Über die Metrisation der im Kleinen kompakten topologischen Räume[1]).

Von

Paul Alexandroff in Moskau.

1. Definitionen und Vorbemerkungen.

In einer vor kurzem erschienenen Arbeit habe ich die bikompakten topologischen Räume insbesondere in bezug auf ihre Struktureigenschaften im Kleinen untersucht. Es ist aber ohne weiteres klar, daß für die Gültigkeit dieser Eigenschaften die Bedingung der Bikompaktheit des gesamten Raumes überflüssig ist; es genügt vielmehr, die letzte Eigenschaft von gewissen, bestimmte Umgebungen sämtlicher Raumpunkte enthaltenden abgeschlossenen Mengen zu verlangen. In dieser Weise gelangen wir naturgemäß zu dem Begriffe der im Kleinen bikompakten (resp. kompakten) topologischen Räume, indem wir folgende grundlegende Definition aufstellen:

A. *Ein topologischer Raum* $\mathfrak{R}$ *heißt im Punkte* ξ *bikompakt* (bzw. *kompakt*), *falls eine gewisse Umgebung* $U(\xi)$ *dieses Punktes existiert, so daß die abgeschlossene Menge* $\overline{U}(\xi)$, *als Relativraum betrachtet, bikompakt* (bzw. *kompakt*) *ist.* ($\overline{U}(\xi)$ bedeutet hier, wie immer, die kleinste die Menge $U(\xi)$ enthaltende, in $\mathfrak{R}$ abgeschlossene Menge, d. h.

$$\overline{U}(\xi) = U(\xi) + [U(\xi)]',$$

wo $[U(\xi)]'$ die Menge aller Häufungspunkte von $U(\xi)$ ist.)

B. *Ein in jedem seiner Punkte bikompakter* (bzw. *kompakter*) *topologischer Raum heißt im Kleinen bikompakt* (bzw. *kompakt*).

---

[1]) Außer den für die ganze Theorie grundlegenden Hausdorffschen Definitionen (Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig (1914), Kap. VII, VIII), werden die Bezeichnungen und Ergebnisse der folgenden voranstehenden Arbeiten als bekannt vorausgesetzt:

($\mathfrak{H}$) Paul Alexandroff und Paul Urysohn, „Zur Theorie der topologischen Räume".
($\mathfrak{G}$) Paul Alexandroff, „Über die Struktur der bikompakten topologischen Räume".
($\mathfrak{S}$) Paul Urysohn, „Über die Metrisation der kompakten topologischen Räume".
Diese Arbeiten werden kurz durch $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{S}$ zitiert.

Der Begriff des im Kleinen bikompakten Raumes scheint mir von sehr großer topologischer Wichtigkeit zu sein — man denke etwa an den gewöhnlichen Euklidischen Raum, an ein ein-, zwei- oder mehrdimensionales Gebiet, an eine (insbesondere abstrakt gefaßte) offene Riemannsche Fläche[2]): alle diese seit Zeiten klassisch gewordenen fundamentalen topo-

[2]) Die erste abstrakte Fassung des Flächenbegriffes scheint von Weyl („*Die Idee der Riemannschen Fläche*") zu stammen. Bis auf ein unwesentliches Versehen*) stimmt der Grundgedanke der Weylschen Flächendefinition mit der folgenden Erklärung überein:

Ein topologischer Raum heißt eine Fläche, falls eine gewisse Umgebung jedes seiner Punkte ein umkehrbar eindeutiges und umkehrbar stetiges [im Sinne des Raumes**)] *Bild des Inneren eines gewohnlichen Kreises ist.*

Weyl nennt weiter eine Fläche *geschlossen,* falls sie, als topologischer Raum betrachtet, kompakt ist. Nun sieht man sofort, daß diese Definition sich auf von dem anschaulichen Sinne des Begriffes der geschlossenen Fläche sehr entfernte Bildungen anwenden läßt. Man betrachtet, um ein Beispiel dafür zu erhalten, z. B. eine geordnete Menge Θ, die den Ordnungstypus

$$(\lambda+1)\,\Omega^{*}+\lambda+(1+\lambda)\,\Omega$$

hat***).

