$

zu berechnen, bestimmen wir $(\bar{\xi}_1)_\alpha$ und $(\bar{\xi}_1)_\beta$ aus (4) und ersetzen nachträglich $\bar{\xi}_1$ durch den Ausdruck (8). Wir erhalten:

$$\bar{\Delta}_1 = \left(n\xi - (n+1)e^{-\theta}\frac{R_\beta}{R}\xi_\alpha - (n-1)e^{-\theta}\frac{R_\alpha}{R}\xi_\beta,\ \frac{R_\alpha}{R}\xi - \xi_\alpha,\ -\frac{R_\beta}{R}\xi + \xi_\beta\right)$$

$$= (\xi, \xi_\alpha, \xi_\beta)\begin{vmatrix} n, & -(n+1)e^{-\theta}\frac{R_\beta}{R}, & -(n-1)e^{-\theta}\frac{R_\alpha}{R} \\ \frac{R_\alpha}{R}, & -1, & 0 \\ \frac{R_\beta}{R}, & 0, & 1 \end{vmatrix} = -n\Delta\left(2e^{-\theta}\frac{R_\alpha R_\beta}{R^2} - 1\right)$$

und weiter, indem wir (19) sowie die Relation $\Delta = -e^{\theta}$ beachten:

$$\bar{\Delta} = -n e^{\theta_1}. \tag{20}$$

Analog wird:

$$\bar{\Delta}_1' = (\bar{\xi}_1', (\bar{\xi}_1')_\alpha, (\bar{\xi}_1')_\beta) = -\frac{1}{n}e^{\theta_1}, \tag{21}$$

wovon wir uns am einfachsten durch Multiplikation der beiden Determinanten $\bar{\Delta}_1$ und $\bar{\Delta}_1'$ überzeugen.

Die Formeln (20) und (21) unterscheiden sich von § 2 (11) und (15) durch das Auftreten der Faktoren n und $\frac{1}{n}$. Wir lassen deshalb an die

---

[25]) Dieser Satz wurde bereits von Tzitzéica [s. die erste der unter [1]) zitierten Noten] ausgesprochen. Den direkten rechnerischen Nachweis findet man in § 3 meiner unter [3]) genannten Arbeit.

Stelle der durch die gemeinsame Moutardsche Transformation gewonnenen $\bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_1', \ldots$ die neuen Größen:

$$
(22) \qquad \begin{cases} \xi_1 = n^{-1/3}\,\bar{\xi}_1, & \eta_1 = n^{-1/3}\,\bar{\eta}_1, & \zeta_1 = n^{-1/3}\,\bar{\zeta}_1, \\ \xi_1' = n^{1/3}\,\bar{\xi}_1', & \eta_1' = n^{1/3}\,\bar{\eta}_1', & \zeta_1 = n^{1/3}\,\bar{\zeta}_1' \end{cases}
$$

treten, für die die auf entsprechende Weise gebildeten Determinanten $\Delta_1 = \Delta_1' = -\,e^{\theta_1}$ werden. *Überhaupt gelten jetzt die Relationen von* § 2 *ausnahmslos für den Index* 1.

Hiernach sind die Koordinaten der neuen Biegungsfläche (x_1, y_1, z_1) vom Typus (1), wenn

$$\sum \xi_1^2 = u_1, \qquad \sum \xi_1'^2 = v_1$$

gesetzt wird, zunächst durch die Formeln

$$(23) \qquad x_1 = \frac{3}{2}\int (\xi_1\,du_1 + \xi_1'\,dv_1) \quad \text{usw.}$$

gegeben. In bezug auf (22) ist zu bemerken, daß nach § 4, **1** kein unmittelbarer Anlaß vorzuliegen scheint, die drei Größen eines jeden der beiden Tripel mit dem gleichen normierenden Faktor $n^{-1/3}$ bzw. $n^{1/3}$ zu versehen. Tatsächlich erweist sich aber gerade dieser Schritt als bedeutungsvoll. Er gestattet nämlich, wie jetzt gezeigt werden soll, die Beseitigung der Quadraturen (23), die eine wesentliche Voraussetzung für ein tieferes Eindringen in die geometrische Natur unserer Transformation darstellt.

3. Wir führen unter Hinweis auf § 1, **3** und § 3, **3** die zu der neuen Biegungsfläche (x_1, y_1, z_1) gehörige *dritte Hilfsfläche* $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{z}_1)$ ein, die durch

$$(24) \qquad \mathfrak{x}_1 = x_1 - u_1\,\xi_1 - v_1\,\xi_1'$$

gegeben ist und nach § 3 (5) die Darstellung:

$$\mathfrak{x}_1 = \langle \eta_1, \zeta_1' \rangle + \langle \eta_1', \zeta_1 \rangle$$

zuläßt. Es sei zunächst festgestellt, daß die letzte Formel sich auch in der Gestalt:

$$(25) \qquad \mathfrak{x}_1 = \langle \bar{\eta}_1, \bar{\zeta}_1' \rangle + \langle \bar{\eta}_1', \bar{\zeta}_1 \rangle$$

schreiben läßt. Erinnert sei überdies an diejenige fundamentale Eigenschaft der Moutardschen Transformation, auf die Guichard die Konstruktion der W-Kongruenzen zu einem gegebenen Brennflächenmantel gegründet hat. Sind nämlich φ und ψ zwei Integrale einer Moutardschen Gleichung und φ_1, ψ_1 die Ergebnisse einer gemeinsamen Moutardschen Transformation[26]),

[26]) Ist R die transformierende Funktion, so können die Ergebnisse der Moutardschen Transformation mittels unseres Symbols in der Form $\varphi_1 = \frac{1}{R}\langle R, \varphi\rangle$, $\psi_1 = \frac{1}{R}\langle R, \psi\rangle$ geschrieben werden.

so kann in dem Ausdruck $\langle\varphi_1, \psi_1\rangle$ über die additive Integrationskonstante so verfügt werden, daß

$$\langle\varphi_1, \psi_1\rangle = \langle\varphi, \psi\rangle + \varphi_1\psi - \psi_1\varphi \tag{26}$$

wird [27]).

Danach folgt aus (25) im Verein mit § 3 (5):

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_1 &= \mathfrak{x} + \bar\eta_1\zeta' - \bar\xi_1\eta' + \bar\eta_1'\zeta - \bar\xi_1'\eta \\ &= \mathfrak{x} + n^{1/3}(\eta_1\zeta' - \zeta_1\eta') + n^{-1/3}(\eta_1'\zeta - \zeta_1'\eta), \end{aligned} \tag{27}$$

so daß man x_1 mittels (24) ohne Quadraten erhält.

Wir sind jetzt in der Lage, den Übergang von der gegebenen zur neuen Biegungsfläche, den wir als *Transformation* Θ_n bezeichnen, zusammenfassend, wie folgt, zu beschreiben:

Es sei (x, y, z) *eine auf ihre Asymptotenlinien* (α, β) *bezogene Biegungsfläche vom Typus*

$$ds^2 = \frac{9}{4}(u\,du^2 - 2\,du\,dv + v\,dv^2);$$

es seien $\xi = \frac{2}{3}x_u, \ldots, \xi' = \frac{2}{3}x_v, \ldots$ *die 6 Hilfsgrößen, die sich als Koordinaten zweier polarreziproker Flächen* (ξ, η, ζ) *und* (ξ', η', ζ') *der Tzitzéicaschen Klasse auffassen lassen. Ist* R *ein Integral des unbeschränkt integrablen Systems:*

$$R_{\alpha\alpha} = \theta_\alpha R_\alpha + \frac{1+n}{1-n}e^{-\theta}R_\beta, \quad R_{\alpha\beta} = e^\theta R, \quad R_{\beta\beta} = \frac{1-n}{1+n}e^{-\theta}R_\alpha + \theta_\beta R_\beta, \tag{28}$$

in dem n *eine von* 0 *und* 1 *verschiedene Konstante bedeutet, so bilde man* ξ_1, η_1, ζ_1 *und* $\xi_1', \eta_1', \zeta_1'$ *auf Grund der Formeln:*

$$\left\{\begin{aligned} \xi_1 &= n^{2/3}\left\{\xi - \frac{e^{-\theta}}{R}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)R_\beta\xi_\alpha + \left(1-\frac{1}{n}\right)R_\alpha\xi_\beta\right]\right\}, \text{[28]} \\ \xi_1' &= n^{-2/3}\left\{\xi' - \frac{e^{-\theta}}{R}\left[(1+n)R_\beta\xi_\alpha' + (1-n)R_\alpha\xi_\beta'\right]\right\}. \end{aligned}\right. \tag{29}$$

---

[27]) Aus drei Lösungen der Moutardschen Gleichung und ihren Transformierten erhält man die beiden auf die Asymptotenlinien bezogenen Flächen $x = \langle\eta, \zeta\rangle, \ldots$ und $x_1 = \langle\eta_1, \zeta_1\rangle, \ldots$. Aus (26) folgt dann: $x_1 - x = \eta_1\zeta - \zeta_1\eta$ usw., d. h. die Tatsache, daß (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1) die Brennflächenmäntel einer Kongruenz sind.

