Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe.

Von

F. Peter in Karlsruhe und H. Weyl in Zürich.

§ 1.

Grundlagen. Die Orthogonalitätsrelationen.

1. *Gruppe. Volummessung in der Gruppenmannigfaltigkeit.* Es handelt sich im folgenden um die *Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe durch homogene lineare Transformationen* oder Matrizes. Innerhalb der gegebenen Gruppe $\mathfrak{G}$ bedeute o das Einheitselement. Um der Möglichkeit einer invarianten Volummessung willen werde vorausgesetzt, daß Lies infinitesimale Begriffsbildungen auf die Gruppe $\mathfrak{G}$ anwendbar sind. Es sollen also die zu o unendlich benachbarten, die infinitesimalen Elemente von $\mathfrak{G}$, eine lineare, etwa r-parametrige Schar bilden. Zu einem Element a von $\mathfrak{G}$ gehört die durch die Formel $s' = sa$ definierte Abbildung $s \to s'$ von $\mathfrak{G}$ auf sich selbst. Bezeichnen wir sie als (rechtsseitige) *Translation*, so ist das Volummaß auf $\mathfrak{G}$ durch die Forderung bestimmt, daß das Volumen den Translationen gegenüber invariant sein soll. Sind s, s' zwei unendlich benachbarte Elemente (oder „Punkte") auf $\mathfrak{G}$, so verstehen wir unter dem von s nach s' führenden Vektor das inf. Element $s's^{-1}$, bzw. dessen Komponenten relativ zu einer fest gewählten Basis der inf. Gruppe. Als *Volumen* eines parallelepipedischen Volumelementes, das von s aus durch r inf. Vektoren aufgespannt wird, ist der absolute Betrag der Determinante aus den Komponenten dieser Vektoren anzusetzen. Das Volumen eines solchen, an der Stelle s befindlichen Volumelementes werde bei Integrationen, die sich über das ganze geschlossene Gebilde $\mathfrak{G}$ erstrecken, mit ds bezeichnet. Es ist wichtig, daß ds auch gegenüber den folgenden Transformationen $s \to s$ invariant ist:

1) $s' = as$ (linksseitige Translation), 2) $s' = s^{-1}$ (Inversion).

Um dies einzusehen, muß man zeigen, daß aus r inf. Elementen δs durch die homogene lineare Transformation

$$\delta s' = a \cdot \delta s \cdot a^{-1} \tag{1}$$

r Vektoren $\delta s'$ entstehen, deren Determinante absolut mit der Determinante der δs übereinstimmt; oder daß jene Transformation A, welche in der adjungierten Gruppe dem Element a von $\mathfrak{G}$ korrespondiert, eine Determinante D vom absoluten Betrag 1 besitzt. Wegen der Geschlossenheit der adjungierten Gruppe müssen aber die Determinanten D^ν der aus A durch Iteration entstehenden Transformationen A^ν für $\nu \to \infty$ einen endlichen, von 0 verschiedenen Verdichtungswert besitzen; und darum ist in der Tat $|D| = 1$.

2. *Darstellung.* Eine *Darstellung n-ter Ordnung* liegt vor, wenn in stetiger Weise jedem Element s der Gruppe eine quadratische Matrix $E(s)$ von n Zeilen und Kolonnen zugeordnet ist, derart, daß allgemein

$$E(st) = E(s)\,E(t) \tag{2}$$

gilt. Durch Einführung eines anderen Koordinatensystems im Darstellungsraum kann die Darstellung $E(s)$ durch die „äquivalente“ $A\,E(s)\,A^{-1}$ ersetzt werden (A eine beliebige konstante Matrix mit einer von 0 verschiedenen Determinante.) $E(\mathrm{o}) = C$ genügt den Gleichungen

$$C \cdot C = C; \qquad C \cdot E(s) = E(s) \cdot C = E(s).$$

Aus der ersten folgt, daß bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems C die Gestalt hat

$$C = \begin{Vmatrix} \mathbf{1}_m & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

wo $\mathbf{1}_m$ die m-gliedrige Einheitsmatrix bezeichnet ($m \leqq n$). Die beiden anderen Gleichungen lehren dann, daß $E(s)$ nur in dem Teilquadrat von 0 verschiedene Komponenten aufweist, das in C von der Einheitsmatrix $\mathbf{1}_m$ ausgefüllt ist. Man kann sich also auf diejenigen Darstellungen beschränken, für welche $E(\mathrm{o})$ die Einheitsmatrix ist; die anderen sind solchen äquivalent, die daraus durch Hinzufügung eines Randes von Nullen entstehen. Insbesondere ist in einer *irreduziblen* oder *primitiven Darstellung* $E(\mathrm{o})$ notwendig gleich der Einheitsmatrix. (Reduzibel heißt die Darstellung bekanntlich, wenn man im n-dimensionalen Vektorraum einen linearen Unterraum von weniger Dimensionen ausfindig machen kann, der durch alle Transformationen $E(s)$ in sich übergeht.)

3. *Charakteristik.* Die Spur $\chi(s)$ von $E(s)$ heißt die Charakteristik. Zu äquivalenten Darstellungen gehört dieselbe Charakteristik. $\chi(s)$ ist eine Klassenfunktion, d. h. es ist

$$\chi(asa^{-1}) = \chi(s) \qquad \text{oder} \qquad \chi(st) = \chi(ts)$$

für irgend zwei Elemente a und s oder s und t der Gruppe $\mathfrak{G}$. Denn die Spuren von

$$E(st) = E(s)\,E(t) \quad \text{und} \quad E(ts) = E(t)\,E(s)$$

stimmen überein, weil allgemein die Spur des Produktes zweier Matrizen von der Reihenfolge der Faktoren unabhängig ist.

4. *Die Orthogonalitätsrelationen. Jede Darstellung* (für welche $E(\circ)$ die Einheitsmatrix ist) *ist einer solchen äquivalent, deren Matrizen* $E(s)$ *unitär sind.* — Der Querstrich diene zur Bezeichnung des Konjugiert-komplexen, der Stern deute den Übergang zur transponierten Matrix an. Man übe auf die Hermitesche Einheitsform

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \ldots + x_n\bar{x}_n \tag{3}$$

die Transformation $E(s) = \| e_{ik}(s) \|$ aus und integriere unter Verwendung des invarianten Volumelements die so entstehende, von s abhängige Form über die ganze Gruppe $\mathfrak{G}$. Man erhält eine positiv-definite Hermitesche Form H, welche durch jede der Transformationen $E(s)$ in sich übergeht. Bringt man durch eine Koordinatentransformation H auf die Gestalt (3), so sind die $E(s)$ in der Tat unitär. Die Form H ist

$$= \int_{\mathfrak{G}} \sum_{i=1}^{n} \Big| \sum_{k=1}^{n} e_{ik}(s)\, x_k \Big|^2 ds\,, \tag{4}$$

ihre Koeffizientenmatrix

$$= \int_{\mathfrak{G}} E^*(t)\,\bar{E}(t)\,dt\,. \tag{5}$$

Die Formel (4) zeigt, daß H in der Tat positiv-definit ist, wenn $E(\circ)$ die Einheitsmatrix ist, aus (5) ergibt sich die behauptete Invarianz durch folgende Rechnung:

$$E^*(s)\,H\,\bar{E}(s) = \int_{\mathfrak{G}} E^*(ts)\,\bar{E}(ts)\,dt = \int_{\mathfrak{G}} E^*(t)\,\bar{E}(t)\,dt = H.$$

