Zur Fortsetzbarkeit gewisser Dirichletscher Reihen.

Von

Kurt Mahler in Krefeld.

In der Arbeit: „Über analytische Funktionen und die Verteilung der Zahlen mod. Eins“ [1]) bewies E. Hecke für quadratische Irrationalzahlen o, daß die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{no-[no]-\frac{1}{2}}{n^s} \qquad (s=\sigma+ti)$$

sich als meromorphe Funktion von s in die ganze Ebene fortsetzen läßt und allein an den Stellen

$$s=-2k+\frac{2k^*\pi i}{\log\eta} \qquad \begin{pmatrix} k=0,1,2,\ldots \\ k^*=0,\mp 1,\mp 2,\ldots \end{pmatrix}$$

Pole höchstens erster Ordnung haben kann; dabei bedeutet η eine gewisse positive Einheit des durch o erzeugten Zahlkörpers.

Einen ganz anderen Beweis für den gleichen Satz lieferten G. H. Hardy und J. E. Littlewood in der gemeinsamen Arbeit: „The analytic character of a Dirichlet's series considered by Hecke“ [2]).

Im folgenden wird ein weiterer Beweis dargestellt, und zwar für den allgemeineren Satz:

Seien $f(x_1 x_2)$ und $g(x_1 x_2)$ zwei Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad m bzw. n; $f^{(m)}(x_1 x_2)$ der höchste homogene Bestandteil von $f(x_1 x_2)$; $r(x_1 x_2)=f(x_1 x_2)-f^{(m)}(x_1 x_2)$; die natürliche Zahl d sei gleich 2, wenn $r(x_1 x_2)$ identisch verschwindet, sonst gleich 1. Es gelte

$$f(x_1 x_2)>0 \quad \textit{für} \quad x_1\geqq 1,\, x_2\geqq 1;$$
$$f^{(m)}(x_1 x_2)>0 \quad \textit{für} \quad x_1\geqq 0,\; x_2\geqq 0,\; x_1+x_2>0.$$

---

[1]) Abh. a. d. math. Sem. d. Hamb. Univ. **1** (1922), S. 54.

[2]) Abh. a. d. math. Sem. d. Hamb. Univ. **3** (1924), S. 57.

o sei eine positive quadratische Irrationalzahl, ζ die erzeugende positive Einheit des Zahlkörpers $K(o)$.

Die Funktion

$$Z_0(s\,|\,f(x_1 x_2),\ g(x_1 x_2)) = \sum_{x_2=1}^{\infty} \sum_{x_1=1}^{[o\,x_2]} g(x_1 x_2) f(x_1 x_2)^{-s}$$

läßt sich meromorph in die ganze Ebene fortsetzen; sie hat einfache Pole höchstens an den Stellen

$$s = \frac{n+2-k}{m} \qquad \left(\begin{array}{l} k = 0, 1, 2, \ldots \\ k^* = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots \end{array}\right)$$
$$s = \frac{n-dk}{m} + \frac{2k^*\pi i}{m \log \eta}$$

und zwar bedeutet η eine ganze Potenz von ζ. In jedem endlichen Streifen

$$\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$$

gilt gleichmäßig in s bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$:

$$Z(s\,|\,f(x_1 x_2),\ g(x_1 x_2)) = O(e^{\varepsilon |t|}),$$

wenn s um mindestens eine feste positive, beliebig kleine Strecke von den vorigen Polen entfernt bleibt. —

Die Hauptmittel des Beweises sind ein bekannter Satz von Mellin und der folgende Hilfssatz:

Es sei l eine natürliche Zahl, ω eine positive und ω' eine komplexe Konstante. Die Reihe

$$Z(s, l\,|\,\omega, \omega') = \sum_{x_1=1}^{\infty} \sum_{x_2=1}^{\infty} \left(\frac{x_1 + \omega' x_2}{x_1 + \omega x_2}\right)^l (x_1 + \omega x_2)^{-s}$$

läßt sich meromorph in die ganze Ebene fortsetzen; sie hat einfache Pole höchstens an den Stellen

$$s = 2, 1, 0, \ldots, 2 - l.$$

In jedem endlichen Streifen

$$2 - k < \sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2,$$

aus dem um jedem der Pole herum eine beliebig kleine Umgebung entfernt ist, besteht gleichmäßig in s und l die Ungleichung

$$|Z(s, l\,|\,\omega, \omega')| \leqq c\left(2\,\frac{1 + |\omega'|}{\min(1, \omega)}\right)^l (1 + |t|)^{2k},$$

wo die Zahl $c > 0$ allein von $\omega, \omega', \sigma_1, \sigma_2$ abhängt.

Der Beweis dieses Satzes wird im ersten Kapitel dargestellt; man benutzt dabei die bekannte Eulersche Summenformel. Auch Hardy und Littlewood machen in ihrer Arbeit von einem ähnlichen Hilfssatz Gebrauch, der jedoch viel tiefer und schwerer zu beweisen ist.

Im zweiten Kapitel wird für einen beliebigen irrationalen echten Bruch

$$o = \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \frac{1|}{|a_3} + \cdots, \qquad o = \frac{1}{a_1 + o_1}, \qquad o_1 = \frac{1}{a_2 + o_2}, \qquad o_2 = \frac{1}{a_3 + o_3}, \ldots$$

die Identität

$$Z_o(s\,|\,f(x_1 x_2), g(x_1 x_2)) = Z_\nu(s\,|\,f(x_1 x_2), g(x_1 x_2)) + \\ + (-1)^\nu Z_{o_\nu}(s\,|\,f_\nu(x_1 x_2), g_\nu(x_1 x_2))$$

nachgewiesen; dabei bedeutet $Z_\nu(s\,|\,f(x_1 x_2), g(x_1 x_2))$ eine meromorphe Funktion mit Polen 1. Ordnung allein bei

$$s = \frac{n+2-k}{m} \qquad (k = 0, 1, \ldots),$$

es ist p_ν und q_ν der ν-te Näherungsnenner und -zähler von o und

$$z_1^{(\nu)} = p_\nu z_1 + q_\nu z_2, \qquad z_2^{(\nu)} = p_{\nu-1} z_1 + q_{\nu-1} z_2,$$
$$f_\nu(z_1 z_2) = f(z_1^{(\nu)}, z_2^{(\nu)}), \qquad g_\nu(z_1 z_2) = g(z_1^{(\nu)}, z_2^{(\nu)}).$$

Im dritten Kapitel wird o als quadratische Irrationalzahl mit reinperiodischem Kettenbruch angenommen: $o = o_\nu$ und ν gerade. Aus dem obigen Hilfssatz und der vorigen Funktionalgleichung folgt dann der Satz:

Die Reihe

$$Z_o(s, l) = \sum_{x_2=1}^{\infty} \sum_{x_1=1}^{[o x_2]} \left(\frac{x_1 + o' x_2}{x_1 + o x_2}\right)^l (x_1 + o x_2)^{-s},$$

wo o' die zu o konjugierte Irrationalzahl ist, läßt sich in die ganze Ebene meromorph fortsetzen, hat einfache Pole höchstens bei

$$s = 2, 1, 0, \ldots, 2 - l; \qquad s = -2l + \frac{2k^* \pi i}{\log \eta}, \qquad \eta = p_\nu + p_{\nu-1} o$$
$$(k^* = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots)$$

und befriedigt gleichmäßig in jedem endlichen Streifen

$$2 - k < \sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

die Ungleichung

$$|Z_o(s, l)| \leqq \Gamma C^l (1 + |t|)^{2k}$$

mit zwei positiven Konstanten C und Γ, die von s und l nicht abhängen, wenn s von den Polen mindestens eine feste positive, beliebig kleine Strecke entfernt bleibt.

