# Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren.

Von

J. v. Neumann in Berlin.

## Einleitung.

I. Wenn wir alle Funktionen eines gewissen metrischen Raumes $\Omega$ (z. B. der reellen Zahlengeraden, der komplexen Zahlenebene, der Oberfläche der Einheitskugel, der Strecke $0, 1$ usw.) betrachten, die gewissen Regularitätsbedingungen genügen (z. B. stetig und bis auf endlich viele Knicke stetig differentiierbar sind, zweimal stetig differentiierbar sind, ein endliches Absolutwertquadratintegral über $\Omega$ haben[1]) usw.) und eventuell auch noch gewissen Randbedingungen unterworfen sind, so wird unter einem linearen Operator bekanntlich das Folgende verstanden: Eine Zuordnung $R$, die jeder Funktion $f$ unserer Klasse eine Funktion $Rf$ (die nicht mehr zu dieser Klasse gehören muß) zuordnet, aber so, daß stets

$R(a_1 f_1 + \ldots + a_k f_k) = a_1 R f_1 + \ldots + a_k R f_k$ ($a_1, \ldots, a_k$ komplexe Konstante)

ist.

Wenn in $\Omega$ ein allgemeiner Maßbegriff (etwa im Sinne des Lebesgueschen) existiert und $dv$ das Volumelement in $\Omega$ ist (auf der Geraden: $dx$, in der Ebene: $dx\,dy$, auf der Oberfläche der Einheitskugel: $\sin\vartheta \cdot d\vartheta\, d\varphi$ usw.), und das Integral über diesen ganzen Raum mit $\int\limits_{\Omega}$ bezeichnet wird, so heißt ein linearer Operator $R$ selbstadjungiert oder Hermitesch, wenn für alle zugelassenen Funktionen $f, g$

$$\int\limits_{\Omega} f \cdot \overline{R g} \cdot dv = \int\limits_{\Omega} R f \cdot \bar{g} \cdot dv$$

gilt[2]).

[1]) Die Funktionen dürfen komplexe Werte haben.

[2]) $\bar{f}$ ist diejenige Funktion, die überall den zum Werte von $f$ konjugiert-komplexen Wert annimmt. — Unsere Terminologie weicht von der üblichen etwas ab:

(Fortsetzung der Fußnote [2]) auf nächster Seite.)

Hermitesche lineare Operatoren (wir wollen sie kurz H. O. nennen) sind z. B. die folgenden (wir geben nun auch die Argumente der Funktionen an, und zwar sei $P$ der allgemeine Punkt von $\Omega$):

$R f(P) = f(P)$

$R f(P) = x \cdot f(P)$ ($x$ irgendeine Koordinate von $P$ in $\Omega$),

$R f(P) = \int\limits_{\Omega} \varphi(P', P) \cdot f(P') \cdot dv'$ ($\varphi(P', P) = \overline{\varphi(P, P')}$, d. h. der Kern Hermitesch),

$R f(P) = L f(P)$ ($L$ irgendein selbstadjungierter Differential- oder partieller Differentialausdruck, vgl. Anm. [2])).

Bekanntlich bestimmen die beiden letzten Typen von H. O. ein Eigenwertproblem, das bei hinreichender Regularität des Kernes $\varphi(P, P')$ bzw. der Koeffizienten von $L$ (nämlich wenn nur ein „Punktspektrum" existiert) so formuliert werden kann[3]):

Ein Eigenwert ist eine Zahl $\lambda$, zu der es eine Funktion $f \neq 0$ mit

$$R f = \lambda f$$

gibt; $f$ ist dann Eigenfunktion. Es gibt im allgemeinen unendlich viele Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, denen Eigenfunktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ so zugeordnet werden können, daß sie ein vollständiges System von Orthogonalfunktionen bilden. D. h. es gilt:

$$\int\limits_{\Omega} \varphi_m \cdot \overline{\varphi_n} \cdot dv = \begin{cases} 0, & \text{für } m = n \\ 1, & \text{für } m \neq n \end{cases} \quad \text{(Orthogonalität)},$$

---

ein Differentialoperator $R$ z. B. heißt ja gewöhnlich dann selbstadjungiert, wenn $f \cdot \overline{Rg} - Rf \cdot \bar{g}$ vollständiges Differential eines Ausdruckes der $f, g$ und ihrer Ableitungen ist, also

$$\int\limits_{\Omega} f \cdot \overline{Rg} \cdot dv - \int\limits_{\Omega} Rf \cdot \bar{g} \cdot dv$$

ein nur von den Randwerten von $f, g$ und ihrer Ableitungen abhängiger Ausdruck. Unsere Selbstadjungiertheit (Hermitescher Charakter) folgt hieraus nur, wenn dieser Ausdruck, infolge geeigneter Randbedingungen, verschwindet. D. h. ein im gewöhnlichen Sinne selbstadjungierter Differentialoperator ist es für uns eventuell erst in einem hinreichend eingeengten Definitionsbereiche (vgl. auch Einleitung VII).

