Zur Theorie der topologischen Räume.

Von

Paul Alexandroff und Paul Urysohn † in Moskau.

Ein topologischer Raum $\mathfrak{R}$ entsteht, wenn wir in einer Menge E (die ganz abstrakt gegeben sein kann) gewisse Teilmengen, die *Umgebungen* ihrer sämtlichen Punkte, derart definieren, daß die bekannten vier Hausdorffschen Umgebungsaxiome[1]) damit zur Geltung gebracht werden. Ein topologischer Raum kann gleichzeitig durch verschiedene Umgebungssysteme definiert werden, die dann aber notwendig *gleichwertig*[2]) sind. Auch umgekehrt definieren, unserer Fassung nach, gleichwertige Umgebungssysteme stets einen einzigen topologischen Raum. Dieser Punkt scheint uns methodo~~logisch~~ isch von großer Wichtigkeit zu sein, wir dürfen aber hier nicht weiter auf ihn eingehen — wir wollen hier nur eine kurze Übersicht der Hauptergebnisse unserer Untersuchungen im Gebiete der allgemeinen Topologie angeben; für eine genaue Durchführung der Beweise sowie auch für die Konstruktion der zahlreichen Beispiele verweisen wir deshalb auf eine Arbeit, die bald in der Zeitschrift „Fundamenta Mathematicae" erscheinen soll.

1. Unter allen topologischen Räumen spielen, wie bekannt, die kompakten[3]) Räume eine besonders wichtige Rolle. Falls wir einen jeden der Relation[4])

$$|U(\xi)\cdot\mathfrak{M}| = |\mathfrak{M}|$$

genügenden Punkt ξ des Raumes $\mathfrak{R}$ als *vollständigen Häufungspunkt* der im Raume $\mathfrak{R}$ gelegenen Menge $\mathfrak{M}$ bezeichnen, besteht ersichtlich folgender

---

[1]) Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Kap. VII, S. 213.

[2]) Hausdorff, loc. cit., S. 260.

[3]) Hausdorff, loc. cit., S. 230; ein kompakter Raum ist natürlich in sich kompakt.

[4]) Wir bezeichnen durch $U(\xi)$ eine jede willkürlich gegebene Umgebung des Punktes ξ im Raume $\mathfrak{R}$, durch $A\cdot B\cdot C\ldots$ bzw. ΠA_n den Durchschnitt der Mengen $A, B, C, \ldots$ bzw. der Mengen A_n, durch $A+B+C\ldots$ bzw. ΣA_n die Vereinigungsmenge der (nicht notwendig elementefremden) Mengen $A, B, C, \ldots$ bzw. A_n; die Mächtigkeit der Menge $\mathfrak{M}$ soll stets mit $|\mathfrak{M}|$ bezeichnet werden.

Satz I_0. — *Damit der topologische Raum* $\mathfrak{R}$ *kompakt sei, ist eine jede (und folglich alle drei) der folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend:*

A_0. *Eine jede abzahlbare im Raume* $\mathfrak{R}$ *gelegene Menge* $\mathfrak{M}$ *besitzt daselbst einen vollstandigen Haufungspunkt.*

B_0. *Eine abzahlbare absteigende Folge (in* $\mathfrak{R}$*) abgeschlossener von Null verschiedener Mengen hat einen von Null verschiedenen Durchschnitt.*

C_0. *Ist der Raum* $\mathfrak{R}$ *in der Summe einer abzählbaren Menge von Gebieten enthalten, so ist er bereits in einer Summe von endlich vielen Gebieten dieser selben Menge enthalten.*

Nun läßt sich folgender Satz beweisen:

Satz I. *Folgende drei Eigenschaften* A, B, C *sind untereinander äquivalent (d. h. ein jeder topologischer Raum* $\mathfrak{R}$, *der irgendeine von diesen Eigenschaften hat, besitzt auch die beiden anderen):*

A. Eine jede im Raume $\mathfrak{R}$ *gelegene unendliche Menge* $\mathfrak{M}$ *besitzt einen vollständigen Häufungspunkt.*