Man denkt sich ferner die Menge F, die aus allen möglichen Paaren (x, y) von Elementen von Θ gebildet ist. Diese Menge F wird zu einer im Weylschen Sinne geschlossenen „Fläche" $\mathfrak{F}$, wenn man die Umgebungen $U(\xi)$ ihrer sämtlichen „Punkte" $\xi=(x, y)$ folgendermaßen definiert:

$$U(\xi)=U((x, y))=\text{Inbegriff aller } \tilde{\xi}(\tilde{x}, \tilde{y}), \quad \text{wo} \quad \begin{cases} x_1<\tilde{x}<x_2 \\ y_1<\tilde{y}<y_2 \end{cases} \quad (\text{in } \Theta)$$

und x_1, y_1; x_2, y_2 zwei beliebige den Ungleichungen $x_1<x<x_2$, $y_1<y<y_2$ genügende Elementenpaare der Menge Θ sind. Die Fläche $\mathfrak{F}$, die die Gestalt einer nicht-Archimedischen Ebene hat, entspricht aber kaum dem anschaulichen Wesen einer geschlossenen Fläche.

Dieser Übelstand wird vermieden, indem man statt der Kompaktheit die Bikompaktheit als charakteristische Eigenschaft der geschlossenen Flächen verlangt. Dieses Verfahren scheint mir noch den folgenden Vorzug zu haben. Zufolge dem Satze III (§ 3 dieser Arbeit) ergibt es sich sofort, daß eine in meinem Sinne geschlossene Fläche stets dem Hausdorffschen II. Abzählbarkeitsaxiom genügt, und folglich nach einem sehr bemerkenswerten Satze von Herrn Urysohn als ein metrischer Raum (ebenfalls im Hausdorffschen Sinne) erklärt sein kann. Außerdem läßt sich, zwar durch recht umständliche Überlegungen, aber ohne irgendwelche prinzipielle Schwierigkeit, die Triangulationsfähigkeit einer jeden (in meinem Sinne) geschlossenen Fläche auf Grund rein topologischer Begriffsbildungen beweisen.

*) Das, soweit ich es beurteilen kann, darin liegt, daß aus den Weylschen Umgebungsaxiomen im allgemeinen keine Möglichkeit folgt, zwei verschiedene Punkte einer Fläche durch zueinander fremde Umgebungen (im Sinne des Hausdorffschen Axiomes (D), loc. cit. S. 213) zu trennen.

**) Über stetige Abbildungen der topologischen Räume vgl. Hausdorff, loc. cit. S. 358 ff.

***) Ω ist die erste unabzählbare Ordnungszahl, Ω^{*} der dazu inverse Ordnungstypus, λ der Ordnungstypus der reellen Zahlen. Vgl. Hausdorff, S. 73, 93, 125 $(\Omega=\omega_1)$.

logischen Bildungen sind, als Räume betrachtet, nicht kompakt, wohl aber im Kleinen bikompakt. Anderseits sind mir nur wenige topologische Sätze bekannt, die für ein weiteres Gebiet als die im Kleinen bikompakten Räume gültig bleiben. Die soeben erwähnten Räume scheinen mir deshalb einen aus sachlichen Gründen naturgemäßen Spielraum der allgemein-topologischen Erscheinungen zu bilden.

