Über die Struktur der bikompakten topologischen Räume.

Von

Paul Alexandroff in Moskau.

1. In einer gemeinsam mit Herrn Urysohn verfaßten Arbeit[1]) habe ich den Begriff der bikompakten topologischen Räume bereits eingeführt; daselbst ist auch die Stellung dieser Räume zu anderen topologischen Räumen gewissermaßen erläutert worden. In dem vorliegenden Aufsatze möchte ich in den Aufbau der bikompakten Räume tiefer eindringen und gewisse Struktureigenschaften derselben auseinandersetzen. Insbesondere möchte ich auf die Struktur der bikompakten Räume *im Kleinen*, d. h. in einer gewissen Umgebung eines jeden Raumpunktes, aufmerksam machen. Dazu fange ich mit folgendem elementaren Beispiele an.

Man denke an den aus allen Ordnungszahlen $\alpha \leqq \omega_1$[2]) gemäß der Vorschrift $\mathfrak{H}$, § 2, Beisp. 2 gebildeten topologischen Raum $\mathfrak{R}$ (d. h. wo

$$\underset{0 \leqq \alpha < \Omega}{U}(\alpha+1) = (\alpha+1); \qquad \underset{\substack{\alpha = \lim \alpha_n \\ n \to \infty}}{U_\lambda}(\alpha) = \sum_{\lambda < \beta \leqq \alpha} (\beta)$$

die Umgebungen der den transfiniten Zahlen 1-ter bzw. 2-ter Art entsprechenden Punkte $(\alpha+1)$ bzw. (α) sind). Wir haben nun folgende Eigenschaften der zwei Punkte ω_0 und ω_1 im Raume $\mathfrak{R}$

(ω_0)

1. Es gibt im Raume $\mathfrak{R}$ eine Gebietsmenge von der Mächtigkeit $\aleph_0$, deren Durchschnitt aus dem einzigen Punkte (ω_0) besteht.

2. Es gibt eine Umgebungsmenge von der Mächtigkeit $\aleph_0$, die den Punkt (ω_0) im Raume $\mathfrak{R}$ definiert.

(ω_1)

1. Es gibt im Raume $\mathfrak{R}$ eine Gebietsmenge von der Mächtigkeit $\aleph_1$, deren Durchschnitt aus dem einzigen Punkte (ω_1) besteht.

2. Es gibt eine Umgebungsmenge von der Mächtigkeit $\aleph_1$, die den Punkt (ω_1) im Raume $\mathfrak{R}$ definiert.

---

[1]) „Zur Theorie der topologischen Räume", dieser Band, S. 258. Diese Arbeit wird in der Folge durch ein $\mathfrak{H}$ bezeichnet; die dort enthaltenen Ergebnisse und Bezeichnungen werden als bekannt vorausgesetzt.

[2]) ω_1 ist, nach Hausdorffs Bezeichnung, die erste Ordnungszahl von der Mächtigkeit $\aleph_1$.

(ω_0)

3. Es gibt eine Punktmenge E_0 von der Mächtigkeit $\aleph_0$, so daß

$$|U(\omega_0) \cdot E_0| > |(\mathfrak{R} - U(\omega_0)) \cdot E_0|$$

ist ($U(\omega_0)$ ist eine beliebige Umgebung von (ω_0)).

(ω_1)

3. Es gibt eine Punktmenge E_1 von der Mächtigkeit $\aleph_1$, so daß

$$|U(\omega_1) \cdot E_1| > |(\mathfrak{R} - U(\omega_1)) \cdot E_1|$$

ist ($U(\omega_1)$ ist eine beliebige Umgebung von (ω_1)).[3]

2. Nun liegen folgende Definitionen auf der Hand:

Definition 1. *Wir sagen, daß eine Menge $\mathfrak{M}$ im Raume $\mathfrak{R}$ gegen den Punkt ξ strömt, wenn für jede beliebige Umgebung $U(\xi)$ des Punktes ξ die Relation*

$$|U(\xi) \cdot \mathfrak{M}| > |(\mathfrak{R} - U(\xi)) \cdot \mathfrak{M}|$$

zutrifft. In Zeichen „lim" $\mathfrak{M} = \xi$.

