

Werk

Titel: Mathematische Annalen

Ort: Berlin

Jahr: 1930

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN235181684_0102

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0102

LOG Id: LOG_0005

LOG Titel: Unstarre geschlossene Flächen

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Unstarre geschlossene Flächen.

Von

Stefan Cohn-Vossen in Göttingen.

Eine Fläche heiße starr, wenn sie als Ganzes keine Infinitesimalverbiegungen außer infinitesimalen Bewegungen zuläßt; sonst unstarr. Die Eiflächen sind bekanntlich starr¹⁾. Aber auch unter den geschlossenen Flächen vom Geschlecht Null, deren Gaußsche Krümmung nicht überall positiv ist, war bisher keine unstarre bekannt (von einem trivialen Fall abgesehen)²⁾. Im folgenden sollen nun solche unstarren Flächen angegeben werden, und zwar Rotationsflächen. Es zeigt sich, daß eine Kugel unstarr wird, wenn man längs eines Großkreises eine beliebig schmale und beliebig flache Rinne anbringt. Die Breite und Tiefe der Rinne sind aber nicht willkürlich, sondern müssen einem gewissen Wertevorrat entnommen sein, der eben unbegrenzt kleine Werte enthält.

Die Spezialisierung auf Rotationsflächen hat einen formalen Vorteil³⁾: Für die Meridiane und Breitenkreise als Parameternetz reduziert sich das Starrheitsproblem durch Trennung der Veränderlichen auf *gewöhnliche* Differentialgleichungen, die den Verlauf der Verbiegung längs eines Meridians bestimmen (§ 1). Die Forderung, daß die Verbiegung auch in den Polen des Parameternetzes noch regulär sei (§ 2), führt — hnlich wie in der Theorie der Kugelfunktionen — auf ein Sturm-Liouvillesches Eigenwertproblem, aber in einem anderen als dem üblichen Sinn. Die für unser Problem brauchbaren Eigenwerte sind nämlich von vornherein auf einen festen abzählbaren Vorrat beschränkt; der Meridian unserer Rotationsfläche muß so gewählt werden, daß das Sturm-Liouvillesche Problem mindestens

¹⁾ Vgl. W. Blaschke, Math. Zeitschr. 9 (1921) und Vorlesungen über Differentialgeometrie 1 (1921), Kap. V, § 77.

²⁾ Jede Fläche, die ein ebenes Stück e enthält, ist unstarr; Biegungsvektor ist jeder Vektor, der für die Flächenpunkte außerhalb e verschwindet und für die von e senkrecht auf e steht. Die im folgenden betrachteten Infinitesimalverbiegungen verschwinden nie auf einem ganzen Flächenstück.

³⁾ Vgl. Liebmann, Münchn. Berichte 1920.

einen Eigenwert aus jenem Vorrat besitzt; dann und nur dann ist die Fläche unstarr⁴⁾).

Eine einfache Abschätzung mittels Sturmscher Sätze zeigt nun, daß zwar eine konvexe Kurve als Meridian nicht brauchbar sein kann (im Einklang mit der allgemeinen Theorie), daß man aber aus jeder konvexen Kurve durch Anbringen einer beliebig schwachen Ausbuchtung einen brauchbaren Meridian machen kann; je schwächer die Ausbuchtung, desto höher der zugehörige Eigenwert (§ 3).

In §§ 4, 5 werden unstarre Rotationsflächen von *Toruscharakter* aufgestellt. Das Parameternetz hat in diesem Falle keine Singularität. Dafür wird das Problem jetzt an den Breitenkreisen singulär, wo der Torus eine zur Achse senkrechte Tangentialebene hat. Beim Überschreiten solcher Stellen geht nämlich das Biegeproblem vom elliptischen zum hyperbolischen Charakter über, und es zeigt sich, daß, grob ausgedrückt, nur „die Hälfte“ der im hyperbolischen Teil regulären Integrale heil über die Grenze kommt. Auf den übrigen parabolischen Breitenkreisen der Fläche (Wendepunkte der Meridiankurven) tritt diese Erscheinung nicht auf (§ 4).

Wir beschränken uns auf solche Torusflächen, die eine Symmetrieebene senkrecht zur Achse und nur zwei zur Achse senkrechte Tangentialebenen haben. Durch die Berührungspunkte mit diesen beiden Ebenen wird der Meridian in zwei Halbmeridiane zerlegt. Die Bestimmung einer Infinitesimalverbiegung, die auf einem solchen Halbmeridian bis in die Endpunkte hinein stetig ist, führt wieder auf ein Sturm-Liouvillesches Problem der oben beschriebenen Art.

Für beide von uns betrachteten Flächentypen ergibt sich (§§ 3, 5): Jede Fläche dieser Art ist Häufungsfläche einer Folge stetig gekrümmter *unstarrer* Flächen⁵⁾. Die Punkte und auch noch die Tangentialebenen der Folge konvergieren gleichmäßig, die Krümmungen bleiben absolut beschränkt.

Eine *unstarre* Fläche braucht nicht *verbiegbar* zu sein. Das Problem der *Verbiegungen höherer Ordnung*⁶⁾ wird in § 6 erörtert. Die unstarren Flächen der von uns betrachteten Art gestatten im allgemeinen auch eine Verbiegung zweiter Ordnung.

In § 7 werden zwei unstarre Flächen angegeben, die sich zu Modellzwecken eignen. Eine von ihnen besitzt als Meridian einen Streckenzug, besteht also nur aus Kegeln und Kegelstümpfen. Verbiegungen solcher geknickter Flächen sind meines Wissens noch nicht behandelt worden.

⁴⁾ Auch Liebmann, loc. cit. ³⁾, stößt bei verwandten Fragen auf Eigenwertprobleme, aber im gewöhnlichen Sinn. Der Meridian ist vorgegeben.

⁵⁾ Bei Deutung der Meridiankurven als Punkte eines Funktionenraums: Die Punkte, die unstarren Flächen entsprechen, liegen überall dicht.

⁶⁾ Vgl. Liebmann, loc. cit. ³⁾ und Darboux, *Théorie des surfaces* 4, S. 2 bis 5.

§ 1.

Ansatz des Problems im Kleinen.

$\mathfrak{r}(u, v)$ sei der Ortsvektor der gesuchten unstarren Rotationsfläche, $\mathfrak{z}(u, v)$ der zugehörige Verschiebungsvektor (Bezeichnung wie bei Blaschke loc. cit. ¹⁾).

Wir zerlegen \mathfrak{r} und \mathfrak{z} nicht nach einem festen Koordinatensystem in Komponenten, sondern nach einem beweglichen Dreikant, das dem Wesen der Rotationsflächen besser gerecht wird.

e sei der Einheitsvektor parallel zur Drehachse, $\alpha = \alpha(v)$ ein auf e senkrechter Einheitsvektor, der bei veränderlichem v einen Kreis mit e als Achse und v als Bogenlänge beschreibt, d. h. der mit e zusammen die Meridianebene der Fläche aufspannt. Also $\alpha^2 = 1$, $e\alpha = 0$, $\alpha(v + 2\pi) = \alpha(v)$. Dann gilt für $\alpha' = \frac{d\alpha}{dv}$: $\alpha\alpha' = e\alpha' = 0$, $\alpha'^2 = 1$, $\alpha'' = -\alpha$. e, α, α' bilden unser Dreikant. Die Fläche $\mathfrak{r}(u, v)$ erhält dann die Gestalt:

$$\mathfrak{r}(u, v) = ue + r(u)\alpha(v),$$

$u = \text{konst.}$ sind also die Breitenkreise, $v = \text{konst.}$ die Meridiane. Die Gestalt der Meridiane wird durch die Funktion $r(u)$ bestimmt; u ist nämlich der Abstand eines Flächenpunkts von einer festen Ebene senkrecht zur Achse, $r(u)$ ist der Abstand dieses Punkts von der Achse. Wir beschränken uns auf stetig gekrümmte Meridiane; dann sind r', r'' stetig außer in den Punkten, wo der Meridian eine zur Achse senkrechte Tangente hat ($\frac{1}{r'(u)} = 0$). Diese Punkte schließen wir vorläufig aus und beschränken uns auf eine Zone $u_0 \leq u \leq u_1$ der Fläche, wo r, r', r'' stetig sind.