2. Allgemeine Eigenschaften der im Kleinen kompakten Räume.

Satz I. *In jedem Punkte ξ, in welchem ein gegebener topologischer Raum bikompakt ist, stimmt sein Durchschnittscharakter $\psi_{\mathfrak{R}}(\xi)$ mit seinem Charakter $\chi_{\mathfrak{R}}(\xi)$ überein; außerdem ist unter diesen Voraussetzungen der Konvergenzcharakter $\varkappa_{\mathfrak{R}}(\xi)$ stets definiert, und zwar ist $\varkappa_{\mathfrak{R}}(\xi) \leqq \chi_{\mathfrak{R}}(\xi)$; endlich ist der Punkt ξ ein regulärer Punkt des Raumes*[3]).

Dieser Satz folgt unmittelbar aus den für die bikompakten Räume schon bewiesenen Eigenschaften.

Fundamentalsatz 1. *Ein jeder im Kleinen bikompakte topologische Raum $\mathfrak{R}$ läßt sich* (falls er nicht selbst bikompakt ist) *durch Hinzufügung eines einzigen Punktes zu einem bikompakten Raume vervollständigen; dies ist außerdem nur auf eine Weise möglich.*

Wir nennen „β-Gebiet" ein solches Gebiet Γ, daß die abgeschlossene Menge $\bar{\Gamma}$, als Relativraum betrachtet, bikompakt ist.

Es ist sofort klar, daß der gegebene Raum $\mathfrak{R}$, falls er nicht bikompakt ist, in keiner endlichen Menge von abgeschlossenen Mengen $\bar{\Gamma}$ enthalten ist, dagegen ist jeder Punkt des Raumes $\mathfrak{R}$ (da $\mathfrak{R}$ im Kleinen bikompakt ist) immer wenigstens in einem β-Gebiete enthalten. Das Gebiet $\mathfrak{G} = \mathfrak{R} - (\bar{\Gamma}_1 + \bar{\Gamma}_2 + \ldots + \bar{\Gamma}_n)$ ist also immer von Null verschieden, wie auch die β-Gebiete $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ gewählt seien. Nun fügen wir dem Raume $\mathfrak{R}$ einen neuen Punkt ξ hinzu mittels der Umgebungen $U(\xi) = \xi + \mathfrak{G}$. Man überzeugt sich sofort, daß in $\mathfrak{R} + \xi$ die Hausdorffschen Umgebungsaxiome erfüllt sind; außerdem strömt[4]) jede unendliche, im Raume $\mathfrak{R}$ keinen vollständigen Häufungspunkt besitzende Menge E im Raume $\mathfrak{R} + \xi$ dem Punkte ξ zu. $\mathfrak{R} + \xi$ ist infolgedessen ein bikompakter topologischer Raum. Es gelingt auch zu zeigen, ohne besondere Schwierigkeit, daß ein jedes andere Umgebungssystem für einen adjungierten Punkt ξ dem soeben konstruierten gleichwertig ist, solange nur der Raum $\mathfrak{R} + \xi$ bikompakt bleiben soll, und damit wird der Fundamentalsatz 1 vollständig bewiesen.

Anmerkungen. Die soeben ausgesprochene Eindeutigkeitseigenschaft ist darum besonders bemerkenswert, weil man im allgemeinen einen im

[3]) Vgl. für die Bezeichnungen die schon erwähnten Arbeiten $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{S}$. Daselbst sind die entsprechenden Sätze für bikompakte Räume schon bewiesen worden.

Kleinen bikompakten Raum durch Hinzufügung eines einzigen Punktes auf unendlich viele Arten zu einem absolut abgeschlossenen (irregulären[4])) Raume erweitern kann.

Wegen des Satzes über die Mächtigkeit der perfekten Mengen in bikompakten Räumen[4]) ergibt sich der analoge Satz für im Kleinen bikompakte Räume als eine unmittelbare Folge des soeben ausgesprochenen Fundamentalsatzes.

Der Fundamentalsatz läßt sich umkehren; es besteht offenbar auch der Satz:

Jedes in einem bikompakten Raume liegende Gebiet ist im Kleinen bikompakt (als Relativraum betrachtet).

Die Menge aller im Kleinen bikompakten Räume ist daher mit der Menge der in bikompakten Räumen liegenden Gebiete identisch[5]).