Man sieht sofort:

1. Eine Menge kann nicht mehr als einen Strömungspunkt besitzen.

2. Eine abzählbare Menge strömt einem Punkte dann und nur dann zu, wenn sie zu diesem Punkte im Hausdorffschen Sinne[4]) konvergiert.

Definition 2. *Man bezeichnet als Konvergenzcharakter des Raumes $\mathfrak{R}$ im Punkte x die kleinste unendliche Kardinalzahl $\varkappa_{\mathfrak{R}}(x)$, welche die Eigenschaft besitzt, daß es in $\mathfrak{R}$ eine gegen den Punkt x strömende Menge $\mathfrak{M}$ von der Mächtigkeit $|\mathfrak{M}| = \varkappa_{\mathfrak{R}}(x)$ gibt.*

Anmerkung. Von den isolierten Punkten sagen wir, sie besitzen den Konvergenzcharakter 1.

Nun ist es besonders hervorzuheben, daß ein topologischer Raum in einem gegebenen Punkte überhaupt keinen Konvergenzcharakter zu besitzen braucht, in dem Sinne, daß der Punkt weder isoliert ist, noch eine zu ihm strömende unendliche Menge besitzt. Es ist sogar sehr leicht, Beispiele von Räumen anzugeben, in denen keine unendliche Menge einen Strömungspunkt besitzt. Im Gegenteil dazu hat ein jeder Punkt eines dem I. Abzählbarkeitsaxiome[5]) genügenden Raumes einen wohldefinierten Konvergenzcharakter, und zwar vom Betrage $\aleph_0$ oder 1. Als weitere Beispiele von Räumen, die sich in jedem Punkte mit einem bestimmten Konvergenzcharakter erweisen, können die aus den geordneten Mengen entstehenden topologischen Räume dienen.

[3]) Vgl. für die Bezeichnungen $\mathfrak{H}$ Fußnoten [4]), [8]), [9]). Insbesondere bedeutet $|\mathfrak{M}|$ = Mächtigkeit der Menge $\mathfrak{M}$, $|\mathfrak{R}|$ die Mächtigkeit der Menge aller Punkte des gegebenen Raumes $\mathfrak{R}$.

[4]) Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, S. 232.

[5]) Hausdorff, loc. cit. S. 263. Insbesondere genügt jeder metrische Raum diesem Axiome.

Ein vollständiges Bild der Lage eines Punktes im Raume erhält man aber nur mit Hilfe weiterer Definitionen:

Definition 3. *Man bezeichnet als* ***Durchschnittscharakter*** *des Raumes* $\mathfrak{R}$ *im Punkte* x *die kleinste Kardinalzahl* $\psi_{\mathfrak{R}}(x)$, *welche die Eigenschaft hat, daß es in* $\mathfrak{R}$ *eine Menge* $\mathfrak{S}$, $|\mathfrak{S}| = \psi_{\mathfrak{R}}(x)$, *von Gebieten gibt, deren Durchschnitt aus dem einzigen Punkte* x *besteht.*

Definition 4. *Wir nennen schlechthin* ***Charakter*** $\chi_{\mathfrak{R}}(x)$ *des Raumes* $\mathfrak{R}$ *im Punkte* x *die kleinste Mächtigkeit einer den Punkt* x *im Raume* $\mathfrak{R}$ *definierenden Umgebungsmenge* (d. h. einer Menge, in der zu jedem den Punkt x enthaltendem Gebiete G eine in G enthaltene Umgebung von x vorhanden ist).

Sowohl der Charakter als auch der Durchschnittscharakter sind für jeden Punkt eines beliebigen Raumes wohldefinierte Kardinalzahlen, die z. B. für sämtliche nicht isolierten Punkte eines dem I. Abzählbarkeitsaxiome genügenden Raumes den Wert $\aleph_0$ haben.