[28]) Wir haben bereits erwähnt, daß nach Tzitzéica [s. wieder unter [1])] von den Differentialgleichungen 28) die *asymptotische* Transformation abhängt, die eine Fläche (ξ, η, ζ) der durch die Relation $\frac{K}{W^4} = \text{konst.}$ ausgezeichneten Klasse in eine Fläche der gleichen Art — sie sei hier mit $(\hat\xi_1, \hat\eta_1, \hat\zeta_1)$ bezeichnet — überführt. Für die Berechnung der transformierten Fläche gibt Tzitzéica die Formel:

$$\hat\xi_1 = \xi - \frac{e^{-\theta}}{R}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)R_\beta\xi_\alpha + \left(1-\frac{1}{n}\right)R_\alpha\xi_\beta\right]$$

(Fortsetzung der Fußnote 28 auf nächster Seite)

Wird

$$\sum \xi_1^2 = u_1, \quad \sum \xi_1'^2 = v_1$$

gesetzt, so stellen

$$(3)\quad \begin{cases} x_1 = x + u_1\xi_1 + v_1\xi_1' - u\xi - v\xi' + n^{1/3}(\eta_1\zeta' - \zeta_1\eta') + n^{-1/3}(\eta_1'\zeta - \zeta_1'\eta), \\ y_1 = y + u_1\eta_1 + v_1\eta_1' - u\eta - v\eta' + n^{1/3}(\zeta_1\xi' - \xi_1\zeta') + n^{-1/3}(\zeta_1'\xi - \xi_1'\zeta), \\ z_1 = z + u_1\zeta_1 + v_1\zeta_1' - u\zeta - v\zeta' + n^{1/3}(\xi_1\eta' - \eta_1\xi') + n^{-1/3}(\xi_1'\eta - \eta_1'\xi) \end{cases}$$

die laufenden Koordinaten einer neuen Biegungsfläche vom gleichen Typus dar, für die

$$dx_1 = \frac{3}{2}(\xi_1\, du_1 + \xi_1'\, dv_1) \text{ usw.}$$

und

$$\sum dx_1^2 = \frac{9}{4}(u_1\, du_1^2 - 2\, du_1\, dv_1 + v_1\, dv_1^2)$$

wird.

Was den Grad der Allgemeinheit der Transformation Θ_n anbetrifft, so ist zu beachten, daß das System (28) drei linear-unabhängige Integrale besitzt, mittels derer sich jedes weitere Integral in der Form

$$R = c_1 R_1 + c_2 R_2 + c_3 R_3$$

darstellen läßt. Die Formeln (29) enthalten nur die Verhältnisse der drei Konstanten. Bei *gegebenem* n liefert also die Transformation Θ_n zu einer gegebenen Biegungsfläche ∞^2 neue. Ohne nähere Ausführungen sei noch die an der Hand der voraufgehenden Entwicklungen leicht erweisbare Tatsache ausgesprochen, daß *die zu* Θ_n *inverse Transformation eine* $\Theta_{\frac{1}{n}}$ *ist.* Insbesondere genügt also $\frac{1}{R}$ einem System von Differentialgleichungen, das aus (28) hervorgeht, wenn θ durch θ_1 und n durch $\frac{1}{n}$ ersetzt wird.

4. Die naheliegende, aber auf direktem Wege durchaus nicht mühelos zu erledigende Frage, ob es sich bei der Transformation Θ_n vielleicht auch wieder um eine asymptotische Transformation handelt, braucht uns hier nicht zu beschäftigen, da die Ergebnisse des Schlußparagraphen genügen, um sie im negativen Sinne zu beantworten. Eine erste, höchst interessante geometrische Eigenschaft der Transformation Θ_n knüpft sich an die Ein-

---

(es steht dort c an Stelle von $\frac{1}{n}$), so daß also $\hat{\xi}_1 = n^{-2/3}\xi_1 = \frac{1}{n}\bar{\xi}_1$ ist. Es ist unmittelbar zu ersehen, daß der Punkt $(\hat{\xi}_1, \hat{\eta}_1, \hat{\zeta}_1)$ auf einer Tangente der Fläche (ξ, η, ζ) liegt; daß auch die umgekehrte Beziehung statthat, daß also die Flächen $(\xi, \ldots)$ und $(\hat{\xi}_1, \ldots)$ Brennflächen einer Strahlenkongruenz sind, erkennt man leicht, indem man mittels (13) bestätigt, daß $\sum(\hat{\xi}_1 - \xi)\,\bar{\xi}_1' = 0$ wird. Hervorgehoben sei übrigens, daß der Wert des Bruches $\frac{K}{W^4}$, den wir für die gegebene Fläche $(\xi, \ldots)$ gleich -1 voraussetzen konnten, für die Tzitzéicasche Transformierte notwendig ein anderer, nämlich $-n^4$ wird.

führung der Flächen $(x^{(\nu)}, \ldots)$, deren Punkte, wie erinnerlich, mit den Flächenelementen der Biegungsfläche $(x, \ldots)$ starr gekoppelt, in den Tangentialebenen liegen. Es gilt nun der folgende Satz:

Eine jede mit der gegebenen Biegungsfläche $(x, \ldots)$ *verbundene Fläche* $(x^{(\nu)}, \ldots)$ *und eine zu der transformierten Biegungsfläche* $(x_1, \ldots)$ *gehörige Fläche* $(x_1^{(\nu_1)}, \ldots)$, *für die*

$$\nu_1 = \nu n^{-2/3}$$

ist, bilden die Brennflächen einer W-Kongruenz. Wir können auch sagen: *Bei der Transformation* Θ_n *gehen die sämtlichen Flächen* $(x^{(\nu)}, \ldots)$ *durch simultane asymptotische Transformationen in die Flächen* $(x_1^{(\nu_1)}, \ldots)$ *über.*

Wir beachten nämlich, daß nach § 3 (6) und (7):

$$(31)\qquad \begin{cases} x^{(\nu)} = x - (u - \nu)\,\xi - \left(v - \frac{1}{\nu}\right)\xi' = \mathfrak{x} + \nu\,\xi + \frac{1}{\nu}\,\xi' \\ \qquad = \frac{1}{\nu}\,\langle \eta + \nu\,\eta', \zeta + \nu\,\zeta' \rangle, \\ x_1^{(\nu_1)} = x_1 - (u_1 - \nu_1)\,\xi_2 - \left(v_1 - \frac{1}{\nu_1}\right)\xi_1' = \mathfrak{x}_1 + \nu_1\xi_1 + \frac{1}{\nu_1}\,\xi_1' \\ \qquad = \frac{1}{\nu_1}\,\langle \eta_1 + \nu_1\eta_1', \zeta_1 + \nu_1\zeta_1' \rangle \end{cases}$$

ist. Der Beweis beruht nun auf der unmittelbar zu übersehenden Tatsache, daß $\xi + \nu\,\xi'$ durch die zu R gehörige Moutardsche Transformation in $\bar{\xi}_1 + \nu\,\bar{\xi}_1' = n^{1/3}\xi_1 + \nu\, n^{-1/3}\xi_1'$, also in $n^{1/3}(\xi_1 + \nu_1\xi_1')$ übergeführt wird, wenn $\nu\, n^{-2/3} = \nu_1$ gesetzt wird. Man hat sich aber noch davon zu überzeugen, daß die relative Lage der Flächen $(x^{(\nu)}, \ldots)$ und $(x_1^{(\nu_1)}, \ldots)$ wirklich eine derartige ist, daß die Verbindungslinien ihrer korrespondierenden Punkte gemeinschaftliche Tangenten sind. Hierzu bedarf es der auch später zu benutzenden Relationen:

$$(32)\quad n^{-1/3}\xi_1 - n^{1/3}\xi = \eta_1'\zeta' - \zeta_1'\eta', \qquad n^{1/3}\xi_1' - n^{-1/3}\xi' = \eta_1\zeta - \zeta_1\eta,$$

die man unschwer als Identitäten feststellt, wenn man die den Index 1 tragenden Größen mittels der Formeln (29) ausdrückt. Man folgert nun aus (31):

$$x_1^{(\nu_1)} - x^{(\nu)} = \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x} + \nu\,(n^{-2/3}\xi_1 - \xi) + \frac{1}{\nu}\,(n^{2/3}\xi_1' - \xi')$$

und erhält mit Benutzung von (27) und (32):

$$x_1^{(\nu_1)} - x^{(\nu)} = n^{1/3}\,(\eta_1\,\zeta' - \zeta_1\eta') + n^{-1/3}\,(\eta_1'\zeta - \zeta_1'\eta) + \nu\, n^{-1/3}\,(\eta_1'\zeta' - \zeta_1\eta') \\ + \frac{1}{\nu}\,n^{1/3}\,(\eta_1\zeta - \zeta_1\eta),$$

also:

$$x_1^{(\nu_1)} - x^{(\nu)} = \frac{n^{1/3}}{\nu}\,[(\eta_1 + \nu_1\eta_1')\,(\zeta + \nu\,\zeta') - (\zeta_1 + \nu_1\zeta_1')\,(\eta + \nu\,\eta')]$$

woraus die Richtigkeit der Behauptung hervorgeht.

§ 6.

Der Vertauschbarkeitssatz für die Transformation Θ_n.