Wenn man das Wort „bikompakt" durch „kompakt" ersetzt, so erhält man einen dem Fundamentalsatz 1 *vollständig analogen Satz.* Der umgekehrte Satz ist auch richtig, d. h. jedes aus einem kompakten Raume durch Weglassung eines einzigen Punktes entstehende Gebiet ist, als Raum betrachtet, im Kleinen kompakt.

Es gibt aber in kompakten Räumen liegende Gebiete, die nicht im Kleinen kompakt sind.

Es ist noch zu bemerken, daß man durch Adjunktion eines einzigen Punktes zu einem im Kleinen kompakten Raume allgemein mehrere verschiedene Räume erhalten kann (für die Eindeutigkeitseigenschaft ist daher die Voraussetzung der Bikompaktheit unentbehrlich).

3. Das II. Abzählbarkeitsaxiom und das Metrisationsproblem der topologischen Räume.

Das allgemeine Metrisationsproblem der topologischen Räume besteht darin, die Bedingungen zu finden, die notwendig und hinreichend sind, damit ein topologischer Raum einem metrischen topologisch identisch (= homöomorph) ist. Herr Urysohn hat bereits das Problem der Metrisation der kompakten Räume gelöst; er bewies nämlich, daß in diesem

---

[4]) Vgl. die vorige Fußnote.

[5]) Es ist zu bemerken, daß außerdem jede in einem bikompakten Raume $\mathfrak{R}$ liegende abgeschlossene Menge F durch einen einzigen Punkt ξ (mit passend gewählten Umgebungen) so ersetzt werden kann, daß damit ein wiederum bikompakter Raum $\mathfrak{R}_1$ entsteht, dessen Gebiet $\mathfrak{R}_1 - \xi$ mit dem ursprünglichen Gebiete $\mathfrak{R} - F$ identisch ist.

Falle die gewünschte Bedingung im II. Abzählbarkeitsaxiome besteht[6]). Da dasselbe Axiom eine fundamentale Bedeutung auch für das im vorliegenden Aufsatze von mir gelöste Metrisationsproblem der im Kleinen kompakten Räume hat, so halte ich es für zweckmäßig, auf den Zusammenhang zwischen diesem Axiome und anderen naheliegenden Raumeigenschaften kurz hinzuweisen:

Satz II. *In einem metrischen Raume ist eine jede der folgenden Eigenschaften*[7]) *dem II. Abzählbarkeitsaxiome äquivalent*:

a) *Es gibt keine unabzählbare Menge paarweise fremder Gebiete*;

b) *jede wohlgeordnete ab- oder zunehmende Menge von verschiedenen abgeschlossenen Mengen* (*oder Gebieten*) *ist höchstens abzählbar*;

c) *jede abgeschlossene Menge zerfällt in einen perfekten und in einen höchstens abzählbaren Bestandteil*;

d) *die Summe von beliebig vielen Gebieten kann stets durch eine Summe von höchstens abzählbar vielen Gebieten ersetzt werden*;

e) *es gibt eine abzählbare überall dichte Teilmenge.*

Dagegen gibt es (sogar bikompakte) *topologische* Räume, in denen alle diese Eigenschaften sowie das erste Abzählbarkeitsaxiom gleichzeitig erfüllt sind, das II. Abzählbarkeitsaxiom aber ungültig ist.

Satz III. *Wenn in einem bikompakten topologischen Raume* $\mathfrak{R}$ *das I., aber nicht das II. Abzählbarkeitsaxiom gültig ist, dann gibt es eine perfekte Teilmenge* $P \subset \mathfrak{R}$ *von der Eigenschaft, daß keine Umgebung irgendeines Punktes von* P*, als Relativraum betrachtet, demselben Axiome genügt*[8]).