Nachdem H zur Einheitsmatrix gemacht ist, haben wir also

$$E^*(s)\,\bar{E}(s) = \mathbf{1}\,,$$

oder, da

$$E(s)\,E(s^{-1}) = E(\circ) = \mathbf{1}, \qquad E(s^{-1}) = E^{-1}(s)$$

ist,

$$E(s^{-1}) = \bar{E}^*(s).$$

Für die Charakteristik folgt daraus

$$\chi(s^{-1}) = \bar{\chi}(s).$$

Auf ähnliche Weise zeigte I. Schur, daß für zwei nicht-äquivalente irreduzible Darstellungen

$$E(s) = \| e_{ik}(s) \|, \qquad E'(s) = \| e'_{\iota\varkappa}(s) \|$$

die Relationen gelten[1]):

$$\int_{\mathfrak{G}} e_{ik}(s)\, e'_{\varkappa\iota}(s^{-1})\, ds = 0. \tag{6}$$

Für die einzelne irreduzible Darstellung aber ergeben sich aus der Tatsache, daß jede konstante, mit allen $E(s)$ vertauschbare Matrix ein Multiplum der Einheitsmatrix sein muß, die Beziehungen

$$\int_{\mathfrak{G}} e_{ik}(s)\, e_{\varkappa\iota}(s^{-1})\, ds = \begin{cases} \dfrac{V}{n} & \text{für } i = \iota,\ k = \varkappa; \\ 0 & \text{in allen andern Fällen.} \end{cases} \tag{7}$$

$V = \int ds$ bedeutet das Gesamtvolumen von $\mathfrak{G}$. Nehmen wir die darstellenden Matrizen, wie das erlaubt ist, als unitär an, so sind die linken Seiten der Gleichungen (6), (7) bzw.

$$= \int e_{ik}(s)\, \bar{e}'_{\iota\varkappa}(s)\, ds \qquad \text{und} \qquad = \int e_{ik}(s)\, \bar{e}_{\iota\varkappa}(s)\, ds.$$

Die Komponenten der verschiedenen inäquivalenten irreduziblen Darstellungen $E(s)$ bilden also ein unitär-orthogonales Funktionensystem auf der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{G}$. Es folgt daraus, daß sie samt und sonders voneinander linear unabhängig sind[2]). *Es soll im folgenden die Vollständigkeit dieses Orthogonalsystems bewiesen werden.* Für die primitiven Charakteristiken ergeben sich aus den oben erwähnten Orthogonalitätsrelationen die Gleichungen

$$\int \chi(s)\, \bar{\chi}'(s)\, ds = 0, \qquad \int \chi(s)\, \bar{\chi}(s)\, ds = V. \tag{8}$$

Die erste gilt, wenn die Charakteristiken χ, χ' zu inäquivalenten irreduziblen Darstellungen gehören; es geht daraus hervor, daß solche Charakteristiken notwendig voneinander verschieden sind.

Zum Vergleich mit dem Folgenden ist es nützlich, den Beweis dafür, daß jede mit allen $E(s)$ vertauschbare Matrix A Multiplum der Einheitsmatrix ist, unter Benutzung des Umstandes, daß $E(s)$ unitär ist, etwas anders zu führen, als dies durch Herrn I. Schur geschah. Wir wollen zeigen, wie wir mittels einer mit allen $E(s)$ vertauschbaren Matrix A, die nicht Multiplum von 1 ist, den Zerfall der Darstellung in gesonderte Bestandteile herbeiführen können. Aus

$$E(s)A = AE(s) \qquad \text{oder} \qquad E(s)A\bar{E}^*(s) = A$$

---

[1]) Sitzungsber. Berl. Akad. 1905, S. 406; 1924, S. 199. Vgl. auch Weyl, Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen I, II, III, Math. Zeitschr. **23**, S. 271; **24**, S. 328, 377, 789 (1925, im folgenden zitiert als W. I, II, III): I, S. 296.

[2]) Für ganz beliebige Gruppen wurde diese Unabhängigkeit bewiesen von G. Frobenius und I. Schur, Sitzungsber. Berl. Akad. 1906, S. 215, nach einer Methode, die Burnside für die Komponenten einer einzigen irreduziblen Darstellung zum gleichen Ziel geführt hatte.

folgt die gleiche Beziehung für $\bar{A}^*$ an Stelle von A. Mit A wird wenigstens eine der beiden Hermiteschen Matrizen

$$A + \bar{A}^* \quad \text{und} \quad \frac{A - \bar{A}^*}{\sqrt{-1}},$$

aus denen sich A linear zusammensetzt, die Eigenschaft teilen, nicht Multiplum von 1 zu sein. Bezeichnen wir diese gegenüber allen $E(s)$ invariante Hermitesche Form jetzt mit A, so kann A durch eine unitäre Transformation des Koordinatensystems auf die Gestalt gebracht werden:

$$A = \alpha_1 x_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 x_2 \bar{x}_2 + \dots + \alpha_n x_n \bar{x}_n,$$

wobei unmöglich alle Koeffizienten α_i einander gleich sein können. Die mit A vertauschbaren Matrizen $E(s)$ zerfallen dann ebenso in Teilquadrate längs der Hauptdiagonale, wie sich die Größen α_i (bei geeigneter Anordnung) in Abschnitte untereinander gleicher teilen.

§ 2.

Besselsche Ungleichung. Ansatz des Problems.

Zu jeder stetigen Funktion $x(s)$ auf der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{G}$ können wir die Matrix und die Zahl bilden, welche für unser Orthogonalsystem die Rolle der Fourierkoeffizienten spielen:

$$\mathsf{A}(x) = \int x(s) E^*(s^{-1})\, ds = \int x(s) \bar{E}(s)\, ds,$$

bzw. deren Spur

$$\alpha(x) = \mathrm{Sp}(\mathsf{A}(x)) = \int x(s) \chi(s^{-1})\, ds = \int x(s) \bar{\chi}(s)\, ds.$$

Zufolge der aufgestellten Orthogonalitätsrelationen gelten dann, wenn $\alpha_{ik}(x)$ die Komponenten der Matrix $\mathsf{A}(x)$ sind, die Besselschen Ungleichungen

$$n \sum_{i,k} |\alpha_{ik}(x)|^2 + \dots \leqq V \int |x(s)|^2\, ds, \tag{8}$$

$$|\alpha(x)|^2 + \dots \leqq V \int |x(s)|^2\, ds. \tag{9}$$

In der Summe links deutet $+\dots$ eine Anzahl analoger Glieder an, die von lauter inäquivalenten irreduziblen Darstellungen herrühren. Die Behauptung der Vollständigkeit meint, daß, wenn links so die sämtlichen irreduziblen Darstellungen aufgenommen werden, in der ersten Relation immer, in der zweiten dann das Gleichheitszeichen gilt, wenn $x(s)$ eine Klassenfunktion ist.