Es ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen, daß stets $\psi_{\mathfrak{R}}(x) \leqq \chi_{\mathfrak{R}}(x)$ ist; es braucht aber keineswegs $\psi_{\mathfrak{R}}(x) = \chi_{\mathfrak{R}}(x)$ zu sein. Es können auch alle drei Kardinalzahlen $\varkappa_{\mathfrak{R}}(x)$, $\psi_{\mathfrak{R}}(x)$ und $\chi_{\mathfrak{R}}(x)$ verschieden sein; daneben können auch zwei beliebige untereinander gleich, von der dritten aber verschieden sein; endlich kann bei $\psi = \chi$ ebensogut wie bei $\psi < \chi$ die dritte Zahl $\varkappa$ sowohl definiert als auch nicht definiert sein[6]).

3. Nun wird die Lage eines Punktes in einem bikompakten Raume $\mathfrak{R}$ durch folgende zwei Sätze charakterisiert:

Satz I. *Ein bikompakter topologischer Raum genügt in jedem seiner Punkte der Gleichung* $\psi_{\mathfrak{R}}(x) = \chi_{\mathfrak{R}}(x)$.

Satz II. *Der Konvergenzcharakter eines bikompakten Raumes ist in jedem seiner Punkte wohldefiniert, und zwar ist stets* $\varkappa_{\mathfrak{R}}(x) \leqq \chi_{\mathfrak{R}}(x)$.

Der Beweis des Satzes I geschieht mit Hilfe der naheliegenden Hilfssätze:

Hilfssatz 1. Damit ein Raum bikompakt sei, ist folgende Bedingung notwendig und hinreichend:

$\mathfrak{S}$ sei ein beliebiges System von abgeschlossenen Mengen F, von denen je endlich viele einen nicht leeren Durchschnitt haben; dann ist auch der Durchschnitt aller Mengen F von Null verschieden.

---

[6]) Ich verweise wegen der Beispiele für alle diese Möglichkeiten auf meine in den „Fundamenta Mathematicae“ bald erscheinende Arbeit „Sur les espaces localement compacts“.

Es ist noch zu bemerken, daß für eine reguläre Mächtigkeit $\mathfrak{m} = |\mathfrak{M}|$ es unmöglich ist, daß, falls $x =$ „lim“ $\mathfrak{M}$ ist, $\chi_{\mathfrak{R}}(x) < \mathfrak{m}$ sei; wohl aber gibt es Räume, wo $\chi_{\mathfrak{R}}(x) < \varkappa_{\mathfrak{R}}(x)$ und die letzte Kardinalzahl irregulär ist (eine Kardinalzahl heißt rirregulär, wenn die zugehörige Anfangszahl einer kleineren konfinal ist (Hausdorff, loc. cit. S. 130)).

Hilfssatz 2. Aus jeder den Punkt x im Raume $\mathfrak{R}$ definierenden Umgebungsmenge $\Sigma^{(x)}$ kann man eine Teilmenge $\Sigma_0^{(x)}$ von der Mächtigkeit $\psi_{\mathfrak{R}}(x)$ derart herausgreifen, daß der Durchschnitt aller betreffenden Umgebungen nur den Punkt x enthält.

Es sei nun $\Sigma^{(x)}$ die Menge aller Umgebungen des Punktes x im Raume $\mathfrak{R}$, $\Sigma_0^{(x)}$ die infolge des Hilfssatzes 2 existierende Teilmenge von der Mächtigkeit $\psi_{\mathfrak{R}}(x)$. Es seien ferner $V(x)$ die Umgebungen des Systems $\Sigma_0^{(x)}$. Wir ergänzen nun das System $\Sigma_0^{(x)}$ folgendermaßen:

1. Für ein jedes $V(x)$ wählen wir ein gewisses $U_V(x)$, das der Relation $\bar{U}_V(x) \subset V(x)$ [7]) genügt. Die Gesamtheit aller $V(x)$ und $U_V(x)$ bezeichnen wir durch $\Sigma_1^{(x)}$.

2. Wir erhalten ein Umgebungssystem $\Sigma_2^{(x)}$, indem wir alle Durchschnittsmengen von je endlich vielen Mengen des Systems $\Sigma_1^{(x)}$ betrachten.

Das System $\Sigma_2^{(x)}$ besitzt offenbar die Mächtigkeit $\psi_{\mathfrak{R}}(x)$. Nun läßt es sich mit Hilfe des Hilfssatzes 1 beweisen, daß die beiden Umgebungssysteme $\Sigma_2^{(x)}$ und $\Sigma^{(x)}$ gleichwertig sind, und damit ist der Satz I als richtig erwiesen.

