Probleme der Grundlegung der Mathematik[1]).

Von

David Hilbert in Göttingen.

Für die mathematische Wissenschaft waren die letzten Jahrzehnte eine Periode höchster Blüte.

Ich erinnere daran, wie in der Arithmetik, insbesondere in der Theorie der algebraischen Zahlkörper, die schwierigsten Probleme gelöst wurden und die Vollendung dieses herrlichen Gedankengebäudes erreicht worden ist. Zugleich gelang die Entdeckung der lange gesuchten transzendenten Funktionen, die dem Zahlkörper zugehören, und durch die mannigfache bisher verborgene zahlentheoretische Wahrheiten ans Licht gelangten. Andererseits wurden die Begriffsbildungen der Idealtheorie weit über die Grenzen der Zahlentheorie hinaus auf Algebra und Funktionentheorie mit bestem Erfolge übertragen und dadurch ein großer Komplex mathematischen Wissens zu einem einheitlichen Gefüge gemacht.

Auch in der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen sind in dem verflossenen Zeitraum nicht geringe Fortschritte gemacht worden. Der Ausbildung des Prinzips der konformen Abbildung insbesondere verdanken wir die herrlichen Methoden zur Gewinnung der automorphen Funktionen und die Lösung des Problems der Uniformisierung. Die so schwierigen Beweise der Existenzsätze haben durch Anwendung der Methoden der Variationsrechnung den höchsten Grad von Einfachheit und Durchsichtigkeit erreicht.

Und welche Fülle der Gesichte liefert die Geometrie: Allein die Topologie ist so sehr durch neue Fragestellungen und Behandlungsmethoden bereichert worden, daß man darin die Entstehung eines neuen selbständigen Wissenszweiges sehen muß. Und die alten der Geometrie nahestehenden Disziplinen, die Gruppen- und Invariantentheorie, sind zu einer ungeahnten Erweiterung und Vertiefung gelangt.

---

[1]) Vortrag, gehalten auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß in Bologna am 3. Sept. 1928.

Die Physik endlich ließ vor unseren Augen mathematische Gedankengebäude erstehen, deren Hallen von imponierender Großartigkeit sind. Überhaupt gedenken wir auch der Anwendungen: es sind nicht die schlechtesten Früchte, die die mathematische Forschung auf dem Felde der Anwendungen erntet, sei es, daß die Anwendungen benachbarten Wissensgebieten oder praktischen Bedürfnissen entsprungen sind. Und der Bezirk, in den die Mathematik eindringt, dehnt sich beständig.

Wegen dieser so erfreulichen Sachlage erwächst dem Mathematiker die besondere Pflicht, die Mathematik in ihren Fundamenten zu sichern.

Wie ist doch die allgemein verbreitete Meinung über Mathematik und mathematisches Denken? Sie lautet: Die mathematischen Wahrheiten sind absolut sicher, denn sie werden auf Grund von Definitionen durch untrügliche Schlüsse bewiesen. Sie müssen daher auch überall in der Wirklichkeit stimmen. Dieser populären Meinung zufolge soll die Mathematik zum Vorbild für alle Wissenschaft überhaupt dienen. Wir wollen nun sehen, ob es so mit der Mathematik bestellt ist. Wie war der Stand der Grundlagenfrage im drittletzten Jahrzehnt? Die großen Klassiker und Schöpfer der Grundlagenforschung waren Cantor, Frege und Dedekind; sie hatten in Zermelo einen kongenialen Interpreten gefunden. Zermelo hatte die Annahmen, die zum axiomatischen Aufbau der Mengenlehre nötig sind, aufgestellt und damit die von Cantor und Dedekind nur unbestimmt und teilweise unbewußt angewandten Mittel präzisiert. Diese Zermeloschen Axiome sind zudem alle von der Art, daß ein ernster Zweifel an ihrer Richtigkeit nicht aufkommen konnte. Das Vorgehen Zermelos war durchaus berechtigt und entspricht der axiomatischen Methode. Doch die Zermeloschen Bahnen wurden unter dem Druck maßgebender Kreise verlassen. Alte Einwürfe Kroneckers gegen Cantor und Dedekind, die wir längst überwunden glaubten und die Kronecker selbst in seinen Arbeiten nicht befolgt hatte, wurden vorgesucht. Eine unglückliche Auffassung Poincarés, betreffend den Schluß von n auf $n+1$, die bereits zwei Jahrzehnte früher von Dedekind durch einen präzisen Beweis widerlegt worden war, verrammelte den Weg zum Vorwärtsschreiten. Ein neues Verbot, das Verbot der imprädikativen Aussagen, wurde von Poincaré erlassen und aufrechterhalten, obwohl Zermelo sofort ein schlagendes Beispiel gegen dieses Verbot angab und dieses Verbot außerdem gegen die Resultate Dedekinds verstieß. Leider auch die sonst so vortreffliche Logik Russells leistete in ihrer Anwendung auf Mathematik der Irrlehre Vorschub. So kam es, daß unsere geliebte Wissenschaft — was die Frage nach ihrem innersten arithmetischen Wesen und Grunde betrifft — zwei Jahrzehnte hindurch wie von einem bösen Traum heimgesucht wurde.

