Über die Metrisation der kompakten topologischen Räume.

Von

Paul Urysohn † in Moskau.

1. Der Zweck dieser Arbeit ist zu beweisen:

Ein kompakter topologischer Raum[1]) *ist dann und nur dann metrisierbar, wenn er dem* II. *Abzählbarkeitsaxiom*[2]) *genügt*[3]); dabei nennen wir einen topologischen Raum *metrisierbar*, wenn zwischen seinen Punkten eine den gewöhnlichen Voraussetzungen genügende[4]) und zu denselben Limesbildungen wie das ursprüngliche Umgebungssystem führende Entfernung definiert werden kann.

Der zu beweisende Satz kann also auch folgendermaßen formuliert werden:

Das II. *Abzählbarkeitsaxiom ist eine notwendige und hinreichende Bedingung, damit ein kompakter topologischer Raum einem metrischen Raume*[5]) *homöomorph sei.*

Der Schwerpunkt ist der Beweis des Hinreichens (d. h. die *Metrisation*); auf den leicht zu führenden Beweis der Notwendigkeit gehe ich überhaupt nicht ein, da man ihn *implizite* schon im Hausdorffschen Buche finden kann[6]). Ebenso lasse ich beiseite die Erläuterung der Bedeutung, die dieser Satz für die Begründung der Topologie hat[7]).

---

[1]) Im Hausdorffschen Sinne: *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, Veit (1914), S. 213 und 230.

[2]) Hausdorff, l. c. S. 263 (Axiom (F)).

[3]) Allerdings muß das II. Abzählbarkeitsaxiom so formuliert werden, daß die aus endlich vielen Punkten bestehenden Räume dabei nicht, wie es bei Hausdorff der Fall ist, ausgeschaltet werden. Da jedoch solche Räume trivial sind, so genügt es, wenn wir im folgenden nur aus unendlich vielen Punkten bestehende Räume betrachten.

[4]) l. c. S. 211.

[5]) l. c. S. 211.

[6]) l. c. S. 274, X u. S. 273.

[7]) Man vergleiche hierzu eine Note, die ich vor kurzem in dem *Bull. de l'Acad. Polonaise* (1923) publiziert habe. — Während der Drucklegung dieser Arbeit ist eine

Bezeichnungen. Ich schließe mich im wesentlichen an die Hausdorffsche Terminologie an, benutze aber etwas andere Operationszeichen. Nämlich, die Vereinigungsmenge von A und B soll immer (auch wenn A und B nicht elementenfremd sind) durch $A+B$, der Durchschnitt dieser Mengen durch $A\times B$, ihre Differenz (d. h. die Menge der zu B nicht gehörenden Punkte von A; dabei wird nicht vorausgesetzt, daß B eine Teilmenge von A ist) durch $A-B$ bezeichnet werden. Das Inklusionszeichen $A\subset B$ bedeutet, daß A Teilmenge von B ist, wobei A und B auch zusammenfallen dürfen[8]).

2. Umgebungssystem. Es sei E ein dem II. Abzählbarkeitsaxiom genügender kompakter topologischer Raum, und

$$V_1, V_2, \ldots, V_n, \ldots \tag{1}$$

ein ihn definierendes abzählbares Umgebungssystem[9]). Es ist zu bemerken, daß ein den Punkt x enthaltendes V_n nicht notwendig eine Umgebung *dieses* Punktes zu sein braucht. Wir führen also ein *neues* Umgebungssystem ein, wenn wir jedes V_n, das einen beliebigen Punkt x enthält, als Umgebung dieses Punktes bezeichnen; das Hausdorffsche Kriterium[10]) zeigt aber sofort, daß das neue System dem alten gleichwertig ist.

Wir werden also im folgenden immer voraussetzen, daß *jedes V_n eine Umgebung eines jeden in ihm enthaltenen Punktes ist.*

3. Überdeckungen. Da E kompakt ist, so gilt für ihn der Borelsche Überdeckungssatz[11]). Es gibt also gewiß solche *endliche* Systeme von Umgebungen

$$\Pi_i = \{V_i^{(1)}, V_i^{(2)}, \ldots, V_i^{(h_i)}\},$$

die den ganzen Raum überdecken; wir nennen sie *Überdeckungen.* Verschiedene Überdeckungen gibt es abzählbar viele; wir bezeichnen sie in irgendeiner Reihenfolge mit

$$\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n, \ldots\,. \tag{2}$$

---

gemeinschaftliche Note von P. Alexandroff und mir in den Pariser *Comptes Rendus* (**177**, S. 1274) erschienen, in der unter Benutzung des (daselbst zitierten) Chittendenschen Satzes das Metrisationsproblem eine allgemeine (aber ziemlich komplizierte) Lösung findet. Übrigens erlaubt der Chittendensche Satz auch den zweiten Teil des Beweises des in dieser Arbeit behandelten Satzes erheblich zu vereinfachen: insbesondere hat mir Herr F. Hausdorff einen erstaunlich einfachen Beweis mündlich mitgeteilt. — In der soeben zitierten Note wird man auch weitere Literaturangaben finden.

[8]) $x\subset A$ besagt, daß der Punkt x zur Menge A gehört.

[9]) Da eine Menge ohne Umgebungen kein Raum ist, so ist es zweckmäßig zu sagen, daß das Umgebungssystem den Raum definiert. Verschiedene Umgebungssysteme in derselben Menge definieren im allgemeinen verschiedene Räume, wohl aber *denselben* Raum, wenn diese Systeme *gleichwertig* sind (Hausdorff, l. c., S. 260).

[10]) l. c. S. 261.

[11]) l. c. S. 272, VI.

Eine Überdeckung Π_i nennen wir *regulär*, wenn sie keine überflüssige Umgebungen enthält, d. h. wenn jedes $V_i^{(j)}$ mindestens einen Punkt (*Eigenpunkt*) enthält, der in keinem anderen $V_i^{(k)}$ liegt. Aus jedem nicht regulären Π_m kann man mittels sukzessiver Weglassung der überflüssigen Umgebungen ein reguläres $\Pi_{m'}$ gewinnen; die Beziehung von $\Pi_{m'}$ zu Π_m werden wir durch die Gleichung

$$\Pi_{m'} = J(\Pi_m)$$

bezeichnen. Wenn Π_m regulär ist, so soll $J(\Pi_m) = \Pi_m$ sein.

4. Hauptmenge. Es sei Π_n irgendeine reguläre Überdeckung. Wenn wir in jedem dazu gehörigen $V_n^{(j)}$ einen bestimmten Eigenpunkt wählen, so erhalten wir eine endliche Punktmenge; verfahren wir ebenso mit jeder regulären Überdeckung, so entsteht eine abzählbare Menge

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, \tag{3}$$

die wir ein für allemal fest gewählt denken, mit E_0 bezeichnen und *Hauptmenge* des Raumes E nennen.

E_0 ist im Raume E überall dicht[12]).

Es sei, in der Tat, V_n irgendeine Umgebung, und x irgendein in V_n liegender Punkt. Wir setzen dann $V_x = V_n$ und wählen für jeden von x verschiedenen Punkt y ein den Punkt x nicht enthaltendes V_y. Das so erhaltene unendliche Umgebungssystem $\{V_z\}_{z\subset E}$ überdeckt offenbar E; man kann folglich daraus ein Π_m, also auch ein reguläres Π_i herausgreifen. V_n wird aber dann notwendig zu diesem Π_i gehören, da es die einzige Umgebung des ursprünglichen Systems war, die den Punkt x enthielt. Zufolge der Konstruktion von E_0 enthält V_n — und n war willkürlich gewählt — mindestens einen Punkt von E_0, w. z. b. w.

Wenn wir jetzt irgendein reguläres Π_i

$$\Pi_i = \{V_i^{(1)}, V_i^{(2)}, \ldots, V_i^{(h_i)}\}$$

haben, so können wir für jedes seiner $V_i^{(j)}$ einen Eigenpunkt $a_i^{(j)}$ aus E_0 wählen. Wenn wir dabei jedesmal aus allen zulässigen Punkten denjenigen wählen, der in (3) den kleinsten Index hat, so werden wir sagen, daß

$$a_i^{(1)}, a_i^{(2)}, \ldots, a_i^{(h_i)}$$

die *Hauptpunkte* von Π_i sind.