Bevor wir zum Beweise des Satzes II schreiten, machen wir noch folgende Bemerkungen:

Korollar 1. *Wenn in einem bikompakten Raume eine jede abgeschlossene Menge ein Durchschnitt von höchstens abzählbar vielen Gebieten ist* (= *ein jedes F ein G_δ ist*[8])), *so genügt der Raum dem* I. *Abzählbarkeitsaxiome.*

Dieser Satz gilt allgemeiner in *regulären* kompakten Räumen, aber nicht in allgemeinen topologischen (auch kompakten!) Räumen. Die Umkehrung des Satzes ist dagegen überhaupt falsch.

Korollar 2. $\chi_{\mathfrak{R}}(\xi)$ *ist stets* $\leqq |U(\xi)|$, wo $|U(\xi)|$ die Mächtigkeit der Menge aller Punkte einer beliebigen Umgebung des Punktes ξ im bikompakten Raume $\mathfrak{R}$ bezeichnet[9]).

In kompakten Räumen gilt nun der folgende Satz:

I_0. *Falls in einem regulären Punkte ein kompakter Raum den Durchschnittscharakter $\aleph_0$ besitzt, so ist daselbst sein Charakter auch $\aleph_0$.*

Wie man durch Gegenbeispiele zeigt, ist dieser Satz keiner Verschärfung fähig.

---

[7]) Dies ist zufolge der Regularitätseigenschaft der bikompakten Räume stets möglich (man vgl. dafür $\mathfrak{H}$, z. B. den Satz IV). (Ein Raum heißt regulär, falls ein jedes $U(x)$ ein gewisses $\bar{V}(x)$ enthält.)

[8]) Hausdorff, loc. cit. S. 23 u. 304.

[9]) Dagegen sind von Herrn Urysohn topologische Räume konstruiert worden, in denen die Charaktere einzelner Punkte die Mächtigkeit der Menge aller Raumpunkte übertreffen.

Wir schreiten nun zur kurzen Übersicht des Beweises von Satz II.

Es sei eine vollständige Umgebungsmenge Σ^x von der Mächtigkeit $\chi_{\mathfrak{R}}(x)$ gegeben. Auf dem Zermeloschen Wohlordnungssatze fußend, kann man sich Σ^x als eine wohlgeordnete Menge

$$V_1(x),\ V_2(x), \ldots, V_n(x), \ldots, V_\alpha(x) \ldots$$

vom Ordnungstypus Ω_χ denken, wo Ω_χ die kleinste Ordnungszahl von der Mächtigkeit $\chi_{\mathfrak{R}}(x) = \psi_{\mathfrak{R}}(x)$ ist.

Es sei $F_1 = \overline{V}_1$ gesetzt. Nehmen wir an, F_α sei bereits konstruiert; es sei dann $\tau(\alpha)$ die erste Ordnungszahl von der Eigenschaft, daß $F_\alpha - \overline{V}_{\tau(\alpha)} \cdot F_\alpha \neq 0$ ist. Man setzt dann $F_{\alpha+1} = F_\alpha \cdot \overline{V}_{\tau(\alpha)}$. Falls alle F_α, $\alpha < \lambda$, $\lambda \neq \mu + 1$, schon konstruiert sind, setzen wir $F_\lambda = \prod\limits_{\alpha<\lambda} F_\alpha$. Das Verfahren kann nur dann abbrechen, wenn F_λ nur den einzigen Punkt ξ enthält. Wir bekommen so eine wohlgeordnete abnehmende Menge von paarweise verschiedenen abgeschlossenen Mengen. Man überzeugt sich leicht, daß jedenfalls der Ordnungstypus Θ dieser wohlgeordneten Menge der Ordnungszahl Ω_χ konfinal ist, und das genügt, um ohne Schwierigkeit zu beweisen, daß die Menge aller Punkte x_α, $1 \leqq \alpha < \Theta$, die willkürlich aus den Mengen $F_\alpha - F_{\alpha+1}$ gewählt worden sind, eine zu dem Punkte x strömende unendliche Menge von der Mächtigkeit $|\Theta| \leqq \chi_{\mathfrak{R}}(x)$ ist.