Ich begrüße es als ein Erwachen, als ein leuchtendes Morgenrot, wenn in der letzten Zeit eine Reihe jüngerer Mathematiker wieder auf Zermelos Gedanken zurückgehen; diese Mathematiker haben die Zermeloschen Axiome vervollständigt und dazu eine Reihe sehr wichtiger tiefliegender Fragen erfolgreich behandelt.

Freilich eine endgültige Lösung der Grundlagenprobleme ist durch dieses axiomatische Verfahren niemals möglich. Denn die von Zermelo zugrunde gelegten Axiome enthalten echte inhaltliche Annahmen, und diese zu beweisen ist, wie ich glaube, gerade die Hauptaufgabe der Grundlagenforschung, — war doch schon damals die Widerspruchsfreiheit der arithmetischen Axiome zu beweisen eine brennende Frage geworden. Wenn wir aber inhaltliche Axiome als Ausgangspunkte und Grundlagen für die Beweise benutzen, so verliert die Mathematik damit den Charakter des absolut Sicheren. Mit der Annahme von Voraussetzungen kommen wir auf das Gebiet des Problematischen, — beruhen doch die Meinungsverschiedenheiten der Menschen meist darauf, daß von verschiedenen Voraussetzungen ausgegangen wird. In einer Reihe von Vorträgen im Laufe der letzten Jahre habe ich daher einen neuen Weg zur Behandlung des Grundlagenproblems betreten. Mit dieser Neubegründung der Mathematik, die man füglich als eine Beweistheorie bezeichnen kann, glaube ich die Grundlagenfragen in der Mathematik als solche endgültig aus der Welt zu schaffen, indem ich jede mathematische Aussage zu einer konkret aufweisbaren und streng ableitbaren Formel mache und dadurch den ganzen Fragenkomplex in die Domäne der reinen Mathematik versetze.

Freilich bedarf es zur völligen Durchführung dieser Aufgabe der hingebenden Mitarbeit der jüngeren Mathematikergeneration.

In diesem Sinne möchte ich heute einige nähere Ausführungen machen. Die wichtigsten Probleme konzentrieren sich sämtlich auf das von mir aufgestellte sogenannte ε-Axiom; dasselbe lautet

$$A(a) \to A(\varepsilon A).$$

Bei der Verwendung des Axioms hat man vor allem die Gattung von Variablen zu beachten, auf die ε zu beziehen ist. Bei den Zahlen dient dasselbe zur Formulierung der üblichen Schlüsse mit „irgendein“: Man versteht unter $\varepsilon\mathfrak{A}$ irgendeine Zahl, für die die Aussage $\mathfrak{A}$ sicher zutrifft, wenn es überhaupt eine Zahl gibt, für die $\mathfrak{A}$ zutrifft.

Ich möchte nun einige Probleme nennen.