1. Zur Aufstellung des Vertauschbarkeitssatzes für unsere Transformation Θ_n gehen wir von dem allgemeinen Bianchischen *Kompositionstheorem für die Moutardschen Transformationen* aus[29]). Dasselbe wird zweckmäßig in der folgenden Form ausgesprochen:

Es seien $\varphi, \psi, \ldots$ beliebig viele Integrale einer Moutardschen Differentialgleichung. Durch zwei weitere Lösungen R_1 und R_2 seien zwei Moutardsche Transformationen definiert, durch die die gegebenen Größen in $\varphi_1, \psi_1, \ldots$ und $\varphi_2, \psi_2, \ldots$ übergeführt werden. Bestimmt man J mittels des Ausdrucks

$$(1)\quad J = \langle R_1, R_2 \rangle = \int \{ -[R_1(R_2)_\alpha - R_2(R_1)_\alpha]\, d\alpha + [R_1(R_2)_\beta - R_2(R_1)_\beta]\, d\beta]\},$$

der eine willkürliche additive Konstante enthält, so gehören zu den Größen

$$(2)\qquad R_{13} = \frac{J}{R_1}, \qquad R_{23} = \frac{J}{R_2},$$

die Lösungen der von $\varphi_1, \psi_1, \ldots$ bzw. von $\varphi_2, \psi_2, \ldots$ erfüllten Moutardschen Gleichungen sind, wiederum zwei Moutardsche Transformationen, durch die aus $\varphi_1, \psi_1, \ldots$ einerseits, aus $\varphi_2, \psi_2, \ldots$, andrerseits einunddieselbe Reihe $\varphi_3, \psi_3, \ldots$ von Integralen einer vierten Moutardschen Gleichung hervorgeht. Dabei berechnen sich $\varphi_3, \psi_3, \ldots$ nach der Formel:

$$(3)\qquad \varphi_3 = \varphi - \frac{R_1 R_2}{J}(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Überdies gilt der folgende Zusatz: *Bei geeigneter Fixierung der dem Symbol $\langle\,\rangle$ anhaftenden Integrationskonstanten bestehen neben den Relationen*

$$(4)\quad \langle \varphi_1, \psi_1 \rangle = \langle \varphi, \psi \rangle + \varphi_1 \psi - \psi_1 \varphi, \quad \langle \varphi_2, \psi_2 \rangle = \langle \varphi, \psi \rangle + \varphi_2 \psi - \psi_2 \varphi$$

die folgenden:

$$(5)\quad \langle \varphi_3, \psi_3 \rangle = \langle \varphi_1, \psi_1 \rangle + \varphi_3 \psi_1 - \psi_3 \varphi_1 = \langle \varphi_2, \psi_2 \rangle + \varphi_3 \psi_2 - \psi_3 \varphi_2,$$

an deren Stelle wegen (3) *und* (4) *die Gleichung*

$$(6)\qquad \langle \varphi_3, \psi_3 \rangle = \langle \varphi, \psi \rangle - \frac{R_1 R_2}{J}(\varphi_1 \psi_2 - \psi_1 \varphi_2)$$

treten kann.

Auf diesen Zusatz gründet sich die geometrische Deutung des Kompositionstheorems im Falle dreier gegebener Integrale ξ, η, ζ. Sie führt bekanntlich zur Konstruktion der Quadrupel von W-Kongruenzen, die aus ∞^2 windschiefen Vierecken bestehen, deren Ecken die einander zugeordneten

---

[29]) Bianchi, Lezioni di geometria diff. 2 (1903), §§ 247 u. 248.

Punkte und deren Seiten Tangenten von vier Flächen mit korrespondierenden Asymptotenlinien bilden. Bei dem uns beschäftigenden Problem handelt es sich um die Transformationen eines Systems von sechs Integralen $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$. Auch hier ist der leitende Gedanke wieder der, statt mit den Biegungsflächen selber zunächst mit den zugehörigen *dritten* Hilfsflächen zu operieren, für die die erweiterten Lelieuvreschen Formeln § 3 (5) gelten.

2. Die betrachtete Biegungsfläche $(x, \ldots)$ vom Typus § 5 (1) werde also zwei Transformationen Θ_{n_1} und Θ_{n_2} unterworfen, die durch zwei Integrale R_1 und R_2 des für $n = n_1$ und $n = n_2$ geschriebenen Systems (28) von § 5 definiert sein mögen. Dann ist nach § 5 (29):

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \xi_1 &= n_1^{2/3}\left\{\xi - \frac{e^{-\theta}}{R_1}\left[\left(1+\frac{1}{n_1}\right)(R_1)_\beta\,\xi_\alpha + \left(1-\frac{1}{n_1}\right)(R_1)_\alpha\,\xi_\beta\right]\right\},\\ \xi_1' &= n_1^{-2/3}\left\{\xi' - \frac{e^{-\theta}}{R_1}\left[(1+n_1)(R_1)_\beta\,\xi_\alpha' + (1-n_1)(R_1)_\alpha\,\xi_\beta'\right]\right\},\\ \xi_2 &= n_2^{2/3}\left\{\xi - \frac{e^{-\theta}}{R_2}\left[\left(1+\frac{1}{n_2}\right)(R_2)_\beta\,\xi_\alpha + \left(1-\frac{1}{n_2}\right)(R_2)_\alpha\,\xi_\beta\right]\right\},\\ \xi_2' &= n_2^{-2/3}\left\{\xi' - \frac{e^{-\theta}}{R_2}\left[(1+n_2)(R_2)_\beta\,\xi_\alpha' + (1-n_2)(R_2)_\alpha\,\xi_\beta'\right]\right\}; \end{aligned}\right.$$

dazu kommen die Formeln:

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_1 &= \mathfrak{x} + n_1^{1/3}(\eta_1\zeta' - \zeta_1\eta') + n_1^{-1/3}(\eta_1'\zeta - \zeta_1'\eta),\\ x_1 &= \mathfrak{x}_1 + u_1\,\xi_1 + v_1\,\xi_1' \qquad (u_1 = \Sigma\,\xi_1^2,\quad v_1 = \Sigma\,\xi_1'^2) \end{aligned}$$

und entsprechende für den Index 2.

Es soll nun gezeigt werden, daß *bei geeigneter Festsetzung der in J enthaltenen verfügbaren Konstante* die Anwendung des allgemeinen Kompositionstheorems für die Moutardschen Transformationen sechs Größen $\xi_3, \eta_3, \zeta_3, \xi_3', \eta_3', \zeta_3'$ liefert, aus denen sich eine vierte Biegungsfläche $(x_3, \ldots)$ konstruieren läßt, und außerdem, daß diese vierte Biegungsfläche $(x_3, \ldots)$ aus $(x_1, \ldots)$ mittels einer Transformation Θ_{n_2} und aus $(x_2, \ldots)$ mittels einer Θ_{n_1} hervorgeht. Die charakteristischen Konstanten n_1 und n_2 erscheinen dabei also *vertauscht*.

Auf die normierenden Faktoren ist besonders Bedacht zu nehmen. Es geht nämlich durch die mit den ursprünglichen Transformationen Θ_{n_1} und Θ_{n_2} gleichbedeutenden, zu R_1 und R_2 gehörigen Moutardschen Transformationen

$$\begin{aligned} &\xi \text{ in } n_1^{1/3}\,\xi_1 \quad \text{und in} \quad n_2^{1/3}\,\xi_2,\\ &\xi' \text{ in } n_1^{-1/3}\,\xi_1' \quad \text{und in} \quad n_2^{-1/3}\,\xi_2' \end{aligned}$$

über. Das veranlaßt uns, von vornherein das gemeinsame Ergebnis der beiden weiteren, von R_{13} und R_{23} (siehe (2)) abhängigen Moutardschen

Transformationen, denen $n_1^{1/3}\xi_1$ und $n_1^{-1/3}\xi_1'$ bzw. $n_2^{1/3}\xi_2$ und $n_2^{-1/3}\xi_2'$ unterworfen werden, mit $n_1^{1/3}n_2^{1/3}\xi_3$ und $n_1^{-1/3}n_2^{-1/3}\xi_3'$ zu bezeichnen. Wir definieren also an Hand der Formeln (1), (2) und (3) ξ_3 und ξ_3' durch die Ausdrücke:

$$(8)\qquad \begin{cases} \xi_3 = n_1^{-1/3} n_2^{-1/3}\left[\xi - \dfrac{R_1 R_2}{J}(n_1^{1/3}\xi_1 - n_2^{1/3}\xi_2')\right], \\ \xi_3' = n_1^{1/3} n_2^{1/3}\left[\xi' - \dfrac{R_1 R_2}{J}(n_1^{-1/3}\xi_1' - n_2^{-1/3}\xi_2')\right]. \end{cases}$$