Im vierten Kapitel wird gleichfalls $o = o_\nu$ angenommen und

$$g(x_1 x_2) = (x_1 + o x_2)^{n-l} (x_1 + o' x_2)^l,$$

dagegen $f(x_1 x_2)$ gleich einer Form. Dann existiert zu einer beliebig großen natürlichen Zahl N eine Zahl Λ_{N} und eine Form m-ten Grades

$\mathfrak{F}_{\mathsf{N}}(x_1 x_2)$, so daß

$$f_{\mathsf{N}}(x_1 x_2) = \Lambda_{\mathsf{N}}((x_1 + o x_2)^m + F_{\mathsf{N}}(x_1 x_2))$$

ist, während mit wachsendem N alle Koeffizienten von $F_{\mathsf{N}}(x_1 x_2)$ gegen Null streben. Für großes $\mathsf{N} = N\nu$ ist somit

$$Z_o(s \mid f(x_1 x_2),\ g(x_1 x_2)) = Z_{\mathsf{N}}(s \mid f(x_1 x_2),\ g(x_1 x_2)) +$$

$$+ \Lambda_{\mathsf{N}}^{-s} \eta^{N(n-2l)} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \binom{-s}{\lambda} Z_o(m(s+\lambda) \mid x_1 + o x_1,\ g(x_1 x_2)\, \mathfrak{F}_{\mathsf{N}}(x_1 x_2)^{\lambda})$$

und aus dieser Entwicklung läßt sich nach dem Ergebnis des dritten Kapitels die Fortsetzbarkeit herleiten.

Im letzten Kapitel lassen sich durch einige triviale Schlüsse die letzten Beschränkungen über o, $f(x_1 x_2)$ und $g(x_1 x_2)$ aufheben und es folgt dann endlich der angegebene allgemeine Satz.

I.

1. Ein allgemeiner Satz von Mellin sagt aus[3]):

„Die beiden Polynome

$$f(x_1 \dots x_p) = \sum_{h=0}^{m} f^{(h)}(x_1 \dots x_p), \qquad g(x_1 \dots x_p) = \sum_{k=0}^{n} g^{(k)}(x_1 \dots x_p)$$

mit reellen Koeffizienten seien vom Grad m und n in den x; die Formen

$$f^{(h)}(x_1 \dots x_p),\quad g^{(k)}(x_1 \dots x_p)$$

bedeuten ihre homogenen Bestandteile der Dimension h und k. Es gelte

$$f(x_1 \dots x_p) > 0 \quad \text{für} \quad x_1 \geqq 0, \dots, x_p \geqq 0;$$

$$f^{(m)}(x_1 \dots x_p) > 0 \quad \text{für} \quad x_1 \geqq 0, \dots, x_p \geqq 0, \quad \sum_{l=1}^{p} x_l > 0.$$

Dann konvergiert die Summe

$$Z(s) = \sum_{x_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{x_p=1}^{\infty} g(x_1 \dots x_p) f(x_1 \dots x_p)^{-s}, \qquad (s = \sigma + ti)$$

für

$$\sigma > \frac{n+p}{m}$$

und läßt sich in die ganze Ebene als meromorphe Funktion fortsetzen, mit einfachen Polen allein bei

$$s = \frac{n+p-k}{m} \qquad \begin{pmatrix} k = 0, 1, 2, \dots \\ s \neq 0, -1, -2, \dots \end{pmatrix}.$$

---

[3]) Hj. Mellin, Eine Formel für den Logarithmus transzendenter Funktionen von endlichem Geschlecht, Acta soc. sc. fenn. 29 (1900), Nr. 4. Ein neuer Beweis mit der obigen Größenabschätzung steht in meiner Arbeit: Über einen Satz von Mellin, Math. Annalen 100 (1928), S. 384.

In jedem endlichen Streifen

$$\frac{n+p-k}{m} < \sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

gilt gleichmäßig in σ für große $|t|$:

$$Z(s) = O(|t|^{pk}).“$$

Genau die gleichen Eigenschaften hat auch die Summe

$$Z^*(s) = \sum_{x_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{x_p=0}^{\infty} g(x_1 \ldots x_p) f(x_1 \ldots x_p)^{-s},$$

denn sie ergibt sich durch Addition endlichvieler Funktionen der vorigen Art. Folglich gilt das gleiche auch für die ursprüngliche Funktion

$$Z(s) = \sum_{x_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{x_p=1}^{\infty} g(x_1 \ldots x_p) f(x_1 \ldots x_p)^{-s},$$

wenn nur

$$f(x_1 \ldots x_p) > 0 \quad \text{für} \quad x_1 \geqq 1, \ldots, x_p \geqq 1;$$

$$f^{(m)}(x_1 \ldots x_p) > 0 \quad \text{für} \quad x_1 \geqq 0, \ldots, x_p \geqq 0, \quad \sum_{l=1}^{p} x_l > 0$$

angenommen wird.

2. Es ist nötig, noch einige Eigenschaften der speziellen Mellinschen Funktion

$$Z(s, l \mid \omega_1 \omega_2) = Z(s, l) = \sum_{x_1=1}^{\infty} \sum_{x_2=1}^{\infty} \left(\frac{x_1 + \omega' x_2}{x_1 + \omega x_2}\right)^l (x_1 + \omega x_2)^{-s}$$

herzuleiten; dabei sei ω eine positive, ω' eine beliebige Konstante und l eine nichtnegative ganze rationale Zahl. Die Eulersche Summenformel liefert die Umformung (k = bel. nat. Zahl)[4]:

$$Z(s, l) = \left(\frac{1+\omega'}{1+\omega}\right)^l (1+\omega)^{-s} + \sum_{l_1=0}^{k} \sum_{l_2=0}^{k} J_{l_1 l_2}^{(k)}(s, l),$$

$$J_{l_1 l_2}^{(k)}(s, l) = \iint_{\mathfrak{S}} H_{l_1 l_2}^{(k)}(x_1 x_2) \frac{\partial^{l_1+l_2}}{\partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2}} \left\{\left(\frac{x_1 + \omega' x_2}{x_1 + \omega x_2}\right)^l (x_1 + \omega x_2)^{-s}\right\} dx_1 dx_2.$$

Die Punktmenge $\mathfrak{S}$ ist hier durch

$$x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0, \quad \max(x_1 x_2) \geqq 1$$

definiert; die $(k+1)^2$ Funktionen

$$H_{l_1 l_2}^{(k)}(x_1 x_2) \qquad \begin{pmatrix} l_1 = 0, 1, 2, \ldots, k \\ l_2 = 0, 1, 2, \ldots, k \end{pmatrix}$$

---

[4]) Vergleiche zu der hier verwendeten Form der Eulerschen Summenformel meine Arbeit [3]). Mit den dortigen Bezeichnungen ist hier gleichzusetzen:

$$H_{l_1 l_2}^{(k)}(x_1 x_2) = h_{l_1}^{(k)}(x_1) \cdot h_{l_2}^{(k)}(x_2).$$

sind von s, l, ω, ω' unabhängig, in allen Punkten von $\mathfrak{S}$ absolut genommen unterhalb einer allein von k abhängigen Konstanten, und auch noch von x_1 und x_2 unabhängig, wenn

$$l_1 < k, \quad l_2 < k$$

ist.