Der Verschiebungsvektor $\mathfrak{z}(u, v)$ habe nach e, α, α' die Komponenten $\alpha(u, v)$; $\beta(u, v)$; $\gamma(u, v)$; also $\mathfrak{z} = \alpha e + \beta\alpha + \gamma\alpha'$. $\mathfrak{z}(u, v)$ wird bekanntlich durch die Gleichungen bestimmt:

$$(1) \quad \mathfrak{z}_u \delta_u = 0, \quad \mathfrak{z}_v \delta_v = 0, \quad \mathfrak{z}_u \delta_v + \mathfrak{z}_v \delta_u = 0.$$

Es ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}_u &= e + r'\alpha, & \mathfrak{z}_v &= r\alpha', \\ \delta_u &= \alpha_u e + \beta_u \alpha + \gamma_u \alpha', & \delta_v &= \alpha_v e + (\beta_v - \gamma)\alpha + (\beta + \gamma_v)\alpha'. \end{aligned}$$

Das System (1) geht also über in

$$(2) \quad \begin{aligned} \alpha_u + r'(u)\beta_u &= 0, \\ \beta + \gamma_v &= 0, \\ \alpha_v + r'(u)(\beta_v - \gamma) + r(u)\gamma_u &= 0. \end{aligned}$$

Dies ist für α, β, γ ein lineares System, dessen Koeffizienten von v unabhängig sind. α, β, γ müssen von v periodisch mit der Periode 2π abhängen. Aus beiden Gründen setzen wir α, β, γ als Fourier-Reihen in v an:

$$\alpha(u, v) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikv} \varphi_k(u); \quad \beta(u, v) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikv} \psi_k(u); \quad \gamma(u, v) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikv} \chi_k(u).$$

$\varphi_k, \psi_k, \chi_k$ sind komplexwertige Funktionen von u , die, damit α, β, γ reell werden, die Bedingung zu erfüllen haben:

$$\varphi_{-k} = \bar{\varphi}_k, \quad \psi_{-k} = \bar{\psi}_k, \quad \chi_{-k} = \bar{\chi}_k \quad (-\infty < k < +\infty).$$

Zunächst fragen wir nach Fourier-Polynomen α, β, γ , die (2) lösen. Die linken Seiten von (2) werden Fourier-Polynome vom selben Grad wie α, β, γ . Sämtliche Koeffizienten müssen verschwinden. Dies gibt für $\varphi_k, \psi_k, \chi_k$ das nur noch von u und dem ganzzahligen Parameter k abhängende System:

$$(3) \quad \begin{aligned} a) \quad & \varphi_k'(u) + r'(u) \psi_k'(u) = 0, \\ b) \quad & ik \chi_k(u) + \psi_k(u) = 0, \\ c) \quad & ik \varphi_k(u) + r'(u) [ik \psi_k(u) - \chi_k(u)] + r_1'(u) \chi_k'(u) = 0. \end{aligned}$$

Wir differenzieren c), eliminieren φ_k, ψ_k aus a), b) und erhalten dadurch:

$$(4) \quad \boxed{r \chi_k'' + (k^2 - 1) r'' \chi_k = 0.}$$

Jedes nicht identisch verschwindende Integral $\chi_k^{(u)}$ von (4) für $k \geq 0$ liefert mittels (3) b), c) einen reellen nicht identisch verschwindenden Verschiebungsvektor⁷⁾

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}(u, v) &= \mathfrak{z}_k(u, v) \\ &= e^{ikv} (\varphi_k(u) e + \psi_k(u) a + \chi_k(u) a') + e^{-ikv} (\bar{\varphi}_k e + \bar{\psi}_k a + \bar{\chi}_k a'). \end{aligned}$$

Wegen der Linearität des Problems ist jede Summe $a_0 \delta_0 + a_1 \delta_1 + \dots + a_n \delta_n$ mit konstanten a_0, \dots, a_n wieder ein Verschiebungsvektor.

Zunächst berechnen wir \mathfrak{z}_0 . Aus (3) a) b) folgt für $k=0$: $\psi_0 = 0$; $\varphi_0 = c_0 = \text{konst.}$; also nach (3) c):

$$\begin{aligned} r \chi_0' - r' \chi_0 &= 0; \quad \chi_0 = C_0 r \quad (C_0 = \text{konst.}), \\ \mathfrak{z}_0 &= c_0 e + C_0 r a'. \end{aligned}$$

\mathfrak{z}_0 bedeutet ersichtlich eine infinitesimale Schraubung von beliebiger Ganghöhe $\frac{c_0}{C_0}$ um die Flächenachse (bzw. im Grenzfall $C_0 = 0$ eine Translation längs der Achse).

⁷⁾ Die oben aufgestellte Realitätsforderung $\varphi_{-k} = \bar{\varphi}_k$ usw. wird hier benutzt. Sie erfüllt sich von selbst, denn (3) geht in sich über, wenn man φ usw. durch $\bar{\varphi}$ usw. und k durch $-k$ ersetzt.

Im Falle $k = 1$ erhalten wir ebenfalls eine infinitesimale Bewegung. \mathfrak{z}_1 durchläuft nämlich, wie der Leser leicht bestätigen kann, ein Stück einer durch e gehenden Ebene; das bedeutet eine Schraubung bzw. Translation senkrecht zu dieser Ebene⁸⁾. Daraus folgt umgekehrt, daß sich jede infinitesimale Bewegung als Linearform $a_0 \mathfrak{z}_0 + a_1 \mathfrak{z}_1$ schreiben läßt. Da \mathfrak{z}_l und \mathfrak{z}_k für $l \neq k$ linear unabhängig sind, kann \mathfrak{z}_k für $k \geq 2$ keine infinitesimale Bewegung bedeuten.

Jedes nicht identisch verschwindende Integral von (4) für irgendein ganzzahliges $k \geq 2$ liefert eine nichttriviale Infinitesimalverbiegung der betrachteten Zone unserer Fläche.

§ 2.

Die Pole der Rotationsfläche.

Wir betrachten einen „Pol“ der Rotationsfläche, d. h. einen ihrer Schnittpunkte mit der Achse. Die Fläche ist dort dann und nur dann stetig gekrümmt, wenn der Meridian dort auf der Achse senkrecht steht und stetig gekrümmt ist. Wir transformieren (3), (4) auf r als unabhängige Veränderliche, wobei wir $\varphi_k(r)$ usw. statt $\varphi_k[u(r)]$ usw. schreiben. Dann geht (3) über in

$$(5) \quad \begin{aligned} a) \quad & \dot{u}(r) \dot{\varphi}_k(r) + \dot{\psi}_k(r) = 0 \\ b) \quad & ik \chi_k(r) + \psi_k(r) = 0 \\ c) \quad & ik \dot{u}(r) \varphi_k(r) + ik \psi_k(r) - \chi_k(r) + r \dot{\chi}_k(r) = 0 \end{aligned}$$

und aus (4) wird nach einfacher Zwischenrechnung

$$(6) \quad r \dot{u}(r) \ddot{\chi}_k(r) - r \ddot{u}(r) \dot{\chi}_k(r) - (k^2 - 1) \ddot{u}(r) \chi_k(r) = 0.$$

Wir brauchen ein für $|r| \leq r_0$ reguläres Lösungssystem von (5). Dabei müssen wir $\dot{u}(0) = 0$ voraussetzen, weil der Meridian die Achse senkrecht trifft. $\dot{u}(r)$ und $\ddot{u}(r)$ seien für $|r| \leq r_0$ stetig. Wir setzen außerdem $\ddot{u}(r) \neq 0$ für $|r| \leq r_0$ voraus, beschränken uns also auf Rotationsflächen, die in der Umgebung eines Pols keine parabolischen Punkte haben.

Setzen wir $\chi_k(r) = r^{e_k} + r^{e_k+1} P(r)$, wo $P(r)$ für $|r| \leq r_0$ zweimal stetig differenzierbar sein soll, so liefert (6) nach der Fuchsschen Theorie⁹⁾ wegen $\ddot{u}(0) \neq 0$ die Gleichung

$$e_k(e_k - 1) - e_k - k^2 + 1 = 0,$$

also

$$e_k = 1 \pm k.$$

⁸⁾ Vgl. Darboux, *Théorie des surfaces* 4, S. 9.

⁹⁾ Vgl. Hoheisel, *Gewöhnliche Differentialgleichungen* (Samml. Götschen), S. 101 ff.

Jedes in $|r| \leq r_0$ reguläre Grundintegral $\chi_k(r)$ von (6) verschwindet demnach in $r=0$ von der Ordnung $k+1$. Die zugehörigen ψ_k, φ_k verschwinden dort nach (5) b) bzw. (5) c) von der Ordnung $k+1$ bzw. k . Der zugehörige Vektor $\delta_k(r, v)$ hat demnach wegen $k \geq 2$ die Gestalt $\delta_k = r^2 \eta(r, v)$, wo der Vektor η für $|r| \leq r_0$ zweimal stetig differenzierbar nach r, v ist. Ersetzen wir also die Parameter r, v durch die Parameter $x = r \cos v, y = r \sin v$, deren Netz für $|r| \leq r_0$ keine Singularität mehr hat, so ist δ_k nicht nur nach r, v , sondern auch nach x, y zweimal stetig differenzierbar.