Durch die Arbeiten von Ackermann und v. Neumann ist der Beweis für die Widerspruchsfreiheit des ε-Axioms für die Zahlen geführt; damit sind folgende drei Probleme erledigt:

1. Das Tertium non datur für die Zahlen, d. h. wenn eine Aussage nicht für alle ganzen Zahlen gilt, so gibt es eine Zahl, für die sie nicht gilt.

Beispielsweise: nach Kronecker war es unzulässig, eine ganze rationale Funktion einer Variablen x mit ganzen rationalen Koeffizienten als irreduzibel zu definieren, wenn es keine Zerlegung derselben als Produkt von zwei ebensolchen Funktionen gibt. Ich beweise durch die Beweistheorie, daß im Gegenteil diese Definition eine völlig strenge Definition in rein mathematischem Sinne ist, und daher war die Behauptung Kroneckers nicht bloß logisch unzutreffend, sondern in rein arithmetischem Sinne unrichtig — in gleichem Sinne unrichtig wie irgendein falscher arithmetischer Satz oder eine falsche zahlentheoretische Formel.

2. Die Auflösung einer Behauptung über Existenz einer Zahl nach dieser Zahl: „die kleinste Zahl, welche“.

3. Der Schluß von n auf $n+1$, wenn man noch die Formel

$$(\varepsilon A = b') \rightarrow \bar{A}\, b$$

als Axiom hinzunimmt.

Wie Sie bemerken, ist ein wesentliches Hilfsmittel für meine Beweistheorie die Begriffsschrift; wir verdanken dem Klassiker dieser Begriffsschrift, Peano, die sorgfältigste Pflege und weitgehendste Ausbildung derselben. Die Form, in der ich die Begriffsschrift brauche, ist wesentlich diejenige, die Russell zuerst eingeführt hat.

Bisher noch nicht erledigt sind die folgenden Probleme:

Problem I.

Der Nachweis der Widerspruchsfreiheit des ε-Axioms für die Funktionsvariable f. Der Ansatz eines Beweises liegt vor. Diesen hat Ackermann schon so weit durchgeführt, daß die verbleibende Aufgabe nur noch in dem Beweise eines rein arithmetischen elementaren Endlichkeitssatzes besteht.

Mit der Lösung dieses Problems I ist bereits ein sehr großer Komplex von grundsätzlichen Fragen behoben; nämlich dieser Nachweis der Widerspruchsfreiheit liefert:

1. das Tertium non datur für Funktionen von ganzen Zahlen und damit auch für die reellen Zahlen;

2. die Definitionsprozesse, die von Poincaré als imprädikativ angefochten worden sind, die Russell und Whitehead nur mit Hilfe des sehr problematischen Reduzierbarkeitsaxioms begründen konnten, und mit Bezug auf die Weyl einmal von einem Circulus vitiosus in der Analysis gesprochen hat;

3. das Auswahlaxiom in der schwächeren Form.

Zu 3. sei folgendes bemerkt. Es werden in den neueren Betrachtungen über das Auswahlaxiom vielfach Unterscheidungen gemacht zwischen schwächeren und schärferen Formen des Auswahlprinzips. Diese betreffen zumeist die Mächtigkeit der Mengen von Mengen und deren Repräsentantenmenge, insbesondere den Unterschied des Abzählbaren und Überzählbaren.

Durch die Beweistheorie werden wir veranlaßt, vor allem eine anderweitige Unterscheidung als wesentlich anzusehen, nämlich, ob verlangt wird, daß die Auswahl des Repräsentanten für eine Menge, unabhängig von der Art, wie die Menge definiert ist, eindeutig durch den Elementenbestand der Menge bestimmt sein soll, oder ob dies nicht verlangt wird.

Beispielsweise sei eine einparametrige Mengenschar $M(t)$ vorgelegt. Für jeden Wert des reellen Parameters t bezeichne $M(t)$ eine bestimmte Menge von reellen Zahlen, die mindestens ein Element enthält.