5. Inklusion der Überdeckungen. Wir werden sagen, daß

$$\Pi_i = \{V_i^{(1)}, V_i^{(2)}, \ldots, V_i^{(h_i)}\}$$

in

$$\Pi_k = \{V_k^{(1)}, V_k^{(2)}, \ldots, V_k^{(h_k)}\}$$

[12]) l. c. S. 249.

enthalten ist — in Zeichen: $\Pi_i \subset \Pi_k$ —, wenn jedes $V_i^{(n)}$ in einem $V_k^{(m)}$ enthaten ist. Offenbar ist

$$\Pi_i \subset \Pi_i$$

und aus

$$\Pi_i \subset \Pi_k, \quad \Pi_k \subset \Pi_l$$

folgt

$$\Pi_i \subset \Pi_l.$$

Das Zusammenbestehen der beiden Inklusionen $\Pi_j \subset \Pi_i$ und $\Pi_j \subset \Pi_k$ werden wir kurz durch

$$\Pi_j \subset \Pi_i \times \Pi_k \tag{4}$$

bezeichnen; und wir werden zeigen, daß es zu jedem Paare Π_i, Π_k ein der Inklusion (4) genügendes Π_j gibt.

In der Tat gehört jeder Punkt x von E zu einem $V_i^{(x)}$ aus Π_i und zu einem $V_k^{(x)}$ aus Π_k, also zu einem V_x, das in $V_i^{(x)} \times V_k^{(x)}$ enthalten ist[13]. Wenn wir aber aus dem unendlichen Umgebungssystem $\{V_x\}_{x \subset E}$ ein Π_j

$$\Pi_j = \{V_{x_1}, V_{x_2}, \ldots, V_{x_n}\}$$

herausgreifen, so ist offenbar die Inklusion (4) erfüllt, da

$$V_{x_\nu} \subset V_i^{(x_\nu)}, \quad V_{x_\nu} \subset V_k^{(x_\nu)}$$

ist. (W. z. b. w.)

6. Kanonische Kette. Eine Folge von Überdeckungen

$$\Pi_{n_1}, \Pi_{n_2}, \ldots, \Pi_{n_k}, \ldots \tag{5}$$

werden wir *kanonische Kette* nennen, wenn folgende vier Bedingungen erfüllt sind:

1. sämtliche Π_{n_k} sind regulär;
2. $\Pi_{n_k} \supset \Pi_{n_{k+1}}$ $(k = 1, 2, \ldots)$;
3. jeder Hauptpunkt von Π_{n_k} ist auch Hauptpunkt von $\Pi_{n_{k+1}}$;
4. jede Überdeckung Π_i enthält ein Π_{n_k}.

Wir beweisen jetzt, daß es kanonische Ketten wirklich gibt. Wir setzen hierzu $\Pi_{k_1} = J(\Pi_1)$ und verfahren weiter durch Induktion, wie folgt: Wenn $\Pi_{n_1}, \Pi_{n_2}, \ldots, \Pi_{n_{k-1}}$ schon definiert sind, so bezeichnen wir mit

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m_{k-1}} \tag{6}$$

ihre Hauptpunkte (d. h. die Hauptpunkte von $\Pi_{n_{k-1}}$); und es sei N_k der größte Index, den die Punkte (6) in der Folge (3) haben. Wir wählen dann eine der Inklusion

$$\Pi_{(k)} \subset \Pi_{k-1} \times \Pi_{n_{k-1}} \tag{7}$$

[13]) Axiom (B) von Hausdorff.

genügende Überdeckung

$$\Pi_{(k)} = \{V_{(k)}^{(1)}, V_{(k)}^{(2)}, \ldots, V_{(k)}^{(t_k)}\}.$$

Wenn jetzt x irgendein Punkt von E ist, so seien

$$V_{(k)}^{(\mu_1)}, V_{(k)}^{(\mu_2)}, \ldots, V_{(k)}^{(\mu_\tau)}$$

alle diejenigen zu $\Pi_{(k)}$ gehörigen Umgebungen, die diesen Punkt enthalten; die Menge

$$G_x = [V_{(k)}^{(\mu_1)} \times V_{(k)}^{(\mu_2)} \times \ldots \times V_{(k)}^{(\mu_\tau)}] - [\sum_{j=1}^{N_k} a_j - x] \tag{8}$$

ist offenbar ein den Punkt x enthaltendes Gebiet; also gibt es ein V_x, das in G_x enthalten ist. Das System $\{V_x\}_{x\subset E}$ überdeckt den Raum; dabei ist aber V_{a_i} $(i \leqq m_{k-1})$ die einzige Umgebung dieses Systems, die den Punkt a_i enthält. Wenn wir also aus dem System $\{V_x\}_{x\subset E}$ eine Überdeckung $\Pi_{[k]}$ herausgreifen, so werden alle V_{a_i} $(i \leqq m_{k-1})$ zu $\Pi_{[k]}$ gehören; dasselbe gilt auch für die reguläre Überdeckung $J(\Pi_{[k]})$, die wir mit Π_{n_k} bezeichnen wollen.

Aus der Konstruktion von $\Pi_{[k]}$ ist es sofort ersichtlich, daß $\Pi_{n_k} \subset \Pi_{[k]} \subset \Pi_{(k)}$, also, wegen (7), $\Pi_{n_k} \subset \Pi_{n_{k-1}}$ ist. Außerdem sind alle a_i $(i \leqq m_{k-1})$ Hauptpunkte von Π_{n_k}. In der Tat ist a_i ein Eigenpunkt der zu Π_{n_k} gehörenden Umgebung V_{a_i}; außerdem ist er in der Folge (3) enthalten und hat daselbst einen Index, der $\leqq N_k$ ist. Da aber zufolge (8) zwei verschiedene a_j $(j \leqq N_k)$ nicht zu einem V_x, also zu V_{a_i} gehören können, so ist a_i ein Hauptpunkt von Π_{n_k}.

Wenn wir jetzt die geschilderte Konstruktion weiter führen, so erhalten wir eine Folge (5), die, wie ersichtlich, den ersten drei Bedingungen genügt; daß aber auch die vierte erfüllt ist, sieht man sofort aus der für jedes k gültigen Inklusion

$$\Pi_{n_k} \subset \Pi_{(k)} \subset \Pi_{k-1}.$$

Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Es sei noch auf folgende zwei Tatsachen hingewiesen:

1) Sämtliche a_j, deren Indizes $\leqq N_k$ sind, sind Hauptpunkte von Π_{n_k}; also ist jeder Punkt von E_0 Hauptpunkt einer Überdeckung, die zur kanonischen Kette (5) gehört.

2) Jede Teilfolge der Folge (5) ist offenbar auch eine kanonische Kette, die die soeben genannte Eigenschaft besitzt.

7. Höhere Inklusionen. Wir verschärfen jetzt folgendermaßen den Begriff der Inklusion zweier Überdeckungen $\Pi_m = \{V_m^{(1)}, \ldots, V_m^{(h_m)}\}$ und $\Pi_n = \{V_n^{(1)}, \ldots, V_n^{(h_n)}\}$: wir werden erstens

$$\Pi_m \overset{2}{\subset} \Pi_n$$

schreiben, wenn es zu jeden zwei zueinander nicht fremden Umgebungen $V_m^{(i)}$ und $V_m^{(j)}$ von Π_m $(V_m^{(i)} \times V_m^{(j)} \neq 0)$ ein sie beide enthaltendes $V_n^{(l)}$ von Π_n gibt:

$$V_n^{(l)} \supset V_m^{(i)} + V_m^{(j)}.\ ^{14)}$$

Wir werden zweitens

$$\Pi_m \overset{3}{\subset} \Pi_n$$

schreiben, wenn es zu jeden drei den beiden Bedingungen

$$V_m^{(i)} \times V_m^{(j)} \neq 0, \qquad V_m^{(j)} \times V_m^{(k)} \neq 0$$

genügenden Umgebungen von Π_m ein $V_n^{(l)}$ von Π_n gibt, das sie sämtlich enthält:

$$V_n^{(l)} \supset V_m^{(i)} + V_m^{(j)} + V_m^{(k)}.$$

Es sei bemerkt, daß wir die Ungleichungen $i \neq j \neq k$ nicht vorausgesetzt haben; also folgt $\Pi_m \subset \Pi_n$ aus $\Pi_m \overset{2}{\subset} \Pi_n$ und $\Pi_m \overset{2}{\subset} \Pi_n$ aus $\Pi_m \overset{3}{\subset} \Pi_n$.