B. Eine jede wohlgeordnete absteigende Menge[5] *abgeschlossener von Null verschiedener Mengen hat einen von Null verschiedenen Durchschnitt.*

C. Ist der Raum $\mathfrak{R}$ *in der Summe eines Systems (beliebiger Mächtigkeit) von Gebieten enthalten, so ist er bereits in einer Summe von endlich vielen Gebieten dieses Systems enthalten*[5a]*.*

Die Äquivalenz $(B \sim C)$ läßt sich durch formale Betrachtung von Produkt-, Summen- und Differenzbildungen ohne wesentliche Schwierigkeiten beweisen.

Indem wir mit dem Zeichen $\rightarrow$ das Wort „folgt" ersetzen, beweisen wir zunächst, daß $C \rightarrow A$; vorausgesetzt, es sei nicht der Fall, es existiere also eine unendliche Menge $\mathfrak{M}$ und eine gewisse Umgebung $U_0(x)$ eines jeden Punktes x des Raumes $\mathfrak{R}$, so daß

$$|\mathfrak{M} \cdot U_0(x)| < |\mathfrak{M}|$$

ist, so gelangen wir sofort zu einem Widerspruch: der ganze Raum ist nämlich zufolge der Eigenschaft C bereits in der Summe einer endlichen Anzahl von Gebieten $U_0(x)$ enthalten, und die Menge $\mathfrak{M}$ erscheint als Vereinigung endlich vieler Mengen $U_0(x) \cdot \mathfrak{M}$ von kleineren Mächtigkeiten, was offenbar unmöglich ist.

Indem wir durch A' bzw. B' die Eigenschaften bezeichnen, die durch Einschränkung der Aussagen A bzw. B auf Mengen $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{S}$ von regulären[6] Mächtigkeiten entstehen, ergibt sich sofort:

$$B' \rightarrow B.$$

---

[5] Diese Menge wird nachher mit $\mathfrak{S}$ bezeichnet.

[5a] In verschiedenen anderen Voraussetzungen (nicht in topologischen Räumen) sind analoge Sätze von Moore (Proc. Nat. Ac. Sciences **5**, 1919), Fréchet (Ann. Ec. Norm, 1921), Sierpiński (Fund. Math. 2) u. A. bewiesen worden.

[6] Hausdorff, S. 130. $\aleph_\xi$ heißt regulär, wenn ω_ξ eine reguläre Ordnungszahl ist.

Der Satz wird demnach bewiesen sein, falls die beiden Formeln

$$B' \rightarrow A', \qquad A' \rightarrow B'$$

richtig sind.

Es sei vorausgesetzt, A' sei nicht richtig, und $\mathfrak{M}$ eine Menge regulärer Mächtigkeit $\aleph_\tau$, die sich nach dem Typus[7]) ω_τ ordnen läßt; wenn x_α, $\alpha = 1, 2, 3, \ldots, < \omega_\tau$ sämtliche Punkte von $\mathfrak{M}$ sind, und $\mathfrak{M}_\lambda$ die Menge aller Punkte x_α, $\alpha \leqq \lambda < \omega_\tau$, so ergibt es sich, daß die wohlgeordnete (und zwar nach dem regulären Ordnungstypus ω_τ) Menge $\mathfrak{S}$ der abgeschlossenen Mengen[8])

$$F_\lambda = \overline{\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_\lambda}$$

einen verschwindenden Durchschnitt hat, was der Eigenschaft B' widerspricht.

Wenn jetzt umgekehrt B' im Raume $\mathfrak{R}$ nicht erfüllt ist, dann gibt es eine wohlgeordnete abnehmende Menge $\mathfrak{S}$ abgeschlossener Mengen[9]):

$$F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots \supset F_\alpha \supset \ldots \qquad (\alpha < \omega_\tau).$$

Man kann offenbar voraussetzen, daß außerdem $F_\alpha \neq F_{\alpha+1}$ ist. Dann wählt man für jedes α einen Punkt $x_\alpha \subset F_\alpha - F_{\alpha+1}$, und man beweist ohne große Schwierigkeit, daß die Menge aller Punkte x_α keinen vollständigen Häufungspunkt hat.