Damit ist der Beweis des Satzes II erbracht.

4. Wir wollen jetzt den Zusammenhang zwischen den Eigenschaften im Kleinen und gewissen Eigenschaften, die dem Gesamtraume zukommen, insbesondere den Mächtigkeitseigenschaften der bikompakten Räume, näher betrachten.

Zuerst folgt der

Satz III. *Jede in einem bikompakten Raume liegende perfekte Menge hat die Mächtigkeit* $\geqq \mathfrak{c}$

unmittelbar aus der Regularität der bikompakten Räume[10]).

Es entsteht nun die Frage nach dem Vorhandensein von perfekten Teilmengen in bikompakten Räumen. Diese Frage läßt sich beantworten, und zwar mit Hilfe folgender Definition:

Defintion 5. *Ein Punkt ξ des topologischen Raumes $\mathfrak{R}$ heißt ein Staupunkt, wenn, wie groß die Kardinalzahl $\mathfrak{m} < |\mathfrak{R}|$ auch gewählt sei, in jeder Umgebung $U(\xi)$ Punkte x mit $\chi_{\mathfrak{R}}(x) > \mathfrak{m}$ vorkommen.*

Zufolge dieser Definition ist die Menge Ξ aller Staupunkte des Raumes $\mathfrak{R}$ eine abgeschlossene Menge; falls ξ in Ξ isoliert ist, heißt er ein isolierter Staupunkt. Jetzt formulieren wir den

---

[10]) $\mathfrak{H}$, Satz IV.

Satz IV. *Jeder bikompakte Raum ohne perfekte Teilmenge enthält stets einen isolierten Staupunkt.*

Wenn die Mächtigkeit $|\mathfrak{R}|$ der Menge aller Raumpunkte eine reguläre Mächtigkeit ist[11]), kann man den Satz noch verschärfen, indem man zeigt, daß in diesem Falle der Raum stets einen Punkt ξ, dessen Charakter $\chi_{\mathfrak{R}}(\xi) = |\mathfrak{R}|$ ist, enthält.

Der Fall der regulären Mächtigkeit $|\mathfrak{R}|$ wird sofort durch den folgenden leicht beweisbaren Hilfssatz erledigt:

Hilfssatz. Wenn $|\mathfrak{R}|$ regulär ist, und ξ ein isolierter Punkt der abgeschlossenen, aus sämtlichen vollständigen Häufungspunkten des gesamten Raumes $\mathfrak{R}$ bestehenden Menge Φ ist, so ist $\chi_{\mathfrak{R}}(\xi) = |\mathfrak{R}|$.

Der allgemeine Fall läßt sich folgendermaßen untersuchen.

Es sei $|\mathfrak{R}|$ irregulär und ξ ein vollständiger Häufungspunkt von $\mathfrak{R}$, der in der Menge Φ aller derartigen Punkte isoliert ist. Ich behaupte, ξ sei ein Staupunkt. Vorausgesetzt $\chi_{\mathfrak{R}}(\xi) < |\mathfrak{R}|$, so erhält man für jede Umgebung $U(\xi)$ zwei andere Umgebungen $U_0(\xi)$ und $U_1(\xi)$, so daß $U_0(\xi) \subset U_1(\xi) \subset \overline{U}_1(\xi) \subset U(\xi)$ und außerdem $|\overline{U}_1(\xi) - U_0(\xi)| > \mathfrak{r} > \mathfrak{m}$ ist, wo $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{m}$ beliebige Kardinalzahlen unter $|\mathfrak{R}|$ sind, und $\mathfrak{r}$ als regulär vorausgesetzt werden darf. Man greift nun eine Teilmenge E, $|E| = \mathfrak{r}$ aus der abgeschlossenen Menge $\overline{U}_1(\xi) - U_0(\xi)$ heraus; da der Raum keinen perfekten Bestandteil hat, so enthält die abgeschlossene Menge F aller vollständigen Häufungspunkte der Menge E sicher einen isolierten Punkt $x \subset F \subset \overline{U}_1(\xi) - U_0(\xi) \subset U(\xi)$, und es ist leicht einzusehen, daß $\chi_{\mathfrak{R}}(x) \geqq \mathfrak{r} > \mathfrak{m}$ ist. Damit ist aber der Satz IV offenbar bewiesen.