Es folgt weiter, wie leicht ersichtlich, sowie aus

$$\Pi_m \subset \Pi_n \overset{2}{\subset} \Pi_q,$$

wie auch aus

$$\Pi_m \overset{2}{\subset} \Pi_n \subset \Pi_q,$$

daß

$$\Pi_m \overset{2}{\subset} \Pi_q.$$

Endlich folgt aus den Inklusionen

$$\Pi_m \overset{2}{\subset} \Pi_n \overset{2}{\subset} \Pi_q,$$

daß

$$\Pi_m \overset{3}{\subset} \Pi_q;$$

in der Tat, wenn $V_m^{(i)} \times V_m^{(j)} \neq 0$ und $V_m^{(j)} \times V_m^{(k)} \neq 0$ sind, so gibt es, wegen $\Pi_m \overset{2}{\subset} \Pi_n$, ein $V_n^{(r)} \supset V_m^{(i)} + V_m^{(j)}$ und ein $V_n^{(s)} \supset V_m^{(j)} + V_m^{(k)}$, und es ist $V_n^{(r)} \times V_n^{(s)} \supset V_m^{(j)} \neq 0$; also gibt es, wegen $\Pi_n \overset{2}{\subset} \Pi_q$, ein

$$V_q^{(l)} \supset V_n^{(r)} + V_n^{(s)} \supset V_m^{(i)} + V_m^{(j)} + V_m^{(k)},$$

w. z. b. w.

8. Hilfssatz. Zu jedem Π_m gibt es ein $\Pi_n \overset{2}{\subset} \Pi_m$. Man kann dabei die V~~oraussetz~~ung $\Pi_m \neq \Pi_n$ hinzufügen: es genügt in der Tat, den Hilfssatz auf ein von Π_m verschiedenes $\Pi_{m'} \subset \Pi_m$ anzuwenden.

Beweis. Wenn unsere Aussage nicht richtig wäre, so könnte man, insbesondere in jedem Π_{n_k} der kanonischen Kette (5), zwei zueinander nicht fremde Umgebungen $V_k^{\{1\}}$ und $V_k^{\{2\}}$ finden, deren Vereinigungsmenge $V_k^{\{1\}} + V_k^{\{2\}}$ in keinem $V_m^{(i)}$ von Π_m gänzlich enthalten ist. Es sei dann

---

14) Die Inklusion $\Pi \overset{2}{\subset} \Pi$ ist im allgemeinen nicht erfüllt.

y_k ein Punkt von $V_k^{\{1\}} \times V_k^{\{2\}}$, y irgendein (wegen der Kompaktheit von E sicher vorhandener) Häufungspunkt der Folge $\{y_k\}$; wir können aus $\{y_k\}$ eine gegen y konvergierende Teilfolge $\{y_{k_j}\}$ aussondern. Wir bezeichnen ferner mit V_m^y irgendeine zu Π_m gehörende Umgebung des Punktes y; alle y_{k_j}, deren Indizes j ein gewisses j_0 übertreffen, liegen dann in V_m^y. Unserer Voraussetzung gemäß muß mindestens eine der beiden Umgebungen $V_{k_j}^{\{1\}}$ und $V_{k_j}^{\{2\}}$ $(j > j_0)$ aus V_m^y herausragen; wir können immer die Bezeichnungen so wählen, daß dies mit der ersten geschieht:

$$V_{k_j}^{\{1\}} - V_m^y \neq 0 \qquad (j > j_0). \tag{9}$$

Wir definieren jetzt folgendermaßen ein System von Umgebungen $\{V_x\}_{x \subset E}$:

1. wenn $x \subset V_m^y$, so setzen wir $V_x = V_m^y$;
2. wenn $x \subset E - V_m^y$, so wählen wir ein $V_x \subset E - \{y + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} y_{k_j}\}$.

Ein solches V_x existiert zufolge der Abgeschlossenheit von $y + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} y_{k_j}$.

In diesem System $\{V_x\}$ ist folglich jedes V_x entweder mit V_m^y identisch oder zur Menge $\sum_{j > j_0} y_{k_j}$ fremd. Wenn wir also aus dem soeben definierten System eine reguläre Überdeckung $\tilde{\Pi} = \{V_{x_1}, V_{x_2}, \ldots, V_{x_s}\}$ herausgreifen, so ist eine der dazugehörigen Umgebungen mit V_m^y identisch, alle anderen aber zur Menge $\sum_{j=j_0+1}^{\infty} y_{k_j}$ fremd:

$$V_{x_1} = V_m^y, \qquad \sum_{t=2}^{s} V_{x_t} \times \sum_{j=j_0+1}^{\infty} y_{k_j} = 0.$$

Wir wählen endlich ein $\Pi_{n_\varkappa} \subset \tilde{\Pi}$ [15]) und ein den beiden Bedingungen

$$k_j \geqq \varkappa, \quad j > j_0$$

genügendes j; dann ist auch

$$\Pi_{n_{k_j}} \subset \tilde{\Pi}.$$

Infolgedessen muß $V_{k_j}^{\{1\}}$ in einem V_{x_t} enthalten sein; da aber $V_{k_j}^{\{1\}}$ den Punkt y_{k_j} $(j > j_0)$ enthält, so ist $t = 1$, also

$$V_{k_j}^{\{1\}} \subset V_{x_1} = V_m^y,$$

was mit (9) im Widerspruche steht. Damit ist unser Hilfssatz bewiesen.

9. Metrisierende Kette. Es sei $\Pi_{n_{k_1}}$ irgendeine zur kanonischen Kette (5) gehörende Überdeckung. Durch zweimalige Anwendung des so-

[15]) Siehe § 6, 4.

eben bewiesenen Hilfssatzes erhalten wir dann ein $\Pi_{k'} \overset{2}{\subset} \Pi_{n_{k_1}}$ und ein $\Pi_{k''} \overset{2}{\subset} \Pi_{k'}$; wenn außerdem $\Pi_{n_{k_2}}$ die erste Überdeckung aus (5) ist, die den beiden Bedingungen

$$k_2 > k_1, \quad \Pi_{n_{k_2}} \subset \Pi_{k''}$$

genügt, so ist (§ 7)

$$\Pi_{n_{k_2}} \overset{2}{\subset} \Pi_{k'} \overset{2}{\subset} \Pi_{n_{k_1}},$$

also

$$\Pi_{n_{k_2}} \overset{3}{\subset} \Pi_{n_{k_1}} \qquad (k_2 > k_1).$$

Wenn wir dieses Verfahren unendlich oft wiederholen, so erhalten wir eine Folge

$$(10^*) \qquad \Pi_{n_{k_1}}, \Pi_{n_{k_2}}, \ldots, \Pi_{n_{k_j}}, \ldots$$

von Überdeckungen, die erstens — zufolge der Schlußbemerkung des § 6 eine kanonische Kette bilden, zweitens aber nicht nur der allgemeinen Bedingung 2. für kanonische Ketten, sondern auch der schärferen Bedingung

$$2^*. \quad \Pi_{n_{k_j}} \overset{3}{\supset} \Pi_{n_{k_{j+1}}}$$

Genüge leisten.