Das Auswahlprinzip in der schwächeren Form verlangt dann, daß es eine eindeutige Funktion $f(t)$ gibt von der Art, daß für jeden Wert von t der Wert $f(t)$ zu $M(t)$ gehört. In der stärkeren Form verlangt das Auswahlprinzip überdies die Existenz einer solchen Funktion $f(t)$, daß

$$f(t_1) = f(t_2)$$

ist, falls die Mengen $M(t_1)$ und $M(t_2)$ ihrem Elementenbestande nach übereinstimmen.

Mit Hilfe des ε-Axioms für die Funktionenvariable f erhalten wir das Auswahlprinzip für Mengen von reellen Zahlen in der schwächeren Form.

Durch die Lösung unseres Problems I werden vor allem folgende Theorien beherrscht:

1. Die Theorie der reellen Zahlen. (Dedekindscher Schnitt, obere Grenze einer beschränkten Menge reeller Zahlen.)

2. Die Peanosche Begründung der Zahlenlehre. — In dieser Theorie braucht man kein Auswahlprinzip, wohl aber die imprädikative Definition, z. B. die Definition für $a \leqq b$: nämlich, jede Menge, die a enthält und mit n zugleich $n+1$, enthält auch b. Man hat früher das Problematische bei den mengentheoretischen Begründungen der Zahlentheorie immer nur in der Voraussetzung eines unendlichen Individuenbereichs gesehen. Diese Voraussetzung kann bereits auf Grund des Bisherigen als widerspruchsfrei erkannt werden. Die größere Schwierigkeit liegt in dem Nachweis der Widerspruchsfreiheit der imprädikativen Definition.

Mit der Lösung des Problems I erhält auch das geniale Verfahren Dedekinds in dessen Abhandlung „Was sind, was sollen die Zahlen?“ die Rechtfertigung.

3. Die Cantorsche Theorie der Wohlordnungen der Zahlenreihe. Durch diese wird die Lehre von den Zahlen der zweiten Zahlenklasse, welche sich axiomatisch ganz analog zu der Zahlentheorie aufbauen läßt, auf die Theorie der Funktionen von Zahlenvariablen zurückgeführt.

Problem II.

Für die weitere Ausgestaltung der Analysis, insbesondere für die Punktmengen-Theorie (mengentheoretische Topologie) sowie auch für die Theorie der zweiten und der höheren Zahlklassen, hat man die Widerspruchsfreiheit für das ε-Axiom, bezogen auf höhere Variablengattungen, zunächst einmal auf die der Funktionen reeller Variablen nötig.

Ferner gebraucht man zum Beweis des Wohlordnungssatzes und auch für manche Beweise in der Theorie der Meßbarkeit (Beweise für Nichtmeßbarkeit) das Auswahlaxiom in der stärkeren Form, welches in der Beweistheorie durch die Formel

$$((f)(A(f) \rightleftarrows B(f))) \rightarrow \varepsilon A = \varepsilon B$$

ausgedrückt wird (Axiom der Auswahlgleichheit); εA und εB sind hier Funktionen der Zahlenvariablen und die Gleichheit bedeutet Übereinstimmung für alle Argumentwerte. Für die Hinzunahme dieser Formel ist wiederum der Beweis der Widerspruchsfreiheit nötig.

Problem III.

Die Vollständigkeit des Axiomensystems für die Zahlentheorie sowie für die Analysis wird zwar allgemein behauptet; aber die übliche Überlegung, mit der man zeigt, daß je zwei Realisierungen des Axiomensystems der Zahlentheorie bzw. der Analysis isomorph sein müssen, genügt nicht den Anforderungen finiter Strenge.

Es kommt darauf an, zunächst für die Zahlentheorie, deren Bereich sich präzise abgrenzen läßt, den üblichen Beweis der Isomorphie finit umzugestalten, so daß dadurch folgendes gezeigt wird:

Wenn für einen Satz $\mathfrak{S}$ die Widerspruchsfreiheit mit den Axiomen der Zahlentheorie nachgewiesen werden kann, so kann nicht auch für $\overline{\mathfrak{S}}$ (das Gegenteil von $\mathfrak{S}$) die Widerspruchsfreiheit mit jenen Axiomen nachgewiesen werden.

Und damit in engstem Zusammenhang auch: wenn eine Aussage widerspruchsfrei ist, so ist sie auch beweisbar.

