

## Werk

**Titel:** Mathematische Annalen

**Jahr:** 1924

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN235181684\_0092

**PURL:** [http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684\\_0092](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0092)

**LOG Id:** LOG\_0025

**LOG Titel:** Der Hilbertsche Raum als Urbild der metrischen Räume

**LOG Typ:** article

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN235181684

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

# Der Hilbertsche Raum als Urbild der metrischen Räume\*).

Von

Paul Urysohn † in Moskau.

---

Der Zweck dieser Arbeit ist, zu zeigen, daß die Begriffe „separable ( $D$ )-Menge“ (im Fréchet'schen Sinne) und „Teilmenge des Hilbertschen Raumes<sup>1)</sup>“ topologisch identisch sind; oder, anders ausgedrückt, daß *die notwendige und hinreichende Bedingung, damit ein metrischer Raum<sup>2)</sup>  $E$  einer Teilmenge des Hilbertschen Raumes  $H$  homöomorph sei, darin besteht, daß  $E$  eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.*

Die Notwendigkeit dieser Bedingung ist unmittelbar einleuchtend<sup>3)</sup>; es handelt sich also um den Beweis folgenden Satzes:

*Jeder metrische Raum mit abzählbarer dichter Teilmenge (also insbesondere jeder kompakte metrische Raum<sup>4)</sup>) ist einer Teilmenge des Hilbertschen Raumes homöomorph.*

Vorbemerkung. Der Hilbertsche Raum ist *selbst* nicht kompakt, besitzt aber in sich kompakte *Quadern*, z. B. den durch die Ungleichungen

$$0 \leq x_n \leq \frac{1}{n} \quad 5)$$

definierten Quader  $Q$ .  $Q$  kann also als ein kompakter metrischer Raum betrachtet werden. Wir werden nunmehr beweisen, daß jeder unseren Voraussetzungen genügender Raum  $E$  einer Teilmenge des Quaders  $Q$  homöomorph ist; daraus folgt insbesondere, daß jeder metrische Raum mit

---

\*) Vgl. meine inzwischen erschienene Note „Les classes ( $D$ ) séparables ...“, Comptes Rendus Paris 178, S. 65.

<sup>1)</sup> Die Definition des Hilbertschen Raumes kann man z. B. in Hausdorffs *Grundzügen der Mengenlehre*, S. 287, IV finden.

<sup>2)</sup> Hausdorff, l. c. S. 211.

<sup>3)</sup> Man vergleiche hierzu Hausdorff, l. c. S. 287, 288 und 273, VIII.

<sup>4)</sup> l. c. S. 274, X.

<sup>5)</sup>  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  ist ein Punkt von  $H$ .

abzählbarer dichter Teilmenge vom topologischen Standpunkte aus als Teil eines *kompakten* metrischen Raumes betrachtet werden kann.

Beweis. Bekanntlich ist jeder metrische Raum einem *beschränkten* Raume homöomorph<sup>6)</sup>; es genügt also nur den Fall zu betrachten, wo die *Breite*<sup>7)</sup> von  $E \leq 1$  ist. Es sei ferner

$$E_0 = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

eine in  $E$  dichte abzählbare Menge, die wir uns fest gewählt denken. Wenn  $\xi$  ein beliebiger Punkt von  $E$  ist, und wenn wir die Entfernungen

$$\varrho(\xi, a_1), \varrho(\xi, a_2), \dots, \varrho(\xi, a_n), \dots$$

der Reihe nach mit  $x_1, 2x_2, \dots, nx_n, \dots$ , bezeichnen, so ordnen wir dem Punkte  $\xi$  von  $E$  den Punkt  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  von  $H$  zu. Da  $x_n = \frac{1}{n} \varrho(\xi, a_n) \leq \frac{1}{n}$  ist, so wird damit  $E$  auf eine Teilmenge  $M$  des Quaders  $Q$  abgebildet.

*Diese Abbildung ist eineindeutig.* Wenn in der Tat  $\xi$  und  $\eta$  zwei verschiedene Punkte von  $E$  sind, so können wir wegen der Dichtigkeit von  $E_0$  in  $E$  einen der Bedingung

$$\varrho(\xi, a_n) < \frac{1}{2} \varrho(\xi, \eta)$$

genügenden Punkt  $a_n$  finden; folglich ist

$$\varrho(\xi, a_n) < \frac{1}{2} \varrho(\xi, a_n) + \frac{1}{2} \varrho(a_n, \eta),$$

also

$$\varrho(\xi, a_n) < \varrho(\eta, a_n),$$

d. h.  $x_n < y_n$ <sup>8)</sup> und  $x \neq y$ .

Wir zeigen jetzt, daß *die erhaltene Abbildung nebst ihrer Umkehrung stetig ist.*

1. Wenn wir zur Abkürzung  $\varrho(\xi, \eta)$  mit  $\lambda$  bezeichnen, so ist für jedes  $n$

$$|\varrho(\xi, a_n) - \varrho(\eta, a_n)| \leq \varrho(\xi, \eta) = \lambda,$$

also

$$|x_n - y_n| \leq \frac{\lambda}{n},$$

$$\varrho(x, y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2} \leq \sqrt{\lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{\lambda\pi}{\sqrt{6}} < 2\lambda,$$

$$\varrho(x, y) < 2\varrho(\xi, \eta),$$

woraus sogar die gleichmäßige Stetigkeit der Abbildung von  $E$  auf  $M$  folgt.

<sup>6)</sup> l. c. S. 312.

<sup>7)</sup> l. c. S. 290.

<sup>8)</sup>  $y_n$  ist die  $n$ -te Koordinate des dem Punkte  $\eta$  zugeordneten Punktes  $y$ .

2. Es sei jetzt  $x$  irgendein Punkt von  $M$ ,  $\xi$  der entsprechende Punkt von  $E$ . Es bleibt zu zeigen, daß es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  derart gibt, daß  $\varrho(x, y) < \delta$  die Ungleichung  $\varrho(\xi, \eta) < \varepsilon$  zur Folge hat.

Zu jedem  $\varepsilon$  können wir aber einen der Ungleichung  $\varrho(\xi, a_n) < \frac{\varepsilon}{3}$  genügenden Punkt  $a_n$  wählen<sup>9)</sup>; es genügt alsdann  $\delta = \frac{\varepsilon}{3n}$  zu setzen: es folgt dann in der Tat aus  $\varrho(x, y) < \delta$ , daß

$$\frac{\varepsilon}{3n} = \delta > \varrho(x, y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2} \geq y_n - x_n = \frac{1}{n} \varrho(\eta, a_n) - \frac{1}{n} \varrho(\xi, a_n),$$

also

$$\varrho(\xi, \eta) \leq \varrho(\xi, a_n) + \varrho(a_n, \eta) < \varrho(\xi, a_n) + \varrho(\xi, a_n) + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

ist, w. z. b. w.

Daher ist die Homöomorphie von  $E$  und  $M$  bewiesen.

Göttingen, 22. Juli 1923.

---

<sup>9)</sup>  $n$  hängt von  $x$  und  $\varepsilon$  ab.

(Eingegangen am 1. 8. 1923.)