Aus dem soeben angedeuteten Beweise folgt außerdem, daß alle drei Eigenschaften A, B, C aus jeder einzelnen Eigenschaft A', B' und der analog gebildeten Eigenschaft C' folgen. Es liegt nahe, die Räume, in denen diese Eigenschaften stattfinden, besonders zu berücksichtigen und sie durch einen speziellen Namen auszuzeichnen; wir nennen sie also *bikompakt.*

2. Man kann den Satz I_0 wie folgt verallgemeinern: Man kann nämlich die Äquivalenz der Eigenschaften $A_\mathfrak{m}$, $B_\mathfrak{m}$, $C_\mathfrak{m}$, die aus den Eigenschaften A_0, B_0, C_0 entstehen, indem man das Wort „abzählbar" durch „von Mächtigkeit $\leqq \mathfrak{m}$" ersetzt, beweisen. Es ist natürlich, die dazu gehörigen Räume als initial kompakte Räume zu bezeichnen, und zwar: bis zu der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$. *Die gewöhnlichen kompakten Räume erscheinen also als ein ganz willkürlicher Spezialfall.* Man kann auch eine gewisse finale Kompaktheit definieren, von der Mächtigkeit $\mathfrak{n}$ an. Das geschieht durch den folgenden Äquivalenzsatz:

---

[7]) Ebenda, S. 125.

[8]) Wir bezeichnen stets durch $\overline{\mathfrak{M}}$ die abgeschlossene Hülle der Menge $\mathfrak{M}$ (Hausdorff, S. 219—220 bezeichnet dieselbe Menge durch $\mathfrak{M}_\alpha$).

[9]) $\mathfrak{M} \supset M$ bedeutet, daß jeder Punkt der Menge M auch der Menge $\mathfrak{M}$ angehört (es kann insbesondere auch vorkommen, daß beide Mengen identisch sind); es kann auch sein, daß M (oder auch beide Mengen) nur einen Punkt enthält.

Es gilt

$$\begin{tikzcd} A'_{(\mathfrak{n})} \arrow[rr, shift left] \arrow[dr, shift left] & & B'_{(\mathfrak{n})} \arrow[ll, shift left] \arrow[dl, shift left] \\ & C'_{(\mathfrak{n})} \arrow[ul, shift left] \arrow[ur, shift left] & \end{tikzcd},$$

wo $A'_{(\mathfrak{n})}$ und $B'_{(\mathfrak{n})}$ aus A' und B' entstehen, indem man die dazugehörigen Aussagen auf die Mengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{S}$ von regulären Mächtigkeiten $\geqq \mathfrak{n}$ einschränkt. $C'_{(\mathfrak{n})}$ gestaltet sich folgendermaßen:

$C'_{(\mathfrak{n})}$. Ist der Raum $\mathfrak{R}$ in der Summe einer Menge von regulärer Mächtigkeit $\geqq \mathfrak{n}$ von Gebieten enthalten, so ist er bereits in der Summe einer Menge von kleinerer Mächtigkeit dieser Gebiete enthalten.

Man sieht also, daß *die bikompakten Räume gleichzeitig initial- und final-kompakt sind, und zwar für jede* die Mächtigkeit der Menge aller Raumpunkte nicht überschreitende *unendliche Kardinalzahl.*

Beispiele. 1. Ein jeder kompakte metrische Raum ist auch bikompakt[10]. 2. Eine jede geordnete Menge läßt sich als topologischer Raum betrachten, indem man als $U(\xi)$ für einen jeden Punkt ξ die Mengen $J_{x,y}$ betrachtet, wo $J_{x,y}$ der Inbegriff aller zwischen x und y gelegenen Punkte ist und $x \prec \xi \prec y$. In diesem Sinne ist eine geordnete Menge, als Raum betrachtet, dann und nur dann bikompakt, wenn sie lückenlos ist und ein erstes sowie auch ein letztes Element besitzt. Insbesondere ist die wohlgeordnete Menge aller Ordnungszahlen $< \omega_\tau$ initial kompakt bis $\aleph_\tau$, die Menge aller Zahlen $\leqq \omega_\tau$ aber bikompakt.