Der Beweis des Vertauschbarkeitssatzes wird erbracht sein, wenn es uns gelingt, diese Größen als Ergebnisse zweier Transformationen Θ_{n_1} und Θ_{n_2}, also in jeder der beiden folgenden Formen darzustellen:

$$(9)\qquad \begin{cases} \xi_3 = n_2^{2/3}\left\{\xi_1 - \dfrac{e^{-\theta_1}}{R_{13}}\left[\left(1+\dfrac{1}{n_2}\right)(R_{13})_\beta(\xi_1)_\alpha + \left(1-\dfrac{1}{n_2}\right)(R_{13})_\alpha(\xi_1)_\beta\right]\right\}, \\ \xi_3' = n_2^{-2/3}\left\{\xi_1' - \dfrac{e^{-\theta_1}}{R_{13}}[(1+n_2)(R_{13})_\beta(\xi_1')_\alpha + (1-n_2)(R_{13})_\alpha(\xi_1')_\beta]\right\}, \\ \xi_3 = n_1^{2/3}\left\{\xi_2 - \dfrac{e^{-\theta_2}}{R_{23}}\left[\left(1+\dfrac{1}{n_1}\right)(R_{23})_\beta(\xi_2)_\alpha + \left(1-\dfrac{1}{n_1}\right)(R_{13})_\alpha(\xi_2)_\beta\right]\right\}, \\ \xi_3' = n_1^{-2/3}\left\{\xi_2' - \dfrac{e^{-\theta_2}}{R_{23}}[(1+n_1)(R_{23})_\beta(\xi_2')_\alpha + (1-n_1)(R_{23})_\alpha(\xi_2')_\beta]\right\}. \end{cases}$$

Es genügt dann nämlich, die zu § 5 (4) analogen, infolge des allgemeinen Kompositionstheorems sicher bestehenden Differentialrelationen der durch R_{13} und R_{23} definierten Moutardschen Transformationen hinzuzunehmen, um im Hinblick auf die Entwicklungen von § 5 unmittelbar schließen zu können, daß R_{13} und R_{23} die beiden Systeme von Differentialgleichungen:

$$(R_{13})_{\alpha\alpha} = (\theta_1)_\alpha(R_{13})_\alpha + \frac{1+n_2}{1-n_2}e^{-\theta_1}(R_{13})_\beta \quad \text{usw.},$$
$$(R_{23})_{\alpha\alpha} = (\theta_2)_\alpha(R_{23})_\alpha + \frac{1+n_1}{1-n_1}e^{-\theta_1}(R_{23})_\beta \quad \text{usw.}$$

erfüllen, durch die die beiden Transformationen als eine Θ_{n_2} und eine Θ_{n_1} gekennzeichnet werden.

Wir begnügen uns damit, von den fraglichen Formeln (9) die erste auf Grund der dem J noch aufzuerlegenden Bedingung zu bestätigen; bei den übrigen hätte man entsprechend zu verfahren. Berücksichtigt man, daß $\Delta_1' = (\xi_1', (\xi_1')_\alpha, (\xi_1')_\beta) = -e^{\theta_1} \neq 0$ ist und daß die zu § 2 (3) und (4) analogen Relationen

$$\sum \xi_1\xi_1' = -1, \qquad \sum \xi_1(\xi_1')_\alpha = \sum \xi_1(\xi_1')_\beta = 0,$$
$$\sum (\xi_1)_\alpha(\xi_1')_\alpha = \sum (\xi_1)_\beta(\xi_1')_\beta = 0, \qquad \sum (\xi_1)_\alpha(\xi_1')_\beta = \sum (\xi_1)_\beta(\xi_1')_\alpha = e^{\theta_1}$$

bestehen, so wird ersichtlich, daß man die zu bestätigende Formel für ξ_3

samt den beiden entsprechenden für η_3 und ζ_3 durch das vollkommen gleichwertige System der drei Gleichungen:

$$(10)\begin{cases} \sum \xi_3 \xi_1' = -n_2^{2/3}, \\ \sum \xi_3 (\xi_1')_\alpha = -n_2^{2/3}\left(1-\frac{1}{n_2}\right)\frac{(R_{13})_\alpha}{R_{13}}, \quad \sum \xi_3 (\xi_1')_\beta = -n_2^{2/3}\left(1+\frac{1}{n_2}\right)\frac{(R_{13})_\beta}{R_{13}} \end{cases}$$

ersetzen kann. Es handelt sich also darum, durch Einführen des Ausdrucks (8) für ξ_3 hieraus Identitäten zu machen. Um die erforderlichen Reduktionen vornehmen zu können, gebrauchen wir eine Reihe von Hilfsformeln. Man findet zunächst:

$$(11)\ \sum \xi \xi_1 = -n_1^{-2/3}, \ \sum \xi_1 \xi_1' = -1, \ \sum \xi_2 \xi_1' = -n_1^{1/3} n_2^{-1/3} + n_1^{-2/3} n_2^{-1/3} \frac{\Psi}{R_1 R_2},$$

wobei

$$(12)\qquad \Psi = (1-n_1 n_2)\, e^{-\theta}\left[(R_1)_\alpha (R_2)_\beta - (R_1)_\beta (R_2)_\alpha\right] + (n_1 - n_2)\left[R_1 R_2 - e^{-\theta}\left((R_1)_\alpha (R_2)_\beta + (R_1)_\beta (R_2)_\alpha\right)\right]$$

ist. Es wird ferner:

$$(13)\qquad \begin{cases} \sum \xi (\xi_1')_\alpha = -\sum \xi_\alpha \xi_1' = n_1^{-2/3}(1-n_1)\frac{(R_1)_\alpha}{R_1}, \\ \sum \xi (\xi_1')_\beta = n_1^{-2/3}(1+n_1)\frac{(R_1)_\beta}{R_1}. \end{cases}$$

Wir bilden schließlich $\sum \xi_2 (\xi_1')_\alpha$ und $\sum \xi_2 (\xi_1')_\beta$, indem wir berücksichtigen, daß nach § 5 (4) und (22)

$$(14)\qquad \begin{cases} (\xi_1')_\alpha = -\frac{(R_1)_\alpha}{R_1}\xi_1' - n_1^{1/3}\left(\xi_\alpha' - \frac{(R_1)_\alpha}{R_1}\xi'\right), \\ (\xi_1')_\beta = -\frac{(R_1)_\beta}{R_1}\xi_1' + n_1^{1/3}\left(\xi_\beta' - \frac{(R_1)_\beta}{R_1}\xi'\right) \end{cases}$$

ist, und uns alsdann zur Ausführung der Summen der letzten Formel (11) sowie der folgenden leicht zu bestätigenden Beziehungen bedienen:

$$\sum \xi_2 \xi' = -n_2^{2/3}, \qquad \sum \xi_2 \xi_\alpha' = -n_2^{2/3}\left(1-\frac{1}{n_2}\right)\frac{(R_2)_\alpha}{R_2},$$
$$\sum \xi_2 \xi_\beta' = -n_2^{2/3}\left(1+\frac{1}{n_2}\right)\frac{(R_2)_\beta}{R_2}.$$

Es ergibt sich so das Formelpaar

$$(15)\qquad \begin{cases} \sum \xi_2 (\xi_1')_\alpha = -n_1^{1/3} n_2^{2/3}\left(1-\frac{1}{n_2}\right)\frac{J_\alpha}{R_1 R_2} - n_1^{-2/3} n_2^{-1/3}\frac{(R_1)_\alpha}{R_1^2 R_2}\Psi, \\ \sum \xi_2 (\xi_1')_\beta = -n_1^{1/3} n_2^{2/3}\left(1+\frac{1}{n_2}\right)\frac{J_\beta}{R_1 R_2} - n_1^{-2/3} n_2^{-1/3}\frac{(R_1)_\beta}{R_1^2 R_2}\Psi, \end{cases}$$

wobei im Hinblick auf (1):

$$(16)\qquad -\left[R_1 (R_2)_\alpha - R_2 (R_1)_\alpha\right] = J_\alpha, \qquad R_1 (R_2)_\beta - R_2 (R_1)_\beta = J_\beta$$

gesetzt wurde. Nach diesen Vorbereitungen substituieren wir den Wert (8) von ξ_3 in die drei Summen, die die linken Seiten der fraglichen Relationen (10) bilden. Wird dann von den Hilfsformeln (11) und (15) Gebrauch gemacht und berücksichtigt, daß nach (2):

$$\frac{J}{R_1} = R_{13}, \qquad \frac{J}{R_2} = R_{23}$$

ist, so gelingt es, die Summen (10) in die rechts stehenden Ausdrücke überzuführen, wofern die Bedingung

$$\Psi = (1 - n_1 n_2) J \tag{17}$$

erfüllt ist. Damit wird aber, wenn wir zunächst die Annahme $n_1 n_2 = 1$ ausschließen, lediglich über die dem J anhaftende additive Konstante verfügt, da, wie wir durch Differentiation von (12) bestätigen, die Beziehung

$$d\Psi = (1 - n_1 n_2) dJ$$

von selber besteht. An die Stelle der Quadratur (2) tritt also zur Berechnung von J der endliche Ausdruck:

$$J = \frac{\Psi}{1 - n_1 n_2}.$$

3. Um nun die Formeln für die laufenden Koordinaten der durch $\xi_3, \ldots, \xi_3', \ldots$ bestimmten Biegungsfläche (x_3, y_3, z_3) zu erhalten, gehen wir wieder von der zugehörigen *dritten* Hilfsfläche $(\mathfrak{x}_3, \ldots)$ aus, die, wenn $u_3 = \sum \xi_3^2$ und $v_3 = \sum \xi_3'^2$ ist, sich in der Form

$$\mathfrak{x}_3 = x_3 - u_3 \xi_3 - v \xi_3' = \langle \eta_3, \zeta_3' \rangle + \langle \eta_3', \zeta_3 \rangle$$

darstellen läßt. Auf Grund von (5) und (6) finden wir:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{x}_3 &= \mathfrak{x}_1 + n_2^{1/3} (\eta_3 \zeta_1' - \zeta_3 \eta_1') + n_2^{-1/3} (\eta_3' \zeta_1 - \zeta_3' \eta_1) \\
&= \mathfrak{x}_2 + n_1^{1/3} (\eta_3 \zeta_2' - \zeta_3 \eta_2') + n_1^{-1/3} (\eta_3' \zeta_2 - \zeta_3' \eta_2) \\
&= \mathfrak{x} \; - \frac{R_1 R_2}{J} \left[n_1^{1/3} n_2^{-1/3} (\eta_1 \zeta_2' - \zeta_1 \eta_2') + n_1^{-1/3} n_2^{1/3} (\eta_1' \zeta_2 - \zeta_1' \eta_2) \right].
\end{aligned}$$