Die perfekte Menge P kann sowohl nirgends dicht im Raume liegen, als auch den ganzen Raum (oder ein gewisses Teilgebiet) vollständig erfüllen.

Satz IV. *Damit ein regulärer, dem II. Abzählbarkeitsaxiome genügender Raum* $\mathfrak{R}$ *kompakt sei, ist es notwendig und hinreichend, daß ein jeder diese beiden Eigenschaften besitzende und den Raum* $\mathfrak{R}$ *als überall dichte Teilmenge enthaltende topologische Raum* R *mit* $\mathfrak{R}$ *identisch ist.*

---

[6]) Diese Annalen **92**, S. 275–293. (Diese Arbeit ist bereits durch „$\mathfrak{S}$“ zitiert.) — Während der Drucklegung dieser Arbeit ist eine gemeinschaftliche Note von P. Urysohn und mir in den Pariser Comptes Rendus **177**, S. 1274 erschienen, wo das allgemeine Metrisationsproblem für die topologischen Räume gelöst ist. Übrigens ist zu bemerken, daß die Einbettung des hier behandelten Falles in das allgemeine Metrisationskriterium nicht einfacher ist als der hier wiedergegebene Beweis selbst. Dasselbe gilt auch vom soeben erwähnten Urysohnschen Satze.

[7]) Daß alle diese Eigenschaften in topologischen Räumen aus dem II. Abzählbarkeitsaxiome folgen, war schon von Hausdorff bewiesen (loc. cit., Kap. VIII, § 3).

[8]) Für die kompakten (nicht bikompakten) Räume ist der Satz im allgemeinen falsch.

Der Beweis der Sätze II und III ist leicht; wegen des Beweises des Satzes IV verweise ich auf die in den „*Fundamenta Mathematicae*“ erscheinenden Arbeiten[9]), wo die ganze Theorie ausführlich dargestellt ist.

4. Lösung des Metrisationsproblemes für die im Kleinen kompakten topologischen Räume.

Aus dem Fundamentalsatze 1 und dem Satze $\mathfrak{G}$, I ergibt sich sofort, daß *jeder im Kleinen kompakte, dem II. Abzählbarkeitsaxiome genügende Raum* $\mathfrak{R}$ *metrisierbar ist.* Tatsächlich läßt sich ja $\mathfrak{R}$ zu einem bikompakten Raume $\mathfrak{R} + \xi = R$ erweitern;)zufolge dem in $\mathfrak{R}$ erfüllten II. Abzählbarkeitsaxiome und der Regularität des Raumes ist der Punkt ξ der einzige Durchschnittspunkt einer gewissen abzählbaren Menge von Gebieten, also ist nach dem Satze $\mathfrak{G}$, I der Charakter des Raumes R im Punkte ξ gleich $\aleph_0$, also bekommt man ein abzählbares Umgebungssystem für den gesamten Raum R, indem man zu den (abzählbar vielen) Umgebungen der sämtlichen Punkte von $\mathfrak{R}$ noch die Umgebungen des Punktes ξ nimmt. Da R bikompakt ist, so ist R zufolge dem Urysohnschen Satze auch metrisierbar; $\mathfrak{R}$ ist also nicht nur metrisierbar, sondern der ganze Raum $\mathfrak{R}$ liegt als Gebiet in einem kompakten metrischen Raume. Das II. Abzählbarkeitsaxiom drückt also eine hinreichende, aber (wie man sich durch leichte Gegenbeispiele überzeugt) keine notwendige Bedingung für die Metrisationsfähigkeit eines im Kleinen kompakten topologischen Raumes aus. Es besteht dagegen der

F u n d a m e n t a l s a t z 2. *Damit ein im Kleinen kompakter topologischer Raum metrisierbar sei, ist es notwendig und hinreichend, daß der Raum entweder dem II. Abzählbarkeitsaxiom genügt oder sich in eine Menge* (beliebiger Mächtigkeit) *von paarweise fremden Gebieten zerspalten läßt, von denen ein jedes* (als R e l a t i v r a u m b e t r a c h t e t) *dem II. Abzählbarkeitsaxiom genügt*[10]).