3. Die bikompakten Räume ermöglichen den Aufbau einer ziemlich vollkommenen Theorie, deren Gedankengang in mehreren kleinen Abhandlungen kurz angezeigt sein soll. Hier kommen insbesondere die Fragen über die Stellung der bikompakten Räume unter den sämtlichen topologischen Räumen in Betracht. Wir definieren zuerst:

Ein topologischer Raum heißt absolut abgeschlossen, falls er in jedem ihn umfassenden Raume R abgeschlossen ist[11].

Man kann auch sagen: Ein topologischer Raum $\mathfrak{R}$ ist dann und nur dann absolut abgeschlossen, wenn es unmöglich ist, ihm einen neuen Punkt ξ derart hinzuzufügen, daß die so entstandene Menge $\mathfrak{R} + \xi$

1. einen topologischen Raum, in dem ξ kein isolierter Punkt ist, bildet,

2. den ursprünglichen Raum $\mathfrak{R}$ mit sämtlichen Umgebungen seiner Punkte als Relativgebiet enthält.

---

[10] Hausdorff, S. 272—274, der Satz folgt aus den Hausdorffschen Sätzen VI und X.

[11] Der größere Raum R muß $\mathfrak{R}$ als *Raum* enthalten, d. h. die Relativumgebungen der Punkte von $\mathfrak{R}$ in R sollen den ursprünglichen Umgebungen derselben Punkte in $\mathfrak{R}$ gleichwertig sein. Man vergleiche wegen der Relativbegriffe Hausdorff, Kap. VII, § 6.

Es besteht folgender

Satz II. *Damit ein Raum $\mathfrak{R}$ absolut abgeschlossen sei, ist notwendig und hinreichend, daß aus jedem den Raum $\mathfrak{R}$ bedeckenden System von Gebieten eine endliche Anzahl derart ausgewählt werden kann, daß die betreffenden Gebiete nebst ihren Grenzpunkten den Raum vollständig ausfüllen*[12]).

Die Bedingung ist notwendig. Vorausgesetzt, sie sei nicht erfüllt; es existiere also ein System von Gebieten $\{G\}$, so daß für jedes endliche Aggregat

$$G_1, G_2, \ldots, G_n$$

dieser Gebiete die Relation

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{R} - (\overline{G}_1 + \overline{G}_2 + \ldots + \overline{G}_n) \neq 0$$

besteht. Die $\mathfrak{G}$ sind wieder von Null verschiedene Gebiete. Wenn wir jetzt einen neuen Punkt ξ mittels der Umgebungen $U(\xi) = \xi + \mathfrak{G}$ einführen, erhalten wir einen neuen Raum $R = \mathfrak{R} + \xi$, in welchem $\mathfrak{R}$ eine nicht abgeschlossene Teilmenge ist; $\mathfrak{R}$ ist folglich kein absolut abgeschlossener Raum. Die Bedingung ist auch hinreichend. Vorausgesetzt, sie sei erfüllt und die Adjunktion eines Punktes ξ doch möglich. Indem wir $R = \mathfrak{R} + \xi$ betrachten, dürfen wir für einen jeden Punkt $x \subset \mathfrak{R}$ eine Umgebung $U_0(x)$ derart wählen, daß im Raume R $\overline{U}_0(x) \cdot \xi = 0$ ist. Nach unserer Voraussetzung ist eine endliche Menge der Gebiete $U_0^{(i)}$ derart angebbar, daß

$$\overline{U}_0^{(1)} + \overline{U}_0^{(2)} + \ldots + \overline{U}_0^{(n)} = \mathfrak{R}$$

ist. Das Gebiet $R - \sum_{i=1}^{n} \overline{U}_0^{(i)}$ enthält demnach nur einen einzigen Punkt ξ, der also isoliert in R ist, w. z. b. w.