Wir können demnach den *Vertauschbarkeitssatz für die Transformation* Θ_n in der folgenden Gestalt aussprechen:

Wird eine Biegungsfläche (x, y, z) *vom Typus*

$$ds^2 = \frac{9}{4}(u\,du^2 - 2\,du\,dv + v\,dv^2)$$

mittels zweier durch R_1 *bzw.* R_2 *definierter Transformationen* Θ_{n_1} *und* Θ_{n_2} *in die beiden neuen Biegungsflächen* (x_1, y_1, z_1) *und* (x_2, y_2, z_2) *übergeführt, so existiert* ($n_1 n_2 \neq 1$ *vorausgesetzt*) *eine vierte, durch endliche Operationen bestimmbare Biegungsfläche* (x_3, y_3, z_3), *die aus* (x_1, y_1, z_1)

durch eine Transformation Θ_{n_2} *und aus* (x_2, y_2, z_2) *durch eine* Θ_{n_1} *hervorgeht. Dabei ist:*

$$J = e^{-\theta}[(R_1)_\alpha (R_2)_\beta - (R_1)_\beta (R_2)_\alpha] \tag{18}$$

$$+ \frac{n_1 - n_2}{1 - n_1 n_2}[R_1 R_2 - e^{-\theta}((R_1)_\alpha (R_2)_\beta + (R_1)_\beta (R_2)_\alpha)],$$

$$\xi_3 = n_1^{-1/3} n_2^{-1/3}\left[\xi - \frac{R_1 R_2}{J}(n_1^{1/3}\xi_1 - n_2^{1/3}\xi_2)\right],$$

$$\xi_3' = n_1^{1/3} n_2^{1/3}\left[\xi' - \frac{R_1 R_2}{J}(n_1^{-1/3}\xi_1' - n_2^{-1/3}\xi_2')\right], \qquad u_3 = \sum \xi_3^2, \qquad v_3 = \sum \xi_3'^2,$$

$$x_3 = x + u_3 \xi_3 + v_3 \xi_3' - u\xi - v\xi'$$

$$- \frac{R_1 R_2}{J}[n_1^{1/3} n_2^{-1/3}(\eta_1 \zeta_2' - \zeta_1 \eta_2') + n_1^{-1/3} n_2^{1/3}(\eta_1' \zeta_2 - \zeta_1' \eta_2)].$$

Im Falle $n_1 = n_2$ reduziert sich (18) auf den einfacheren Ausdruck:

$$J = e^{-\theta}[(R_1)_\alpha (R_2)_\beta - (R_1)_\beta (R_2)_\alpha].$$

Es ist also auch dann noch eine einzige, durch endliche Operationen bestimmbare vierte Biegungsfläche $(x_3, \ldots)$ vorhanden.

Ist dagegen $n_1 n_2 = 1$, so versagt die Formel (18). Wir ersehen aber aus der ursprünglichen Form (17) der Relation, daß dann $\Psi = 0$, also

$$R_1 R_2 - e^{-\theta}[(R_1)_\alpha (R_2)_\beta + (R_1)_\beta (R_2)_\alpha] = 0 \tag{19}$$

sein muß. Der auf der linken Seite stehende Ausdruck ist aber, wie man durch Differentiieren oder an Hand einer in § 4, 2 gemachten Bemerkung erkennt, für $n_1 = n$, $n_2 = \frac{1}{n}$ eine Konstante. Die Relation (19) hat somit die Bedeutung einer Anfangsbedingung, die bei der Integration des einen der beiden von R_1 oder von R_2 zu erfüllenden Systeme von Differentialgleichungen zu berücksichtigen ist. Zwei durch die Bedingung (19) miteinander verknüpfte Transformationen Θ_n und $\Theta_{\frac{1}{n}}$ wollen wir, indem wir uns eines bei ähnlichen Verhältnissen gelegentlich benutzten Ausdruckes bedienen, als ein *harmonisches* Paar bezeichnen.

Es besteht hiernach der folgende *Zusatz* zum Vertauschbarkeitssatz:

In dem besonderen Falle $n_1 n_2 = 1$ $\left(n_1 = n,\ n_2 = \frac{1}{n}\right)$ *gilt der Vertauschbarkeitssatz für die harmonischen, d. h. durch das Bestehen der Relation* (19) *ausgezeichneten Paare von Transformationen* Θ_n und $\Theta_{\frac{1}{n}}$ *und verlangt hier die Ausführung der Quadratur*

$$J = \int \{-[R_1 (R_2)_\alpha - R_2 (R_1)_\alpha]\, d\alpha + [R_1 (R_2)_\beta - R_2 (R_1)_\beta]\, d\beta\}.$$

Da die Integrationskonstante willkürlich bleibt, gibt es eine einfach unendliche Schar von vierten Biegungsflächen (x_3, y_3, z_3).

Auf der Betrachtung solcher harmonischer Paare von Transformationen beruhen die Entwicklungen des folgenden Schlußparagraphen, die uns bemerkenswerte Aufschlüsse über die geometrische Natur der Transformation Θ_n geben werden.

§ 7.

Die Existenz dreigliedriger Transformationszyklen und die Zerlegung der Transformation Θ_n in zwei sukzessive asymptotische Transformationen.

1. Wir setzen wieder eine Biegungsfläche (x, y, z) der betrachteten Klasse als gegeben voraus und unterwerfen sie zwei durch R_1 und R_2 definierten Transformationen Θ_n und $\Theta_{\frac{1}{n}}$, die ein harmonisches Paar bilden mögen. Es ist dann also:

$$R_1 R_2 - e^{-\theta}[(R_1)_\alpha (R_2)_\beta + (R_1)_\beta (R_2)_\alpha] = 0 \tag{1}$$

und:

$$\left\{\begin{aligned}
\xi_1 &= n^{2/3}\left\{\xi - \frac{e^{-\theta}}{R_1}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)(R_1)_\beta \xi_\alpha + \left(1-\frac{1}{n}\right)(R_1)_\alpha \xi_\beta\right]\right\},\\
\xi_1' &= n^{-2/3}\left\{\xi' - \frac{e^{-\theta}}{R_1}[(1+n)(R_1)_\beta \xi_\alpha' + (1-n)(R_1)_\alpha \xi_\beta']\right\},\\
\xi_2 &= n^{-2/3}\left\{\xi - \frac{e^{-\theta}}{R_2}[(1+n)(R_2)_\beta \xi_\alpha + (1-n)(R_2)_\alpha \xi_\beta]\right\},\\
\xi_2' &= n^{2/3}\left\{\xi' - \frac{e^{-\theta}}{R_2}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)(R_2)_\beta \xi_\alpha' + \left(1-\frac{1}{n}\right)(R_2)_\alpha \xi_\beta'\right]\right\}.
\end{aligned}\right. \tag{2}$$

Die zugehörigen, nach § 5 (30) darstellbaren transformierten Biegungsflächen seien (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2).

Es soll nun gezeigt werden, daß durch

$$R_{12} = \frac{R_2}{R_1} \tag{3}$$

eine weitere Transformation Θ_n bestimmt ist, die $(x_1, \ldots)$ in $(x_2, \ldots)$ verwandelt, daß also die drei Biegungsflächen $(x, \ldots)$, $(x_1, \ldots)$, $(x_2, \ldots)$ durch einen dreigliedrigen Zyklus von Transformationen Θ_n miteinander verbunden sind. Zu diesem Zweck haben wir zunächst die Beziehungen:

$$\left\{\begin{aligned}
\xi_2 &= n^{2/3}\left\{\xi_1 - \frac{e^{-\theta_1}}{R_{12}}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)(R_{12})_\beta (\xi_1)_\alpha + \left(1-\frac{1}{n}\right)(R_{12})_\alpha (\xi_1)_\beta\right]\right\},\\
\xi_2' &= n^{-2/3}\left\{\xi_1' - \frac{e^{-\theta_1}}{R_{12}}\left[(1+n)(R_{12})_\beta (\xi_1')_\alpha + (1-n)(R_{12})_\alpha (\xi_1')_\beta\right]\right\}
\end{aligned}\right. \tag{4}$$

zu bestätigen. Wir beschränken uns darauf, den Beweis für die erste Formel durchzuführen, die wir zusammen mit den entsprechenden für η_2

und ξ_2, indem wir ganz ähnlich wie im vorigen Paragraphen verfahren, durch das folgende gleichwertige System ersetzen:

$$\sum \xi_2 \xi_1' = -n^{2/3},$$

$$\sum \xi_2 (\xi_1')_\alpha = -n^{2/3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{(R_{12})_\alpha}{R_{12}}, \quad \sum \xi_2 (\xi_1')_\beta = -n^{2/3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{(R_{12})_\beta}{R_{12}}.$$

Die Richtigkeit dieser Relationen ergibt sich aber unmittelbar aus § 6 (11), (15) und (16), wenn berücksichtigt wird, daß jetzt $n_1 = n$, $n_2 = \frac{1}{n}$ und $\Psi = 0$ ist.