Eine solche den Bedingungen 1., 2*., 3., 4. genügende Folge (10*) nennen wir *metrisierende Kette.*

Wir denken uns jetzt, daß die soeben gewonnene metrisierende Kette

$$(10) \qquad \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n, \ldots$$

ein für allemal fest gewählt ist, und führen neue Bezeichnungen ein, indem wir

$$\left.\begin{array}{l} \Gamma_1 = \{V_1^1, V_2^1, \ldots, V_{h_1}^1\} \\ \Gamma_2 = \{V_1^2, V_2^2, \ldots, V_{h_2}^2\} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Gamma_n = \{V_1^n, V_2^n, \ldots, V_{h_n}^n\} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} (h_1 \leqq h_2 \leqq \ldots \leqq h_n \leqq \ldots \to \infty)$$

setzen, wobei außerdem die Bezeichnungen so gewählt sind, daß

$$V_i^n \supset V_i^{n+1} \supset \ldots \supset V_i^{n+\nu} \supset \ldots$$

und alle diese Umgebungen denselben Hauptpunkt a_i besitzen.

Die Hauptpunkte bezeichnen wir mit

$$\begin{array}{llll} a_1^1 & , a_2^1 & , \ldots, & a_{h_1}^1, \\ a_{h_1+1}^2 & , a_{h_1+2}^2 & , \ldots, & a_{h_2}^2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{h_{n-1}+1}^n, & a_{h_{n-1}+2}^n, & \ldots, & a_{h_n}^n, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

wobei a_k^m der Hauptpunkt von V_k^m, V_k^{m+1}, ..., $V_k^{m+\mu}$, ... ist; Hauptpunkte von Γ_n sind diejenigen a_k^m, bei denen $m \leqq n$ (oder $k \leqq h_n$) ist. Bei den a_k^m darf der obere Index auch fortgelassen werden; die Folge

$$a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots \tag{3*}$$

ist mit der ursprünglichen Folge (3) bis auf eine Umnumerierung identisch (§ 6, Schlußbemerkung):

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = E_0 .$$

10. Ordnungen. Wir nennen *Ordnung* einer Umgebung V_k^m bzw. eines Hauptpunktes a_k^m den betreffenden oberen Index m. Es ist zu bemerken, daß die Ordnung des Hauptpunktes einer Umgebung die Ordnung der Umgebung selbst nicht übertrifft; wenn a_k^m und $n \geqq m$ gegeben sind, so gibt es immer eine Umgebung n-ter Ordnung, deren Hauptpunkt a_k^m ist.

Es sei noch auf folgende Eigenschaft der metrisierenden Kette (10) hingewiesen:

Wenn V_k^n einen Hauptpunkt a_k^m von niedrigerer Ordnung besitzt ($m < n$; also ist V_k^{n-1} vorhanden), und wenn außerdem

$$V_k^n \times V_l^n \neq 0, \qquad V_l^n \times V_s^n \neq 0$$

ist, so ist

$$V_k^n + V_l^n + V_s^n \subset V_k^{n-1} .$$

In der Tat ist wegen der Bedingung 2*. (§ 9) $V_k^n + V_l^n + V_s^n$ in einem $V_\varkappa^{n-1}$ enthalten; da aber $V_\varkappa^{n-1} \supset V_k^n \supset a_k^m$ und a_k^m der Hauptpunkt von V_k^{n-1} ist, so muß $V_\varkappa^{n-1}$ mit V_k^{n-1} identisch sein. (W. z. b. w.)

11. Der Raum M_0. Es sei

$$M_0 = \{b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots\}$$

eine abzählbare Menge, die wir mit Hilfe der Relation $b_k \sim a_k$ eindeutig auf E_0 abbilden; wenn $a_k = a_k^m$ ist, so werden wir auch b_k^m statt b_k schreiben. Wir führen jetzt folgendermaßen *Entfernungen* $\varrho(b_k, b_l)$ ein[16]:

***A*₁.** Wenn $V_k^1 \times V_l^1 = 0$ ist, so setzen wir $\varrho(b_k^1, b_l^1) = 1$;
wenn $V_k^1 \times V_l^1 \neq 0$ ist, so setzen wir $\varrho(b_k^1, b_l^1) = \frac{1}{2}$.

Damit erhalten wir für die h_1 Punkte b_k^1 erster Ordnung eine dem Dreiecksaxiom genügende Entfernung.

***A*ₙ.** Wir nehmen jetzt an, daß eine dem Dreiecksaxiom genügende Entfernuug $\varrho(b_k, b_l)$ schon zwischen allen Punkten der Ordnung $< n$ (d. h. für $k, l \leqq h_{n-1}$) festgesetzt worden ist, und zwar in solcher Weise, daß die beiden Bedingungen

[16]) Da $\varrho(b_k, b_k) = 0$ zu setzen ist, so genügt es im folgenden, nur den Fall $k \neq l$ zu berücksichtigen.

$$(\ \mathrm{I}_{n-1}):\ \varrho(b_k, b_l) \text{ ist ein ganzes Vielfaches von } \frac{1}{2^{n-1}},$$

$$(\mathrm{II}_{n-1}):\ \varrho(b_k, b_l) = \frac{1}{2^{n-1}}, \text{ wenn } V_k^{n-1} \times V_l^{n-1} \neq 0$$

erfüllt sind $((\mathrm{I}_1)$ und (II_1) waren, zufolge A_1, offenbar erfüllt).

Wir definieren jetzt $\varrho(b_k, b_l)$ für alle k und l, die $\leqq h_n$ sind; dabei soll diese Entfernung mit der alten übereinstimmen, wenn beide Punkte von einer Ordnung $< n$ sind, und es sollen sowohl das Dreiecksaxiom wie auch die den Bedingungen (I_{n-1}) und (II_{n-1}) analogen Bedingungen (I_n) und (II_n) erfüllt sein. Wir unterscheiden folgende drei Fälle:

α) Wenn $V_k^n \times V_l^n \neq 0$, so setzen wir $\varrho(b_k, b_l) = \frac{1}{2^n}$.

Diese Definition ist widerspruchsfrei, da mindestens einer der beiden Punkte von der Ordnung n ist. Wäre in der Tat die Ordnung von b_k kleiner als n, so wäre a_k Hauptpunkt einer Umgebung V_k^{n-1}, die (§ 10) $V_k^n + V_l^n$, also auch a_l enthalten würde; also wäre in diesem Falle a_l gewiß kein Hauptpunkt von Γ_{n-1}, d. h. kein Punkt von einer Ordnung $< n$.

β) Wenn $V_k^n \times V_l^n = 0$, aber $V_k^n \subset V_l^{n-1}$ ist, so setzen wir $\varrho(b_k, b_l) = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Auch diese Definition ist widerspruchsfrei, da man sich — ebenso wie im vorigen Falle — sofort überzeugt, daß die Ordnung von b_k gleich n ist.

γ) Wir betrachten jetzt den Fall, wo die vorhergehenden Definitionen noch nicht genügen, $\varrho(b_k, b_l)$ festzulegen. Zwischen den verschiedenen die Punkte b_k und b_l verbindenden endlichen Punktketten $[b_k\, b_{s_1}\, b_{s_2} \ldots b_{s_i}\, b_l]$ gibt es dann gewiß auch solche — wir werden sie *metrische Ketten* nennen —, in denen für jedes benachbarte Punktepaar die Entfernung schon definiert ist.

Es sei in der Tat $V_{s_1}^{n-1}$ eine Umgebung von der Ordnung $n-1$, die V_k^n enthält $(V_k^n \supset a_k \sim b_k)$ [17], und $V_{s_2}^{n-1}$ eine solche, die $\supset V_l^n$; dann ist $[b_k\, b_{s_1}\, b_{s_2}\, b_l]$ eine metrische Kette.