Jede Funktion $x(s)$ auf der Gruppenmannigfaltigkeit betrachten wir als eine „*Gruppenzahl*". Die Addition hat den gewöhnlichen Sinn, die *Multiplikation* aber ist erklärt durch

$$xy(s) = \int x(sr^{-1})\, y(r)\, dr.$$

In mehr symmetrischer Weise kann man dafür schreiben

$$xy(st^{-1}) = \int x(sr^{-1})\, y(rt^{-1})\, dr.$$

Man braucht, um das zu rechtfertigen, in dem letzten Integral nur rt^{-1} durch r zu ersetzen. Aus dem Bereich der *Kerne von der Form* $k(s,t) = x(st^{-1})$ kommt man also nicht heraus durch die Operationen der Addition und der Zusammensetzung. Die Spur dieses Kernes, welche wir auch die Spur der Gruppenzahl x nennen, ist

$$S(x) = V \cdot x(\circ);$$

demnach

$$S(xy) = V \cdot \int x(s^{-1})\, y(s)\, ds = V \cdot \int x(s)\, y(s^{-1})\, ds = S(yx).$$

Als (Hermitesche) Konjugierte der Gruppenzahl $x(s)$ gilt

$$\tilde{x}(s) = \bar{x}(s^{-1});$$

das stimmt für den zugehörigen Kern $k(s,t)$ mit der bekannten Definition

$$\tilde{k}(s,t) = \bar{k}(t,s)$$

überein. Eine Gruppenzahl x bzw. ein Kern ist Hermitisch, wenn $x = \tilde{x}$ gilt. Das Produkt $x\tilde{x}$ ist stets Hermitisch.

Es ist

$$\mathsf{A}(\tilde{x}) = \int \bar{x}(s^{-1})\, \overline{E}(s)\, ds = \int \bar{x}(s)\, \overline{E}(s^{-1})\, ds$$

die konjugiert-transponierte Matrix zu

$$\int x(s)\, E^*(s^{-1})\, ds = \mathsf{A}(x),$$

daher zugleich

$$\alpha(\tilde{x}) = \bar{\alpha}(x).$$

Wir können danach die Besselschen Ungleichungen auch in der Form schreiben:

$$n\, \mathrm{Sp}(\mathsf{A}(x)\, \mathsf{A}(\tilde{x})) + \ldots \leqq S(x\tilde{x}); \tag{8'}$$

$$\alpha(x)\, \alpha(\tilde{x}) + \ldots \leqq S(x\tilde{x}). \tag{9'}$$

Der Darstellungseigenschaft (2) entspricht die Multiplikationsregel

$$\mathsf{A}(xy) = \mathsf{A}(x)\, \mathsf{A}(y).$$

Denn das Produkt rechts ist

$$= \iint x(s)\, y(t)\, \overline{E}(st)\, ds\, dt.$$

Ersetzt man hierin s bei festem t durch st^{-1}, so erhält man

$$\iint x(st^{-1})\, y(t)\, \overline{E}(s)\, ds\, dt,$$

und dies liefert durch Vertauschung der Reihenfolge der Integration $\mathsf{A}(xy)$. Ferner bestehen die wichtigen Gleichungen

$$(10) \qquad E(s)\mathsf{A}^*(x) = \int x(t)E(st^{-1})dt = \int x(ts)E(t^{-1})dt,$$

$$(11) \qquad \mathsf{A}^*(x)E(s) = \int x(t)E(t^{-1}s)dt = \int x(st)E(t^{-1})dt.$$

Wenn x eine Klassenfunktion ist, wird $\mathsf{A}^*(x)$ daher mit allen $E(s)$ vertauschbar und folglich Multiplum der n-zeiligen Einheitsmatrix sein:

$$\mathsf{A}(x) = \frac{\alpha(x)}{n} \cdot \mathbf{1}.$$

Dadurch geht die zu (9′) gehörige spezielle Vollständigkeitsrelation, welche sich auf Klassenfunktionen bezieht, aus der allgemeinen zu (8′) gehörigen hervor.

Die Vollständigkeitsrelation gewinnen wir aus der Theorie der Eigenwerte und Eigenfunktionen von Kernen der besonderen Gestalt $x(st^{-1})$. Ist $x\tilde{x} = z$ der durch Zusammensetzung mit dem konjugierten entstehende Hermitesche Kern, so lehrt die Gleichung (11), daß

$$(12) \qquad \int z(st^{-1})E(t)dt = \Gamma^* E(s)$$

ist, wo

$$\Gamma = \mathsf{A}(z) = \mathsf{A}(x)\overline{\mathsf{A}}^*(x)$$

eine Hermitesche Matrix ist; die zugehörige Hermitesche Form ist keiner negativen Werte fähig. Durch eine geeignete unitär-orthogonale Normierung der Darstellung $E(s)$ („Orientierung“) können wir erreichen, daß Γ eine Diagonalmatrix wird, deren (reelle, nicht negative) Glieder mit $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ bezeichnet seien. Wir erkennen dann aus (12), daß

$$e_{i1}(s),\ e_{i2}(s),\ \ldots,\ e_{in}(s)$$

zum Eigenwert γ_i gehörige Eigenfunktionen des Kernes $z(st^{-1})$ sind. Die Theorie der Integralgleichungen wird uns also, wenn sie auf diesen Kern angewendet wird, diejenigen irreduziblen Darstellungen der Gruppe liefern, für welche der Fourierkoeffizient $\mathsf{A}(x)$ nicht verschwindet; und diese übrigens in einer gewissen, von x abhängigen Orientierung. Die behauptete Vollständigkeitsrelation aber ist mit dem bekannten Satze aus der Theorie der Integralgleichungen identisch, daß die Spur des Kernes $z = x\tilde{x}$ gleich der Summe seiner Eigenwerte ist. Wir werden so durch *konstruktive Erzeugung* der irreduziblen Darstellungen von neuem alle in § 1 besprochenen Resultate ableiten, darüber hinaus aber die Vollständigkeit gewinnen[3]). An dem einfachsten Fall der kommutativen einparametrigen Gruppe der Drehungen eines Kreises in sich wurde die Methode bereits in den Berl. Sitzungsberichten 1926, S. 211 geschildert. Sie führt zur bekannten Parsevalschen Gleichung in der Theorie der Fourierreihen und

---

[3]) Das Programm des Beweises samt dem Resultat wurde schon ausgesprochen in W. III, S. 390.

läßt sich, wie dort und Math. Annalen **97**, S. 338 ff. gezeigt wurde, auch sehr schön zur Gewinnung der allgemeineren Bohrschen Vollständigkeitsrelation im Gebiete der fastperiodischen Funktionen verwerten.

§ 3.

Konstruktion der höchsten zu einer Gruppenzahl gehörigen Darstellung.