Es bedarf kaum eines Beweises, daß die soeben ausgesprochene Bedingung eine hinreichende ist. Man braucht also nur zu zeigen, daß jeder im Kleinen kompakte metrische[11]) Raum, falls er dem II. Abzählbarkeitsaxiom nicht genügt, in eine Menge von diesem Axiom genügenden Gebieten zerfällt; das geschieht aber wie folgt:

---

[9]) P. Alexandroff u. P. Urysohn, Mémoire sur les espaces topologiques compacts; P. Alexandroff, Sur les espaces localement compacts.

[10]) Der Raum ist in diesem Fall auch bikompakt im Kleinen.

[11]) Ich schreibe schlechthin „*metrischer Raum*“ statt „*metrisierbarer topologischer Raum*“; da in dieser Arbeit nur topologische Eigenschaften von metrischen Räumen vorkommen, so scheint mir kein Mißverständnis möglich zu sein.

) im Kl. komp. u. 2 Abz.ax genüg. R. ist im Kl. bikompakt

Hilfssatz. *Vorausgesetzt sei ein metrischer Raum, der im Kleinen dem II. Abzählbarkeitsaxiom genügt*[12]); *dann läßt sich ein System von den ganzen Raum vollständig definierenden, sphärischen Umgebungen derart auswählen, daß jeder Raumpunkt in höchstens abzählbar vielen dieser Umgebungen enthalten ist.*

Mit Zuhilfenahme des Zermeloschen Wohlordnungssatzes denken wir uns die Menge aller derjenigen sphärischen Umgebungen des gegebenen Raumes $\mathfrak{R}$, in welchen irgendeine abzählbare Menge überall dicht ist, in eine wohlgeordnete Menge

$$V_1 V_2 \ldots V_n \ldots V_\alpha \ldots$$

von einem gewissen Ordnungstypus Ω_τ (wo Ω_τ eine Anfangszahl ist) verwandelt. Wegen der Voraussetzung gibt es in V_1 eine überall dichte, höchstens abzählbare Menge D_1. Wir setzen noch identisch $G_1 = V_1$. Nehmen wir an, es seien G_α und D_α für alle $\alpha < \lambda$ konstruiert, so setzen wir definitionsgemäß

$$G_\lambda = V_\lambda - \overline{(\sum_{\alpha<\lambda} G_\alpha)}$$

und es sei dann D_λ eine bestimmte, höchstens abzählbare, in G_λ überall dichte Menge. Wir definieren endlich

$$D = \sum_{\alpha<\Omega_\tau} D_\alpha.$$

Es läßt sich leicht beweisen, daß

1. D in $\mathfrak{R}$ überall dicht ist;

2. die Mächtigkeit von der Durchschnittsmenge $D \cdot V_\alpha$ für jedes α kleiner oder gleich $\aleph_0$ ist.

Es sei nun x ein beliebiger Raumpunkt und ϱ_x die obere Grenze aller positiven Zahlen r_x von der Art, daß ein jedes $S(x, r_x)$[13]) eine höchstens abzählbare, überall dichte Teilmenge enthält. Das System Σ von allen Sphären $S(x, r)$, wo $x \subset D$ und $r < \frac{1}{3}\varrho_x$ eine positive rationale Zahl ist, bildet dann, wie man ohne besondere Schwierigkeiten beweisen kann, ein Umgebungssystem, wie wir es haben wollten[14]). Damit wird der Hilfssatz bewiesen.

Es sei nun ξ ein beliebiger Punkt unseres Raumes, $\Gamma_0^{(\xi)}$ irgendeine Sphäre des Systems Σ, die den Punkt ξ enthält.

---

[12]) Das heißt eine gewisse Umgebung eines jeden Punktes soll, als topologischer Raum betrachtet, dem II. Abzählbarkeitsaxiom genügen.