Wir nennen *Länge* einer metrischen Kette die Summe der Längen ihrer Glieder, d. h. die Summe

$$\varrho(b_k, b_{s_1}) + \varrho(b_{s_1}, b_{s_2}) + \ldots + \varrho(b_{s_i}, b_l).$$

Ich behaupte jetzt, daß es zwischen b_k und b_l eine *Minimalkette*, d. h. eine metrische Kette kleinstmöglicher Länge gibt. In der Tat kann man mittels sukzessiver Weglassung der hintereinanderstehenden Wiederholungen eines und desselben Punktes und der geschlossenen Zyklen jede Kette durch eine nicht längere Kette ersetzen, die jeden Punkt höchstens

[17] Wenn $k \leqq h_{n-1}$, d. h. wenn die Ordnung von $a_k < n$ ist, so ist $s_1 = k$.

einmal enthält. Da es aber solcher wiederholungsfreier Ketten offenbar nur endlich viele gibt, so ist unsere Behauptung bewiesen.

Wir setzen alsdann $\varrho(b_k, b_l)$ gleich der Länge einer Minimalkette.

Da die Bedingungen (I_n) und (II_n) offenbar erfüllt sind, so bleibt es nur zu zeigen, daß

$$\varrho(b_k, b_l) \leqq \varrho(b_k, b_t) + \varrho(b_t, b_l)$$

ist (Dreiecksaxiom). Da die Länge einer die Punkte b_k und b_t verbindenden Minimalkette $[b_k\, b_{s_1}\, b_{s_2} \ldots b_{s_i}\, b_t]$ unserer Definition gemäß jedenfalls nicht größer als $\varrho(b_k, b_t)$ sein kann[18]), ebenso die Länge der Minimalkette $[b_t\, b_{s_{i+1}}\, b_{s_{i+2}} \ldots b_{s_j}\, b_l] \leqq \varrho(b_t, b_l)$ ist, endlich aber die Länge einer b_k und b_l verbindenden Minimalkette $\leqq$ der Länge von $[b_k\, b_{s_1}\, b_{s_2} \ldots b_{s_i}\, b_t\, b_{s_{i+1}} \ldots b_{s_j}\, b_l]$, also $\leqq \varrho(b_k, b_t) + \varrho(b_t, b_l)$ ist, so genügt es, zu zeigen, daß

die Länge einer Minimalkette zwischen b_k und b_l nicht kleiner als $\varrho(b_k, b_l)$ sein kann.

Letztere Tatsache ist aber in den Fällen $A_n\gamma$, $A_n\alpha$ und $A_n\beta$ unmittelbar einleuchtend: im ersten zufolge der Definition von $\varrho(b_k, b_l)$ in diesem Falle, im zweiten infolgedessen, daß die Länge *jeder* Kette $\geqq \frac{1}{2^n}$ ist; im dritten Falle folgt sie endlich daraus, daß nur die eingliedrigen, auf Grund von $A_n\alpha$ — was hier offenbar nicht zutreffen kann — definierten Ketten eine Länge von $< \frac{1}{2^{n-1}}$ besitzen können.

Es bleibt also nur der Fall A_{n-1} übrig, d. h. derjenige, wo b_k und b_l beide eine Ordnung $< n$ haben. Wir betrachten in diesem Falle irgendeine metrische Kette $[b_k\, b_{s_1}\, b_{s_2} \ldots b_{s_i}\, b_l]$; wenn $b_k, b_{s_{\alpha_1}}, b_{s_{\alpha_2}}, \ldots, b_{s_{\alpha_\mu}}, b_l$ diejenigen Punkte dieser Kette sind, deren Ordnungen $< n$ sind, so ist zufolge dem, wie wir vorausgesetzt haben, für Punkte $< n$-ter Ordnung erfüllten Dreiecksaxiome

$$\varrho(b_k, b_l) \leqq \varrho(b_k, b_{s_{\alpha_1}}) + \varrho(b_{s_{\alpha_1}}, b_{s_{\alpha_2}}) + \ldots + \varrho(b_{s_{\alpha_\mu}}, b_l);$$

es genügt also zu zeigen, daß jedes $\varrho(b_{s_{\alpha_j}}, b_{s_{\alpha_{j+1}}})$ nicht größer als die Länge des betreffenden Abschnittes unserer Kette ist; d. h. wir haben nur solche Ketten zu betrachten, deren Endpunkte $< n$-ter, sämtliche Mittelpunkte aber von n-ter Ordnung sind.

Es sei also $[b_k\, b_{s_1}\, b_{s_2} \ldots b_{s_i}\, b_l]$ eine solche Kette:

$$k, l \leqq h_{n-1}, \quad s_j > h_{n-1} \qquad (j = 1, 2, \ldots, i);$$

---

[18]) In den Fällen A_{n-1} (d. i. $k, t \leqq h_{n-1}$), $A_n\alpha$ und $A_n\beta$ ist diese Kette eingliedrig.

wenn wir ihre Länge durch $\frac{r}{2^n}$ bezeichnen[19]), so haben wir zu zeigen, daß $\varrho(b_k, b_l) \leqq \frac{r}{2^n}$ ist.

Beweis. Zufolge der Definition der metrischen Ketten ist die Entfernung zwischen b_{s_j} und $b_{s_{j+1}}$ notwendigerweise auf Grund von $A_n\alpha$ eingeführt; also ist

$$\varrho(b_{s_j}, b_{s_{j+1}}) = \frac{1}{2^n}, \quad V^n_{s_j} \times V^n_{s_{j+1}} \neq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, i-1).$$

Für $\varrho(b_k, b_{s_1})$ sind hingegen zwei Möglichkeiten vorhanden: entweder sind wir auch hier im Falle $A_n\alpha$, — und dann ist $\varrho(b_k, b_{s_1}) = \frac{1}{2^n}$ und $V^n_k \times V^n_{s_1} \neq 0$; oder im Falle $A_n\beta$, was $\varrho(b_k, b_{s_1}) = \frac{2}{2^n}$ und $V^{n-1}_k \supset V^n_{s_1}$ zur Folge hat. Dasselbe gilt auch vom Punktepaare b_{s_i}, b_l.

Wir können voraussetzen, daß $r \geqq 3$ ist: der Fall einer eingliedrigen Kette $[b_k b_l]$ ist nämlich trivial, und in allen anderen Fällen ist die genannte Voraussetzung erfüllt. Es könnte in der Tat $r < 3$ nur noch im Falle einer zweigliedrigen Kette $[b_k b_{s_1} b_l]$ sein, wenn außerdem $\varrho(b_k, b_{s_1}) = \varrho(b_{s_1}, b_l) = \frac{1}{2^n}$ wäre; dies ist aber unmöglich, da die, wie wir soeben gesehen haben, in diesem Falle erfüllten Relationen $V^n_k \times V^n_{s_1} \neq 0$ und $V^n_{s_1} \times V^n_l \neq 0$ die Existenz einer $V^{n-1}_\lambda \supset V^n_k + V^n_{s_1} + V^n_l$, also einer Umgebung $(n-1)$-ter Ordnung, die zwei Hauptpunkte, a_k und a_l, von Γ_{n-1} enthält, zur Folge hätten.

Wir führen jetzt folgende Bezeichnungen ein: Wenn die Länge des Abschnittes $[b_k b_{s_1} \ldots b_{s_j}]$ unserer Kette $= \frac{\alpha}{2^n}$ ist, so setzen wir $b_{s_j} = b_{[\alpha]}$, $a_{s_j} = a_{[\alpha]}$ und $V^n_{s_j} = V^n_{[\alpha]}$; also ist $b_k = b_{[0]}$, $b_{s_1} = b_{[1]}$ oder $b_{[2]}$, $b_{s_i} = b_{[r-2]}$ oder $b_{[r-1]}$, $b_l = b_{[r]}$.

Ich behaupte, daß $V^{n-1}_k \supset a_{[2]}$: wenn $b_{[1]}$ nicht existiert, also $b_{[2]} = b_{s_1}$, $\varrho(b_k, b_{s_1}) = \frac{2}{2^n}$ ist, so ist $V^{n-1}_k \supset V^n_{s_1} \supset a_{s_1} = a_{[2]}$; und im Falle der Existenz von $b_{[1]}$ ist $b_{s_1} = b_{[1]}$, $b_{s_2} = b_{[2]}$, $\varrho(b_k, b_{s_1}) = \varrho(b_{s_1}, b_{s_2}) = \frac{1}{2^n}$, also $V^n_k \times V^n_{s_1} \neq 0$, $V^n_{s_1} \times V^n_{s_2} \neq 0$, was (§ 10) die Inklusion

$$V^{n-1}_k \supset V^n_k + V^n_{s_1} + V^n_{s_2} \supset a_{s_2} = a_{[2]}$$

zur Folge hat.