3. Es sei r eine positive Veränderliche, φ eine Veränderliche im Intervall

$$0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Mit $\xi_1(\varphi)$, $\xi_2(\varphi)$, $\varrho(\varphi)$ seien folgende drei stetigen Funktionen bezeichnet:

$$\xi_1(\varphi) = \begin{cases} 1\,, \\ \operatorname{ctg}\varphi\,, \end{cases} \quad \xi_2(\varphi) = \begin{cases} \operatorname{tg}\varphi\,, \\ 1\,, \end{cases} \quad \varrho(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2\varphi} & \text{für} \quad 0 \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{4}, \\[2ex] \dfrac{1}{\sin^2\varphi} & \phantom{\text{für}} \quad \dfrac{\pi}{4} \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Wenn

$$x_1 = r\,\xi_1(\varphi), \quad x_2 = r\,\xi_2(\varphi)$$

gesetzt wird, so ist die Funktionaldeterminante dieser Transformation gleich

$$\frac{d(x_1 x_2)}{d(r\varphi)} = \varrho(\varphi)\cdot r.$$

Die Menge aller Punkte (x_1, x_2) mit

$$r \geqq 1, \quad 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$$

ist mit $\mathfrak{S}$ identisch.

Man zeigt leicht die Gleichung

$$\frac{\partial^{l_1+l_2}}{\partial x_1^{l_1}\,\partial x_2^{l_2}}\left\{\left(\frac{x_1+\omega' x_2}{x_1+\omega x_2}\right)^l (x_1+\omega x_2)^{-s}\right\} =$$

$$= (l_1+l_2)!\sum_{\lambda_1=0}^{l_1}\sum_{\lambda_2=0}^{l_2}\frac{\binom{l_1}{\lambda_1}\binom{l_2}{\lambda_2}}{\binom{l_1+l_2}{\lambda_1+\lambda_2}}\,\omega^{l_2-\lambda_2}\,\omega'^{\lambda_2}\binom{l}{\lambda_1+\lambda_2}\binom{-s}{l_1+l_2-\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{x_1+\omega' x_2}{x_1+\omega x_2}\right)^{l-\lambda_1-\lambda_2}(x_1+\omega x_2)^{-s-l_1-l_2}.$$

Aus ihr ergibt sich die Zerlegung

$$J^{(k)}_{l_1 l_2}(s, l) =$$

$$= (l_1+l_2)!\sum_{\lambda_1=0}^{l_1}\sum_{\lambda_2=0}^{l_2}\frac{\binom{l_1}{\lambda_1}\binom{l_2}{\lambda_2}}{\binom{l_1+l_2}{\lambda_1+\lambda_2}}\,\omega^{l_2-\lambda_2}\,\omega'^{\lambda_2}\binom{l}{\lambda_1+\lambda_2}\binom{-s}{l_1+l_2-\lambda_1-\lambda_2}J^{*(k)}_{l_1 l_2}(s+l_1+l_2,\ l-\lambda_1-\lambda_2),$$

$$J^{*(k)}_{l_1 l_2}(s, l) = \iint\limits_{\mathfrak{S}} H^{(k)}_{l_1 l_2}(x_1 x_2)\left(\frac{x_1+\omega' x_2}{x_1+\omega x_2}\right)^l (x_1+\omega x_2)^{-s}\,dx_1\,dx_2.$$

4. Es sei erstens

$$0 \leqq l_1 \leqq k-1, \quad 0 \leqq l_2 \leqq k-1.$$

Da $H^{(k)}_{l_1 l_2}(x_1 x_2)$ konstant ist, so kann in diesem Fall die Integration nach r ausgeführt werden, so daß sich der Ausdruck ergibt:

$$(2 - s - l_1 - l_2)\, J^{(k)}_{l_1 l_2}(s, l) =$$

$$= (l_1 + l_2)!\, H^{(k)}_{l_1 l_2}(x_1 x_2) \sum_{\lambda_1=0}^{l_1} \sum_{\lambda_2=0}^{l_2} \frac{\binom{l_1}{\lambda_1}\binom{l_2}{\lambda_2}}{\binom{l_1+l_2}{\lambda_1+\lambda_2}}\, \omega^{l_2-\lambda_2}\, \omega'^{\lambda_2} \binom{l}{\lambda_1+\lambda_2} \binom{-s}{l_1+l_2-\lambda_1-\lambda_2} \times$$

$$\times J^*(s + l_1 + l_2,\ l - \lambda_1 - \lambda_2),$$

$$J^*(s, l) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varrho \left(\frac{\xi_1 + \omega' \xi_2}{\xi_1 + \omega \xi_2}\right)^l (\xi_1 + \omega \xi_2)^{-s}\, d\varphi.$$

Ihm entnimmt man:

Die Funktion

$$J^{(k)}_{l_1 l_2}(s, l) = \iint_{\mathfrak{S}} H^{(k)}_{l_1 l_2}(x_1 x_2) \frac{\partial^{l_1+l_2}}{\partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2}} \left\{\left(\frac{x_1 + \omega' x_2}{x_1 + \omega x_2}\right)^l (x_1 + \omega x_2)^{-s}\right\} dx_1\, dx_2$$

$$(l_1, l_2 = 0, 1, \ldots, k-1)$$

ist meromorph und hat einen einzigen einfachen Pol höchstens an der Stelle

$$s = 2 - l_1 - l_2, \qquad \text{falls } l_1 + l_2 \leqq l.$$

In jedem endlichen Streifen

$$\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2,$$

aus dem eine beliebig kleine Umgebung des Poles entfernt ist, besteht die Ungleichung

$$|J^{(k)}_{l_1 l_2}(s, l)| \leqq c_1 \cdot \left(2 \cdot \frac{1 + |\omega'|}{\min(1, \omega)}\right)^l (1 + |t|)^{l_1+l_2-1},$$

und die Konstante c_1 hängt hier allein von ω, ω', k, σ_1, σ_2 ab.

Zweitens sei mindestens eine der Zahlen l_1 und l_2 gleich k. In diesem Fall konvergiert das Integral

$$J^{*(k)}_{l_1 l_2}(s, l) = \int_1^\infty dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} H^{(k)}_{l_1 l_2}(r\xi_1, r\xi_2) \left(\frac{\xi_1 + \omega' \xi_2}{\xi_1 + \omega \xi_2}\right)^l (\xi_1 + \omega \xi_2)^{-s} r^{1-s} \varrho\, d\varphi$$

gewiß absolut und gleichmäßig in jeder Halbebene

$$2 < \sigma_1 \leqq \sigma$$

und stellt folglich hier eine reguläre Funktion dar. Aus der Darstellung von $J^{(k)}_{l_1 l_2}(s, l)$ als Summe solcher Integrale folgt, daß in jedem Streifen

$$2 - l_1 - l_2 < \sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$$

die Ungleichung

$$|J_{l_1 l_2}^{(k)}(s, l)| \leqq c_2 \left(2 \frac{1+|\omega'|}{\min(1, \omega)}\right)^l (1+|t|)^{l_1+l_2}$$

besteht, wobei die Konstante c_2 allein von ω, ω', k, σ_1, σ_2 abhängt.

5. Die beiden vorigen Ergebnisse wenden wir auf die Formel

$$Z(s, l) = \left(\frac{1+\omega'}{1+\omega}\right)^l (1+\omega)^{-s} + \sum_{l_1=0}^{k} \sum_{l_2=0}^{k} J_{l_1 l_2}^{(k)}(s, l)$$

an; man gelangt so zu dem Resultat:

Die Reihe

$$Z(s, l \mid \omega_1 \omega_2) = Z(s, l) = \sum_{x_1=1}^{\infty} \sum_{x_2=1}^{\infty} \left(\frac{x_1+\omega' x_2}{x_1+\omega x_2}\right)^l (x_1+\omega x_2)^{-s}$$

läßt sich als meromorphe Funktion in die ganze Ebene fortsetzen; sie hat einfache Pole höchstens an den Stellen

$$s = 2, 1, 0, -1, -2, \ldots, 2-l.$$

In jedem endlichen Streifen

$$2-k < \sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

aus dem um jedem der Pole eine beliebig kleine Umgebung entfernt ist, besteht die Ungleichung

$$|Z(s, l)| \leqq c \left(2 \frac{1+|\omega'|}{\min(1, \omega)}\right)^l (1+|t|)^{2k}$$

mit einer Zahl c, die allein von ω, ω', k, σ_1, σ_2 abhängt.