Das¹⁰⁾ in $r=0$ reguläre Grundintegral von (6) liefert für $k \geq 2$ eine in der Umgebung des Pols zweimal stetig differenzierbare Infinitesimalverbiegung unserer Fläche.

§ 3.

Aufstellung und Lösung des Sturm-Liouvilleschen Problems, das die unstarren Flächen liefert.

Wir gehen auf (3), (4) mit u als unabhängigen Veränderlichen zurück und wollen dies System längs eines ganzen Meridians integrieren. Seien die Pole der gesuchten Fläche etwa $u = \pm 1$, dann setzen wir von der Funktion $r(u)$ voraus, daß sie die Gestalt hat

$$(7) \quad r(u) = \sqrt{1-u^2} l(u),$$

wo $l(u)$ eine im abgeschlossenen Intervall $-1 \leq u \leq +1$ positive, zweimal stetig differenzierbare Funktion ist; wir beschränken uns damit auf Flächen, deren Tangentialebene außer in den Polen nirgends auf der Achse senkrecht steht.

Aus §§ 1, 2 folgt:

Unsere Fläche ist unstarr, wenn (4) für irgendein ganzzahliges $k \geq 2$ ein im ganzen Intervall $-1 \leq u \leq +1$ reguläres nicht identisch verschwindendes Integral besitzt.

Bei gegebener Funktion $r(u)$ der Form (7) und verfügbarem nicht notwendig ganzzahligem k ist die Auffindung eines solchen Integrals von (4) und zugehöriger Eigenwerte $k^2 - 1$ ein Sturm-Liouvillesches Problem. Wir haben umgekehrt die Aufgabe, $r(u)$ so zu bestimmen, daß das Sturm-Liouvillesche Problem einen Eigenwert $k^2 - 1$ mit ganzzahligem $k \geq 2$ besitzt.

¹⁰⁾ Jedes Grundintegral in einem singulären Punkt ist an sich nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt. Wir meinen hier und im folgenden dasjenige Grundintegral, in dem die niedrigste Potenz der unabhängigen Veränderlichen den Koeffizienten $+1$ hat.

Sei $r(u)$ irgendeine Funktion der Form (7), $\chi_k(u)$ hier und im folgenden das in $u = +1$ reguläre Grundintegral von (4). Dann geht $\chi_k(u)$ für $u \rightarrow -1$ im allgemeinen ins Unendliche. Wir zeigen nun: *Durch eine beliebig schwache bis zur 2. Ableitung stetige Abänderung von $r(u)$ in einem beliebig kleinen abgeschlossenen Teilintervall von $(-1, +1)$ kann man erreichen, daß gleichzeitig $\chi_k(u)$ (bei passend gewähltem, festem ganzzahligen $k \geq 2$) in eine bei -1 reguläre Funktion übergeht. Die zu $r(u)$ gehörige Fläche wird also durch die Abänderung unstarr gemacht.*

Das Abänderungsverfahren verläuft am einfachsten bei konvexen Flächen (vgl. Fig. 1). Wir setzen also vorläufig voraus: $r'' < 0$ für $-1 < u < +1$. Dann gilt nach (4):

$$(8) \quad \frac{\chi_k''(u)}{\chi_k(u)} > 0 \quad \text{für} \quad \chi_k(u) \neq 0 \quad (-1 < u < +1).$$

Hieraus folgt, daß $\chi_k(u)$ kein positives Maximum und kein negatives Minimum in $(-1, +1)$ hat.

Also kann $\chi_k(u)$ in $u = -1$ nicht verschwinden, also muß es dort unendlich werden¹¹.

(Das bestätigt den Satz von der Starrheit der Eiflächen für unseren Sonderfall.) Sei nun a irgendeine Zahl im Intervall $-1 < a < +1$.

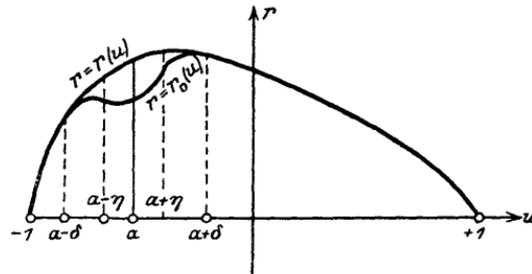


Fig. 1.

δ, ϵ seien beliebig klein vorgegebene positive Zahlen, insbesondere sei δ so klein, daß

$$-1 < a - \delta < a + \delta < +1.$$

$r_0(u)$ sei eine Funktion, die folgende Bedingungen erfüllt:

1. $r_0(u) - r(u)$ ist zweimal stetig differenzierbar in $(-1, +1)$.
2. $r_0(u) - r(u) = 0$ außer in $(a - \delta, a + \delta)$.
3. $\text{Max}_{|u| \leq 1} |r_0(u) - r(u)| \leq \epsilon, \quad \text{Max}_{|u| \leq 1} |r_0'(u) - r'(u)| \leq \epsilon.$
4. $\frac{r_0''(a)}{r_0(a)} = +1.$

Offenbar ist eine solche Funktion $r_0(u)$ konstruierbar. Zu ihr bestimmen wir ein η , $0 < \eta < \delta$, so daß

$$\frac{r_0''(u)}{r_0(u)} \geq \frac{1}{2} \quad \text{für} \quad a - \eta \leq u \leq a + \eta.$$

¹¹) Denn das zweite Grundintegral in $r = 0$ gehört zu dem negativen Exponenten $e_k = 1 - k$.

Sei $\chi_{k,0}(u)$ das für $a + \delta \leq u \leq +1$ mit $\chi_k(u)$ übereinstimmende Integral der Gleichung

$$(4_0) \quad r_0 \chi''_{k,0} + (k^2 - 1) r''_0 \chi_{k,0} = 0,$$

die aus (4) entsteht, indem man r durch r_0 ersetzt.

Dann ist in $(a - \eta, a + \eta)$:

$$(9) \quad \frac{\chi''_{k,0}(u)}{\chi_{k,0}(u)} \leq -\frac{k^2 - 1}{2} \quad (\text{für } \chi_{k,0} \neq 0).$$

Die Funktion $y(u) = \sin \sqrt{\frac{k^2 - 1}{2}} u$ befriedigt die Gleichung

$$\frac{y''}{y} = -\frac{k^2 - 1}{2}.$$

Nach einem bekannten Sturmischen Satz⁹⁾ ist der Abstand zweier konsekutiver Nullstellen von $\chi_{k,0}(u)$ in $(a - \eta, a + \eta)$ wegen (9) nicht größer als bei der Funktion $\sin \sqrt{\frac{k^2 - 1}{2}} u$. Ist also k so groß gewählt, daß $\sqrt{\frac{k^2 - 1}{2}} > \frac{\pi}{\eta}$, so hat $\chi_{k,0}(u)$ mindestens eine Nullstelle in $(a - \eta, a + \eta)$. k sei so gewählt und im folgenden fest.

Nunmehr betrachten wir die Funktion $r(u; t) = r_0(u) + t[r(u) - r_0(u)]$;

wir machen also die Abänderung von $r(u)$ allmählich wieder rückgängig. $\chi(u; t)$ sei dasjenige Integral der Gleichung

$$(4_t) \quad r(u; t) \chi''(u; t) + (k^2 - 1) r''(u; t) \chi(u; t) = 0$$

($\frac{\partial F(u; t)}{\partial u} = F'$ gesetzt), das für

$a + \delta \leq u \leq +1$ mit $\chi_k(u)$ übereinstimmt, also $\chi(u; 1) = \chi_k(u)$ wegen $r(u; 1) = r(u)$. Dann hängt $\chi(u; t)$ für $a + \delta \leq u < -1$ analytisch von t ab. Für hinreichend kleine t hat $\chi(u; t)$

mindestens eine Nullstelle in $(a - \eta, a + \eta)$. Also gibt es für kleine t eine stetige Funktion $b(t)$, so daß (vgl. Fig. 2):

1. $-1 < b(t) < a + \delta$.
2. $\chi(u; t) = 0$ für $u = b(t)$.
3. $\chi(u; t) > 0$ für $b(t) < u < a + \delta$.

ϑ sei die obere Grenze aller solcher Zahlen τ ($\tau > 0$), daß $b(t)$ für alle t im Intervall $0 \leq t \leq \tau$ existiert.