---

[19]) r ist zufolge (I_*) eine ganze Zahl.

Ebenso wird die Inklusion $V_l^{n-1} \supset a_{[r-2]}$ bewiesen[19a]).

Es sei jetzt σ irgendeine den Ungleichungen

$$0 < \sigma < \tau = E\left(\frac{r-3}{2}\right)^{20)}$$

genügende ganze Zahl. Dann ist, wie wir schon gesehen haben,

$$V_{[2\sigma]}^n \times V_{[2\sigma+1]}^n \neq 0, \qquad V_{[2\sigma+1]}^n \times V_{[2\sigma+2]}^n \neq 0;$$

es folgt also aus $\Gamma_{n-1} \overset{3}{\supset} \Gamma_n$, daß es eine Umgebung $(n-1)$-ter Ordnung $V_{\{\sigma\}}^{n-1}$ gibt, die $V_{[2\sigma]}^n + V_{[2\sigma+1]}^n + V_{[2\sigma+2]}^n$ enthält; folglich ist

$$V_{\{\sigma\}}^{n-1} \supset a_{[2\sigma]} + a_{[2\sigma+2]}.$$

Da $(r-2) - 2\tau \leqq 2$ ist, so können wir in derselben Weise auf die Existenz einer der Inklusion

$$V_{\{\tau\}}^{n-1} \supset a_{[2\tau]} + a_{[r-2]}$$

genügenden Umgebung $(n-1)$-ter Ordnung $V_{\{\tau\}}^{n-1}$ schließen.

Wir betrachten jetzt die Punktkette

$$[b_k \, b_{\{1\}} \, b_{\{2\}} \ldots b_{\{\tau\}} \, b_l], \tag{11}$$

wo $b_{\{\sigma\}} \sim a_{\{\sigma\}}$ und $a_{\{\sigma\}}$ der Hauptpunkt von $V_{\{\sigma\}}^{n-1}$ ist. Sie besteht aus lauter Punkten $< n$-ter Ordnung und besitzt Glieder, deren Längen sämtlich $\leqq \frac{1}{2^{n-1}}$ sind[21]), wie es aus den Inklusionen

$$\begin{aligned} &V_k^{n-1} \times V_{\{1\}}^{n-1} \supset a_{[2]}, \\ &V_{\{\sigma\}}^{n-1} \times V_{\{\sigma+1\}}^{n-1} \supset a_{[2\sigma+2]} \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, \tau - 1), \\ &V_{\{\tau\}}^{n-1} \times V_l^{n-1} \supset a_{[r-2]} \end{aligned}$$

ersichtlich ist; da anderseits für Punkte $< n$-ter Ordnung das Dreiecksaxiom erfüllt ist, so kommt

---

[19a]) Im Falle $r = 3$ kann es vorkommen, daß einer der beiden Punkte $a_{[2]}$ und $a_{[r-2]} = a_{[1]}$ nicht existiert; einer von ihnen — es sei $a_{[\beta]}$ — ist aber sicher vorhanden, und es ist: $V_k^{n-1} \supset a_{[\beta]}$, $V_l^{n-1} \supset a_{[\beta]}$, also $V_k^{n-1} \times V_l^{n-1} \neq 0$, $\varrho(b_k, b_l) = \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{r}{2^n}$, womit der Fall $r = 3$ vollständig erledigt ist und im folgenden nicht mehr berücksichtigt zu sein braucht.

[20]) $E(x)$ bedeutet die größte ganze Zahl, die $\leqq x$ ist; also ist $2\tau = r - 3$ oder $r - 4$.

[21]) Das Ungleichheitszeichen ist darum zu setzen, weil zwei konsekutive Punkte der Kette (11) auch zusammenfallen können.

$$\varrho(b_k, b_l) \leqq \varrho(b_k, b_{\{1\}}) + \sum_{\sigma=1}^{\tau-1} \varrho(b_{\{\sigma\}}, b_{\{\sigma+1\}}) + \varrho(b_{\{\tau\}}, b_l)$$

$$\leqq \frac{\tau+1}{2^{n-1}} = \frac{E\left(\frac{r-3}{2}\right)+1}{2^{n-1}} \leqq \frac{r-1}{2^n} < \frac{r}{2^n}, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Wir haben also ein Induktionsverfahren erhalten, mit Hilfe dessen wir für alle Punktepaare aus M_0 eine dem Dreiecksaxiom genügende Entfernung definieren; M_0 wird damit in einen *metrischen Raum* verwandelt.

12. Relationen zwischen E_0 und M_0. Es sei b_k^m ein Punkt von der Ordnung $m > n$, und $V_k^m \supset a_k^m \sim b_k^m$; wir können dann eine Reihe von Umgebungen $V_{k_1}^{m-1}, V_{k_2}^{m-2}, \ldots, V_{k_{m-n}}^n$ derart finden, daß

$$V_\lambda^m \subset V_{\lambda_1}^{m-1} \subset V_{k_2}^{m-2} \subset \ldots \subset V_{k_{m-n}}^n \tag{12}$$

Wenn $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_{m-n}}$ die Hauptpunkte dieser Umgebungen sind, so bezeichnen wir den Punkt $b_{k_{m-n}}$ (dessen Ordnung $\leqq n$ ist) mit $c_n(b_\lambda^m)$; $c_n(b_k)$ ist allerdings im allgemeinen durch b_k und n nicht eindeutig bestimmt, was aber für uns belanglos ist. Wenn $m \leqq n$ ist, so setzen wir $c_n(b_k^m) = b_\lambda^m$. Wir beweisen jetzt, daß

$$\varrho(b_k, c_n(b_k)) < \frac{1}{2^{n-1}} \tag{13}$$

ist. Es genügt, den Fall $m > n$ zu betrachten; es folgt dann aus (12) und der Entfernungsdefinition des § 11, daß

$$\varrho(b_k, b_{k_1}) \leqq \frac{1}{2^{m-1}}, \quad \varrho(b_{k_1}, b_{k_2}) \leqq \frac{1}{2^{m-2}}, \quad \ldots, \quad \varrho(b_{k_{m-n-1}}, b_{k_{m-n}}) \leqq \frac{1}{2^n},$$

also

$$\varrho(b_k, b_{k_{m-n}}) \leqq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{m-1}} < \frac{1}{2^{n-1}}. \qquad \text{(W. z. b. w.)}$$

Es sei noch auf folgende, aus unserer Konstruktion unmittelbar ersichtliche Tatsache hingewiesen:

$$\text{aus} \quad b_{k'} = c_n(b_k) \quad \text{folgt} \quad V_{\lambda'}^n \supset a_k.$$

Satz N. *Wenn a_k und a_l zu derselben Umgebung von der Ordnung n gehören, so ist $\varrho(b_k, b_l) < \frac{1}{2^{n-3}}$.*

Beweis. Es sei V_λ^n diejenige Umgebung, die $a_k + a_l$ enthält, und es sei ferner $b_{k'} = c_n(b_k)$, $b_{l'} = c_n(b_l)$. Dann ist

$$V_{\lambda'}^n \times V_\lambda^n \supset a_k \neq 0, \qquad V_\lambda^n \times V_{l'}^n \supset a_l \neq 0,$$

also existiert ein $V_\mu^{n-1} \supset V_{\lambda'}^n + V_\lambda^n + V_{l'}^n$. Der dem Hauptpunkte a_μ von

V_μ^{n-1} entsprechende Punkt b_μ ist folglich gleichzeitig ein $c_{n-1}(b_k)$ und ein $c_{n-1}(b_l)$, was wegen (13)

$$\varrho(b_k, b_l) \leqq \varrho(b_k, b_\mu) + \varrho(b_\mu, b_l) < 2 \cdot \frac{1}{2^{n-2}} = \frac{1}{2^{n-3}},$$

d. h. unsere Behauptung zur Folge hat.