Nun läßt sich folgender Satz leicht beweisen:

Satz III. *Es sei $\mathfrak{M}$ eine beliebige im absolut abgeschlossenen Raum $\mathfrak{R}$ gelegene unendliche Menge; es existiert dann stets ein Punkt ξ derart, daß*

$$|\overline{U}(\xi) \cdot \mathfrak{M}| = |\mathfrak{M}|$$

ist, wo $U(\xi)$ eine beliebige Umgebung des Punktes ξ ist.

Mit diesen Sätzen ist die Analogie zwischen den absolut abgeschlossenen und den bikompakten Räumen genügend deutlich geworden. Man könnte sie auch weiterführen, indem man z. B. ein Analogon der (B)-Eigenschaft gäbe; der Weg dazu scheint uns schon angedeutet zu sein. Man könnte sogar sagen, daß die absolut abgeschlossenen Räume *beinahe* bikompakt sind[13]);

[12]) Man vergleiche diesen Satz mit der (C)-Eigenschaft der bikompakten Räume.

[13]) Den Ausdruck verdanken wir Herrn Paul Bernays.

es gibt jedoch absolut abgeschlossene Räume, die nicht einmal kompakt sind (die auch dem II. Abzählbarkeitsaxiom genügen dürfen).

4. Um aus den absolut abgeschlossenen Räumen die bikompakten herauszubekommen, führen wir folgende Begriffe ein:

1. *Ein Punkt ξ heißt* regulär *im Raume $\mathfrak{R}$, falls für jedes $U(\xi)$ ein $V(\xi)$ derart existiert, daß $U(\xi) \supset \overline{V}(\xi)$.*

2. *Ein nur reguläre Punkte enthaltender topologischer Raum heißt schlechthin regulär.*

Es läßt sich sofort beweisen, daß, damit ein Raum regulär sei, es notwendig und hinreichend ist, daß ein beliebiger Punkt ξ von einer ihn nicht enthaltenden abgeschlossenen Menge F mittels zweier punktfremder Gebiete U und G abgetrennt werden kann, derart, daß $U \supset \xi$, $G \supset F$, $U \cdot G = 0$.

Es liegt nun nahe, diese letzte Eigenschaft noch folgendermaßen zu verschärfen:

3. *Ein Raum heißt normal, falls für je zwei punktfremde abgeschlossene Mengen F_1 und F_2 zwei ebenfalls punktfremde Gebiete G_1 und G_2 existieren, derart, daß $G_1 \supset F_1$ und $G_2 \supset F_2$* (es läßt sich beweisen, daß in normalen Räumen G_1 und G_2 so gewählt werden können, daß auch $\overline{G}_1 \cdot \overline{G}_2$ Null ist[14])).

Ein normaler topologischer Raum ist *a fortiori* regulär.

Es ergibt sich nun

Satz IV. *Ein jeder bikompakte topologische Raum ist normal*[15]).

Der Satz läßt sich mittels zweimaliger Anwendung des sog. Borel-Lebesgueschen Satzes (Eigenschaft C der bikompakten Räume) ohne Mühe beweisen.

Auf den Sätzen III und IV fußend kann man endlich den folgenden Fundamentalsatz beweisen:

Satz V. *Damit ein topologischer Raum bikompakt sei, ist es notwendig und hinreichend, daß er regulär und absolut abgeschlossen sei.*

Durch diese Sätze scheint uns die Definition der regulären Räume als einer besonders anschaulichen und naturgemäßen Klasse von Räumen gerechtfertigt zu sein; wir erwähnen nur noch, daß in den irregulären

---

[14]) Wie uns vor einigen Tagen bekannt geworden ist, benutzt Herr Tietze in seiner Arbeit „Beiträge zur allgemeinen Topologie" (Math. Annalen 88) analoge Begriffsbildungen. — Der während der Drucklegung dieser Arbeit erschienene II. Teil der Tietzeschen „Beiträge" hat auch manche Berührungspunkte mit unseren Untersuchungen.