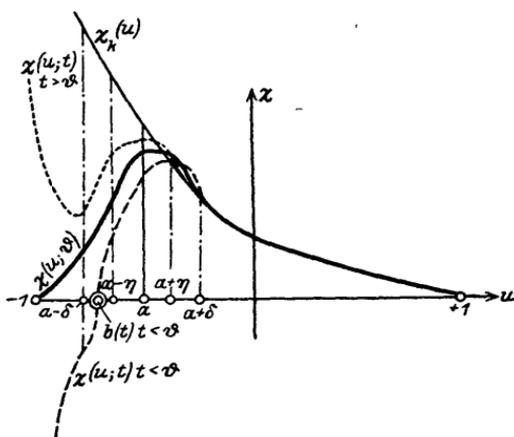


Fig. 2.

Dann ist $\vartheta \leq +1$. Denn sonst hätte $\chi(u; 1) = \chi_k(u)$ eine Nullstelle $b(1)$, $-1 < b(1) < a + \delta$. Das ist wegen (8) nicht der Fall.

Es ist $\lim_{t \rightarrow \vartheta-0} b(t) = -1$. Denn sonst wäre $\limsup_{t \rightarrow \vartheta-0} b(t) = b > -1$ und $b \leq a + \delta$. Dann hätte $\chi(u; t)$ eine Nullstelle in beliebiger Nähe von b für $t > \vartheta$ und genügend kleines $t - \vartheta$.¹²⁾ $b(t)$ wäre also für $0 \leq t \leq \tau$ mit $\tau > \vartheta$ definiert, im Widerspruch zur Maximaleigenschaft von ϑ .

$r(u; \vartheta)$ ist die gesuchte Meridianfunktion, das Integral $\chi(u; \vartheta)$ von (4 _{ϑ}) ist für $u = -1$ regulär.

$\xi(u, v) = ue + r(u; \vartheta)a$ ist eine unstarre Rotationsfläche.

Zum Beweise genügt es zu zeigen, daß $\chi(u; \vartheta)$ für $-1 < u \leq a + \delta$ gleichmäßig in u beschränkt ist¹¹⁾. Sei (für $0 \leq t < \vartheta$) $M(t)$ das Maximum von $\chi(u; t)$ für festes t und für $b(t) \leq u \leq a + \delta$. Dann bleibt $M(t)$ für $t \rightarrow \vartheta$ beschränkt. $\chi(u; t)$ kann nämlich dieses Maximum $M(t)$ nur in $(a - \delta, a + \delta)$ annehmen, weil außerhalb dieses Intervalls überall (8) gilt und $\chi(b(t); t)$ verschwindet. Also ist in der Tat

$$0 < M(t) = \underset{\substack{b(t) \leq u \leq a + \delta \\ (0 \leq t < \vartheta)}}{\text{Max}} \chi(u; t) \leq \underset{\substack{a - \delta \leq u \leq a + \delta \\ 0 \leq t \leq 1}}{\text{Max}} \chi(u; t) = M.$$

Nun ist aber $\lim_{t \rightarrow \vartheta-0} b(t) = -1$. Für jeden Punkt c , $-1 < c < a + \delta$ gibt es also ein $\sigma > 0$, so daß für $\vartheta - \sigma < t < \vartheta$:

$$-1 < b(t) < c, \text{ also } 0 < \chi(c; t) \leq M.$$

Folglich ist auch $\chi(c; \vartheta) = \lim_{t \rightarrow \vartheta-0} \chi(c; t) \leq M$, d. h.

$$0 < \chi(u; \vartheta) < M \text{ für } -1 < u \leq a + \delta. \quad \text{Q. e. d.}$$

Wir lassen jetzt die Voraussetzung $r'' < 0$ fallen. Dann ist es nicht mehr möglich, analog dem Früheren den Punkt $u = a$ so zu wählen, daß $\chi_k(u) \neq 0$ für $-1 < u \leq a$ und für alle k . Wir bestimmen diesmal $a < +1$ so, daß $r'' < 0$ für $-1 < u \leq a$. Daß das geht, folgt aus (7). Jetzt gilt (8) in $-1 < u \leq a$, $\chi_k(u)$ hat daher in diesem Intervall kein absolutes Extremum, also höchstens eine Nullstelle. Wir definieren $\delta, \varepsilon, r_0(u), \eta, \chi_{k,0}(u)$ wie im früheren. δ soll überdies so klein sein, daß $r'' < 0$ in $a \leq u \leq a + \delta$. Diesmal wählen wir k so groß, daß $\chi_{k,0}(u)$ mindestens zwei Nullstellen in $(a - \eta, a + \eta)$ hat. $r(u; t)$ und $\chi(u; t)$ seien wie oben erklärt. Wir wählen d so, daß $a + \delta < a + d < 1$, $\chi(u; t) = \chi_k(u) \neq 0$ für $u = a + d$, $r''(u) < 0$ für $a + \delta \leq u \leq a + d$. Dann gibt es

¹²⁾ Bei dieser Schlußweise wird der Satz benutzt, daß ein nicht identisch verschwindendes Integral einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung in einem regulären Punkt keine mehrfachen Nullstellen hat.

für kleine t zwei stetige Funktionen $b(t)$ und $B(t)$ mit den Eigenschaften:

1. $-1 < b(t) < B(t) < a + d$.
2. $\chi(u; t) = 0$ für $u = b(t)$ und für $u = B(t)$.
3. $\chi(u; t) \neq 0$ für $b(t) < u < B(t)$.

ϑ sei die obere Grenze aller solcher τ , daß $b(t)$ und $B(t)$ für $0 \leq t \leq \tau$ definiert sind. Dann ist $\vartheta \leq 1$. Denn sonst hätte $\chi(u; 1) = \chi_k(u)$ zwei Nullstellen in $(-1, a + d)$; das geht nicht, weil $\chi_k(u)$ für $-1 < u < a + d$ kein absolutes Extremum hat. Es ist $B(t) \geq a - \delta$, weil (8) für $\chi(u; t)$ in $-1 < u < a - \delta$ gilt, also $\chi(u; t)$ nicht zwei Nullstellen $b(t)$, $B(t)$ in diesem Intervall hat. Es ist $\lim_{t \rightarrow \vartheta - 0} b(t) = -1$. Denn wäre $\limsup_{t \rightarrow \vartheta - 0} b(t) = b > -1$, so könnten jedenfalls $b(t)$ und $B(t)$ für $t \rightarrow \vartheta - 0$ nicht zusammenrücken, weil $\chi(u; \vartheta)$ keine doppelte Nullstelle in b hat¹²). $B(t)$ könnte auch nicht nach $a + d$ rücken, denn es war $\chi(a + d; t) = \chi_k(a + d) \neq 0$ vorausgesetzt. Daher wären $b(t)$ und $B(t)$ über $t = \vartheta$ hinaus definierbar, entgegen der Definition von ϑ . $r(u; \vartheta)$ ist die gesuchte Funktion. Die gleichmäßige Beschränktheit von $\chi(u; \vartheta)$ folgt wie oben. Erstens sind die Funktionen $\chi(u; t)$ für $b(t) < u < B(t)$ gleichmäßig in t beschränkt, weil sie ihr Extremum nur in $(a - \delta, a + \delta)$ annehmen können; zweitens liegt jede Zahl c ($-1 < c < a - \delta$) für $t \rightarrow \vartheta - 0$ zwischen $b(t)$ und $B(t)$, weil $\lim_{t \rightarrow \vartheta - 0} b(t) = -1$, und $B(t) \geq a - \delta$.

§ 4.

Parabolische Breitenkreise mit fester Stützebene.

Die parabolischen Breitenkreise einer Rotationsfläche zerfallen in drei Klassen. Erstens kann die Normalkrümmung in der Meridianrichtung verschwinden und in der Breitenkreisrichtung nicht; $r''(u) = 0$; $\frac{1}{r'(u)} \neq 0$ in der Bezeichnung von § 1. Zweitens kann die Normalkrümmung des Meridians von Null verschieden sein und die des Breitenkreises verschwinden; $\ddot{u}(r) \neq 0$, $\dot{u}(r) = 0$, $r \neq 0$ gemäß § 2. Drittens können beide Hauptkrümmungen zugleich verschwinden ($\ddot{u}(r) = \dot{u}(r) = 0$). Der erste Fall spielt für die Integration von (4) keine Sonderrolle, denn $r''(u)$ ist nicht Koeffizient der höchsten Ableitung von χ_k . Im zweiten Fall dagegen, in dem wir (6) statt (4) zur Bestimmung von χ_k brauchen, hat (6) eine Singularität, denn $\dot{u}(r)$ ist Koeffizient von $\ddot{\chi}_k$. Der dritte Fall stellt eine noch höhere Singularität von (6) dar und soll unerörtert bleiben. Der zweite Fall trifft auf jeder torusförmigen Rotationsfläche mindestens für zwei Breitenkreise ein; nämlich für den höchsten und tiefsten, wenn die Achse vertikal steht.