In höheren Gebieten wäre der Fall der Widerspruchsfreiheit von $\mathfrak{S}$ sowie der von $\overline{\mathfrak{S}}$ denkbar: alsdann ist die Annahme einer der beiden Aussagen $\mathfrak{S}$, $\overline{\mathfrak{S}}$ als Axiom durch systematische Vorzüge (Prinzip der Permanenz der Gesetze, weitere Aufbaumöglichkeiten usw.) zu rechtfertigen.

Gegen meine Beweistheorie sind Einwände erhoben worden; diese beruhen wesentlich auf einer Verkennung meiner Beweistheorie. Ich gestatte mir daher, hier noch einige Erläuterungen zu machen.

Wenn eine Aussage oder ein Beweis vorliegt, so muß er sich in allen Teilen überblicken lassen. Die Aufweisung, das Wiedererkennen, die Unterscheidung und Aufeinanderfolge seiner einzelnen Teile ist unmittelbar anschaulich für uns da. Ohne diese Einstellung ist überhaupt ein Denken oder gar eine wissenschaftliche Tätigkeit unmöglich. Bei der Untersuchung der Widerspruchsfreiheit handelt es sich darum, ob ein Beweis vorgelegt werden kann, der zu einem Widerspruch führt. Wenn mir ein solcher Beweis nicht vorgelegt werden kann, um so besser, — da mir dann ein Eingehen erspart bleibt. Wenn mir aber der Beweis vorliegt, so darf ich gewisse einzelne Teile herausgreifen und für sich ins Auge fassen, also auch die besonderen Zahlzeichen, welche in ihnen vorkommen und also hergestellt und aufgebaut vorliegen, wieder abbauen. Damit wird das Schließen von n auf $n+1$ keineswegs schon benutzt — vielmehr ist es, wie wir schon von Dedekind her wissen und wie es meine Beweistheorie von neuem bestätigt, von hier noch ein weiter Weg und eine wesentlich andere Aufgabe, die Gültigkeit dieses Schlusses von n auf $n+1$ einzusehen.

Auf der Grundlage, die ich eben diskutiert habe, muß jedesmal der Beweis für die Widerspruchsfreiheit der Hinzunahme einer Aussage geführt werden. Gelingt es, diesen Beweis zu führen, so bedeutet dies für die Aussage, daß, wenn eine numerische und finit deutungsfähige Aussage aus ihr abgeleitet wird, diese tatsächlich jedesmal richtig ist. Der Beweis für die Widerspruchsfreiheit lehrt zugleich in jedem Falle eines zu einem falschen Resultat führenden Beweises, die Stelle zu finden, wo der Fehler liegt.

Es liegt auf der Hand, daß auch rein logische Probleme in den Bereich der eben von mir skizzierten Beweistheorie fallen. Als Beispiel diene folgendes Problem.

Problem IV.

Die Behauptung der Vollständigkeit des Axiomensystems der Zahlentheorie läßt sich auch so aussprechen: Wird eine der Zahlentheorie angehörige, aber nicht beweisbare Formel zu den Axiomen der Zahlentheorie hinzugenommen, so kann aus dem erweiterten Axiomensystem ein Widerspruch abgeleitet werden.

Da wir es hier in der Beweistheorie stets mit formalisierten Beweisen zu tun haben, so ist in den ausgesprochenen Behauptungen über die Vollständigkeit der Zahlentheorie zugleich die Behauptung eingeschlossen, daß die formalisierten Regeln des logischen Schließens jedenfalls im Gebiete der Zahlentheorie ausreichend sind.