An zweiter Stelle überzeugen wir uns davon, daß ξ_1 und $n^{1/3}\xi_2$ sowie ξ_1' und $n^{-1/3}\xi_2'$ die Differentialrelationen einer durch $R_{12} = \frac{R_2}{R_1}$ definierten Moutardschen Transformation erfüllen. Wir schreiben von den fraglichen Formeln nur die erste hin:

$$(5) \qquad (\xi_2)_\alpha + \frac{(R_{12})_\alpha}{R_{12}}\xi_2 = -n^{-1/3}\left[(\xi_1)_\alpha - \frac{(R_{12})_\alpha}{R_{12}}\xi_1\right].$$

Benutzt man, um hierin $(\xi_1)_\alpha$ und $(\xi_2)_\alpha$ auszudrücken, die analogen Beziehungen:

$$(\xi_1)_\alpha + \frac{(R_1)_\alpha}{R_1}\xi_1 = -n^{-1/3}\left[\xi_\alpha - \frac{(R_1)_\alpha}{R_1}\xi\right],$$

$$(\xi_2)_\alpha + \frac{(R_2)_\alpha}{R_2}\xi_2 = -n^{1/3}\left[\xi_\alpha - \frac{(R_2)_\alpha}{R_2}\xi\right],$$

die infolge der gegebenen Transformationen Θ_n und $\Theta_{\frac{1}{n}}$ bestehen, und ersetzt schließlich ξ_1 und ξ_2 durch die Werte (2), so erweist sich (5) als Identität. Entsprechendes gilt für die übrigen Formeln der Gruppe.

Unter Bezugnahme auf die Entwicklungen von § 5, **1** schließen wir aus dem gleichzeitigen Bestehen der Formeln (4) und der Differentialrelationen der Moutardschen Transformation, daß eine zwischen den Biegungsflächen $(x_1, \ldots)$ und $(x_2, \ldots)$ vermittelnde Transformation Θ_n vorliegt, insbesondere also, daß $R_{12} = \frac{R_2}{R_1}$ das System der Differentialgleichungen (28) von § 5 befriedigt, in dem θ_1 an Stelle von θ zu schreiben ist.

Es ist indessen noch der Nachweis zu erbringen, daß die Biegungsfläche $(x_2, \ldots)$, die aus $(x_1, \ldots)$ durch die neue Transformation Θ_n hervorgeht, auch ihrer Lage nach mit der Fläche $(x_2, \ldots)$ zusammenfällt, die wir ursprünglich aus $(x, \ldots)$ durch die Transformation $\Theta_{\frac{1}{n}}$ erhielten. Die Integraldarstellung der Koordinaten:

$$x_2 = \frac{3}{2}\int(\xi_2\, du_2 + \xi_2'\, dv_2) \qquad (u_2 = \sum \xi_2^2, \quad v_2 = \sum \xi_2'^2)$$

schließt nämlich noch die Möglichkeit einer Translation ein. Wir haben also, indem wir uns wieder der mit den Biegungsflächen verbundenen *dritten* Hilfsflächen bedienen, zu zeigen, daß neben den Relationen:

$$(6)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x} = n^{1/2}(\eta_1 \zeta' - \zeta_1 \eta') + n^{-1/2}(\eta_1' \zeta - \zeta_1' \eta), \\ \mathfrak{x} - \mathfrak{x}_2 = n^{1/2}(\eta \zeta_2' - \zeta \eta_2') + n^{-1/2}(\eta' \zeta_2 - \zeta' \eta_2) \end{cases}$$

auch die folgende besteht:

$$(7)\qquad \mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1 = n^{1/2}(\eta_2 \zeta_1' - \zeta_2 \eta_1') + n^{-1/2}(\eta_2' \zeta_1 - \zeta_2' \eta_1).$$

Es verschwindet aber tatsächlich beim Addieren dieser drei Gleichungen die rechts entstehende Summe, da einzeln die beiden Identitäten:

$$(8)\qquad \begin{cases} n^{1/2}(\eta \zeta_2' + \eta_1 \zeta' + \eta_2 \zeta_1') - n^{-1/2}(\eta \zeta_1' + \eta_1 \zeta_2' + \eta_2 \zeta') = 0, \\ n^{1/2}(\zeta \eta_2' + \zeta_1 \eta' + \zeta_2 \eta_1') - n^{-1/2}(\zeta \eta_1' + \zeta_1 \eta_2' + \zeta_2 \eta') = 0 \end{cases}$$

erfüllt sind, von denen man z. B. die erste leicht bestätigt, indem man ihre linke Seite in der Form:

$$\eta(n^{1/2}\zeta_2' - n^{-1/2}\zeta_1') + \eta_1(n^{1/2}\zeta' - n^{-1/2}\zeta_2') + \eta_2(n^{1/2}\zeta_1' - n^{-1/2}\zeta') = 0$$

schreibt und die nach § 5 (32) geltenden Beziehungen:

$$(9)\qquad \begin{cases} n^{1/2}\zeta_1' - n^{-1/2}\zeta' = \xi_1 \eta - \eta_1 \xi, \quad n^{1/2}\zeta' - n^{-1/2}\zeta_2' = \xi \eta_2 - \eta \xi_2, \\ \qquad n^{1/2}\zeta_2' - n^{-1/2}\zeta_1' = \xi_2 \eta_1 - \eta_2 \xi_1 \end{cases}$$

benutzt.

Wir stellen das hiermit gewonnene Ergebnis fest: *Gehen aus einer Biegungsfläche* (x, y, z) *des betrachteten Typus durch ein harmonisches Paar von Transformationen* Θ_n *und* $\Theta_{\frac{1}{n}}$ *die beiden neuen Biegungsflächen* (x_1, y_1, z_1) *und* (x_2, y_2, z_2) *hervor, so vermittelt auch zwischen* (x_1, y_1, z_1) *und* (x_2, y_2, z_2) *eine Transformation* Θ_n. *Es liegt demnach ein dreigliedriger Zyklus von Transformationen* Θ_n, *im umgekehrten Sinne von Transformationen* $\Theta_{\frac{1}{n}}$ *vor. Das Produkt der die drei Transformationen* Θ_n *definierenden Funktionen* R_1, $R_{12} = \frac{R_2}{R_1}$ *und* $\frac{1}{R_2}$ hat den *Wert* 1.

2. An die Konstruktion eines solchen dreigliedrigen Zyklus, dem eine beliebige gegebene Transformation Θ_n angehört, knüpfen wir nun den Beweis der höchst beachtenswerten Tatsache, daß die Transformation Θ_n sich in zwei aufeinander folgende asymptotische Transformationen auflösen läßt. Wir beginnen diesen letzten Teil unserer Untersuchung, bei dem längere, im folgenden zum Teil nur angedeutete Rechnungen unvermeidlich erscheinen, mit der Ermittlung *des Schnittpunkts* (x^*, y^*, z^*) *der korrespondierenden Tangentialebenen* der drei zuletzt betrachteten

Biegungsflächen $(x, \ldots), (x_1, \ldots)$ und $(x_2, \ldots)$. Man findet auf Grund der Relationen (6) und (7):

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x} &= -[(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1) + (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_2)] \\
&= -[\eta_2(n^{1/3}\zeta_1' - n^{-1/3}\zeta') + \eta_2'(n^{-1/3}\zeta_1 - n^{1/3}\zeta) \\
&\qquad - \zeta_2(n^{1/3}\eta_1' - n^{-1/3}\eta') - \zeta_2'(n^{-1/3}\eta_1 - n^{1/3}\eta)]
\end{aligned}
$$

und, indem man sich der Gleichungen (9) sowie weiterer analog gebildeter Formeln bedient, nach leicht zu übersehender Umformung:

$$\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x} = \xi \sum \xi_1 \xi_2 + \xi' \sum \xi_1' \xi_2' - \xi_1 \sum \xi \xi_2 - \xi_1' \sum \xi' \xi_2'.$$

Demnach besteht Gleichheit der beiden folgenden Ausdrücke, deren gemeinsamen Wert wir mit x^* bezeichnen:

$$\mathfrak{x} + \xi \sum \xi_1 \xi_2 + \xi' \sum \xi_1' \xi_2' = \mathfrak{x}_1 + \xi_1 \sum \xi \xi_2 + \xi_1' \sum \xi' \xi_2' = x^*.$$