Die Fläche hat längs eines solchen Breitenkreises eine und dieselbe Tangentialebene, die für die Umgebung des Kreises Stützebene ist.

Sei $r=1$ ein solcher Kreis; $\dot{u}(1)=0$, $\ddot{u}(1)\neq 0$. Wir wenden wie in § 2 die Fuchssche Theorie⁹⁾ auf (6) im Punkte $r=1$ an und setzen $\chi_k(r) = (r-1)^{\sigma_k} + (r-1)^{\sigma_k+1}P(r-1)$. Dabei sei $P(x)$ eine für absolut kleines x zweimal stetig differenzierbare Funktion. Wegen $\ddot{u}(1)\neq 0$ erhält man aus (6) für σ_k die Gleichung

$$\sigma_k(\sigma_k - 1) - \sigma_k = 0; \quad \sigma_k = \begin{cases} 2 \\ 0 \end{cases}.$$

Beide Grundintegrale des Punktes $r=1$ sind also in dessen Umgebung beschränkt. Das zu $\sigma_k=0$ gehörige scheidet für unseren Zweck aus. Denn es würde in $r=1$ nicht verschwinden; also wäre nach (5) b) auch $\psi_k \neq 0$, dagegen nach (5) a) b) $\dot{\psi}_k = \dot{\chi}_k = 0$. Das ist mit (5) b) c) nicht verträglich.

Brauchbar in $r=1$ ist also nur das Integral¹⁰⁾, das dort wie $(r-1)^2$ verschwindet. Es liefert in der Tat mittels (5) b) c) eine in $r=1$ reguläre Infinitesimalverbiegung der Fläche.

Hier sei eine Abschweifung gestattet. Fragen wir einmal nicht nach einer *speziellen* Verbiegung im *Großen*, sondern nach der *allgemeinsten* im *Kleinen* (Cauchy-Problem). \mathfrak{z} und \mathfrak{z}_u seien auf einem Breitenkreisbogen $u=c$; $v_1 \leq v \leq v_2$ so vorgegeben, daß (1) dort erfüllt ist. (1) soll über ein Gebiet $|u-c| \leq c_0$, $v_1 \leq v \leq v_2$ integriert werden, das keinen Pol und keinen parabolischen Kreis zweiter Art enthalten möge. Nehmen wir an, \mathfrak{z} und \mathfrak{z}_u sind als Fourier-Polynome n -ten Grades auf $u=c$ vorgegeben. Dann kommt die Aufgabe darauf hinaus, (4) bzw. (6) für $k=0, 1, 2, \dots, n$ mit vorgegebenen $\chi_k(c)$, $\chi'_k(c)$ im Intervall $|u-c| \leq c_0$ zu integrieren. Man erhält dann einen Biegungsvektor (vgl. § 1)

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0 + \mathfrak{z}_1 + \dots + \mathfrak{z}_n.$$

Für $n \rightarrow \infty$ wird die Entwicklung $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0 + \mathfrak{z}_1 + \dots + \mathfrak{z}_n + \dots$ im allgemeinen überall außer in $u=c$ *divergent*, falls das Problem an der betrachteten Stelle elliptischen Charakter hat ($\frac{r''}{r} < 0$). Sie *konvergiert* aber für $|u-c| \leq c_0$, wenn die Komponenten von \mathfrak{z} , \mathfrak{z}_u *analytische Funktionen von v mit der Periode 2π* sind. Man zeigt mittels Sturmscher Sätze, daß c_0 nur von den vorgegebenen Funktionen und von $\liminf \frac{r''}{r}$ abhängt¹³⁾.

¹³⁾ Die $\chi_k(u)$ haben für $\frac{r''}{r} < 0$ die Größenordnung $a_k e^{\left| \frac{r''}{r} \right| \sqrt{k^2-1} u}$, wie man aus (4) entnimmt. Dabei sind die a_k durch die Vorgaben in $u=c$ bestimmt. Konvergenz wird also dann und nur dann eintreten, wenn die $|a_k|$ wie θ^k ($0 < \theta < 1$) abnehmen. Das ist aber gerade die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k e^{ikv}$ eine *analytische Funktion von v* ist.

Insbesondere endet die Konvergenz im allgemeinen nicht auf parabolischen Kreisen erster Art; man kann das Cauchy-Problem mit analytischen Vorgaben vom elliptischen ins hyperbolische Gebiet hineinintegrieren.

Enthält aber das gewünschte Integrationsgebiet einen parabolischen Kreis zweiter Art, so ist das Cauchy-Problem nicht mehr allgemein lösbar, auch wenn man sich mit Fourier-Polynomen als Vorgaben begnügt. Zwischen den Vorgaben ξ, ξ_u muß eine Relation bestehen, damit das zugehörige Integral von (6) zu den im parabolischen Kreis regulären gehört. Für $n \rightarrow \infty$ bleibt diese Einschränkung a fortiori bestehen. Die Konvergenzfrage liegt wie im ersten Fall.

Für die lineare homogene *partielle* Differentialgleichung der Infinitesimalverbiegung vollzieht sich also in unserem (separierbaren) Falle der Übergang vom elliptischen ins hyperbolische Gebiet in verschiedener Weise, je nachdem die parabolische Kurve vom ersten oder vom zweiten Typ ist. Dieses verschiedene Verhalten dürfte kaum an der Rotationssymmetrie unseres Problems liegen. Ich kenne aber keine analoge Unterscheidung in allgemeineren Fällen.

§ 5.

Unstarre Torusflächen.

Wir beschränken uns auf solche Torusflächen, die nur zwei zur Achse senkrechte Tangentialebenen haben; diese berühren den Torus längs zweier parabolischer Kreise zweiter Art. Außerdem möge der Torus eine Symmetrieebene senkrecht zur Achse haben. Diese sei $u = 0$, die parabolischen Kreise seien $u = \pm 1$, $r = a$ ($a > 0$). Dann hat der Meridian die Gestalt

$$(10) \quad \begin{cases} r = r(u) = \sqrt{1 - u^2} l(u) + a, \\ r = r^*(u) = -\sqrt{1 - u^2} l^*(u) + a. \end{cases}$$

Dabei seien $l(u)$, $l^*(u)$ für $-1 \leq u \leq +1$ zweimal stetig differenzierbar. Ferner sei $r(u) > 0$, $r^*(u) > 0$ für $-1 \leq u \leq +1$, $l(-u) = l(u)$, $l^*(-u) = l^*(u)$, $l(1) = l^*(1) > 0$.

Jede solche Fläche kann durch eine beliebig kleine, die Symmetrie erhaltende Änderung unstarr gemacht werden.

Seien nämlich $\chi_k(u)$, $\chi_k^*(u)$ die zu $r(u)$ bzw. $r^*(u)$ gehörigen, in $u = +1$ regulären Grundintegrale von (4). Dann soll die Abänderung von $r(u)$ und von $r^*(u)$ im Intervall $+1 > u \geq 0$ so erfolgen, daß in diesem Intervall je eine Nullstelle von $\chi_k(u)$ und von $\chi_k^*(u)$ in den Punkt $u = 0$ rücken. Im Intervall $0 \geq u > -1$ werde die zur ersten spiegelbildliche Änderung des Meridians vorgenommen. Dann folgt $\chi_k(-u) = -\chi_k(u)$, $\chi_k^*(-u) = -\chi_k^*(u)$; also werden insbesondere $\chi_k(u)$,

$\chi_k^*(u)$ regulär in $u = -1$. Damit ist unsere Aufgabe gelöst. Die Konstruktion des Biegungsvektors erfolgt gemäß (3) wie in § 3.

Das Änderungsverfahren ist analog dem von § 3, modifiziert durch unsere Symmetrieannahme; als Abänderungszone wählen wir gerade die Umgebung von $u = 0$. Wir betrachten zunächst den Halbmeridian $r = r(u)$. Wegen $r(-u) = r(u)$ ist $r'(0) = 0$. Zur Abkürzung setzen wir $r(0) = b$, $\left| \frac{r''(0)}{r(0)} \right| = c$. Nun sei ε , $0 < \varepsilon < 1$, beliebig vorgegeben.

Dann sei δ so bestimmt, daß $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{4(b+1)(c+1)}$ und daß für $0 \leq u \leq \delta$:

$|r(u) - b| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $|r'(u)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, $\left| \frac{r''(u)}{r(u)} \right| < c + 1$. Nun bestimmen wir $r_0(u)$ so, daß

1. $r_0(u) - r(u)$ zweimal stetig differenzierbar für $0 \leq u \leq 1$.