Aus dem soeben gewonnenen Ergebnisse folgt unmittelbar der

Satz V. *Jeder das I. Abzählbarkeitsaxiom erfüllende bikompakte topologische Raum ist entweder abzählbar oder mit einer perfekten Teilmenge versehen; im letzteren Falle ist die Mächtigkeit des Raumes* $\geqq \mathfrak{c}$.

Es ist besonders bemerkenswert, daß unter der Voraussetzung des Satzes V die Zerspaltung des Raumes in einen perfekten Kern und eine abzählbare Punktmenge im allgemeinen nicht möglich zu sein braucht; vielmehr gibt es bikompakte, dem I. Abzählbarkeitsaxiome genügende Räume, die eine unabzählbare (und zwar von der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$) Menge von isolierten Punkten enthalten[12]). Ich bemerke noch, daß die Sätze

[11]) Eine Mächtigkeit $\mathfrak{m} = \aleph_\tau$ heißt bekanntlich regulär, wenn die zugehörige Anfangszahl ω_τ keiner kleineren Ordnungszahl konfinal ist. Man vergl. Hausdorff, loc. cit. S. 130.

[12]) Die Frage, ob es bikompakte, dem I. Abzählbarkeitsaxiome genügende Räume von der Mächtigkeit $> \mathfrak{c}$ geben könne, bleibt bisher ungelöst. Herr Urysohn hat bewiesen, daß diese Frage sich verneinen läßt in bikompakten Räumen, in denen eine jede abgeschlossene Menge Durchschnitt von abzählbar-vielen Gebieten ist (= ein

IV und V in kompakten (sogar regulären, aber nicht bikompakten) Räumen allgemein falsch sind.

5. Ich will nun jetzt einen viel allgemeineren Mächtigkeitssatz aussprechen, der, soviel mir bekannt ist, überhaupt die allgemeinste Behauptung über Mächtigkeiten von Punktmengen enthält, die wir, nach dem heutigen Stande der Wissenschaft, aufstellen können. Es handelt sich zunächst um die sogenannten Borelschen Mengen, deren kürzeste Definition die folgende, von Sierpiński herrührende ist:

Wir nennen ein System von Mengen ein T-System, wenn Summe und Durchschnitt von je höchstens abzählbar-vielen Mengen des Systems wieder dem Systeme angehören. Dann ist der Inbegriff aller Borelschen Mengen definitionsgemäß das kleinste (d. h. in jedem anderen enthaltene) T-System, welches alle abgeschlossenen Mengen und alle Gebiete des gegebenen Raumes enthält.

Es war seit langer Zeit eine fast allgemeine Meinung, daß man mit den üblichen Mitteln der Analysis nicht über die Borelschen Mengen hinausgelangen könne. Erst im Jahre 1917 zeigte Souslin, daß *die Borelschen Mengen nur ein Spezialfall einer viel weiter gehenden Klasse der sogenannten* (A)-*Mengen sind*[13]), die sich folgendermaßen definieren

jedes F ein G_δ ist. Hausdorff, loc. cit. S. 23 und 304, 305). In denselben Räumen ist auch der Cantor-Bendixsonsche Satz gültig, d. h. eine jede abgeschlossene unendliche Menge ist entweder abzählbar oder Summe einer perfekten (von Null verschiedenen) und einer höchstens abzählbaren Menge. Vgl. Paul Alexandroff und Paul Urysohn, „Sur les espaces topologiques compacts“ (wird in den „Fundamenta Mathematicae“ erscheinen).