[15]) Der Satz besteht allgemein nicht in kompakten Räumen; vielmehr sind auch irreguläre kompakte Räume von uns konstruiert worden; ein jeder kompakte, dem I. Abzählbarkeitsaxiome genügende topologische Raum ist aber regulär.

Räumen sehr verschiedene, zum Teil auch sehr eigentümliche Singularitäten vorhanden sein können; insbesondere gibt es z. B. zusammenhängende abzählbare Räume usw. Überhaupt scheinen uns die topologischen Eigenschaften der irregulären Räume in einer so unregelmäßigen Gestalt vorzukommen, daß sie einer noch einigermaßen einfachen Theorie kaum fähig sind[16]).

5. Der Begriff der absoluten Abgeschlossenheit eines Raumes kann auch weitergeführt werden. In dieser Hinsicht denken wir uns alle die Punkte des Raumes $\mathfrak{R}$, die durch eine gewisse Eigenschaft $\mathfrak{E}$ charakterisiert sind; wir nennen diese Punkte etwa die $\mathfrak{E}$-Punkte des Raumes $\mathfrak{R}$. Man kann z. B. als Eigenschaft $\mathfrak{E}$ die Eigenschaft eines Punktes, regulär zu sein, wählen. Wir nennen jetzt einen Raum $\mathfrak{R}$ abgeschlossen in bezug auf seine sämtlichen $\mathfrak{E}$-Punkte (oder auch einfach „$\mathfrak{E}$-*abgeschlossen*"), falls es unmöglich ist, dem Raume $\mathfrak{R}$ einen Punkt ξ derart hinzuzufügen, daß er im erweiterten Raume $\mathfrak{R} + \xi = R$ die Eigenschaft $\mathfrak{E}$ besitze und nicht isoliert sei.

Nach dieser Definition ist ein absolut abgeschlossener Raum in bezug auf alle seine nicht isolierten Punkte abgeschlossen. Man bemerke noch, daß die Menge der sämtlichen $\mathfrak{E}$-Punkte eines $\mathfrak{E}$-abgeschlossenen Raumes eine leere Menge sein kann, wie man sich durch ganz elementare Beispiele sofort überzeugt.

Wenn wir jetzt definieren

1. Eigenschaft $(\varkappa)$ eines Punktes ξ im Raume $\mathfrak{R}$ = es existiert eine abzählbare gegen den Punkt ξ konvergierende im Raume $\mathfrak{R}$ gelegene Punktmenge;

2. Eigenschaft (ι) = die Menge aller Umgebungen des Punktes ξ im Raume $\mathfrak{R}$ ist einer abzählbaren Umgebungsmenge gleichwertig;

3. Eigenschaft (δ) = der Punkt ξ ist der Durchschnitt einer abzählbaren Menge von Gebieten,

so überzeugen wir uns zuerst durch Beispiele, daß die einzige Abhängigkeit, die zwischen den drei Eigenschaften $(\varkappa)$, (ι), (δ) besteht, darin liegt, daß die beiden Eigenschaften $(\varkappa)$ und (δ) aus (ι) folgen; $(\varkappa)$ und (δ) sind untereinander unabhängig; (ι) braucht sogar nicht aus den beiden Eigenschaften $(\varkappa)$ und (δ) zu folgen[17]).

Es besteht nun der leicht beweisbare Satz:

---

[16]) Wir verweisen nochmals auf unsere in den „Fundamenta Mathematicae" bald erscheinende ausführliche Darstellung der ganzen Theorie.

[17]) Über die in bikompakten Räumen vorhandenen Verhältnisse siehe P. Alexandroff, „Über die Struktur der bikompakten topologischen Räume" (dieser Band, S. 267–274).