Als Methode zur Konstruktion der Eigenwerte und Eigenfunktionen benutzen wir — mit geringen Modifikationen, die schon in der eben zitierten Annalenarbeit angegeben wurden — die von Herrn E. Schmidt in seiner Dissertation 1905 entwickelte. Die Hauptsache ist, zu der nicht identisch verschwindenden Funktion $x(s)$ auf der Gruppenmannigfaltigkeit eine Darstellung $E(s)$ zu konstruieren, für welche $\mathsf{A}(x) \neq 0$ ist. Da jede Darstellung einer geschlossenen Gruppe vollständig reduzibel ist, kann man sich daraus dann auch eine *irreduzible* Darstellung mit der gleichen Eigenschaft herstellen.

Wir iterieren den Hermiteschen Kern $z = x\tilde{x}$: $z, z^2, z^3, \ldots$. Die Spuren σ_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ der Iterierten sind positive Zahlen, und die Quotienten $\sigma_\nu/\sigma_{\nu-1} = \gamma_\nu$ streben wachsend einem positiven Grenzwert γ zu, während $\frac{z^\nu(s)}{\gamma^\nu}$ gleichmäßig auf der Gruppenmannigfaltigkeit gegen einen Limes $e(s)$ konvergiert. Die Gruppenzahl $e(s)$ ist Hermitisch, ihre Spur $\geqq 1$. γ ist der größte Eigenwert von $z(st^{-1})$, $e(st^{-1})$ der zu diesem Eigenwert gehörige Teil des Kernes $z(st^{-1})$. Es gelten die Relationen

$$ze = ez = \gamma e, \qquad ee = e.$$

Wegen der letzten Gleichung zerfällt $e(st^{-1})$ in der folgenden Weise:

$$(13)\qquad e(st^{-1}) = \varphi_1(s)\overline{\varphi}_1(t) + \varphi_2(s)\overline{\varphi}_2(t) + \cdots + \varphi_n(s)\overline{\varphi}_n(t),$$

wo die $\varphi_i(s)$ ein unitär-orthogonales System bilden:

$$\int \varphi_i(s)\overline{\varphi}_k(s)\,ds = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k), \end{cases}$$

das System der linear unabhängigen zu γ gehörigen Eigenfunktionen von z. Die Spur des Kernes $e(st^{-1})$ erweist sich damit als eine ganze Zahl n.

Da bei festem t mit $\varphi_i(s)$ auch $\varphi_i(st^{-1})$ eine zu γ gehörige Eigenfunktion des Kernes z ist, müssen Gleichungen gelten:

$$(14)\qquad \varphi_i(st^{-1}) = \sum_{k=1}^{n} \overline{e}_{ik}(t)\,\varphi_k(s).$$

Man erhält sie aus

$$\varphi_i(s) = \int e(sr^{-1})\,\varphi_i(r)\,dr,$$

wenn man darin s durch st^{-1} ersetzt und den Ausdruck

$$e(st^{-1}r^{-1}) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(s)\,\overline{\varphi}_k(rt)$$

benutzt:

$$\bar{e}_{ik}(t) = \int \varphi_i(r)\,\overline{\varphi}_k(rt)\,dr.$$

Die Funktionen $\varphi_i(s)$ erfahren also bei der Transformation $s \to s' = st^{-1}$ des Arguments untereinander die lineare Substitution

$$\overline{E}(t) = \| \bar{e}_{ik}(t) \|.$$

Daraus ergibt sich sogleich

$$\overline{E}(t')\,\overline{E}(t) = \overline{E}(t't),$$

d. h. *$E(s)$ ist eine Darstellung der Gruppe* von der Ordnung n. $E(\circ)$ ist die Einheitsmatrix. Da die $\varphi_i(s)$ ein unitär-orthogonales Funktionensystem bilden und diese Eigenschaft offenbar nicht bei der Ersetzung des Arguments s durch st^{-1} einbüßen, ist die lineare Transformation unitär:

$$\overline{E}^*(t) = E(t^{-1}), \qquad \tilde{e}_{ik}(t) = e_{ki}(t).$$

Man hat sich endlich noch davon zu überzeugen, daß für diese Darstellung die Matrix

$$\mathsf{A}(z) = \Gamma = \|\gamma_{ik}\| \neq 0$$

ist. Das gelingt wohl am raschesten folgendermaßen. Nach (14) gilt die Gleichung

$$\int \varphi_i(st^{-1})\,z(t)\,dt = \sum_k \gamma_{ik}\,\varphi_k(s),$$

also

$$\int \varphi_i(t)\,z(t^{-1})\,dt = \sum_k \gamma_{ik}\,\varphi_k(\circ).$$

Außerdem ist

$$\int z(st^{-1})\,e(t)\,dt = \gamma\, e(s),$$

mithin

$$\gamma\, e(\circ) = \frac{\gamma n}{V} = \int z(t^{-1})\,e(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} \overline{\varphi}_i(\circ) \int z(t^{-1})\,\varphi_i(t)\,dt$$

$$= \sum_{i,k} \gamma_{ik}\,\overline{\varphi}_i(\circ)\,\varphi_k(\circ).$$

Die Hermitesche Form mit den Koeffizienten γ_{ik} nimmt für die Argumente $\overline{\varphi}_i(\circ)$ den von 0 verschiedenen Wert $\frac{\gamma n}{V}$ an, kann daher nicht identisch verschwinden.

§ 4.

Zerfällung der gewonnenen Darstellung.

Es wird zunächst gut sein, das Verhältnis der gewonnenen Darstellung $E(s)$ zu den Eigenfunktionen $\varphi_i(s)$ genauer aufzuklären. Ferner soll die Zerfällung von $E(s)$ in irreduzible Bestandteile konstruktiv in möglichst einfacher Weise durchgeführt werden. Endlich gilt es, durch Wiederholung des eingeschlagenen Verfahrens alle zum Kern $x(st^{-1})$ gehörigen Darstellungen zu ermitteln und so den Beweis der Vollständigkeit zu erbringen.

Was den ersten Punkt betrifft, so liefert die Gleichung (11):

$$zE(s) = \int z(st^{-1})E(t)\,dt = \Gamma^* E(s).$$

Durch geeignete Orientierung ist zu erreichen, daß Γ eine Diagonalmatrix mit den Gliedern $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ wird, $\gamma_i \geqq 0$.

$$e_{i1}(s),\, e_{i2}(s),\, \ldots,\, e_{in}(s)$$

sind alsdann Eigenfunktionen des Kerns $z(st^{-1})$, welche zu dem Eigenwert γ_i gehören. Ersetzt man in (14) t durch t^{-1}, $\bar{e}_{ik}(t^{-1})$ durch $e_{ki}(t)$ und setzt $s = \circ$, so sieht man, daß die zum Eigenwert γ gehörige Eigenfunktion

$$\varphi_i(t) = \sum_k e_{ki}(t)\varphi_k(\circ) \tag{15}$$

sich linear aus den Komponenten zusammensetzt, welche die i-te Spalte von $E(t)$ bilden. γ muß also unter den Zahlen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ vorkommen. [$\varphi_k(\circ)e_{ki}(t)$ muß null sein für solche Indizes k, deren zugehöriges $\gamma_k \neq \gamma$ ist, und für alle i; nimmt man $i = k$ und $t = \circ$, so schließt man daraus: $\varphi_k(\circ) = 0$, wenn $\gamma_k \neq \gamma$.]