Man erkennt unmittelbar, daß gleichzeitig auch:

$$\mathfrak{x}_2 + \xi_2 \sum \xi \xi_1 + \xi_2' \sum \xi' \xi_1' = x^*$$

ist. Führen wir die Koordinaten der Biegungsflächen ein, indem wir uns der Beziehung § 1 (15) erinnern, so ergibt sich:

$$
(10) \qquad \begin{cases}
x^* = x + (\sum \xi_1 \xi_2 - u)\xi + (\sum \xi_1' \xi_2' - v)\xi' \\
\quad\;\; = x_1 + (\sum \xi \xi_2 - u_1)\xi_1 + (\sum \xi' \xi_2' - v)\xi_1' \\
\quad\;\; = x_2 + (\sum \xi \xi_1 - u_2)\xi_2 + (\sum \xi \xi_1' - v_2)\xi_2'.
\end{cases}
$$

Diese Formeln, denen analoge für y^* und z^* hinzuzufügen sind, lassen erkennen, daß *der Punkt* (x^*, y^*, z^*) *gleichzeitig in korrespondierenden Tangentialebenen der drei Biegungsflächen liegt.*

3. Es wäre nun zu untersuchen, ob die Verbindungslinien des Punktes $(x^*, \ldots)$ mit den entsprechenden Punkten der drei Biegungsflächen auch Tangenten der von $(x^*, \ldots)$ beschriebenen Fläche sind. Will man die Frage auf dem nächstliegenden Wege, der in der Bestimmung der Flächennormalen von $(x^*, \ldots)$ bestehen würde, entscheiden, so stößt man auf erhebliche rechnerische Komplikationen, deren Ursache in den drei verschiedenen Darstellungen (10) von x^* liegt. Es sei deshalb zunächst diejenige Tatsache festgestellt, aus der ich auf die Zerlegbarkeit der Transformation Θ_n schließen mußte. Sie gab überdies die Richtlinien für die auf die Moutardsche Transformation zu gründende Entwicklung.

Aus einer Bemerkung in § 4, **2** entnehmen wir, daß die von $\Xi = \eta\zeta' - \zeta\eta', \ldots$ erfüllte Moutardsche Gleichung:

$$(11) \qquad \Xi_{\alpha\beta} = 3\, e^{\theta}\, \Xi$$

als partikuläre Lösung das Produkt $R_1 R_2$ zuläßt, wenn R_1 und R_2 ein durch die Relation (1) ausgezeichnetes, also harmonisches Paar von Transformationen Θ_n und $\Theta_{\frac{1}{\bar{n}}}$ definieren. Es ist danach möglich, Ξ, H, Z durch die zu $R_1 R_2$ gehörige Moutardsche Transformation in die Lösungen Ξ^*, H^*, Z^* einer neuen Moutardschen Gleichung:

$$\Xi^*_{\alpha\beta} = \mathsf{M}^* \Xi^*$$

überzuführen. Dabei wird auf Grund einer bekannten Beziehung:

$$\mathsf{M}^* = -3\,e^\theta + 2\,\frac{(R_1 R_2)_\alpha (R_1 R_2)_\beta}{R_1^2 R_2^2}.$$

Führt man die Differentiationen aus und berücksichtigt dabei die Gleichungen:

$$e^{\theta_1} + e^\theta = 2\,\frac{(R_1)_\alpha (R_1)_\beta}{R_1^2}, \qquad e^{\theta_2} + e^\theta = 2\,\frac{(R_2)_\alpha (R_2)_\beta}{R_2^2}$$

sowie die harmonische Relation (1), so findet man:

$$\mathsf{M}^* = e^\theta + e^{\theta_1} + e^{\theta_2}.$$

Die symmetrische Gestalt dieses Ausdrucks legt die Vermutung nahe, daß die drei Biegungsflächen $(x, \ldots)$, $(x_1, \ldots)$ und $(x_2, \ldots)$ eine gemeinsame asymptotische Transformierte zulassen. Der Nachweis dieses Sachverhalts wird durch den Umstand erschwert, daß die Ergebnisse

$$\Xi^* = \frac{1}{R_1 R_2} \langle R_1 R_2, \Xi \rangle \quad \text{usw.} \tag{12}$$

der durch $R_1 R_2$ definierten Moutardschen Transformation Quadraturen enthalten und infolgedessen auch nicht eindeutig sind.

4. Wir bilden die zu Ξ, H, Z analogen Größen:

$$\Xi_1 = \eta_1 \zeta_1' - \zeta_1 \eta_1', \ldots, \qquad \Xi_2 = \eta_2 \zeta_2' - \zeta_2 \eta_2', \ldots,$$

die den Normalenkosinus der Biegungsflächen $(x_1, \ldots)$ und $(x_2, \ldots)$ proportional sind. Trifft nun die soeben ausgesprochene Vermutung zu, so müssen Ξ^*, H^*, Z^*, für die an Stelle von (12) endliche und eindeutige Ausdrücke zu suchen sind, ebenso wie aus Ξ, H, Z auch aus Ξ_1, H_1, Z_1 und aus Ξ_2, H_2, Z_2 durch Moutardsche Transformationen hervorgehen, für die die charakteristischen Funktionen, dem Produkte $R_1 R_2$ entsprechend, bezüglich $R_{12}\dfrac{1}{R_1} = \dfrac{R_2}{R_1^2}$ und $\dfrac{1}{R_{12}}\dfrac{1}{R_2} = \dfrac{R_1}{R_2^2}$ sind. Man hat sich also davon zu überzeugen, daß die Differentialrelationen:

$$(13)\quad \begin{cases} \Xi_\alpha^* = -\Xi_\alpha \quad -\left[\dfrac{(R_1)_\alpha}{R_1}+\dfrac{(R_2)_\alpha}{R_2}\right](\Xi^*-\Xi) \\ \quad = -(\Xi_1)_\alpha - \left[\dfrac{(R_2)_\alpha}{R_2}-2\dfrac{(R_1)_\alpha}{R_1}\right](\Xi^*-\Xi_1) \\ \quad = -(\Xi_2)_\alpha - \left[\dfrac{(R_1)_\alpha}{R_1}-2\dfrac{(R_2)_\alpha}{R_2}\right](\Xi^*-\Xi_2) \end{cases}$$

und ebenso die Beziehungen zwischen den Ableitungen nach β:

$$(14)\qquad \Xi_\beta^* = \Xi_\beta - \left[\frac{(R_1)_\beta}{R_1}+\frac{(R_2)_\beta}{R_2}\right](\Xi^*+\Xi) \quad \text{usw.}$$

sich gleichzeitig erfüllen lassen. Um zunächst aus (13) einen *brauchbaren* Ausdruck für Ξ^* zu gewinnen, addieren wir die drei Gleichungen und erhalten:

$$(15)\quad \begin{cases} 3\,\Xi_\alpha^* = -(\Xi+\Xi_1+\Xi_2)_\alpha + \left[\dfrac{(R_1)_\alpha}{R_1}+\dfrac{(R_2)_\alpha}{R_2}\right]\Xi \\ \qquad + \left[\dfrac{(R_2)_\alpha}{R_2}-2\dfrac{(R_1)_\alpha}{R_2}\right]\Xi_1 + \left[\dfrac{(R_1)_\alpha}{R_1}-2\dfrac{(R_2)_\alpha}{R_2}\right]\Xi_2. \end{cases}$$

Es ist andererseits:

$$(16)\quad n^{-1/3}(\eta\zeta_1'-\zeta\eta_1')_\alpha = -(\eta\zeta_\alpha'-\zeta\eta_\alpha') - [(\eta_1)_\alpha\zeta_1'-(\zeta_1)_\alpha\eta_1'] + \frac{(R_1)_\alpha}{R_1}(\Xi-\Xi_1).$$

Man beweist diese Beziehung an Hand der Formelgruppen

$$(17)\quad \begin{cases} (\xi_1)_\alpha + \dfrac{(R_1)_\alpha}{R_1}\xi_1 = -n^{-1/3}\left[\xi_\alpha - \dfrac{(R_1)_\alpha}{R_1}\xi\right] \quad \text{usw.,} \\ (\xi_1')_\alpha + \dfrac{(R_1)_\alpha}{R_1}\xi_1' = -n^{1/3}\left[\xi_\alpha' - \dfrac{(R_1)_\alpha}{R_1}\xi'\right] \quad \text{usw.,} \end{cases}$$

indem man links die Differentiation ausführt und η_α, ζ_α mittels $(\eta_1)_\alpha$, $(\zeta_1)_\alpha$ und umgekehrt $(\eta_1')_\alpha$, $(\zeta_1')_\alpha$ mittels η_α' und ζ_α' ausdrückt. Ebenso wird:

$$(18)\quad \begin{cases} n^{-1/3}(\eta_1\zeta_2'-\zeta_1\eta_2')_\alpha = -[\eta_1(\zeta_1')_\alpha - \zeta_1(\eta_1')_\alpha] - [(\eta_2)_\alpha\zeta_2' - (\zeta_2)_\alpha\eta_2'] \\ \qquad + \left[\dfrac{(R_2)_\alpha}{R_2}-\dfrac{(R_1)_\alpha}{R_1}\right](\Xi_1-\Xi_2), \\ n^{-1/3}(\eta_2\zeta'-\zeta_2\eta')_\alpha = -[\eta_2(\zeta_2')_\alpha - \zeta_2(\eta_2')_\alpha] - (\eta_\alpha\zeta'-\zeta_\alpha\eta') \\ \qquad - \dfrac{(R_2)_\alpha}{R_2}(\Xi_2-\Xi). \end{cases}$$