Die Frage nach der Vollständigkeit des Systems der logischen Regeln, in allgemeiner Form gestellt, bildet ein Problem der theoretischen Logik. Zu dieser allgemeineren Problemstellung gelangen wir von der Zahlentheorie aus, wenn wir aus dem Bereich der betrachteten Formeln, und insbesondere auch der Axiome, alle diejenigen ausschalten, in denen das Zeichen „$+1$“ vorkommt, dafür aber das Auftreten von Prädikaten-Variablen zulassen. Dies bedeutet sachlich, daß wir von dem Ordnungscharakter des Systems der Zahlen absehen und dieses nur als irgendein System von Dingen behandeln, auf welches Prädikate mit einem oder mehreren Subjekten bezogen werden können. Unter diesen Prädikaten wird nur die Gleichheit (Identität) als bestimmte Beziehung durch die üblichen Gleichheitsaxiome

$$a = a$$

$$a = b \rightarrow (A(a) \rightarrow A(b))$$

festgelegt, während die übrigen Prädikate frei wählbar bleiben.

In diesem Bereiche von Formeln sind diejenigen ausgezeichnet, die durch keine bestimmte Festlegung der wählbaren Prädikate widerlegbar sind. Diese stellen die allgemein gültigen logischen Sätze dar.

Es entsteht nun die Frage, ob alle diese Formeln aus den Regeln des logischen Schließens unter Hinzunahme der genannten Gleichheitsaxiome beweisbar sind, mit anderen Worten, ob das System der üblichen logischen Regeln vollständig ist.

Bisher haben wir durch Probieren die Überzeugung gewonnen, daß diese Regeln ausreichen. Ein wirklicher Nachweis dafür ist nur vorhanden im Bereich der reinen Aussagenlogik. Im Bereich der Logik der Prädikate mit einem Subjekt kann aus der Methode der Lösung des Entscheidungsproblems (Schrödersches Eliminationsproblem) ebenfalls ein Nachweis für die Vollständigkeit der Regeln gewonnen werden, wie dies in Anknüpfung an die Ansätze von Schröder zuerst von Löwenheim und später in abschließender Form von Behmann gezeigt worden ist.

Mein heutiger Vortrag zeigt, wie viele Probleme noch der Lösung harren. Aber im allgemeinen prinzipiellen Sinne ist auch nicht mehr die leiseste Spur einer Unklarheit möglich: jede prinzipielle Frage läßt sich auf Grund der von mir skizzierten Beweistheorie in einer Weise beantworten, die mathematisch präzise und eindeutig ist. Die betreffenden Sätze lassen sich zum Teil schon jetzt mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse auf absolut sichere und rein mathematische Weise beweisen und sind daher dem Streite entzogen worden. Wer mich widerlegen will, muß, wie es in der Mathematik bisher stets üblich war und bleiben wird, mir genau die Stelle zeigen, wo der vermeintliche Fehler von mir liegt. Eine Einwendung, die das nicht tut, lehne ich a limine ab.

Ich glaube, daß meine Beweistheorie uns auch noch einen allgemeineren Dienst leistet. Denn wie wäre es mit der Wahrheit unseres Wissens überhaupt und wie mit der Existenz und dem Fortschritt der Wissenschaft bestellt, wenn es nicht einmal in der Mathematik sichere Wahrheit gäbe? Tatsächlich kommt heutzutage gar nicht selten selbst in Fachschriften und öffentlichen Vorträgen Zweifelsucht und Kleinmut gegenüber der Wissenschaft zum Ausdruck; es ist dies eine gewisse Art Okkultismus, den ich für schädlich halte. Die Beweistheorie macht eine solche Einstellung unmöglich und verschafft uns das Hochgefühl der Überzeugung, daß wenigstens dem mathematischen Verstande keine Schranken gezogen sind und daß er sogar die Gesetze des eigenen Denkens selbst aufzuspüren vermag. Cantor hat gesagt: das Wesen der Mathematik besteht in ihrer Freiheit, und ich möchte für die Zweifelsüchtigen und Kleinmütigen hinzufügen: in der Mathematik gibt es kein Ignorabimus, wir können vielmehr sinnvolle Fragen stets beantworten, und es bestätigt sich, was vielleicht schon Aristoteles vorausfühlte, daß unser Verstand keinerlei geheimnisvolle Künste treibt, vielmehr nur nach ganz bestimmten aufstellbaren Regeln verfährt, — zugleich die Gewähr für die absolute Objektivität seines Urteilens.

(Eingegangen am 25. 3. 1929.)