Hilfssatz 1_n. Wenn b_k und b_l zwei Punkte von der Ordnung $\leqq n$ sind $(k, l \leqq h_n)$, deren Entfernung $\varrho(b_k, b_l) \leqq \frac{2}{2^n}$ ist, so gibt es eine Umgebung von der Ordnung $n-2$, die die Punkte a_k und a_l gleichzeitig enthält.

Beweis. $\varrho(b_k, b_l)$ ist entweder auf Grund von $\boldsymbol{A}_{n-1}\alpha$, oder von $\boldsymbol{A}_n\alpha$, oder von $\boldsymbol{A}_n\beta$, oder endlich von $\boldsymbol{A}_n\gamma$ festgelegt. Im ersten Falle ist $V_k^{n-1} \times V_l^{n-1} \neq 0$, also existiert ein $V_\lambda^{n-2} \supset V_k^{n-1} + V_l^{n-1} \supset a_k + a_l$. Im zweiten existiert sogar ein $V_\mu^{n-1} \supset a_k + a_l$, also ein $V_\lambda^{n-2} \supset V_\mu^{n-1} \supset a_k + a_l$. Im dritten ist entweder $V_k^n \subset V_l^{n-1}$, also $V_l^{n-1} \supset a_k + a_l$, oder $V_l^n \subset V_k^{n-1}$, also $V_k^{n-1} \supset a_k + a_l$. Im vierten kann die zugehörige Minimalkette nur zweigliedrig sein, wobei, wenn $[b_k b_s b_l]$ eine solche Kette ist, sowohl $\varrho(b_k, b_s)$, als auch $\varrho(b_s, b_l)$ dem Falle $\boldsymbol{A}_n\alpha$ entsprechen; es existieren also ein $V_\mu^{n-1} \supset a_k + a_s$ und ein $V_\tau^{n-1} \supset a_s + a_l$, also, wegen $V_\mu^{n-1} \times V_\tau^{n-1} \supset a_s \neq 0$, ein $V_\lambda^{n-2} \supset V_\mu^{n-1} + V_\tau^{n-1} \supset a_k + a_l$.

Hilfssatz 2_n. Wenn $k, l \leqq h_n$ und $\varrho(b_k, b_l) < \frac{5}{2^n}$ ist, so gibt es ein V_λ^{n-3}, das $a_k + a_l$ enthält.

Beweis. Da b_k und b_l beide von einer Ordnung $\leqq n$ sind, so ist $\varrho(b_k, b_l)$ ein ganzes Vielfaches von $\frac{1}{2^n}$, also $\leqq \frac{4}{2^n}$. Wir können voraussetzen, daß 1. $\varrho(b_k, b_l) \geqq \frac{3}{2^n}$, 2. die Ordnung wenigstens eines der beiden Punkte $= n$ ist: wäre nämlich eine dieser beiden Voraussetzungen nicht erfüllt, so wäre unsere Behauptung eine Folge des vorigen Hilfssatzes (in der Form 1_n bzw. 1_{n-1}). $\varrho(b_k, b_l)$ ist also auf Grund von $\boldsymbol{A}_n\gamma$ definiert und die entsprechende Minimalkette ist höchstens viergliedrig. Wenn die Kette viergliedrig ist, so haben alle ihre Glieder die Länge $\frac{1}{2^n}$; jedenfalls ist aber die Länge jedes Gliedes $\leqq \frac{2}{2^n}$. Wir sehen also, daß man immer zwei solche (nicht unbedingt voneinander verschiedene) Punkte b_{s_1} und b_{s_2} $(s_1, s_2 \leqq h_n)$ wählen kann, daß

$$\varrho(b_k, b_{s_1}) \leqq \frac{2}{2^n}, \quad \varrho(b_{s_1}, b_{s_2}) \leqq \frac{2}{2^n}, \quad \varrho(b_{s_2}, b_l) \leqq \frac{2}{2^n}$$

ist. Daraus folgt aber (Hilfssatz 1_n) die Existenz von $V_\mu^{n-2} \supset a_k + a_{s_1}$, von $V_\sigma^{n-2} \supset a_{s_1} + a_{s_2}$ und von $V_\tau^{n-2} \supset a_{s_2} + a_l$, also wegen $V_\mu^{n-2} \times V_\sigma^{n-2} \supset a_{s_1}$,

$V_\sigma^{n-2} \times V_\tau^{n-2} \supset a_{s_2}$, die Existenz eines $V_\lambda^{n-3} \supset V_\mu^{n-2} + V_\sigma^{n-2} + V_\tau^{n-2} \supset a_k + a_l$, w. z. b. w.

Satz T. *Wenn* $\varrho(b_k, b_l) < \frac{1}{2^n}$ *ist, so gibt es eine Umgebung von der Ordnung* $n-4$, *die beide Punkte* a_k *und* a_l *gleichzeitig enthält.*

Beweis. Wir benutzen wieder die am Anfange dieses Paragraphen angegebene Konstruktion: es sei nämlich $b_{k'} = c_n(b_k)$, $b_{l'} = c_n(b_l)$. Dann ist, wie wir gesehen haben,

$$V_{k'}^n \supset a_k + a_{k'} \text{ [22]}, \qquad V_{l'}^n \supset a_l + a_{l'},$$

$$\varrho(b_k, b_{k'}) < \frac{2}{2^n}, \qquad \varrho(b_l, b_{l'}) < \frac{2}{2^n},$$

also

$$\varrho(b_{k'}, b_{l'}) \leqq \varrho(b_{k'}, b_k) + \varrho(b_k, b_l) + \varrho(b_l, b_{l'}) < \frac{5}{2^n}.$$

Da anderseits die Ordnung von $b_{k'}$ und $b_{l'}$ $\leqq n$ ist, so folgt (Hilfssatz 2_n) aus dieser Ungleichung die Existenz eines $V_\sigma^{n-3} \supset a_{k'} + a_{l'}$. Wenn wir jetzt ein $V_\mu^{n-3} \supset V_{k'}^n$ und ein $V_\tau^{n-3} \supset V_{l'}^n$ wählen, so ist

$$V_\mu^{n-3} \times V_\sigma^{n-3} \supset V_{k'}^n \times V_\sigma^{n-3} \supset a_{k'}, \qquad V_\sigma^{n-3} \times V_\tau^{n-3} \supset a_{l'};$$

es gibt also ein $V_\lambda^{n-4} \supset V_\mu^{n-3} + V_\sigma^{n-3} + V_\tau^{n-3} \supset a_k + a_l$, w. z. b. w.

13. Fundamentalfolgen[23]).

Satz A. *Wenn die Folge* $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_\nu}, \ldots\}$ *in* E *konvergiert, so ist* $\{b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_\nu}, \ldots\}$ *eine Fundamentalfolge.*

Es sei in der Tat x der Limes von $\{a_{i_\nu}\}$ und $n \geqq 3$ eine ganze Zahl. Wenn V_λ^n eine den Punkt x enthaltende Umgebung von der Ordnung n ist, so enthält sie alle a_{i_ν}, bei denen ν größer als ein gewisses ν_n ist; folglich ist (Satz N) $\varrho(b_{i_{\nu'}}, b_{i_{\nu''}}) < \frac{1}{2^{n-3}}$ für alle $\nu', \nu'' > \nu_n$, w. z. b. w.

Zusatz. Wenn $\{a_{i_\nu}\}$ und $\{a_{j_\nu}\}$ gegen denselben Punkt konvergieren, so sind $\{b_{i_\nu}\}$ und $\{b_{j_\nu}\}$ *konfinal*, d. h. $\varrho(b_{i_\nu}, b_{j_\nu})_{\nu \to \infty} \to 0$.