II.

6. Es seien

$$f(x_1 x_2) = \sum_{h=0}^{m} f^{(h)}(x_1 x_2), \qquad g(x_1 x_2) = \sum_{h=0}^{n} g^{(k)}(x_1 x_2)$$

zwei Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad m und n in den x; die Formen $f^{(h)}(x_1 x_2)$ und $g^{(k)}(x_1 x_2)$ bedeuten ihre homogenen Bestandteile der Dimension h und k. Das Polynom $f(x_1 x_2)$ genüge den Ungleichungen

$$f(x_1 x_2) > 0 \quad \text{für} \quad x_1 \geqq 1,\ x_2 \geqq 1,$$

$$f^{(m)}(x_1 x_2) > 0 \quad \text{für} \quad x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_1 + x_2 > 0.$$

o bedeute eine positive Irrationalzahl, a eine natürliche Zahl, und es seien vier Dirichletsche Reihen definiert durch

$$Z_o(s) = Z_o(s \mid f(x_1 x_2),\, g(x_1 x_2)) = \sum_{x_2=1}^{\infty} \sum_{x_1=1}^{[o x_2]} g(x_1 x_2) f(x_1 x_2)^{-s},$$

$$Z\ (s) = Z\ (s \mid f(x_1 x_2),\, g(x_1 x_2)) = \sum_{x_1=1}^{\infty} \sum_{x_2=1}^{\infty} g(x_1 x_2) f(x_1 x_2)^{-s},$$

$$Z_a(s) = Z_a(s \mid f(x_1 x_2),\, g(x_1 x_2)) = \sum_{x_2=1}^{\infty} \sum_{x_1=1}^{a x_2} g(x_1 x_2) f(x_1 x_2)^{-s},$$

$$Z^a(s) = Z^a(s \mid f(x_1 x_2),\, g(x_1 x_2)) = \sum_{x_1=1}^{\infty} \sum_{x_2=a x_1+1}^{\infty} g(x_1 x_2) f(x_1 x_2)^{-s}.$$

Alle vier konvergieren in der Halbebene

$$\sigma > \frac{n+2}{m}.$$

Die letzten drei Reihen befriedigen die Identität

$$Z^a(s \mid f(x_1 x_2),\, g(x_1 x_2)) = \\ = Z(s \mid f(x_1 x_2),\, g(x_1 x_2)) - Z_a(s \mid f(x_2 x_1),\, g(x_2 x_1)),$$

während die erste den Gleichungen

$$Z_{\frac{1}{o}}(s \mid f(x_1 x_2),\, g(x_1 x_2)) = \\ = Z\ (s \mid f(x_1 x_2),\, g(x_1 x_2)) - Z_o(s \mid f(x_2 x_1),\, g(x_2 x_1)),$$

$$Z_{a+o}(s \mid f(x_1 x_2),\, g(x_1 x_2)) = \\ = Z_a(s \mid f(x_1 x_2),\, g(x_1 x_2)) + Z_o(s \mid f(x_1 + a x_2, x_2),\, g(x_1 + a x_2, x_2)),$$

$$Z_{\frac{1}{a+o}}(s \mid f(x_1 x_2),\, g(x_1 x_2)) = \\ = Z^a(s \mid f(x_1 x_2),\, g(x_1 x_2)) - Z_o(s \mid f(a x_1 + x_2, x_1),\, g(a x_1 + x_2, x_1))$$

genügt.

7. Die Zahl o besitze den Kettenbruch

$$o = \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \frac{1|}{|a_3} + \dots, \qquad o = \frac{1}{a_1 + o_1}, \quad o_1 = \frac{1}{a_2 + o_2}, \quad o_2 = \frac{1}{a_3 + o_3}, \ \dots$$

sei also ein echter Bruch. Die zugehörigen Kettenbruch-Nenner und -Zähler werden durch die Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} p_{-1} &= 0, & p_0 &= 1, & p_{\mu+1} &= a_{\mu+1} p_\mu + p_{\mu-1}, \\ q_{-1} &= 1, & q_0 &= 0, & q_{\mu+1} &= a_{\mu+1} q_\mu + q_{\mu-1} \end{aligned}$$

bestimmt. Mit ihrer Hilfe werde gesetzt

$$\begin{aligned} x_1^{(\mu)} &= p_\mu x_1 + q_\mu x_2, & x_2^{(\mu)} &= p_{\mu-1} x_1 + q_{\mu-1} x_2, \\ f_\mu(x_1 x_2) &= f(x_1^{(\mu)} x_2^{(\mu)}), & g_\mu(x_1 x_2) &= g(x_1^{(\mu)} x_2^{(\mu)}). \end{aligned}$$

Offenbar genügt das Polynom $f_\mu(x_1 x_2)$ als Funktion von x_1 und x_2 denselben Ungleichungen wie $f(x_1 x_2)$.

Die wiederholte Anwendung der Funktionalgleichungen in 6. führt mit den vorigen Abkürzungen zu der Identität:

$$Z_0(s|f(x_1x_2), g(x_1x_2)) = Z_\nu(s|f(x_1x_2), g(x_1x_2)) + (-1)^\nu Z_{0\nu}(s|f_\nu(x_1x_2), g_\nu(x_1x_2)),$$

$$Z_\nu(s) = Z_\nu(s|f(x_1x_2),\ g(x_1x_2)) = \sum_{\mu=0}^{\nu-1}(-1)^\mu Z^{a_{\mu+1}}(s|f_\mu(x_1x_2),\ g_\mu(x_2x_2)).$$

8. Die Funktion

$$Z(s|f_\mu(x_1x_2), g_\mu(x_1x_2)) = \sum_{x_1=1}^{\infty}\sum_{x_2=1}^{\infty} g_\mu(x_1x_2),\ f_\mu(x_1x_2)^{-s}$$

ist von der in 1. betrachteten Art, ebenso

$$\begin{aligned} Z^a(s|f_\mu(x_1x_2),\ g_\mu(x_1x_2)) &= \sum_{x_1=1}^{\infty}\sum_{x_2=ax_1+1}^{\infty} g_\mu(x_1x_2)\ f_\mu(x_1x_2)^{-s} \\ &= \sum_{x_1=1}^{\infty}\sum_{x_2=1}^{\infty} g_\mu(x_1,\ ax_1+x_2)\ f_\mu(x_1,\ ax_1+x_2)^{-s}. \end{aligned}$$

Die beiden Funktionen $Z_a(s)$ und $Z_\nu(s)$ lassen sich aus endlichvielen solchen Summen zusammensetzen. Man gelangt folglich zu dem Ergebnis:

Die beiden Funktionen

$$Z(s|f_\mu(x_1x_2),\ g_\mu(x_1x_2)), \qquad Z^a(s|f_\mu(x_1x_2),\ g_\mu(x_1x_2))$$

und die beiden weiteren Funktionen

$$Z_a(s|f_\mu(x_1x_2),\ g_\mu(x_1x_2)), \qquad Z_\nu(s|f(x_1x_2),\ g(x_1x_2))$$

lassen sich in die ganze Ebene meromorph fortsetzen; sie haben einfache Pole höchstens an den Stellen

$$s = \frac{n+2-k}{m}, \qquad \begin{pmatrix} k = 0,\ 1,\ 2, \ldots \\ s \neq 0,\ -1,\ -2, \ldots \end{pmatrix},$$

und sie sind für $|t| \to \infty$ gleichmäßig in σ von der Größenordnung

$$O(|t|^{2k})$$

in jedem endlichen Streifen

$$\frac{n+2-k}{m} < \sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

III.