[13]) $S(x, r_x)$ = Sphäre vom Radius r_x und mit dem Zentrum x (im beliebigen metrischen Raume ist diese Sphäre der Inbegriff aller von x weniger als um r_x entfernten Punkte).

[14]) Der wesentliche Punkt des Beweises liegt in der Tatsache, daß aus $\xi \subset S(x, r)$ wo $S(x, r)$ eine Umgebung des Systems Σ ist, die Relation $x \subset S(\xi, \varrho_x)$ folgt.

Es sei $\Gamma_n^{(\xi)}$ schon definiert, und zwar so, daß dabei das II. Abzählbarkeitsaxiom gültig ist (bei $\Gamma_0^{(\xi)}$ ist es ja der Fall). Wir definieren $\Gamma_{n+1}^{(\xi)}$ als Summe von $\Gamma_n^{(\xi)}$ und allen Sphären des Systems Σ, deren Durchschnitt mit $\Gamma_n^{(\xi)}$ von Null verschieden ist. Man sieht sofort[15]), daß $\Gamma_{n+1}^{(\xi)}$ und also auch

$$\Gamma^{(\xi)} = \Gamma_0^{(\xi)} + \Gamma_1^{(\xi)} + \Gamma_2^{(\xi)} + \ldots + \Gamma_n^{(\xi)} + \ldots$$

dem II. Abzählbarkeitsaxiom genügt. Jetzt sagen wir für einen Augenblick, daß der Punkt x mit dem Punkte ξ verbunden ist, falls eine endliche Anzahl von Sphären $S_1, S_2, \ldots, S_\varkappa$ des Systems Σ derart existiert, daß

$$1.\quad S_1 \supset \xi; \qquad 2.\quad S_i \cdot S_{i+1} \neq 0; \qquad 3.\quad S_\varkappa \supset x \qquad (1 \leqq i \leqq \varkappa - 1).$$

Dann beweist man sofort, daß $\Gamma^{(\xi)}$ aus allen mit ξ verbundenen Punkten des Raumes $\mathfrak{R}$ gebildet ist. Infolgedessen ist es leicht zu sehen, daß, wenn ξ und η verschiedene Raumpunkte sind, entweder $\Gamma^{(\xi)} = \Gamma^{(\eta)}$ oder $\Gamma^{(\xi)} \cdot \Gamma^{(\eta)} = 0$ ist. Die Zerfällung des Raumes in punktfremde, dem II. Abzählbarkeitsaxiom genügende Gebiete ist damit erbracht, und der Fundamentalsatz 2 bewiesen.

Korollar 1. *Damit ein zusammenhängender*[16]), *im Kleinen kompakter topologischer Raum metrisierbar sei, ist das II. Abzählbarkeitsaxiom gleichzeitig notwendig und hinreichend.*

Korollar 2. *Falls in einem zusammenhängenden metrischen Raume das II. Abzählbarkeitsaxiom nicht gültig ist, existiert wenigstens ein Punkt, so daß in keiner Umgebung desselben jenes Axiom erfüllt ist.*

Alle diese Sätze können durch leicht konstruierbare Beispiele veranschaulicht werden; sie erweisen sich außerdem als keiner weiteren Verschärfung oder Verallgemeinerung fähig.

Göttingen, den 10. Juli 1923.

P. S. Die Hauptergebnisse dieser Arbeit sind im Jahre 1922 der Moskauer Mathematischen Gesellschaft und am 26. Juni 1923 der Göttinger Mathematischen Gesellschaft mitgeteilt worden.

---

[15]) Das ist eben die wesentliche Folge der durch den Hilfssatz ausgedrückten Eigenschaft des Umgebungssystems Σ.

[16]) Im Hausdorffschen Sinne, loc. cit. S. 244.

(Eingegangen am 1. 8. 1923.)