Um zweitens die Reduktion vorzunehmen, suchen wir alle „charakteristischen Einheiten" auf, das sind diejenigen Funktionen $f(s)$, für welche eine Zerlegung gilt

$$f(st^{-1}) = \sum_{i,k} \lambda_{ik}\varphi_i(s)\bar{\varphi}_k(t) \tag{16}$$

mit konstanten Koeffizienten λ_{ik}. Eine solche setzt sich nach der Gleichung (16) linear zusammen aus $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots, \varphi_n(s)$. Außerdem ist

$$ef = fe = f.$$

Es ist darum $f(s)$ eine lineare Kombination von

$$\varphi_1 e(s),\, \varphi_2 e(s),\, \ldots,\, \varphi_n e(s). \tag{17}$$

Anderseits sind diese Produkte tatsächlich charakteristische Einheiten, weil $\varphi_i(sr^{-1})$ sich linear aus den Funktionen $\varphi(s)$ und $e(rt^{-1})$ aus den

Funktionen $\overline{\varphi}(t)$ zusammensetzt. Wir prüfen, ob die Funktionen (17) konstante Multipla von $e(s)$ sind. Trifft dies zu, so ist, wie wir behaupten, die Darstellung $E(s)$ irreduzibel. Andernfalls liefert die Tabelle (17) eine charakteristische Einheit $f(s)$, die nicht Multiplum von $e(s)$ ist. Da mit $f(s)$ auch die konjugierte $\tilde{f}(s)$ von der gleichen Natur ist:

$$\tilde{f}(s t^{-1}) = \sum_{i,k} \overline{\lambda}_{ki} \varphi_i(s) \overline{\varphi}_k(t),$$

besitzen wir in

$$f + \tilde{f} \quad \text{oder} \quad \frac{f - \tilde{f}}{\sqrt{-1}}$$

eine charakteristische Einheit, welche nicht Multiplum von $e(s)$ und zugleich Hermitisch ist. Wenn wir diese nunmehr mit f bezeichnen, gelten für die Koeffizienten der Entwicklung (16) die Beziehungen $\overline{\lambda}_{ik} = \lambda_{ki}$. Durch eine geeignete unitäre Transformation des Systems der Eigenfunktionen $\varphi_i(s)$ — nur bis auf eine solche ist es überhaupt determiniert — können wir die Hermitesche Matrix der λ_{ik} in eine Diagonalmatrix verwandeln: $\lambda_{ik} = 0$ für $i \neq k$. Sind von den Zahlen $\lambda_{ii} = \lambda_i$ etwa $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_g = \lambda'$, während die übrigen $\neq \lambda'$ sind, so kann man durch lineare Kombination von f und seinen Iterierten die charakteristische Einheit

$$e'(s t^{-1}) = \sum_{i=1}^{g} \varphi_i(s) \overline{\varphi}_i(t)$$

aus f herauskristallisieren. Man braucht in der Tat, wenn $\lambda', \lambda'', \ldots$ die h verschiedenen unter den n Zahlen λ_i sind, ein Polynom der Variablen μ vom Maximalgrad $h-1$:

$$\beta_0 + \beta_1 \mu + \ldots + \beta_{h-1} \mu^{h-1}$$

nur so zu bestimmen, daß es $= 1$ wird für $\mu = \lambda'$, hingegen $= 0$ für $\mu = \lambda'', \ldots, \lambda^{(h)}$; dann ist die gewünschte Einheit

$$e'(s) = \beta_0 e(s) + \beta_1 f(s) + \beta_2 ff(s) + \ldots + \beta_{h-1} f^{h-1}(s).$$

Aus der Definition der Matrix $E(t)$ geht hervor, daß sie in gleicher Weise in h längs der Hauptdiagonale sich aneinander reihende Quadrate zerfällt, wie die Reihe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sich in Gruppen untereinander gleicher Zahlen teilt. Dasselbe gilt für die Matrix $\Gamma = \mathsf{A}(z)$. An jeder der gewonnenen Funktionen $e'(s), e''(s), \ldots$ kann man das gleiche Verfahren wiederholen, das eben auf $e(s)$ angewendet wurde, und erhält so schließlich nach höchstens n Schritten, die jedesmal das unitär-orthogonale System der Eigenfunktionen $\varphi_i(s)$ genauer normieren, dies System in Abschnitte eingeteilt:

$$|\varphi_1(s), \ldots, \varphi_g(s)| \;.\;\;.\;\;.\; |\;.\;\;.\;\;.\;,$$

derart, daß für den einzelnen Abschnitt die Summe

$$e'(st^{-1}) = \sum_{i=1}^{g} \varphi_i(s)\,\overline{\varphi}_i(t)$$

eine Funktion von st^{-1} allein ist, eine bilineare Kombination

$$\sum_{i,k=1}^{g} \lambda_{ik}\,\varphi_i(s)\,\overline{\varphi}_k(t)$$

aber nur dann, wenn sie konstantes Multiplum von $e'(st^{-1})$ ist. Entsprechend zerfallen die Matrizen $E(t)$ und Γ. Durch eine letzte Normierung kann Γ auf die Gestalt einer Diagonalmatrix gebracht werden. Unter den zu einem Abschnitt gehörigen $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ findet sich dann allemal nach der Gleichung (15) die Zahl γ vertreten. Es bleibt noch der Beweis zu führen, daß die gewonnenen Teilmatrizen *irreduzible* Darstellungen unserer kontinuierlichen Gruppe liefern.

Wir schreiben jetzt wieder, indem wir nur einen der eben konstruierten Abschnitte beibehalten, n statt g. Man bilde die Größe

$$\int \varphi_i(sr^{-1})\,\overline{\varphi}_k(tr^{-1})\,dr = \psi(st^{-1}) = \sum_{p,q=1}^{n} \lambda_{pq}\,\varphi_p(s)\,\overline{\varphi}_q(t),$$

$$\lambda_{pq} = \int \overline{e}_{ip}(r)\,e_{kq}(r)\,dr.$$

Gemäß der Voraussetzung muß die Matrix $\|\lambda_{pq}\|$ ein Multiplum der Einheitsmatrix sein:

$$\int \overline{e}_{ip}(r)\,e_{kq}(r)\,dr = \varrho_{ik}\,\delta_{pq}.$$

Setzt man $p = q$ und summiert über den Index p, so erhält man wegen der Orthogonalitätsrelationen

$$\sum_p \overline{e}_{ip}(r)\,e_{kp}(r) = \delta_{ik}$$

die Formel

$$V\delta_{ik} = n\,\varrho_{ik},$$

also

$$(18) \qquad \int \overline{e}_{ip}(r)\,e_{kq}(r)\,dr \begin{cases} = \dfrac{V}{n} & \text{für} \quad i = k,\ p = q, \\ \text{und sonst} & = 0. \end{cases}$$