9. Der Kettenbruch o sei rein periodisch, ν die Länge seiner Periode, so daß

$$o = o_\nu$$

ist. Ohne Einschränkung kann ν gerade genommen werden. Die Zahl o ist eine quadratische Irrationalität und genügt der Gleichung

$$x = \frac{q_\nu + q_{\nu-1}x}{p_\nu + p_{\nu-1}x},$$

während die andere Wurzel gleich

$$o' = \frac{q_{\nu-1} - p_\nu}{p_{\nu-1}} - o = -\frac{q_\nu}{p_{\nu-1}\, o}$$

ist. Offenbar ist o' im Gegensatz zu o negativ. Die Zahlen o und o' sind die einzigen Wurzeln des Gleichungssystems

$$x = \frac{q_\nu + q_{\nu-1} x^{(1)}}{p_\nu + p_{\nu-1} x^{(1)}},\quad x^{(1)} = \frac{q_\nu + q_{\nu-1} x^{(2)}}{p_\nu + p_{\nu-1} x^{(2)}}, \ldots, x^{(k-1)} = \frac{q_\nu + q_{\nu-1} x}{p_\nu + p_{\nu-1} x},\quad (k = 1, 2, \ldots),$$

welchen Wert auch k hat.

Vermöge der besonderen Wahl von o nimmt die Funktionalgleichung für $Z_o(s)$ die Form an:

$$Z_o(s \mid f(x_1 x_2), g(x_1 x_2)) = Z_\nu(s \mid f(x_1 x_2), g_\nu(x_1 x_2)) + Z_o(s \mid f_\nu(x_1 x_2), g_\nu(x_1 x_2)).$$

10. Es sei speziell

$$f(x_1 x_2) = \prod_{h=1}^{m} (x_1 + \varphi_h x_2), \qquad g(x_1 x_2) = \prod_{k=1}^{n} (x_1 + \psi_k x_2)$$

und ferner gebe es zwei Konstante φ und ψ, so daß

$$f_\nu(x_1 x_2) \equiv \varphi f(x_1 x_2), \qquad g_\nu(x_1 x_2) \equiv \psi g(x_1 x_2)$$

ist. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß jede der Zahlen

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$$

einem Gleichungssystem

$$x = \frac{q_\nu + q_{\nu-1} x^{(1)}}{p_\nu + p_{\nu-1} x^{(1)}}, \qquad x^{(1)} = \frac{q_\nu + q_{\nu-1} x^{(2)}}{p_\nu + p_{\nu-1} x^{(2)}}, \quad \ldots, \quad x^{(k-1)} = \frac{q_\nu + q_{\nu-1} x}{p_\nu + p_{\nu-1} x}$$

genügt. Also sind sie entweder gleich o oder gleich o'.

Wegen der Ungleichung

$$f^{(m)}(x_1 x_2) > 0 \quad \text{für} \quad x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_1 + x_2 > 0$$

kommt für $f(x_1 x_2)$ nur die Wahl

$$f(x_1 x_2) = (x_1 + o\, x_2)^m$$

in Frage. Dagegen darf $g(x_1 x_2)$ gleich irgendeiner der $n+1$ Funktionen

$$g(x_1 x_2) = (x_1 + o\, x_2)^{n-l} (x_1 + o' x_2)^l \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

sein. Wegen der Identität

$$Z_o(s \mid (x_1 + o\, x_2)^m, g(x_1 x_2)) = Z_o(ms \mid x_1 + o x_2, g(x_1 x_2))$$

darf folglich ohne Einschränkung

$$m = 1, \qquad f(x_1 x_2) = x_1 + o\, x_2, \qquad g(x_1 x_2) = (x_1 + o\, x_2)^{n-l} (x_1 + o' x_2)^l$$

genommen werden. Die Multiplikatoren φ und ψ sind gleich

$$\varphi = \eta, \quad \psi = \eta^{n-2l}, \qquad \eta = p_\nu + p_{\nu-1}\, o,$$

wobei die Gleichung

$$(p_\nu + p_{\nu-1}\, o)\,(p_\nu + p_{\nu-1}\, o') = 1$$

benutzt ist. Die Zahl η ist eine Einheit des Körpers $K(o)$.

Die Funktionalgleichung für $Z_o(s)$ nimmt die Form an:

$$Z_o(s\,|\,f(x_1 x_2), g(x_1 x_2)) = \frac{Z_\nu(s\,|\,f(x_1 x_2), g(x_1 x_2))}{1-\eta^{-s+n-2l}},$$

so daß man zu folgenden Aussagen gelangt:

Die Funktion

$$Z_o(s,l) = Z_o(s+n\,|\,x_1 + o x_2, (x_1 + o x_2)^{n-l}(x_1 + o' x_2)^l)$$
$$= \sum_{x_2=1}^{\infty} \sum_{x_1=1}^{[o x_2]} \left(\frac{x_1 + o' x_2}{x_1 + o x_2}\right)^l (x_1 + o x_2)^{-s}$$

gestattet die explizite Darstellung

$$Z_o(s\,|\,l) = \frac{1}{1-\eta^{-s-2l}} \cdot \sum_{\mu=0}^{\nu-1} (-1)^\mu \frac{(p_\mu + o' p_{\mu+1})^l}{(p_\mu + o p_{\mu+1})^{s+l}} \cdot Z\left(s,\, l\,\middle|\,\frac{q_\mu + o q_{\mu+1}}{p_\mu + o p_{\mu+1}},\, \frac{q_\mu + o' q_{\mu+1}}{p_\mu + o' p_{\mu+1}}\right).$$

Sie läßt sich also in die ganze Ebene als meromorphe Funktion fortsetzen; ihre Pole sind einfach und liegen in den Punkten

$$s = 2, 1, 0, \ldots, 2-l,$$
$$s = -2l + \frac{2k^* \pi i}{\log \eta} \qquad (k^* = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots).$$

Bleibt s von diesen Punkten um mehr als eine feste positive Strecke entfernt, so gilt gleichmäßig in s und l im Streifen

$$2 - k < \sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

die Ungleichung:

$$|Z_o(s,l)| \leqq \sum_{\mu=0}^{\nu-1} c_\mu \frac{(p_\mu + |o'|\, p_{\mu+1})^l}{(p_\mu + o p_{\mu+1})^{l+\sigma}} \left\{ 2\, \frac{1 + \left|\frac{q_\mu + o' q_{\mu+1}}{p_\mu + o' p_{\mu+1}}\right|}{\min\left(1, \frac{q_\mu + o q_{\mu+1}}{p_\mu + o p_{\mu+1}}\right)} \right\}^l (1+|t|)^{2k}$$

mit ν Konstanten

$$c_0, c_1, \ldots, c_{\nu-1} > 0,$$

die von s und l nicht abhängen. Es gibt also auch zwei Konstante

$$C > 0, \quad \Gamma > 0,$$

die von s und l nicht abhängen, so daß

$$|Z_o(s,l)| \leqq \Gamma\, C^l\, (1+|t|)^{2k}$$

ist, unter den vorigen Bedingungen.

IV.