Satz VI. *Damit ein regulärer topologischer Raum kompakt sei, ist es notwendig und hinreichend, daß er* $(\varkappa)$*-abgeschlossen sei*[18]).

Dagegen:

1. Es gibt absolut abgeschlossene nichtkompakte (natürlich irreguläre) Räume, die sogar dem II. Abzählbarkeitsaxiome genügen.

2. Es gibt kompakte, in bezug auf *sämtliche* (δ)-Punkte nicht abgeschlossene reguläre Räume; wohl aber

2'. Ein jeder kompakte Raum ist abgeschlossen in bezug auf seine *regulären* (δ)-Punkte.

2''. Es gibt nichtkompakte, in bezug auf sämtliche regulären (δ)-Punkte abgeschlossene reguläre Räume.

3. Es gibt nichtkompakte, (ι)-abgeschlossene reguläre Räume.

Es ergibt sich ferner:

Satz VII. *Damit ein normaler Raum kompakt sei, ist es notwendig und hinreichend, daß er* (ι)*-abgeschlossen sei.*

Der Satz VII gilt sogar in einer allgemeineren Form; es genügt nämlich, nur vorauszusetzen, daß eine jede abgeschlossene Menge F von jeder abzählbaren, divergenten Menge D (die zu F fremd ist) mittels zueinander fremder, die Mengen F und D enthaltender Gebiete G_F, G_D getrennt werden kann; falls diese Bedingung im Raume $\mathfrak{R}$ erfüllt ist, so ist der ganze Raum nicht (ι)-abgeschlossen, soweit er nicht kompakt ist.

Der springende Punkt beim Beweise des obigen Satzes ist der, daß man für irgendeine divergente abzählbare Punktmenge

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

gewisse Umgebungen

$$U_0(x_1),\ U_0(x_2), \ldots, U_0(x_n), \ldots \tag{a}$$

konstruiert, die den Gleichungen genügen:

$$\overline{U}_0(x_i)\cdot\overline{U}_0(x_k) = 0$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{\infty} U_0(x_i)} = \sum_{i=1}^{\infty}\overline{U}_0(x_i),$$

und dies geschieht auf Grund der erwähnten Trennungsvoraussetzungen ohne große Mühe.

---

[18]) Nur die eine Hälfte dieses Satzes gilt auch für irreguläre Räume, und zwar ist ein jeder kompakte topologische Raum offenbar $(\varkappa)$-vollständig (a fortiori auch (ι)-vollständig).

Nachdem die Konstruktion der Umgebungsmenge (a) gelungen ist, fügt man dem gegebenen Raume $\mathfrak{R}$ einen neuen Punkt ξ mittels der Umgebungserklärung

$$U_n(\xi) = \xi + \sum_{i=n+1}^{\infty} U_0(x_i)$$

hinzu.

Man kann außerdem diese Konstruktion auch so einrichten, daß der erweiterte Raum $\mathfrak{R} + \xi = R$ regulär ist (sogar denselben Trennungsbedingungen wie der ursprüngliche Raum $\mathfrak{R}$ genügt).

Die wichtige und interessante Frage, ob das auch immer der Fall ist, d. h. ob ein jeder reguläre nicht absolut abgeschlossene topologische Raum sich zu einem ebenfalls regulären Raume durch Hinzufügung eines nicht isolierten Punktes erweitern läßt, bleibt unentschieden. Wir werden an einer anderen Stelle noch andere Spezialfälle dieses Problems zur Lösung bringen.

Göttingen, den 26. Juni 1923.

P. S. Die Hauptergebnisse dieser Arbeit sind im März und Juni 1922 der Moskauer Mathematischen Gesellschaft und neuerdings der Göttinger Mathematischen Gesellschaft vorgetragen worden.

Während der Drucklegung dieses Heftes hat die Redaktion die erschütternde Nachricht erhalten, daß Paul Urysohn am 17. August im Alter von 26 Jahren durch einen Unglücksfall um das Leben gekommen ist.

(Eingegangen am 1. 8. 1923.)