Addiert man die Gleichungen (16) und (18), so erkennt man, daß man die rechte Seite von (15) in der Form

$$n^{-1/3}(\eta\zeta_1' - \zeta\eta_1' + \eta_1\zeta_2' - \zeta_1\eta_2' + \eta_2\zeta' - \zeta_2\eta')_\alpha$$

schreiben kann. Wir schließen daraus, indem wir eine Integrationskonstante, deren Verschwinden kaum zweifelhaft ist, unterdrücken, daß

$$(19)\qquad \begin{aligned} \Xi^* &= \frac{n^{-1/3}}{3}(\eta\zeta_1' - \zeta\eta_1' + \eta_1\zeta_2' - \zeta_1\eta_2' + \eta_2\zeta' - \zeta_2\eta') \\ &= \frac{n^{1/3}}{3}(\eta\zeta_2' - \zeta\eta_2' + \eta_1\zeta' - \zeta_1\eta' + \eta_2\zeta_1' - \zeta_2\eta_1') \end{aligned}$$

ist. Die Identität des hinzugefügten zweiten Ausdrucks mit dem gefundenen ersten ist eine Folge der Gleichungen (8).

5. Es ist nun der Nachweis zu führen, daß die durch (19) definierte Größe Ξ^* den beiden Gruppen von Differentialrelationen (13) und (14) tatsächlich genügt. Wir beschränken uns darauf, den Gang der etwas mühseligen Rechnung für die erste der Gleichungen (13) anzudeuten. Die Symmetrie des Ausdrucks (19) bürgt dafür, daß dann auch die beiden anderen erfüllt sind. Bezüglich der zweiten, die Ableitungen nach β enthaltenden Formelgruppe (14) wäre entsprechend zu verfahren.

Eine nicht unerhebliche Abkürzung läßt sich erzielen, wenn man die Möglichkeit der Affintransformation von § 4, **1** berücksichtigt und erwäg daß der Ausdruck

$$(20)\qquad t = \frac{n^{-1/3}}{3}(\eta\zeta_1' + \eta_1\zeta_2' + \eta_2\zeta')$$

die mittels $R_1 R_2$ gewonnene Moutardsche Transformierte des Produkts $\eta\zeta'$ sein wird, von dem ja bekannt ist, daß es Integral von (11) ist. Es genügt hiernach offenbar, das Bestehen der Relation

$$(21)\qquad t_\alpha + \left[\frac{(R_1)_\alpha}{R_1} + \frac{(R_2)_\alpha}{R_2}\right] t = -(\eta\zeta')_\alpha + \left[\frac{(R_1)_\alpha}{R_1} + \frac{(R_2)_\alpha}{R_2}\right]\eta\zeta'$$

zu beweisen und nachträglich die Buchstaben η und ζ zu vertauschen. Wir beseitigen auf der linken Seite der fraglichen Gleichung (21), nachdem wir (20) differentiiert haben, mittels (17) sowie analoger Formeln für den Index 2 die sämtlichen Ableitungen der die Indizes 1 und 2 tragenden Größen. Zur weiteren Reduktion ist (1) heranzuziehen. Es ergibt sich zunächst:

$$(22)\qquad \begin{aligned} t_\alpha &+ \left[\frac{(R_1)_\alpha}{R_1} + \frac{(R_2)_\alpha}{R_2}\right] t \\ &= \frac{1}{3}\left\{-(\eta\zeta')_\alpha + \left[\frac{(R_1)_\alpha}{R_1} + \frac{(R_2)_\alpha}{R_2}\right]\eta\zeta'\right\} + P + Q, \end{aligned}$$

wobei

$$P = \frac{n^{-1/3}}{3}[\eta_\alpha(\zeta_1' - n^{-1/3}\zeta_2') + \zeta_\alpha'(\eta_2 - n^{-1/3}\eta_1)],$$

$$Q = \frac{n^{-1/3}}{3}\left\{\eta\left[n^{-1/3}\frac{(R_1)_\alpha}{R_1}\zeta_2' + \frac{(R_2)_\alpha}{R_2}\zeta_1'\right] + \zeta'\left[\frac{(R_1)_\alpha}{R_1}\eta_2 + n^{-1/3}\frac{(R_2)_\alpha}{R_2}\eta_1\right]\right\}$$

ist. In P und Q haben wir die sämtlichen Größen mit dem Index 1 oder 2 durch die nach (2) gebildeten Ausdrücke zu ersetzen. Zu beachten ist außerdem § 2 (20). Man findet schließlich:

$$P = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left\{-(\eta\zeta')_\alpha + \left[\frac{(R_1)_\alpha}{R_1} + \frac{(R_2)_\alpha}{R_2}\right]\eta\zeta'\right\},$$

$$Q = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left\{-(\eta\zeta')_\alpha + \left[\frac{(R_1)_\alpha}{R_1} + \frac{(R_2)_\alpha}{R_2}\right]\eta\zeta'\right\}.$$

Werden diese Werte in (22) eingeführt, so bestätigt sich (21).

6. Ist nun wirklich eine gemeinsame asymptotische Transformierte (x^*, y^*, z^*) der drei Biegungsflächen vorhanden[30]), so muß diese mit dem ebenso bezeichneten, durch (10) dargestellten Ort der Schnittpunkte je dreier entsprechender Tangentialebenen zusammenfallen. Man übersieht leicht, indem man sich der bekannten Formeln für die Konstruktion der W-Kongruenzen erinnert[31]), daß es sich noch darum handelt, die Beziehung

$$x^* = x + (\sum \xi_1\xi_2 - u)\xi + (\sum \xi_1'\xi_2' - v)\xi' = x + 3(\mathsf{H}^*\mathsf{Z} - \mathsf{Z}^*\mathsf{H})$$

zu bestätigen, zu der man dann, ohne daß es eines besonderen Beweises hierfür bedarf, die beiden analogen Darstellungen von x^* hinzufügen kann:

$$x^* = x_1 + 3(\mathsf{H}^*\mathsf{Z}_1 - \mathsf{Z}^*\mathsf{H}_1) = x_2 + 3(\mathsf{H}^*\mathsf{Z}_2 - \mathsf{Z}^*\mathsf{H}_2).$$

Bilden wir H^* und Z^* nach (19), so finden wir:

$$3(\mathsf{H}^*\mathsf{Z} - \mathsf{Z}^*\mathsf{H}) = \xi[(\xi, \xi_1', \xi') + (\xi_1, \xi_2', \xi')] + \xi'[(\xi', \xi_2, \xi) + (\xi_2', \xi_1, \xi)].$$

Wird nun eine jede der vier durch die Klammern angedeuteten Determinanten nach den Elementen der ersten Spalte entwickelt, wobei die Unterdeterminanten mittels der schon wiederholt benutzten Relationen

$$\eta_1'\zeta' - \zeta_1'\eta' = n^{-1/3}\xi_1 - n^{1/3}\xi \quad \text{usw.}$$

umzuformen sind, so ergibt sich in der Tat:

$$3(\mathsf{H}^*\mathsf{Z} - \mathsf{Z}^*\mathsf{H}) = (\sum \xi_1\xi_2 - u)\xi + (\sum \xi_1'\xi_2' - v)\xi'.$$

---

[30]) Die Darstellung $x^* = 3\langle \mathsf{H}^*, \mathsf{Z}^*\rangle, \ldots$ gestattet diesen Schluß noch nicht; es könnten drei kongruente, aber durch Translationen unterschiedene Flächen vorliegen.

[31]) Es sei z. B. auf die Fußnote [27]) verwiesen.

Wir sprechen das hiermit gewonnene Schlußergebnis aus:

Die Transformation Θ_n *läßt sich in zwei asymptotische Transformationen zerlegen. Die Fläche* (x^*, y^*, z^*), *die den gemeinsamen zweiten Brennflächenmantel zweier je eine der beiden Biegungsflächen* (x, y, z) *und* (x_1, y_1, z_1) *berührender W-Kongruenzen bildet, erhält man, indem man die Biegungsfläche* (x, y, z) *noch einer zweiten (auf* ∞^1 *Weisen bestimmbaren*[32]*) Transformation* $\Theta_{\frac{1}{n}}$ *unterwirft, die zu der gegebenen* Θ_n *in harmonischer Beziehung steht. Ist* (x_2, y_2, z_2) *die so gewonnene dritte Biegungsfläche, so wird die Fläche* (x^*, y^*, z^*) *von dem Schnittpunkt entsprechender Tangentialebenen von* (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) *und* (x_2, y_2, z_2) *beschrieben; gleichzeitig ist ihre Tangentialebene durch die entsprechenden Punkte der drei Biegungsflächen bestimmt.*

Berlin-Steglitz, im September 1923.

[32]) Auch aus dem allgemeinen Bianchischen Kompositionstheorem kann man folgern, daß die Zerlegung in zwei asymptotische Transformationen, wenn sie überhaupt gelingt, auf ∞^1 Weisen möglich ist.

(Eingegangen am 30. 9. 1923.)