11. Die Funktion $f(x_1 x_2)$ sei jetzt gleich

$$f(x_1 x_2) = \prod_{h=1}^{m} (o_h^{(1)} x_1 + o_h^{(2)} x_2),$$

also in eine Form ausgeartet. Die Quotienten $\frac{o_h^{(1)}}{o_h^{(2)}}$ sind entweder positiv oder zu je zweien konjugiert komplex. Es ist

$$f_N(x_1 x_2) = \prod_{h=1}^{m} \{(o_h^{(1)} p_N + o_h^{(2)} p_{N-1}) x_1 + (o_h^{(1)} q_N + o_h^{(2)} q_{N-1}) x_2\}.$$

Wenn erstens $\frac{o_h^{(1)}}{o_h^{(2)}}$ positiv ist, so gilt

$$\lim_{N\to\infty} \frac{o_h^{(1)} q_N + o_h^{(2)} q_{N-1}}{o_h^{(1)} p_N + o_h^{(2)} p_{N-1}} = o$$

wegen

$$\lim_{N\to\infty} \frac{q_N}{p_N} = \lim_{N\to\infty} \frac{q_{N-1}}{p_{N-1}} = o.$$

Zweitens sei $\frac{o_h^{(1)}}{o_h^{(2)}}$ nichtreell:

$$o_h^{(1)} \neq 0, \quad o_h^{(2)} \neq 0, \quad o_h^{(2)} = (\alpha + \beta_i) o_h^{(1)}, \quad \beta \neq 0;$$

dann ist

$$\Omega_N = \frac{o_h^{(1)} q_N + o_h^{(2)} q_{N-1}}{o_h^{(1)} p_N + o_h^{(2)} p_{N-1}} = \frac{q_N + (\alpha+\beta i) q_{N-1}}{p_N + (\alpha+\beta i) p_{N-1}}$$

$$= \frac{\frac{q_N}{p_N} \cdot \frac{p_N}{p_{N-1}} + (\alpha+\beta i) \frac{q_{N-1}}{p_{N-1}}}{\frac{p_N}{p_{N-1}} + (\alpha+\beta i)} = \frac{q_{N-1}}{p_{N-1}} \cdot \frac{\left(\frac{q_N}{p_N} \cdot \frac{p_{N-1}}{q_{N-1}}\right) \frac{p_N}{p_{N-1}} + (\alpha+\beta i)}{\frac{p_N}{p_{N-1}} + (\alpha+\beta i)},$$

ferner, wenn N ins Unendliche strebt:

$$\frac{q_{N-1}}{p_{N-1}} = o + \mathrm{o}(1), \quad \frac{p_{N-1}}{q_{N-1}} = \frac{1}{o} + \mathrm{o}(1), \quad \frac{q_N}{p_N} = o + \mathrm{o}(1), \quad \frac{p_N}{p_{N-1}} = O(1)$$

und

$$\left| \frac{1}{\frac{p_N}{p_{N-1}} + (\alpha+\beta i)} \right| \leq \frac{1}{|\beta|} = O(1).$$

Also hat man

$$\Omega_{\mathsf{N}} = (o + \mathrm{o}(1)) \frac{(o+\mathrm{o}(1))\left(\frac{1}{o} + \mathrm{o}(1)\right)\frac{p_{\mathsf{N}}}{p_{\mathsf{N}-1}} + (\alpha + \beta i)}{\frac{p_{\mathsf{N}}}{p_{\mathsf{N}-1}} + (\alpha + \beta i)}$$

$$= (o + \mathrm{o}(1)) \left\{ 1 + \frac{\frac{p_{\mathsf{N}}}{p_{\mathsf{N}-1}}\,\mathrm{o}(1)}{\frac{p_{\mathsf{N}}}{p_{\mathsf{N}-1}} + (\alpha + \beta i)} \right\} = (o + \mathrm{o}(1))(1 + \mathrm{o}(1))$$

und auch in diesem Fall

$$\lim_{\mathsf{N} \to \infty} \frac{o_h^{(1)} q_{\mathsf{N}} + o_h^{(2)} q_{\mathsf{N}-1}}{o_h^{(1)} p_{\mathsf{N}} + o_h^{(2)} p_{\mathsf{N}-1}} = o.$$

In der Darstellung

$$f_{\mathsf{N}}(x_1, x_2) = \Lambda_{\mathsf{N}} F_{\mathsf{N}}(x_1 x_2); \qquad \Lambda_{\mathsf{N}} = \prod_{h=1}^{m} (o_h^{(1)} p_{\mathsf{N}} + o_h^{(2)} p_{\mathsf{N}-1})$$

ist daher

$$F_{\mathsf{N}}(x_1 x_2) = (x_1 + o x_2)^m + \mathfrak{F}_{\mathsf{N}}(x_1 x_2)$$

und sämtliche Koeffizienten der Form $\mathfrak{F}_{\mathsf{N}}(x_1 x_2)$ werden für genügend großes N beliebig klein.

12. Wir nehmen jetzt für

$$f(x_1 x_2) = \prod_{h=1}^{m} (o_h^{(1)} x_1 + o_h^{(2)} x_2)$$

die vorige Funktion an, für $g(x_1 x_2)$ die Funktion

$$g(x_1 x_2) = (x_1 + o x_2)^{n-l} (x_1 + o' x_2)^l$$

und ferner N als ein sehr großes Vielfaches von ν:

$$\mathsf{N} = N \nu.$$

Dann ist

$$Z_o(s \,|\, f(x_1 x_2),\ g(x_1 x_2)) = \mathsf{Z}_{\mathsf{N}}(s \,|\, f(x_1 x_2),\ g(x_1 x_2)) +$$
$$+ \Lambda_{\mathsf{N}}^{-s} \eta^{N(n-2l)} Z_o(s \,|\, (x_1 + o x_2)^m + \mathfrak{F}_{\mathsf{N}}(x_1 x_2),\ g(x_1 x_2))$$

und folglich

$$Z_o(s \,|\, f(x_1 x_2),\ g(x_1 x_2)) = \mathsf{Z}_{\mathsf{N}}(s \,|\, f(x_1 x_2),\ g(x_1 x_2))$$
$$+ \Lambda_{\mathsf{N}}^{-s} \eta^{N(n-2l)} \sum_{x_2=1}^{\infty} \sum_{x_1=1}^{[o x_2]} g(x_1 x_2)(x_1 + o x_2)^{-ms} \left\{ 1 + \frac{\mathfrak{F}_{\mathsf{N}}(x_1 x_2)}{(x_1 + o x_2)^m} \right\}^{-s}.$$

Bedeutet ϑ eine beliebig kleine positive Konstante und ist N oberhalb einer nur von ϑ abhängigen Zahl, so gilt gleichmäßig für alle natürlichen Werte von x_1 und x_2:

$$\left| \frac{\mathfrak{F}_{\mathsf{N}}(x_1 x_2)}{(x_1 + o x_2)^m} \right| \leqq \vartheta$$

und folglich auch die binomische Reihe

$$\left\{1+\frac{\mathfrak{F}_N(x_1 x_2)}{(x_1+o x_2)^m}\right\}^{-s}=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\binom{-s}{\lambda}\frac{\mathfrak{F}_N(x_1 x_2)^\lambda}{(x_1+o x_2)^{\lambda m}}.$$

Eine erlaubte Summationsvertauschung führt daher zu der Entwicklung:

$$Z_o(s\,|\,(x_1+o x_2)^m+\mathfrak{F}_N(x_1 x_2),\ g(x_1 x_2))=$$
$$=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\binom{-s}{\lambda}Z_o(m(s+\lambda)\,|\,x_1+o x_2,\ g(x_1 x_2)\,\mathfrak{F}_N(x_1 x_2)^\lambda),$$

die zunächst für

$$\sigma>\frac{n+2}{m}$$

Gültigkeit hat.