2. $r_0(u) - r(u) = 0$ für $\delta \leq u \leq 1$.

3. $\text{Max}_{0 \leq u \leq \delta} |r_0(u) - b| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $\text{Max}_{0 \leq u \leq \delta} |r'_0(u)| \leq \frac{2\varepsilon}{3}$

(also $\text{Max}_{0 \leq u \leq \delta} |r_0(u) - r(u)| \leq \varepsilon$, $\text{Max}_{0 \leq u \leq \delta} |r'_0(u) - r'(u)| \leq \varepsilon$).

4. $r_0(u) = b + 2(c+1)(b+1)u^2$ für $0 \leq u \leq \frac{\delta}{2}$.

4. ist mit 3. verträglich. Denn es ist für $0 \leq u \leq \frac{\delta}{2}$ nach 4.:

$$\text{Max} |r'_0| = 2(b+1)(c+1)\delta < \frac{\varepsilon}{2},$$

also nach dem Mittelwertsatz $\text{Max}_{0 \leq u \leq \frac{\delta}{2}} |r_0 - b| < \frac{\delta}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}$. Im Intervall $\frac{\delta}{2} \leq u \leq \delta$ kann man $r_0(u)$ offenbar so erklären, daß auch dort 1., 2., 3. gelten.

Ferner gilt

$$(11) \quad \text{Min}_{0 \leq u \leq \frac{\delta}{2}} \frac{r''_0(u)}{r_0(u)} > 4 \text{Max}_{0 \leq u \leq \delta} \frac{r''(u)}{r(u)}.$$

In der Tat ist nach unseren Festsetzungen $M = \text{Max}_{0 \leq u \leq \delta} \frac{r''(u)}{r(u)} < c + 1$,

$m = \text{Min}_{0 \leq u \leq \frac{\delta}{2}} \frac{r''_0(u)}{r_0(u)} \geq \frac{4(b+1)(c+1)}{b+\varepsilon}$, also $m > 4M$. Setzen wir $\frac{1}{2}\sqrt{m} - \sqrt{M} = \sigma$,

so ist $\sigma > 0$.

Nun sei $\chi_{k,0}(u)$ wie in § 3 erklärt als das Integral von (4₀) § 3, das für $\delta \leq u \leq 1$ mit $\chi_k(u)$ übereinstimmt. Wie in § 3 schließt man: $\chi_{k,0}(u)$ hat im Intervall $0 \leq u \leq \frac{\delta}{2}$ mindestens $n = \frac{\delta}{2\pi} \sqrt{m(k^2 - 1)}$ Nullstellen. Dagegen hat $\chi_k(u)$ in dem größeren Intervall $0 \leq u \leq \delta$ höchstens $N = 1 + \frac{\delta}{\pi} \sqrt{M(k^2 - 1)}$ Nullstellen. Es ist $n - N = \frac{\delta}{\pi} \sigma \sqrt{k^2 - 1} - 1$.

Ist k groß genug, so ist $n - N \geq 1$; dann hat $\chi_{k,0}(u)$ im Intervall $0 \leq u \leq \delta$ mindestens eine Nullstelle mehr als $\chi_k(u)$. k sei so groß gewählt und im folgenden fest. Wie in § 3 definieren wir nun $r(u; t)$ und $\chi(u; t)$: $r(u; t) = r_0(u) + t[r(u) - r_0(u)]$, $\chi(u; t)$ das Integral von (4_t) § 3, das für $\delta \leq u \leq 1$ mit $\chi_k(u)$ übereinstimmt.

Dann gibt es ein ϑ , $0 \leq \vartheta \leq 1$, so daß $\chi(0; \vartheta) = 0$. Wäre nämlich $\chi(u; t) \neq 0$ für alle t im Intervall $0 \leq t \leq 1$, so könnte die Anzahl n_t der Nullstellen von $\chi(u; t)$ im Intervall $0 \leq u \leq \delta$ sich für $0 \leq t \leq 1$ nicht ändern. Denn diese wandern stetig mit t , mehrere fallen nie zusammen¹¹⁾, und $\chi(\delta; t)$ ist konstant gleich $\chi_k(\delta)$. Andererseits ist $\chi(u; 0) = \chi_{k,0}(u)$, $\chi(u; 1) = \chi_k(u)$, also $n_0 \geq n$, $n_1 = N$, also $n_0 - n_1 \geq 1$. Das ist ein Widerspruch, der die Existenz unseres ϑ beweist.

Erklären wir $r(u; \vartheta)$ für $0 \geq u \geq -1$ durch die Gleichung $r(-u; \vartheta) = r(u; \vartheta)$, so ist nach dem vorher Bemerkten die Kurve $r = r(u; \vartheta)$ der äußere Halbmeridian einer unstarren Torusfläche.

Den inneren Halbmeridian erzeugt man aus $r^*(u)$ auf genau dieselbe Art. —

Wenn man die Symmetrievoraussetzung fallen läßt, macht es zwar keine Schwierigkeit, beide Halbmeridiane so zu deformieren, daß sowohl $\chi_k(u)$ als auch $\chi_k^*(u)$ in $u = \pm 1$ regulär werden. Aber der Zusammenschluß beider Funktionen in $u = \pm 1$ genügt unseren Forderungen im allgemeinen nicht. Wir verlangen (Bezeichnung wie in § 2): $\check{\chi}_k(a) = \check{\chi}_k^*(a)$ für $u = +1$ und für $u = -1$.

Wenn man $\chi_k(u)$ gegebenenfalls durch konst. $\chi_k(u)$ ersetzt, kann man für $u = +1$ sicher jene Gleichung erzwingen; dann gilt sie aber im allgemeinen für $u = -1$ nicht, während bei unserem symmetrischen Ansatz die eine Hälfte die andere nach sich zieht. Der allgemeine Fall läßt sich vermutlich dadurch erledigen, daß man das Intervall, in dem man den einen Halbmeridian abändert, zunächst verschiebbar in $(-1, +1)$ annimmt, um es dann an eine passende Stelle zu rücken.

§ 6.

Verbiegungen höherer Ordnung.

Das Problem der Infinitesimalverbiegung $\mathfrak{z}(u, v)$ einer Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ ordnet sich bekanntlich³⁾ dem folgenden allgemeineren Problem unter. Die Vektoren $\mathfrak{z}^{(1)}, \mathfrak{z}^{(2)}, \dots, \mathfrak{z}^{(n)}$ sind so zu bestimmen, daß das Linienelement der Flächen $\mathfrak{x}(u, v; t) = \mathfrak{x}(u, v) + \sum_{l=1}^n t^l \mathfrak{z}^{(l)}(u, v)$ (das jedenfalls ein Polynom $2n$ -ten Grades in t ist) keine Glieder mit t, t^2, \dots, t^n enthält. $\mathfrak{z}^{(l)}(u, v)$ heißt Biegungsvektor l -ter Ordnung von $\mathfrak{x}(u, v)$; der von uns

bisher betrachtete Vektor $\mathfrak{z}(u, v)$ bestimmt also die „Verbiegung erster Ordnung“; $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}^{(1)}$. Die $\mathfrak{z}^{(n)}$ bestimmen sich aus $\mathfrak{z}^{(1)}$ durch die Rekursionsformeln

$$2 d\mathfrak{r} d\mathfrak{z}^{(n)} = - \sum_{l=1}^{n-1} d\mathfrak{z}^{(l)} d\mathfrak{z}^{(n-l)},$$

d. h.

$$(12) \quad \begin{aligned} 2 \mathfrak{r}_u \delta_u^{(n)} &= - \sum_{l=1}^{n-1} \delta_u^{(l)} \delta_u^{(n-l)}; & 2 \mathfrak{r}_v \delta_v^{(n)} &= - \sum_{l=1}^{n-1} \delta_v^{(l)} \delta_v^{(n-l)}; \\ \mathfrak{r}_u \delta_v^{(n)} + \mathfrak{r}_v \delta_u^{(n)} &= - \sum_{l=1}^{n-1} \delta_u^{(l)} \delta_v^{(n-l)}. \end{aligned}$$

Gelingt es, diese Differentialgleichungen für alle n zu integrieren, und konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} t^n \mathfrak{z}^{(n)}$ für kleine $t \neq 0$, so ist

$$\mathfrak{r}(u, v; t) = \mathfrak{r}(u, v) + \sum_{n=1}^{\infty} t^n \mathfrak{z}^{(n)}(u, v)$$

eine in t analytische Schar isometrischer Flächen mit $\mathfrak{r}(u, v; 0) = \mathfrak{r}(u, v)$; $\mathfrak{r}(u, v)$ läßt eine stetige Verbiegung zu.