Damit sind die Orthogonalitätsbeziehungen (7) zwischen den Elementen der abgespaltenen Darstellung von neuem bewiesen. Ihnen zufolge sind die Komponenten $e_{ik}(s)$ voneinander linear unabhängig, und demnach ist die Darstellung irreduzibel. Bildet man mit irgendwelchen Konstanten $\|\alpha_{ik}\| = \mathsf{A}$ die Funktion

$$y(s) = \frac{n}{V} \sum_{i,k} \alpha_{ik}\,e_{ik}(s),$$

so ist nach (18): $\mathsf{A}(y) = \mathsf{A}$ und die Gleichung (11) liefert

$$y\, e_{qk} = \sum_i \alpha_{iq}\, e_{ik}.$$

Also lassen sich die Relationen (18) erweitern zu

$$e_{ip}\, e_{qk} = \begin{cases} 0 & (p \neq q) \\ \frac{V}{n}\, e_{ik} & (p = q). \end{cases} \tag{19}$$

Die hier angestellten Überlegungen stehen offenbar mit den in § 1 rekapitulierten, die auf Herrn I. Schur zurückgehen, in enger Beziehung. Um dies völlig klarzustellen, beweisen wir mit Bezug auf die *sämtlichen* n zum Eigenwert γ gehörigen Eigenfunktionen $\varphi_i(s)$ des Kernes $z(s\,t^{-1})$ und die dazu gehörige Darstellung $E(s)$ der n-ten Ordnung (welche nicht notwendig irreduzibel ist) den Satz:

$$\sum_{i,k=1}^{n} \lambda_{ik}\, \varphi_i(s)\, \overline{\varphi}_k(t) \tag{20}$$

hat dann und nur dann die Form $f(s\,t^{-1})$, wenn die Matrix $\Lambda = \|\lambda_{ik}\|$ mit allen $E(s)$ vertauschbar ist. — Die Summe (20), $f(s,t)$, hat nämlich dann und nur dann die behauptete Gestalt, wenn

$$f(s\,r, t\,r) = f(s, t) \tag{21}$$

ist. Nun gilt aber

$$\varphi_i(s\,r) = \sum_p e_{pi}(r)\, \varphi_p(s), \qquad \overline{\varphi}_k(t\,r) = \sum_q \overline{e}_{qk}(r)\, \overline{\varphi}_q(s).$$

Die Forderung (21) lautet daher

$$\sum_{i,k} \lambda_{ik}\, e_{pi}(r)\, \overline{e}_{qk}(r) = \lambda_{pq}$$

oder

$$E(r)\, \Lambda\, \overline{E}^*(r) = \Lambda.$$

§ 5.

Iteration. Beweis der Vollständigkeitsrelation.

Zu der nicht-verschwindenden Gruppenzahl x haben wir eine positive Zahl γ und eine irreduzible Darstellung unserer Gruppe $E(s) = \|e_{ik}(s)\|$ $(i, k = 1, \ldots, n)$ so ermittelt, daß $\mathsf{A}(x)\,\overline{\mathsf{A}}^*(x) = \Gamma$ eine Hauptmatrix ist, deren Elemente $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ den Bedingungen $0 \leqq \gamma_i \leqq \gamma$ genügen; wenigstens eines der γ_i ist $= \gamma$. Die Spur von Γ ist demnach $\geqq \gamma$.

Man hat jetzt von $x(s)$ denjenigen Bestandteil abzuziehen, der den ermittelten Eigenfunktionen entspricht:

$$x(s) = \frac{n}{V} \sum_{i,k} \alpha_{ik}\, e_{ik}(s) + x'(s) \qquad [\alpha_{ik} = \alpha_{ik}(x)].$$

Unter Berücksichtigung der Relationen (19) und weil $\tilde{e}_{ik} = e_{ki}$ ist, ergibt sich nun sogleich für $z' = x'\tilde{x}'$:

$$z(s) = \frac{n}{V} \sum_i \gamma_i e_{ii}(s) + z'(s)$$

und durch Iteration

$$z^\nu(s) = \frac{n}{V} \sum_i \gamma_i^\nu e_{ii}(s) + z'^\nu(s).$$

Die Spur σ'_ν von z'^ν wird

$$= \sigma_\nu - n(\gamma_1^\nu + \gamma_2^\nu + \ldots + \gamma_n^\nu).$$

Ist x' nicht identisch 0, so konvergiert $\sigma'_\nu / \sigma'_{\nu-1}$ mit $\nu \to \infty$ gegen einen Limes γ'. Es kann nicht $\gamma' > \gamma$ sein; denn $\frac{\sigma'_\nu}{\gamma'^\nu} \leqq \frac{\sigma_\nu}{\gamma'^\nu}$ konvergiert, ebenso wie $\frac{\sigma_\nu}{\gamma^\nu}$, gegen eine (ganze) Zahl $n' \geqq 1$. Man erhält als den zum Eigenwert γ' gehörigen Bestandteil des Kernes $z'(st^{-1})$ eine Funktion

$$e'(st^{-1}) = \varphi'_1(s)\bar{\varphi}'_1(t) + \ldots \qquad (n' \text{ Glieder}).$$

Aus $z' e_{ik} = 0$ folgt $e' e_{ik} = 0$, d. i.

$$\int \bar{\varphi}'_p(t) e_{ik}(t)\,dt = 0 \quad \text{oder} \quad \int \varphi'_p(t) \bar{e}_{ik}(t)\,dt = 0.$$

Darum ist nach (11) vollständiger

$$\int \varphi'_p(st^{-1}) e_{ik}(t)\,dt = 0,$$

oder da

$$\varphi'_p(st^{-1}) = \sum_q \bar{e}'_{pq}(t)\varphi'_q(s)$$

zu setzen ist,

$$\int \bar{e}'_{pq}(t) e_{ik}(t)\,dt = 0. \tag{22}$$

Auch für den aus der Darstellung $E'(s) = \| e'_{pq}(s) \|$ abzuspaltenden *irreduziblen* Bestandteil, den wir fortan mit $E'(s)$ bezeichnen, gelten diese Beziehungen. $E'(s)$ ist danach nicht äquivalent mit $E(s)$, und wir haben zugleich von neuem die Orthogonalitätsrelationen (6) gewonnen, welche zeigen, daß der zugehörige Fourierkoeffizient

$$\mathsf{A}'(z') = \mathsf{A}'(z)$$

ist.