13. Die $m+1$ Formen

$$(x_1+o x_2)^{m-\mu}(x_1+o' x_2)^\mu \qquad (\mu=0,1,2,\ldots,m)$$

sind offenbar linear unabhängig in bezug auf den Körper der komplexen Zahlen. Die Form $\mathfrak{F}_N(x_1 x_2)$ läßt sich aus ihnen in der Gestalt

$$\mathfrak{F}_N(x_1 x_2)=\sum_{\mu=0}^{m}a_\mu\binom{m}{\mu}(x_1+o x_2)^{m-\mu}(x_1+o' x_2)^\mu,\qquad |a_\mu|\leqq\theta$$

darstellen, wo die positive Konstante θ zugleich mit ϑ gegen Null strebt. Folglich wird

$$\mathfrak{F}_N(x_1 x_2)^\lambda=\sum_{\mu=0}^{m\lambda}a_\mu^{(\lambda)}\binom{m\lambda}{\mu}(x_1+o x_2)^{m\lambda-\mu}(x_1+o' x_2)^\mu,\qquad |a_\mu^{(\lambda)}|\leqq\theta^\lambda$$

$$g(x_1 x_2)\,\mathfrak{F}_N(x_1 x_2)^\lambda=\sum_{\mu=0}^{m\lambda}a_\mu^{(\lambda)}\binom{m\lambda}{\mu}(x_1+o x_2)^{m\lambda+n-\mu-l}(x_1+o' x_2)^{\mu+l}$$

Man hat damit

$$Z_o(m(s+\lambda)\,|\,(x_1+o x_2),\ g(x_1 x_2)\,\mathfrak{F}_N(x_1 x_2)^\lambda)=\sum_{\mu=0}^{m\lambda}a_\mu^{(\lambda)}\binom{m\lambda}{\mu}Z_o(ms-n,\ \mu+l)$$

und aus 10. ergibt sich:

Die Funktion

$$Z_o(m(s+\lambda)\,|\,(x_1+o x_2),\ g(x_1 x_2)\,\mathfrak{F}_N(x_1 x_2)^\lambda)$$

läßt sich als meromorphe Funktion in die ganze Ebene fortsetzen. Sie hat einfache Pole in den Punkten

$$s=\frac{n+2-k}{m}\qquad (k=0,1,\ldots,\lambda m+l),$$

$$s=\frac{n-2k}{m}+\frac{2k^*\pi i}{m\log\eta}\quad\begin{pmatrix}k=l,\,l+1,\ldots,\,l+\lambda m\\ k^*=0,\mp 1,\mp 2,\ldots\end{pmatrix}.$$

Bleibt s von diesen Punkten um mehr als eine feste positive Strecke entfernt, so gilt gleichmäßig in s und λ im Streifen

$$\frac{n+2-k}{m}<\sigma_1\leqq\sigma\leqq\sigma_2$$

die Ungleichung

$$|Z_o(m(s+\lambda)\,|\,(x_1+o\,x_2),\ g(x_1x_2)\,\mathfrak{F}_N(x_1x_2)^\lambda)| \leqq$$
$$\leqq \sum_{\mu=0}^{\lambda m} \theta^\lambda \binom{m\lambda}{\mu} \Gamma C^{\mu+l}(1+|t|)^k = \Gamma C^l (1+|t|)^k \{\theta(1+C)^m\}^\lambda.$$

14. Das vorige Ergebnis läßt sich unmittelbar auf die Funktion

$$Z_o(s\,|\,f(x_1x_2),\ g(x_1x_2)) = Z_N(s\,|\,f(x_1x_2),\ g(x_1x_2)) +$$
$$+ \Lambda_N^{-s}\eta^{N(n-2l)} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \binom{-s}{\lambda} Z_o(m(s+l)\,|\,(x_1+o\,x_2),\ g(x_1x_2)\,\mathfrak{F}_N(x_1x_2)^\lambda)$$

anwenden; man erhält den Satz:

Die Funktion

$$Z_o(s\,|\,f(x_1x_2),\ g(x_1x_2)), \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} f(x_1x_2) &= \prod_{h=1}^{m}(o_h^{(1)}x_1 + o_h^{(2)}x_2),\\ g(x_1x_2) &= (x_1+o\,x_2)^{n-l}(x_1+o'x_2)^l, \end{aligned}$$

läßt sich als meromorphe Funktion in die ganze Ebene fortsetzen. Sie hat einfache Pole allein in den Punkten

$$s = \frac{n+2-k}{m} \qquad (k=0,1,\ldots)$$
$$s = \frac{n-2k}{m} + \frac{2k^*\pi i}{m\log\eta} \qquad \begin{pmatrix} k = 0, 1, \ldots \\ k^* = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots \end{pmatrix}$$

Es sei ε eine beliebig kleine positive Konstante; s bleibe von den vorigen Polen um mehr als eine feste positive Strecke entfernt. Dann gilt gleichmäßig in s in jedem endlichen Streifen

$$\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$$

die Ungleichung

$$Z_o(s\,|\,f(x_1x_2),\ g(x_1x_2)) = O(e^{\varepsilon|t|}).$$

Man hat nämlich für $\frac{n+2-k}{m} < \sigma_1$ und $k=0,1,\ldots$:

$$\left|\sum_{\lambda=0}^{\infty}\binom{-s}{\lambda} Z_o(m(s+l)\,|\,(x_1+o\,x_2),\ g(x_1x_2)\,\mathfrak{F}_N(x_1x_2)^\lambda)\right| \leqq$$
$$\leqq \sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^\lambda \binom{-|s|}{\lambda} \Gamma C^l (1-|t|)^k \{\theta(1+C)^m\}^\lambda \leqq$$
$$\leqq \Gamma C^l(1+|t|)^k \{1-\theta(1+C)^m\}^{-|s|}.$$

Wenn man N hinreichend groß nimmt, so wird aber ϑ und damit θ beliebig klein; man kann durch geeignete Wahl von N daher erreichen, daß

$$\theta(1+C)^m \leqq 1 - e^{-\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Dann ist

$$\left|\sum_{\lambda=0}^{\infty}\binom{-s}{\lambda} Z_o(m(s+l)\,|\,(x_1+o x_2),\ g(x_1 x_2)\,\mathfrak{F}_{\mathsf{N}}(x_1 x_2)^{\lambda})\right| \leqq$$

$$\leqq \Gamma C^l(1+|t|^k)\,e^{\frac{\varepsilon}{2}|s|} = O(e^{\varepsilon|t|}).$$

Da ferner nach 8. die Funktion $\mathsf{Z}_{\mathsf{N}}(s)$ im Streifen

$$\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$$

nur von der Größenordnung einer Potenz von $1+|t|$ ist, so folgt die Behauptung.

V.

15. Nunmehr sei o eine beliebige quadratische Irrationalzahl; das Polynom $f(x_1 x_2)$ genüge allein den früheren Ungleichungen und $g(x_1 x_2)$ sei ganz beliebig. Auch in diesem Fall kann die Fortsetzbarkeit von $Z_o(s)$ bewiesen werden.

Es bedeutet jedoch keine Einschränkung, wenn der Kettenbruch von o reinperiodisch angenommen wird. Denn als Kettenbruch einer quadratischen Irrationalität ist er gewiß periodisch; die Funktionalgleichungen in 6. und 7. gestatten, den unperiodischen Teil des Kettenbruches abzuschneiden. Aus dem gleichen Grund darf man o als echten Bruch annehmen.