Kann man nach unserer Methode unstarre Rotationsflächen herstellen, die Verbiegungen höherer Ordnungen besitzen, oder die gar analytisch verbiegbar sind?

Die Rotationsfläche $\mathfrak{r}(u, v)$ vom Geschlecht der Kugel sei unstarr und ihr Biegungsvektor erster Ordnung sei nach § 1

$$\mathfrak{z}^{(1)}(u, v) = \mathfrak{z}(u, v) = \alpha e + \beta a + \gamma a'.$$

Setzen wir an:

$$\mathfrak{z}^{(2)} = \alpha^{(2)} e + \beta^{(2)} a + \gamma^{(2)} a',$$

so folgt aus (12):

$$\alpha_u^{(2)} + r' \beta_u^{(2)} = - \frac{1}{2} [\alpha_u^2 + \beta_u^2 + \gamma_u^2],$$

$$\gamma_v^{(2)} + \beta^{(2)} = - \frac{1}{2} [\alpha_v^2 + (\beta_v - \gamma)^2],$$

$$\alpha_v^{(2)} + r'(\beta_v^{(2)} - \gamma^{(2)}) + r \gamma_u^{(2)} = - \frac{1}{2} [\alpha_u \alpha_v + \beta_u (\beta_v - \gamma)].$$

Die linken Seiten sind in $\alpha^{(2)}, \beta^{(2)}, \gamma^{(2)}$ so gebaut wie die von (2) in α, β, γ . Rechts stehen quadratische Ausdrücke in α, β, γ . Daraus folgt: Sind α, β, γ Fourier-Polynome in v vom Grade m , so sind die $\alpha^{(2)}, \beta^{(2)}, \gamma^{(2)}$ Fourier-Polynome in v vom Grade $2m$. Nehmen wir an, (4) sei nur für $k = m (\geq 2)$ regulär auf der ganzen Fläche lösbar, für $k \neq m, k \geq 2$ nicht. Dann haben α, β, γ die Form

$$\alpha = \varphi_m(u) e^{imv} + \bar{\varphi}_m(u) e^{-imv} \quad \text{usw.}$$

$\alpha^{(2)}, \beta^{(2)}, \gamma^{(2)}$ müssen also die Form haben:

$$\alpha^{(2)} = \varphi_{2m}^{(2)} e^{2imv} + \varphi_0^{(2)} + \bar{\varphi}_{2m}^{(2)} e^{-2imv} \quad \text{usw.}$$

Entsprechend für den zugehörigen Biegungsvektor dritter Ordnung

$$\mathfrak{z}^{(3)} = \alpha^{(3)} e + \beta^{(3)} a + \gamma^{(3)} a'.$$

$\alpha^{(3)}, \beta^{(3)}, \gamma^{(3)}$ müssen die Gestalt haben:

$$\alpha^{(3)} = \varphi_{3m}^{(3)}(u) e^{3imv} + \varphi_m^{(3)}(u) e^{imv} + \bar{\varphi}_m^{(3)}(u) e^{-imv} + \bar{\varphi}_{3m}^{(3)}(u) e^{-3imv} \quad \text{usw.}$$

Das Problem der Verbiegung zweiter Ordnung wird analog § 1 äquivalent mit der Integration der Differentialgleichung

$$(13) \quad r \chi_k^{(l)''} + (k^2 - 1) r'' \chi_k^{(l)} = R_k^{(l)}(u),$$

und zwar für $l = 2$, $k = 0$ und $k = 2m$. $R_k^{(2)}(u)$ ist ein längerer Ausdruck in $\varphi_k, \psi_k, \chi_k, \chi_k', \chi_k''$. Die genauere Betrachtung lehrt mittels der Fuchsschen Theorie, daß (13) für jedes $k \geq 2$, $k \neq m$ sowie für $k = 0$ ein und nur ein überall reguläres Integral besitzt¹⁴). Jede Rotationsfläche vom Geschlecht der Kugel, die eine Verbiegung erster Ordnung gestattet, aber keine zwei linear unabhängigen, gestattet auch eine Verbiegung zweiter Ordnung.

Verbiegung dritter Ordnung ist äquivalent mit Integration von (13) für $l = 3$, $k = m$ und $k = 3m$. Die rechten Seiten sind jetzt bilinear in $\varphi, \psi, \chi, \varphi^{(2)}, \psi^{(2)}, \chi^{(2)}$ und deren Ableitungen. Für $k = 3m$ macht die Integration keine Schwierigkeit, wohl aber für $k = m$. Denn nach unserer Annahme hat das *homogene* Problem (4) für $k = m$ eine Lösung, also das *inhomogene* (13) nur, wenn die rechte Seite eine Integralbedingung erfüllt. Ich weiß nicht, was diese Integralbedingung für den Meridian bedeutet, ob sie z. B. identisch erfüllt oder vielleicht unerfüllbar ist.

Falls es eine Verbiegung dritter Ordnung gibt, so auch eine vierter. Denn diese erfordert die Integration von (13) nur für $k = 0, 2m, 4m$, nicht für $k = m$. Ebenso erfordert allgemein das Verbiegungsproblem $(2n + 1)$ -ter Ordnung eine Integralbedingung, dasjenige $2n$ -ter nicht.

Andere Erscheinungen treten auf, wenn (4) für mehrere k lösbar ist, wenn also die Fläche mehrere linear unabhängige Verbiegungen erster Art zuläßt. Besonders wäre der Fall zu untersuchen, daß (4) für *alle* k lösbar ist, daß also die Fläche *als Ganzes* eine ebenso große Mannigfaltigkeit von Infinitesimalverbiegungen gestattet wie eine beliebige kleine Umgebung eines ihrer Pole.

¹⁴) Man muß dabei berücksichtigen, daß $R_k^{(l)}(u)$ in den Polen $r = 0$ hinreichend stark verschwindet.

§ 7.

Zwei Beispiele unstarrer Flächen.

Daß eine starre Fläche durch eine beliebig kleine Abänderung unstarr gemacht werden kann, erscheint zunächst überraschend. In Wirklichkeit bedeutet aber die Unstarrheit nicht viel. Unterwirft man nämlich die unstarre Fläche $\xi(u, v)$ mit dem Biegungsvektor ζ der Transformation $\xi(u, v) \rightarrow \xi(u, v) + t\zeta(u, v)$, und geht dabei ein Bogen s der Fläche in einen Bogen σ über, so folgt aus der Unstarrheit nur die Beziehung

$$s < \sigma < s \sqrt{1 + Mt^2}.$$

Dabei ist $M = \text{Max} \frac{d\zeta^2}{d\xi^2}$. Nur für $|t| < \frac{1}{M}$ macht es sich fühlbar, daß bei unserer Transformation die Änderung der Bogenlänge von geringerer Größenordnung ist als die mittlere Gestaltsänderung der Fläche. Setzen wir $\text{Max} |\xi(u, v) - \xi(u_1, v_1)| = A$, $\text{Max} |\zeta(u, v) - \zeta(u_1, v_1)| = B$ (wo (u, v) und (u_1, v_1) beliebige Punkte der Fläche ξ sind), so kann man den Ausdruck

$$U = \frac{B^2}{A^2 M}$$

als Maß der Unstarrheit der Fläche ξ bezeichnen. Man überschlägt leicht aus (4) und (3), daß U für große k die Größenordnung $\frac{1}{k^2}$ hat. Nun gehören die Biegungsvektoren, die das Verfahren aus §§ 3, 5 liefert, im allgemeinen zu sehr großen k . Die dort erzeugten Flächen sind also nur sehr schwach unstarr. Bei Deformationen, die einen merklichen Bruchteil des Flächendurchmessers betragen, ändern sich die Bogenlängen einer solchen Fläche nicht merklich weniger als die einer starren Fläche.

Im folgenden sollen dagegen zwei unstarre Rotationsflächen vom Geschlecht der Kugel angegeben werden, deren Infinitesimalverbiegung zu $k=2$ gehört. Man müßte ihre Unstarrheit an Modellen normaler Größe bemerken können¹⁵⁾.

1. Beispiel (Fig. 3).

Es sei, mit zunächst unbestimmten Konstanten a, b, c :

1. $r = \sqrt{u}$ für $0 \leq u \leq \frac{1}{4}$; also $\frac{r''}{r} = -\frac{1}{4u^2}$
2. $r = \frac{1}{2} e^{2u-\frac{1}{2}}$ „ $\frac{1}{4} \leq u \leq a$; „ $\frac{r''}{r} = 4$
3. $r = b \cos(u - a - c)$ „ $a \leq u \leq a + c$; „ $\frac{r''}{r} = -1$.