Die Folge $\{a_{i_1}, a_{j_1}, a_{i_2}, a_{j_2}, \ldots, a_{i_\nu}, a_{j_\nu}, \ldots\}$ ist in der Tat konvergent; die Anwendung des Satzes A liefert also sofort das gewünschte Ergebnis.

Hilfsatz. Wenn x und y zwei verschiedene Punkte von E sind, so gibt es ein Γ_n, welches keine einzige der Inklusion

$$x + y \subset V_\lambda^n$$

genügende Umgebung V_λ^n enthält.

---

[22]) $a_{k'}$ ist der Hauptpunkt von $V_{k'}^n$.

[23]) Hausdorff, l. c. S. 314.

Es seien V_x und V_y zwei zueinander fremde Umgebungen; zu jedem von x und y verschiedenen Punkte von E wählen wir dann eine in $E-(x+y)$ enthaltene Umgebung. Wenn wir aus dem in dieser Weise erhaltenen Umgebungssystem $\{V_z\}_{z\subset E}$ eine Überdeckung $\tilde{\Pi}$ herausgreifen und ein $\Gamma_n \subset \tilde{\Pi}$ wählen, so besitzt ersichtlich Γ_n die verlangte Eigenschaft.

Satz B. *Wenn $\{b_{i_\nu}\}$ eine Fundamentalfolge ist, so ist $\{a_{i_\nu}\}$ im Raume E konvergent.*

Zufolge der Kompaktheit von E genügt es, zu zeigen, daß $\{a_{i_\nu}\}$ einen einzigen Häufungspunkt hat[24]). Wir setzen hingegen voraus, daß x und y zwei verschiedene Häufungspunkte von $\{a_{i_\nu}\}$ sind, und wählen alsdann ein Γ_n, welches dem vorigen Hilfssatze entspricht; es gibt also kein V_λ^n, das x und y gleichzeitig enthält. Wir wählen dann ein solches ν_n, daß für alle $\nu', \nu'' > \nu_n$ die Entfernung $\varrho(b_{i_{\nu'}}, b_{i_{\nu''}}) < \frac{1}{2^{n+5}}$ ist, und zwei Umgebungen von der Ordnung $n+1$, nämlich $V_\xi^{n+1} \supset x$ und $V_\eta^{n+1} \supset y$. Es gibt, unserer Voraussetzung gemäß, Punkte a_{i_ν} mit beliebig hohen Indizes ν, die in V_ξ^{n+1} bzw. in V_η^{n+1} enthalten sind; es seien also ν' und ν'' zwei ganze Zahlen, die den Bedingungen

$$\nu', \nu'' > \nu_n, \qquad a_{i_{\nu'}} \subset V_\xi^{n+1}, \qquad a_{i_{\nu''}} \subset V_\eta^{n+1}$$

genügen; daraus folgt die Ungleichung $\varrho(b_{i_{\nu'}}, b_{i_{\nu''}}) < \frac{1}{2^{n+5}}$, also (Satz T) die Existenz eines $V_\mu^{n+1} \supset a_{i_{\nu'}} + a_{i_{\nu''}}$. Folglich ist

$$V_\xi^{n+1} \times V_\mu^{n+1} \supset a_{i_{\nu'}}, \qquad V_\mu^{n+1} \times V_\eta^{n+1} \supset a_{i_{\nu''}},$$

was auf die Existenz eines

$$V_\lambda^n \supset V_\xi^{n+1} + V_\mu^{n+1} + V_\eta^{n+1} \supset x + y,$$

also auf einen Widerspruch führt. Damit ist Satz B bewiesen.

Zusatz. Wenn $\{b_{i_\nu}\}$ und $\{b_{j_\nu}\}$ konfinale Fundamentalfolgen sind, so konvergieren $\{a_{i_\nu}\}$ und $\{a_{j_\nu}\}$ zu demselben Punkte.

Es genügt, den Satz B auf die Fundamentalfolge $\{b_{i_1}, b_{j_1}, \ldots, b_{i_\nu}, b_{j_\nu}, \ldots\}$ anzuwenden.

14. Der Raum M. Wir können M_0 als eine überall dichte Teilmenge eines *vollständigen metrischen Raumes M* betrachten[25]).

Es sei x irgendein Punkt von E, und $\{a_{i_\nu}\}$ eine gegen ihn konvergierende Folge[26]). Die Folge $\{b_{i_\nu}\}$ ist dann, wie wir es im vorigen Para-

[24]) l. c. S. 234.

[25]) Hausdorff, l. c. S. 315.

[26]) Die a_{i_ν} sind Punkte der in E überall dichten Menge E_0.

graphen gesehen haben, eine Fundamentalfolge; sie konvergiert also gegen einen Punkt y von M; und es folgt aus dem Zusatze zum Satze A, daß y eindeutig durch x bestimmt ist. Anderseits folgt aus der Dichtigkeit von M_0 in M und aus dem Satze B, daß *jeder* Punkt y von M auf diese Weise gewonnen werden kann. Der Zusatz zum letzteren Satze lehrt uns endlich, daß zweien verschiedenen Punkten x_1 und x_2 von E zwei verschiedene Punkte y_1 und y_2 von M entsprechen.

Wir haben also eine eineindeutige Abbildung von E auf M erhalten; diese Abbildung ist eine Erweiterung der ursprünglichen Abbildung von E_0 auf M_0, wie man es leicht aus der Betrachtung von Folgen $\{a_i, a_i, \ldots, a_i, \ldots\}$ $(a_i \subset E_0)$ schließen kann.

Ich behaupte endlich, daß diese Abbildung nebst ihrer Umkehrung *stetig* ist. Wegen der Kompaktheit von E genügt es, zu zeigen, daß M stetiges Bild von E ist[27]; dieses folgt aber unmittelbar aus dem folgenden Satze:

Es seien x_1 und x_2 zwei Punkte von E, die in einer und derselben Umgebung n-ter Ordnung V_λ^n liegen; wenn y_1 und y_2 die ihnen entsprechenden Punkte von M sind, so ist $\varrho(y_1, y_2) \leqq \frac{1}{2^{n-3}}$.

Es seien $\{a_{i_\nu}\} \to x_1$ und $\{a_{j_\nu}\} \to x_2$ zwei Folgen zu E_0 gehörender Punkte; dann ist unserer Konstruktion gemäß $\{b_{i_\nu}\} \to y_1$ und $\{b_{j_\nu}\} \to y_2$. Wir können also, da $x_1 + x_2 \subset V_\lambda^n$ ist, zu jedem $\varepsilon > 0$ ein solches ν wählen, daß

$$a_{i_\nu} + a_{j_\nu} \subset V_\lambda^n, \tag{14}$$

$$\varrho(y_1, b_{i_\nu}) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \varrho(y_2, b_{j_\nu}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Aus (14) folgt aber (Satz N, § 12), daß

$$\varrho(b_{i_\nu}, b_{j_\nu}) < \frac{1}{2^{n-3}},$$

also

$$\varrho(y_1, y_2) \leqq \varrho(y_1, b_{i_\nu}) + \varrho(b_{i_\nu}, b_{j_\nu}) + \varrho(b_{j_\nu}, y_2) < \frac{1}{2^{n-3}} + \varepsilon.$$

Da dies für jedes ε gilt, so ist unsere Behauptung bewiesen.

Wir haben also bewiesen, daß es eine eineindeutige und beiderseits stetige Abbildung von E auf M gibt, d. h. daß *jeder dem*

---

[27] l. c. S. 365, VIII.

II. *Abzählbarkeitsaxiom genügende kompakte topologische Raum einem metrischen Raume homöomorph ist.*

Damit ist unser Ziel erreicht.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, daß Herr Paul Alexandroff viele interessante Anwendungen des soeben bewiesenen Satzes gefunden hat; insbesondere hat er, auf diesen Satz fußend, das Metrisationsproblem für die *im Kleinen kompakten* Räume gelöst[28]).

Göttingen, den 15. VII. 1923.

---

[28]) Diese Arbeit erscheint gleichzeitig in diesen Annalen.

(Eingegangen am 1. 8. 1923.)