Haben wir unseren Prozeß p-mal wiederholt[4]), ohne daß er vorher durch Erschöpfung der Funktion $x(s)$ ein Ende erreichte, so ist aus $x(s)$ die Funktion

$$x^{(p)}(s) = x(s) - \left\{\frac{n}{V} \sum_{i,k} \alpha_{ik} e_{ik}(s) + \ldots\right\} \qquad (p \text{ Glieder})$$

---

[4]) Diese Iteration ist etwas ausführlicher entwickelt in Math. Annalen 97, S. 345.

entstanden mit dem zugehörigen

$$z^{(p)}(s) = z(s) - \left\{\frac{n}{V} \sum_i \gamma_i e_{ii}(s) + \ldots\right\}.$$

Es ist danach

$$n \sum_i \gamma_i + \ldots \leqq V \cdot z(\circ);$$

darum, wenn der Einfachheit wegen $z(\circ) \leqq 1$ angenommen wird, a fortiori

$$\gamma + \gamma' + \ldots \leqq V.$$

Wegen $\gamma \geqq \gamma' \geqq \ldots$ ist also $\gamma^{(p-1)} \leqq \frac{V}{p}$, und es gilt nach Konstruktion

$$\sigma_2^{(p)} \leqq \gamma^{(p-1)} \sigma_1^{(p)},$$

d. i.

$$(23) \qquad \int |z^{(p)}(s)|^2 ds \leqq \gamma^{(p-1)} \leqq \frac{V}{p}.$$

Bricht das Verfahren nicht ab, wie weit man es auch fortsetzt, so konvergiert $z^{(p)}(s)$ mit unbegrenzt wachsendem p gleichmäßig gegen 0. Ist nämlich

$$\int |x(ts) - x(s)|^2 ds \leqq \varepsilon^2,$$

sobald t in einer gewissen Umgebung $\mathfrak{G}_\varepsilon$ des Einheitspunktes $\circ$ vom Volumen V_ε liegt, so folgt aus $z = x\tilde{x}$, $z^{(p)} = x^{(p)}\tilde{x}$ durch die Schwarzsche Ungleichung: es ist

$$|z(st^{-1}) - z(s)| \leqq \varepsilon, \qquad |z^{(p)}(st^{-1}) - z^{(p)}(s)| \leqq \varepsilon$$

für alle t, die jenem Gebiet $\mathfrak{G}_\varepsilon$ angehören, und alle s. Die sämtlichen Funktionen $z^{(p)}(s)$ sind also „gleichartig" gleichmäßig stetig. Ist an einer Stelle $|z^{(p)}(s)| \geqq 2\varepsilon$, so bleibt folglich in einer ganzen Umgebung dieser Stelle vom Volumen V_ε die Funktion $z^{(p)}(s)$ absolut $\geqq \varepsilon$, und das Integral auf der linken Seite von (23) ist mindestens gleich $\varepsilon^2 V_\varepsilon$; also $p \leqq \frac{V}{\varepsilon^2 V_\varepsilon}$. Es ist darum

$$|z^{(p)}(s)| \leqq 2\varepsilon, \quad \text{sobald} \quad p > \frac{V}{\varepsilon^2 V_\varepsilon}.$$

Damit ist nicht nur unsere Behauptung der gleichmäßigen Konvergenz bewiesen, sondern auch eine *explizite Restabschätzung* gewonnen. Insbesondere ergibt sich für $s = \circ$:

$$(24) \qquad n\,\mathrm{Sp}(\mathsf{A}(x)\mathsf{A}(\tilde{x})) + \ldots = S(x\tilde{x}).$$

Die Summe links bezieht sich auf die „in $x(s)$ vorkommenden" irreduziblen inäquivalenten Darstellungen, welche unser von der Funktion $x(s)$ ausgehendes Konstruktionsverfahren liefert. Wegen der Besselschen Ungleichung gilt (24) aber a fortiori, wenn die Summe über *alle* inäquivalenten irreduziblen Darstellungen erstreckt wird; und zugleich zeigt sich, daß die in $x(s)$ vorkommenden Darstellungen alle diejenigen sind, für welche der Fourierkoeffizient $\mathsf{A}(x) \neq 0$ ist.

Fundamentalsatz. *Bildet man zu jeder irreduziblen Darstellung*

$$E(s) = \| e_{ik}(s) \| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

und zu ihrer Charakteristik $\chi(s)$ *die Fourierkoeffizienten:*

$$\alpha_{ik} = \int x(s)\, \bar{e}_{ik}(s)\, ds, \qquad \alpha = \int x(s)\, \bar{\chi}(s)\, ds,$$

so ist

$$n \sum_{i,k} |\alpha_{ik}|^2 + \ldots = V \cdot \int |x(s)|^2 ds$$

für jede stetige Funktion,

$$|\alpha|^2 + \ldots = V \cdot \int |x(s)|^2 ds$$

für jede stetige Klassenfunktion $x(s)$. *Die Summen links erstrecken sich über alle inäquivalenten irreduziblen Darstellungen.*

Der Hauptunterschied unserer Beweisführung gegenüber den bekannten, die im Gebiet der endlichen Gruppen zum Ziele führen[5]), ist darin gegründet, daß uns hier die Gruppenzahl „1" mit den Eigenschaften

$$1x = x1 = x$$

fehlt. Darum mußte der Beweis so umgestaltet werden, daß er statt von „1" von einer willkürlichen Gruppenzahl $x(s)$ ausging. Aber die Theorie der Integralgleichungen liefert dann direkt die Vollständigkeitsrelation für $x(s)$. Will man konstruktiv auf diese Weise *alle* inäquivalenten irreduziblen Darstellungen erzeugen, so muß man eine Folge von Funktionen $1_\nu(s)$ benutzen, welche gegen jene nicht realisierbare „1" konvergieren. Man nehme also für $1_\nu(s)$ eine nicht-negative Funktion, welche nur in einer Umgebung $\mathfrak{U}_\nu$ des Einheitselementes $\neq 0$ ist, die mit wachsendem ν auf den Punkt $\circ$ zusammenschrumpft. Das Integral von $1_\nu(s)$ sei $= 1$. Dann muß in der Tat jede irreduzible Darstellung in Erscheinung treten; denn es konvergiert offenbar mit wachsendem ν für eine vorgegebene solche Darstellung $E(s)$ das zugehörige

$$\mathsf{A}(1_\nu) = \int 1_\nu(s)\, \overline{E}(s)\, ds$$

gegen $\overline{E}(\circ)$, d. i. gegen die Einheitsmatrix. Von einem gewissen ν ab ist also sicherlich $\mathsf{A}(1_\nu) \neq 0$, und dann kommt $E(s)$ in $1_\nu(s)$ vor.

---

[5]) Hier ist namentlich Frobenius zu nennen mit seinen grundlegenden Arbeiten in den Sitzungsber. Berl. Akad. von 1896 an. Ferner I. Schur, Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere, Sitzungsber. Berl. Akad. 1905, S. 406, und Burnside, der seine Methoden und Ergebnisse zusammenfaßte in dem Buch „Theory of groups of finite order" (2nd ed., Cambridge 1911).

§ 6.

Entwicklungssatz. Approximationssatz. Anwendungen.

