Der Hilbertsche Raum als Urbild der metrischen Räume*).

Von

Paul Urysohn † in Moskau.

Der Zweck dieser Arbeit ist, zu zeigen, daß die Begriffe „separable (D)-Menge" (im Fréchetschen Sinne) und „Teilmenge des Hilbertschen Raumes[1])" topologisch identisch sind; oder, anders ausgedrückt, daß *die notwendige und hinreichende Bedingung, damit ein metrischer Raum*[2]) *E einer Teilmenge des Hilbertschen Raumes H homöomorph sei, darin besteht, daß E eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.*

Die Notwendigkeit dieser Bedingung ist unmittelbar einleuchtend[3]); es handelt sich also um den Beweis folgenden Satzes:

Jeder metrische Raum mit abzählbarer dichter Teilmenge (also insbesondere jeder kompakte metrische Raum[4])) *ist einer Teilmenge des Hilbertschen Raumes homöomorph.*

Vorbemerkung. Der Hilbertsche Raum ist *selbst* nicht kompakt, besitzt aber in sich kompakte *Quadern*, z. B. den durch die Ungleichungen

$$0 \leqq x_n \leqq \frac{1}{n} \quad {}^{5})$$

definierten Quader Q. Q kann also als ein kompakter metrischer Raum betrachtet werden. Wir werden nunmehr beweisen, daß jeder unseren Voraussetzungen genügender Raum E *einer Teilmenge des Quaders Q homöomorph ist*; daraus folgt insbesondere, daß jeder metrische Raum mit

---

*) Vgl. meine inzwischen erschienene Note „Les classes (D) séparables ...", Comptes Rendus Paris 178, S. 65.

[1]) Die Definition des Hilbertschen Raumes kann man z. B. in Hausdorffs *Grundzügen der Mengenlehre*, S. 287, IV finden.

[2]) Hausdorff, l. c. S. 211.

[3]) Man vergleiche hierzu Hausdorff, l. c. S. 287, 288 und 273, VIII.

[4]) l. c. S. 274, X.

[5]) $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ ist ein Punkt von H.

abzählbarer dichter Teilmenge vom topologischen Standpunkte aus als Teil eines *kompakten* metrischen Raumes betrachtet werden kann.

Beweis. Bekanntlich ist jeder metrische Raum einem *beschränkten* Raume homöomorph[6]); es genügt also nur den Fall zu betrachten, wo die *Breite*[7]) von $E \leqq 1$ ist. Es sei ferner

$$E_0 = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

eine in E dichte abzählbare Menge, die wir uns fest gewählt denken. Wenn ξ ein beliebiger Punkt von E ist, und wenn wir die Entfernungen

$$\varrho(\xi, a_1),\ \ \varrho(\xi, a_2),\ \ \ldots,\ \ \varrho(\xi, a_n),\ \ \ldots$$

der Reihe nach mit $x_1, 2x_2, \ldots, n x_n, \ldots$, bezeichnen, so ordnen wir dem Punkte ξ von E den Punkt $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ von H zu. Da $x_n = \frac{1}{n}\varrho(\xi, a_n) \leqq \frac{1}{n}$ ist, so wird damit E auf eine Teilmenge M des Quaders Q abgebildet.

Diese Abbildung ist eineindeutig. Wenn in der Tat ξ und η zwei verschiedene Punkte von E sind, so können wir wegen der Dichtigkeit von E_0 in E einen der Bedingung

$$\varrho(\xi, a_n) < \frac{1}{2}\varrho(\xi, \eta)$$

genügenden Punkt a_n finden; folglich ist

$$\varrho(\xi, a_n) < \frac{1}{2}\varrho(\xi, a_n) + \frac{1}{2}\varrho(a_n, \eta),$$

also

$$\varrho(\xi, a_n) < \varrho(\eta, a_n),$$

d. h. $x_n < y_n$ [8]) und $x \neq y$.

Wir zeigen jetzt, daß *die erhaltene Abbildung nebst ihrer Umkehrung stetig ist.*

1. Wenn wir zur Abkürzung $\varrho(\xi, \eta)$ mit λ bezeichnen, so ist für jedes n

$$|\varrho(\xi, a_n) - \varrho(\eta, a_n)| \leqq \varrho(\xi, \eta) = \lambda,$$

also

$$|x_n - y_n| \leqq \frac{\lambda}{n},$$

$$\varrho(x, y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)^2} \leqq \sqrt{\lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}} = \frac{\lambda\pi}{\sqrt{6}} < 2\lambda,$$

$$\varrho(x, y) < 2\varrho(\xi, \eta),$$

woraus sogar die gleichmäßige Stetigkeit der Abbildung von E auf M folgt.

---

[6]) l. c. S. 312.

[7]) l. c. S. 290.

[8]) y_n ist die n-te Koordinate des dem Punkte η zugeordneten Punktes y.

2. Es sei jetzt x irgendein Punkt von M, ξ der entsprechende Punkt von E. Es bleibt zu zeigen, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart gibt, daß $\varrho(x, y) < \delta$ die Ungleichung $\varrho(\xi, \eta) < \varepsilon$ zur Folge hat.

Zu jedem ε können wir aber einen der Ungleichung $\varrho(\xi, a_n) < \frac{\varepsilon}{3}$ genügenden Punkt a_n wählen[9]; es genügt alsdann $\delta = \frac{\varepsilon}{3n}$ zu setzen: es folgt dann in der Tat aus $\varrho(x, y) < \delta$, daß

$$\frac{\varepsilon}{3n} = \delta > \varrho(x, y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)^2} \geqq y_n - x_n = \frac{1}{n}\varrho(\eta, a_n) - \frac{1}{n}\varrho(\xi, a_n),$$

also

$$\varrho(\xi, \eta) \leqq \varrho(\xi, a_n) + \varrho(a_n, \eta) < \varrho(\xi, a_n) + \varrho(\xi, a_n) + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

ist, w. z. b. w.

Daher ist die Homöomorphie von E und M bewiesen.

Göttingen, 22. Juli 1923.

---

[9]) n hängt von x und ε ab.

(Eingegangen am 1. 8. 1923.)