Weiter darf ohne Einschränkung $g(x_1 x_2)$ als eine Form

$$(x_1+o x_2)^{n-l}(x_1+o' x_2)^l$$

angenommen werden. Denn andernfalls kann $g(x_1 x_2)$ in der Form

$$g(x_1 x_2) = \sum_{\alpha=0}^{n}\sum_{\beta=0}^{\alpha} A_{\alpha\beta}(x_1+o x_2)^{\alpha-\beta}(x_1+o' x_2)^{\beta}$$

mit konstanten Koeffizienten $A_{\alpha\beta}$ dargestellt werden, so daß

$$Z_o(s\,|\,f(x_1 x_2),\ g(x_1 x_2)) = \sum_{\alpha=0}^{n}\sum_{\beta=0}^{\alpha} A_{\alpha\beta} Z_o(s\,|\,f(x_1 x_2),\ (x_1+o x_2)^{\alpha-\beta}(x_1+o' x_2)^{\beta})$$

wird, und man also $Z_o(s\,|\,f(x_1 x_2),\ g(x_1 x_2))$ als Summe endlichvieler $Z_o(s)$-Funktionen erhält, wo jetzt $g(x_1 x_2)$ eine Form der angegebenen Art ist.

16. Sei also

a: der Kettenbruch von o reinperiodisch: $o = o_\nu$ und ν gerade;

b: das Polynom $g(x_1 x_2)$ gleich der Form $g(x_1 x_2) = (x_1+o x_2)^{n-l}(x+o' x_2)^l$;

c: das Polynom $f(x_1 x_2)$ den früheren Ungleichungen genügend und sonst beliebig.

Die Menge aller Paare natürlicher Zahlen (x_1, x_2) mit

$$1 \leqq x_1 \leqq o\, x_2$$

sei $\mathfrak{T}$, die Teilmenge der Paare mit

$$\left|\frac{r(x_1 x_2)}{f^{(m)}(x_1 x_2)}\right| < \varepsilon, \qquad r(x_1 x_2) = f(x_1 x_2) - f^{(m)}(x_1 x_2)$$

heiße $\mathfrak{T}_1$, die Komplementärmenge $\mathfrak{T} - \mathfrak{T}_1$ werde mit $\mathfrak{T}_2$ bezeichnet. Die Menge $\mathfrak{T}_2$ enthält offenbar nur endlichviele Elemente. Dabei ist ε eine positive beliebig kleine Zahl.

In $\mathfrak{T}_1$ besteht die Binomialreihe

$$\left(1 + \frac{r(x_1 x_2)}{f^{(m)}(x_1 x_2)}\right)^{-s} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{-s}{\mu} \left(\frac{r(x_1 x_2)}{f^{(m)}(x_1 x_2)}\right)^{\mu};$$

folglich ist für $\sigma > \frac{n+2}{m}$:

$$\sum_{\mathfrak{T}} g(x_1 x_2)\, f(x_1 x_2)^{-s} =$$

$$= \sum_{\mathfrak{T}_2} g(x_1 x_2)\, f(x_1 x_2)^{-s} + \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{-s}{\mu} \sum_{\mathfrak{T}_1} g(x_1 x_2)\, r(x_1 x_2)^{\mu} f^{(m)}(x_1 x_2)^{-(s+\mu)}.$$

Wird aber s auf einen beliebigen endlichen Bereich beschränkt, so ist gleichmäßig in s für große μ:

$$\sum_{\mathfrak{T}_1} g(x_1 x_2)\, r(x_1 x_2)^{\mu} f^{(m)}(x_1 x_2)^{-(s+\mu)} = O(\varepsilon^{\mu}).$$

Die Reihenentwicklung

$$(s \,|\, f(x_1 x_2),\ g(x_1 x_2)) = \sum_{\mathfrak{T}_2} g(x_1 x_2)\, f(x_1 x_2)^{-s} +$$

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{-s}{\mu} \left\{ Z_0(s+\mu \,|\, f^{(m)}(x_1 x_2),\ g(x_1 x_2)\, r(x_1 x_2)^{\mu}) - \sum_{\mathfrak{T}_2} g(x_1 x_2)\, r(x_1 x_2)^{\mu} f^{(m)}(x_1 x_2)^{-(s+\mu)} \right\}$$

konvergiert somit in jedem endlichen Bereich, der keine Pole der Summanden enthält, gleichmäßig in s. Weiter ist in jedem endlichen Streifen

$$\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2,$$

wenn s von den Polen der Summanden um mehr als eine feste positive, beliebig kleine Strecke entfernt bleibt, gleichmäßig in s für große μ:

$$Z_0(s+\mu \,|\, f^{(m)}(x_1 x_2),\ g(x_1 x_2)\, r(x_1 x_2)^{\mu}) - \sum_{\mathfrak{T}} g(x_1 x_2)\, r(x_1 x_2)^{\mu} f^{(m)}(x_1 x_2)^{-(s+\mu)} = O(\varepsilon^{\mu});$$

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \left|\binom{-s}{\mu}\right| \varepsilon^{\mu} = O(e^{\varepsilon |t|}).$$

Es folgt also nach 14.:

Seien $f(x_1 x_2)$ und $g(x_1 x_2)$ zwei Polynome vom Grad m und n in den x mit reellen Koeffizienten; $f(x_1 x_2)$ genüge den Ungleichungen

$$f(x_1 x_2) > 0 \text{ für } x_1 \geqq 1,\, x_2 \geqq 1; \quad f^{(m)}(x_1 x_2) > 0 \text{ für } x_1 \geqq 0,\, x_2 \geqq 0,\, x_1 + x_2 > 0.$$

Die natürliche Zahl d gleich 2, wenn $r(x_1 x_2)$ identisch verschwindet, sonst gleich 1.

o sei eine positive quadratische Irrationalzahl, ζ die erzeugende positive Einheit des Zahlkörpers $K(o)$.

Die durch die Reihe

$$Z_o(s \mid f(x_1 x_2),\, g(x_1 x_2)) = \sum_{x_2=1}^{\infty} \sum_{x_1=1}^{[o x_2]} g(x_1 x_2)\, f(x_1 x_2)^{-s}$$

definierte Funktion läßt sich meromorph in die ganze Ebene fortsetzen; sie hat einfache Pole allein an den Stellen

$$\begin{aligned} s &= \frac{n+2-k}{m} \\ s &= \frac{n-dk}{m} + \frac{2k^* \pi i}{m \log \eta} \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} k = 0, 1, 2, \ldots \\ k^* = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

Dabei bedeutet η eine geeignete ganze Potenz von ζ.

Bleibt s von den Polen um mehr als eine feste positive, beliebig kleine Strecke entfernt, so gilt im Streifen

$$\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$$

gleichmäßig in s:

$$Z_o(s \mid f(x_1 x_2),\, g(x_1 x_2)) = O(e^{\varepsilon |t|}).$$

17. Dem vorigen Satz haftet noch das Unbefriedigende an, daß Annahmen über $f(x_1 x_2)$ gemacht werden in einem Bereich, der über das Summationsgebiet hinausgeht. Es läßt sich aber zeigen, daß der vorige Satz auch noch bestehen bleibt, wenn man z. B. folgende Annahmen macht:

„Es sei ω eine beliebige positive Zahl, die größer als o ist; das Polynom $f(x_1 x_2)$ genüge den Ungleichungen:

$$f(x_1 x_2) > 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqq x_1 \leqq \omega x_2,$$

$$f^{(m)}(x_1 x_2) > 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqq x_1 \leqq \omega x_2, \quad x_1 + x_2 > 0.$$

Dann bleibt der vorige Satz bestehen."

Krefeld, 14. 9. 1928.

(Eingegangen am 28. 10. 1928.)