Sind x, y zwei Gruppenzahlen, so betrachten wir das Produkt

$$u(s) = \int x(st^{-1})\, y(t)\, dt.$$

Da

$$|x^{(p)} y|^2 \leqq \int |x^{(p)}(t)|^2 dt \cdot \int |y(t)|^2 dt$$

gleichmäßig gegen 0 konvergiert, *gilt für die Funktion* $u(s)$ *die gleichmäßig konvergente Fourierentwicklung*

$$\begin{aligned} V \cdot u(s) &= n \operatorname{Sp} \left(\int E(st^{-1})\, y(t)\, dt \cdot \mathsf{A}^*(x)\right) + \dots \\ &= n \operatorname{Sp} (E(s)\, \mathsf{A}^*(y)\, \mathsf{A}^*(x)) + \dots \\ &= n \sum_{i,k} \alpha_{ik}(u)\, e_{ik}(s) + \dots . \end{aligned}$$

Die Summe braucht sich nur über die in $x(s)$ vorkommenden irreduziblen Darstellungen zu erstrecken. Das ist der *Entwicklungssatz.* In ihm ist die Vollständigkeitsrelation in der erweiterten Fassung

$$S(xy) = n \operatorname{Sp} (\mathsf{A}(x)\, \mathsf{A}(y)) + \dots$$

wieder enthalten.

Indem wir für y die Funktion setzen, welche oben mit $1_\nu(s)$ bezeichnet wurde, erhalten wir eine Folge von Funktionen $u_\nu(s)$, welche mit wachsendem ν gleichmäßig gegen $x(s)$ konvergieren. So gewinnen wir aus dem Entwicklungssatz den *Approximationssatz,* der besagt, daß *jede stetige Funktion* $x(s)$ *auf* $\mathfrak{G}$ *gleichmäßig approximiert werden kann durch eine endliche Summe von der Form*

$$\sum_{i,k} \beta_{ik}\, e_{ik}(s) + \dots,$$

in der nur die Komponenten solcher irreduzibler Darstellungen auftreten, für welche der zugehörige Fourierkoeffizient $\mathsf{A}(x)$ *von* x *nicht verschwindet.*

Sind x und y Klassenfunktionen, so ist auch $u = xy$ eine Klassenfunktion und erscheint hier *entwickelt in eine nach den Charakteristiken fortschreitende, gleichmäßig konvergente Fourierreihe:*

$$V \cdot u(s) = \alpha(u) \cdot \chi(s) + \dots .$$

Um aus diesem Entwicklungssatz den Approximationssatz herzuleiten, brauchen wir eine Folge von *Klassenfunktionen* $1_\nu^*(s)$, welche die analogen Eigenschaften besitzen wie die oben benutzten Funktionen $1_\nu(s)$. Man erhält sie am einfachsten, wenn man bildet

$$1_\nu^*(s) = \frac{1}{V} \int 1_\nu(t^{-1} s t)\, dt.$$

Durchläuft s das Gebiet $\mathfrak{U}_\nu$, t aber die ganze Gruppe, so durchläuft $t^{-1}st$ ein $\mathfrak{U}_\nu$ umfassendes Gebiet $\mathfrak{U}_\nu^*$, das mit unbegrenzt wachsendem ν so gut wie $\mathfrak{U}_\nu$ auf den Einheitspunkt $\circ$ zusammenschrumpft. So erhält man den Satz: *Jede stetige Klassenfunktion $x(s)$ kann durch eine endliche lineare Kombination derjenigen primitiven Charakteristiken $\chi(s)$ bis zu jedem beliebigen Annäherungsgrad approximiert werden, für welche*

$$\int x(s)\,\bar{\chi}(s)\,ds \neq 0$$

ist.

Die wichtigste Anwendung der Vollständigkeitsrelation aber liegt in den beiden Sätzen ausgesprochen:

I. *Erfüllen zwei Elemente s_0, t_0 der Gruppe für alle irreduziblen Darstellungen die Gleichung $E(s_0) = E(t_0)$, so fallen sie zusammen.*

II. *Ist für alle primitiven Charakteristiken $\chi(s_0) = \chi(t_0)$, so gehören die beiden Elemente s_0 und t_0 derselben Klasse an.*

I. ergibt sich bereits aus dem Resultat von § 3. Setzen wir nämlich

$$s_0 t_0^{-1} = a, \qquad s_0 = a\,t_0,$$

so gilt $E(a) = 1$. Also ist allgemein $E(s a^{-1}) = E(s)$ und darum

$$\int \bar{E}(s a^{-1})\,x(s)\,ds = \int \bar{E}(s)\,x(s a)\,ds = \int \bar{E}(s)\,x(s)\,ds.$$

Wäre nicht $x(sa) - x(s)$ identisch $= 0$, so sollte eine irreduzible Darstellung existieren, für welche

$$\int (x(sa) - x(s))\,\bar{E}(s)\,ds \neq 0$$

ist. Mithin ist $x(sa) = x(s)$ für jede stetige Funktion $x(s)$ auf der Gruppenmannigfaltigkeit, insbesondere $x(a) = x(\circ)$, also $a = \circ$.

Beim Beweise von II. muß man den Umweg über den Approximationssatz gehen. Ist $x(s)$ irgendeine stetige Klassenfunktion, die mit der Annäherung ε durch ein lineares Aggregat der Charakteristiken approximiert wurde, so folgt aus der Voraussetzung $\chi(s_0) = \chi(t_0)$:

$$|x(s_0) - x(t_0)| \leqq 2\varepsilon;$$

da ε beliebig klein angenommen werden kann, muß

$$x(s_0) = x(t_0) \tag{25}$$

sein. Grenzen wir um s_0 eine beliebig kleine Umgebung $\mathfrak{U}$ ab und bilden mit Hilfe einer stetigen Funktion $y(s)$, die in $\mathfrak{U}$ positiv, im Restgebiet $\mathfrak{G} - \mathfrak{U}$ null ist, die Klassenfunktion

$$x(s) = \int y(r^{-1} s r)\,dr,$$

so ist $x(s_0) \neq 0$. Wäre t_0 zu keinem der in $\mathfrak{U}$ gelegenen Elemente s konjugiert, so wäre im Widerspruch zu der Gleichung (25): $x(t_0) = 0$.

Daraus, daß t_0 konjugiert ist zu Elementen, die in beliebiger Nähe von s_0 liegen, folgt aber wegen der Geschlossenheit der Gruppe, daß es zu s_0 selber konjugiert ist.

Unsere Untersuchungen sind insbesondere von Bedeutung für die *halbeinfachen Gruppen.* Diese sind zwar nicht notwendig geschlossen, aber durch die „unitäre Beschränkung" ist mit jeder solchen Gruppe $\mathfrak{G}$ eine geschlossene einfach zusammenhängende Gruppe $\mathfrak{G}_u$ verbunden, die alle Darstellungen und Charakteristiken von $\mathfrak{G}$ liefert[6]). Bohrs Theorie der fastperiodischen Funktionen ist das erste Beispiel der Charakteristikentheorie einer wahrhaft offenen Gruppe, nämlich der einparametrigen Abelschen Gruppe der Schiebungen einer Geraden in sich. Unsere Methode bewährt sich, wie die oben zitierte Arbeit in den Math. Annalen lehrt, auch solchen weitergehenden Problemen gegenüber als die natürliche Begründungsweise. Wir hoffen, darauf in einer späteren Arbeit zurückkommen zu können.

---

[6]) Vgl. darüber W. I—III, woselbst die primitiven Charakteristiken der halbeinfachen Gruppen in explizit-algebraischer Form berechnet wurden.

(Eingegangen am 24. 7. 1926.)