[13]) Der erste Beweis, daß eine *jede Borelsche Menge eine* (A)-*Menge ist*, ist zuerst vollständig durchgeführt, aber nicht formuliert worden in meiner Comptes-Rendus-Note „*Sur la puissance des ensembles mesurables B*“ (C. R., 28 février 1916). Diese Tatsache ist gerade der springende Punkt des Beweises des Mächtigkeitssatzes, der dort gegeben ist; der Mächtigkeitsbeweis läßt sich wörtlich auf allgemeine (A)-Mengen übertragen. Souslin hat im Januar 1917 (ebenfalls in den Comptes Rendus) den Begriff der allgemeinen (A)-Mengen zuerst explizite formuliert und *ein Beispiel einer* (A)-*Menge, die keine* (B)-*Menge ist*, gegeben. Herr Lusin bewies danach, daß *die Wertmenge einer jeden analytisch-darstellbaren Funktion* (= einer Baireschen Funktion) *stets eine* (A)-*Menge, aber nicht allgemein eine* (B)-*Menge ist.* Ich erwähne aus der ganzen tiefgehenden Soulin-Lusinschen Theorie noch den Satz, daß *eine komplementäre Menge zu einer* (A)-*Menge selbst keine* (A)-*Menge zu sein braucht*; vielmehr sind in diesem Falle beide Mengen Borelsche. Herr Urysohn hat endlich *ein Beispiel einer im Einheitskreise regulären Potenzreihe gegeben, deren Randwertmenge keine Borelsche ist*; vielmehr beweist er, daß diese Menge stets eine (A)-Menge ist. In dem Begriffe der (A)-Mengen wird endlich ein den modernen Forderungen der Analysis vollständig angepaßter und in sich abgeschlossener Mengenvorrat gewonnen. Literatur: Souslins und Lusins Comptes-Rendus-Noten 1917, Lusin und Sierpiński: Bull. Ac. Polon. 1918, Journ. de Math. 1923; man vergl. auch außer meiner schon erwähnten C.-R.-Note zwei von mir verfaßte Artikel (Fundamenta Math. 5, Rec. Math. Moscou **31**, 2) über die Komplementärmengen der (A)-Mengen.

lassen. *Gegegeben sei ein System* $F_{i_1 i_2 \dots i_k}$ *von abgeschlossenen Mengen, wo* $k, i_1, i_2, \dots, i_k$ *alle Werte* $1, 2, \dots, n, \dots$ *durchlaufen. Die Menge, die als Vereinigungsmenge aller Mengen*

$$H_{i_1 i_2 \dots i_k \dots} = F_{i_1} \cdot F \qquad \dots F_{i_1 i_2 \dots i_k} \cdots$$

entsteht, ist dann eine (A)*-Menge.* Die ganze Theorie der (A)- und (B)-Mengen ist in topologischen bikompakten Räumen, in denen eine jede abgeschlossene Menge Durchschnitt von abzählbar vielen Gebieten ist, gültig. Es besteht insbesondere der Satz:

Satz VI. *In einem bikompakten Raume, in dem jedes* F *ein* G_δ *ist, enthält eine unabzählbare* (A)*-Menge (insbesondere* (B)*-Menge) stets eine perfekte Teilmenge und besitzt infolgedessen die Mächtigkeit* $\mathfrak{c}$.

Der Gedankengang des Beweises bleibt derselbe, wie er bereits im Falle des Euklidischen Raumes von mir im Jahre 1916 gegeben worden ist. Die Voraussetzung, daß ein jedes F ein G_δ ist, ist für die ganze Mächtigkeitstheorie sowie auch für die Theorie der (A)- und (B)-Mengen von grundlegender Bedeutung, wie man es an Gegenbeispielen sofort erkennt[14]).

Göttingen, den 3. Juli 1923.

P.S. Die Hauptergebnisse dieser Arbeit sind im März und Juni 1922 der Moskauer Mathematischen Gesellschaft und am 26. Juni 1923 der Göttinger Mathematischen Gesellschaft mitgeteilt worden.

---

[14]) Ich erwähne noch, daß der Mächtigkeitssatz für die Borelschen Mengen (unter gewöhnlichen Voraussetzungen) fast gleichzeitig mit mir von Herrn Hausdorff bewiesen worden ist (Math. Annalen 1916). Unter rein topologischen Voraussetzungen kommen meines Wissens Mächtigkeitsfragen erst heute in Betracht.

(Eingegangen am 1. 8. 1923.)