¹⁵⁾ Durch die Transformation $r \rightarrow c_1 r$, $u \rightarrow c_2 u$ (c_1, c_2 beliebige nichtverschwindende Zahlen) kann man die Gestalt der Flächen noch affin modifizieren. Denn (4) ist gegen solche Transformationen invariant.

4. $r(u) = r(2a + 2c - u)$ „ $a + c \leq u \leq 2a + 2c$; die Fläche besitzt die Symmetrieebene $u = a + c$.

Die zweiten Ableitungen dieses Meridians haben Sprungstellen in $u = \frac{1}{4}$, $u = a$, $u = a + c$, $u = a + 2c$, $u = 2a + 2c - \frac{1}{4}$. Die in dieser Arbeit nur für stetig gekrümmte Meridiane angestellten Betrachtungen lassen sich auf Meridiane mit bloß stückweise stetiger Krümmung ohne weiteres übertragen, weil in der ursprünglichen Form (1) des Bieungsproblems keine höheren als erste Ableitungen miteinander verknüpft werden.

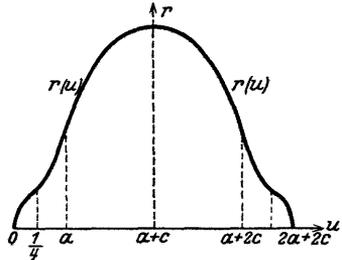


Fig. 3.

a, b, c sind so zu bestimmen, daß $r(u)$ und $r'(u)$ an den Nahtstellen stetig bleiben. Für $u = \frac{1}{4}$ und $u = 2a + 2c - \frac{1}{4}$ ist das von selbst der Fall, für $u = a$ erhält man

$$\frac{1}{2} e^{2a-\frac{1}{2}} = b \cos c; \quad e^{2a-\frac{1}{2}} = b \sin c.$$

Also $\underline{\text{tg } c = 2}$; $\underline{b = \frac{\sqrt{5}}{2} e^{2a-\frac{1}{2}}}$; a bleibt noch unbestimmt. Für $\chi_k(u)$ und $k = 2$ kann man nach (4) ansetzen (A, B, C zunächst unbestimmt):

1. $\chi_2(u) = u^{\frac{3}{2}}$ für $0 \leq u \leq \frac{1}{4}$
2. $\chi_2(u) = A \cos(2\sqrt{3}u + B)$ „ $\frac{1}{4} \leq u \leq a$
3. $\chi_2(u) = C \text{Co}f[\sqrt{3}(u - a - c)]$ „ $a \leq u \leq a + c$.

Damit $\chi_2(u)$, $\chi_2'(u)$ an den Nahtstellen stetig bleiben, muß gelten:

$$\frac{1}{8} = A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + B\right); \quad \frac{3}{4} = -2\sqrt{3}A \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + B\right)$$

$$A \cos(2\sqrt{3}a + B) = C \text{Co}f(\sqrt{3}c); \quad 2A \sin(2\sqrt{3}a + B) = C \text{Si}n(\sqrt{3}c).$$

Die beiden ersten Gleichungen liefern A, B :

$$\underline{\text{tg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + B\right) = -\sqrt{3}. A = \frac{1}{4}.}$$

Die letzten beiden Gleichungen liefern nunmehr a als Funktion von c und B

$$\underline{\text{tg}(2\sqrt{3}a + B) = \frac{1}{2} \text{Zg} \sqrt{3}c.}$$

Endlich haben wir für C :

$$\underline{C = \frac{1}{2\sqrt{4 \text{Co}f^2(\sqrt{3}c) + \text{Si}n^2(\sqrt{3}c)}}.}$$

Der Ansatz war wie in § 5 auf Symmetrie angelegt. Für $u = a + c$ ist $\chi'_2(u) = r'(u) = 0$. Setzt man daher $\chi_2(u) = \chi_2(2a + 2c - u)$ für $a + c \leq u \leq 2a + 2c$, so ist $\chi_2(u)$ auf der ganzen Fläche zweimal stückweise stetig differenzierbar; die Fläche ist unstarr.

Die numerischen Werte der Konstanten sind:

$$\begin{aligned} a &\sim 0,6806 & A &= \frac{1}{4} \\ b &\sim 2,645 & B &\sim 1,229 \\ c &\sim 1,107 & C &\sim 0,0709. \end{aligned}$$

2. Beispiel (Fig. 4).

Die Fläche besitzt wieder eine zur Achse senkrechte Symmetrieebene. Der Meridian ist aber diesmal ein Streckenzug; die Fläche besteht aus zwei Kreiskegeln und aus zwei Kreiskegelstümpfen, ist also besonders leicht durch ein Modell zu verwirklichen.

An den Knickstellen σ des Meridians versagt unsere bisherige Theorie. Hier tritt an Stelle von (4) die Eckenbedingung

$$(14) \quad \chi'_k(u) \Big|_{\sigma-0}^{\sigma+0} = -(k^2 - 1) \frac{\chi_k(\sigma)}{r(\sigma)} r'(u) \Big|_{\sigma-0}^{\sigma+0}.$$

Man erhält (14) aus (3) c), indem man verlangt, daß $\varphi_k(u)$ an der Knickstelle stetig bleibt (man kann (14) aber auch durch Grenzübergang aus (4) ableiten). Gilt (14) und ist auf den geradlinigen Stücken gemäß (4) $\chi''_k(u) = 0$, so ist (3) auf der ganzen Fläche durch ein System stetiger stückweise linearer Funktionen erfüllt, liefert also einen Biegungsvektor \mathfrak{z} , der, außer höchstens in den Polen, stetig und stückweise stetig differenzierbar ist.

An den Polen tritt an Stelle der Betrachtungen von § 2 die Forderung $\varphi_k(u) = \psi_k(u) = \chi_k(u) = 0$. Sie ist für die Stetigkeit von \mathfrak{z} an den Polen notwendig und hinreichend, wie man ohne weiteres verifizieren kann.

Nun setzen wir, bei vorläufig unbestimmtem a , b , und für $k = 2$:

$$\begin{aligned} r &= u & \text{für } 0 \leq u \leq 1 \\ r &= \frac{3}{2}u - \frac{1}{2} & \text{„ } 1 \leq u \leq a \\ r(u) &= r(2a - u) & \text{„ } a \leq u \leq 2a \\ \chi_2(u) &= u & \text{„ } 0 \leq u \leq 1 \\ \chi_2(u) &= bu + 1 - b & \text{„ } 1 \leq u \leq a. \end{aligned}$$

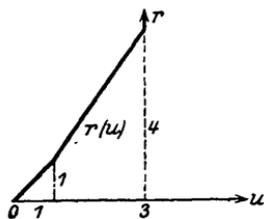


Fig. 4.

Zur Bestimmung von b hat man (14):

$$b - 1 = -3 \left(\frac{3}{2} - 1 \right); \quad \underline{b = -\frac{1}{2}}.$$

Jetzt bestimmen wir a so, daß $\chi_2(a) = 0$. Also $-\frac{a}{2} + \frac{3}{2} = 0$; $a = 3$. Setzen wir $\chi_2(u) = -\chi_2(2a - u)$ für $a \leq u \leq 2a$, so erfüllt $\chi(u)$ (14) für $u = a$ und offenbar alle übrigen Forderungen für $0 \leq u \leq 2a$. Unsere Fläche ist also in der Tat unstarr.

Einen unstarren Meridian liefert auch der Wert $a = \frac{7}{3}$. (14) ist nämlich in $u = a = \frac{7}{3}$ erfüllt, wenn man $\chi_2(u) = +\chi_2(2a - u)$ definiert. Für $u = a = \frac{7}{3}$ ist $\varphi_2(u) = 0$, wie aus (3) c) zu verifizieren. Das bedeutet aber: Die ϵ -Komponente von \mathfrak{z} verschwindet in der Symmetrieebene; jede von dieser abgeschnittene Flächenhälfte gestattet also eine „Gleitverbiegung“ nach Liebmann³⁾.

Alle Komponenten von \mathfrak{z} haben wegen $k = 2$ die Periode π ; es ist am Modell schön zu beobachten, wie die Fläche nachgibt, wenn man sie an zwei diametralen Punkten des größten Breitenkreises zusammendrückt, wie sie dagegen widersteht, wenn man an drei oder mehr äquidistanten Punkten dieses Kreises zu drücken sucht. Ebenso gestattet sie keine Relativbewegung ihrer Spitzen, weil dort $\varphi_k(u) = \psi_k(u) = \chi_k u = 0$, also $\mathfrak{z}_k = 0$ für $k \geq 2$.

Modelle für $k = 3$ müssen natürlich auf Druck in drei äquidistanten Punkten eines Breitenkreises ansprechen.

(Eingegangen am 15. 12. 1928.)