[3]) Das Eigenwertproblem der regulären Integraloperatoren wurde von Hilbert gelöst (Göttinger Nachr. 1904, S. 49—91), seine Methode wurde später von Courant, Hellinger, F. Riesz, E. Schmidt, Toeplitz u. a. bedeutend vereinfacht. Die Differentialoperatoren (zumindest die selbstadjungierten von zweitem Grade) können bei der Lösung des Eigenwertproblems durch Integraloperatoren ersetzt werden (Hilbert, Göttinger Nachr. 1904, S. 213—259), die dieselben Eigenfunktionen, aber reziproke Eigenwerte haben.

und für jedes Paar zugelassener Funktionen $f, g$

$$\int_\Omega f\cdot\bar{g}\cdot dv = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_\Omega f\cdot\overline{\varphi_m}\cdot dv\right)\cdot\overline{\left(\int_\Omega g\cdot\overline{\varphi_m}\cdot dv\right)} \quad \text{(Vollständigkeit).}$$

Wie für alle vollständigen Orthogonalsysteme, gilt der Entwicklungssatz mit Mittelkonvergenz:

$$\int_\Omega \left| f - \sum_{n=1}^{N} a_n\cdot\varphi_n\right|^2\cdot dv \to 0 \qquad \left(a_n = \int_\Omega f\cdot\overline{\varphi_n}\cdot dv\right)$$

für $N \to \infty$.

Wenn sich $\varphi(P, P')$ bzw. die Koeffizienten von $L$ nicht mehr ganz regulär verhalten, so treten Verwicklungen auf, die man durch das Auftreten eines Streckenspektrums kennzeichnet. Immerhin können die Begriffe Eigenwert und Eigenfunktion durch geeignete Verallgemeinerungen (insbesondere durch Herabsetzung der Regularitätsanforderungen an die Eigenfunktion oder gar durch Betrachtung sogenannter differentieller Eigenfunktionen[4]) aufrechterhalten werden. Auch die Vollständigkeitssätze bleiben bei geeigneter Verallgemeinerung (Ersetzen der Summe durch ein Integral usw.) gewahrt; aber der ganze Aufbau wird wesentlich komplizierter und verliert viel von seiner ursprünglichen Anschaulichkeit[5]).

II. Wenn wir die in I. betrachteten kontinuierlichen Räume $\Omega$ durch den „diskreten Raum" 1, 2, 3, ... der positiven ganzen Zahlen ersetzen, wobei die Funktionen $f(P)$ ($P$ durchläuft $\Omega$) durch die Folgen $a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ und die Integrale $\int_\Omega f\cdot dv$ durch die Summen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sinngemäß zu ersetzen sind, so gelangen wir zu ganz analogen Begriffsbildungen wie in I.

Die einfachsten Beispiele von H. O. (ja, wie man nach präziserer Fassung des Begriffes zeigen kann, die einzigen) sind die linearen Transformationen (unendlich vieler Variablen) mit Hermitescher Matrix:

$$R(x_1, x_2, \ldots) = (y_1, y_2, \ldots),$$
$$y_n = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{mn} x_m \quad (n = 1, 2, \ldots), \qquad \alpha_{mn} = \overline{\alpha_{nm}}.$$

(Die Rolle der „Regularitätsbedingungen" bei Funktionen in $\Omega$ spielen da

---

[4]) Hellinger, Göttinger Inaugural-Dissertation 1907, S. 7; Carleman, Sur les équations intégrales à noyau réel et symétrique, Upsala 1923, S. 82.

[5]) Das Eigenwertproblem der Integralgleichungen mit „beschränktem" Kerne wurde von Weyl gelöst (Göttinger Inaugural-Dissertation 1908) mit Hilfe der Hilbertschen Theorie der beschränkten Bilinearformen (Göttinger Nachr. 1906, S. 157—209). Auch für eine ausgedehnte Klasse selbstadjungierter Differentialoperatoren zweiten Grades, deren Koeffizienten singulär sein dürfen, erledigte Weyl das Eigenwertproblem (Math. Annalen 68 (1910), S. 220—269). Eine noch allgemeinere Klasse von Integraloperatoren untersuchte Carleman (vgl. Anm. [4])).

Bedingungen von der Art, daß alle $\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{mn} x_m$ konvergieren sollen, u. ä. Wir werden diese Matrizen noch im Anhang III eingehender betrachten.) Diese linearen Transformationen sind offenbar Analoga der Integralkern-Transformationen in kontinuierlichen Räumen $\Omega$:

$$R f(P) = \int_{\Omega} \varphi(P', P) \cdot f(P') \cdot dv'.$$

Auch für diese Transformationen bzw. für die zu ihnen gehörigen Hermiteschen Formen

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \alpha_{mn} x_m \overline{y_n}$$

ist das Eigenwertproblem von Hilbert gestellt und gelöst worden, falls die Matrix $\{\alpha_{mn}\}$ (bzw. die Hermitesche Form $\sum_{m,n=1}^{\infty} \alpha_{mn} x_m \overline{y_n}$) gewissen Bedingungen genügt, die der „Regularität" des Kernes $\varphi(P, P')$ bei Integralkern-Transformationen entsprechen.

Es treten dieselben Erscheinungen auf: Bei hoher Regularität (Vollstetigkeit) bloß Punktspektrum, mit denselben Eigenschaften wie in I., nur daß $\int_{\Omega}$ durch $\sum_{n=1}^{\infty}$ zu ersetzen ist. Also: $\lambda$ ist Eigenwert, wenn es eine Folge $(x_1, x_2, \ldots)$ mit

$$R(x_1, x_2, \ldots) = \lambda(x_1, x_2, \ldots), \quad \text{d. h.} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{mn} x_m = \lambda x_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

gibt [ohne daß $(x_1, x_2, \ldots) = (0, 0, \ldots)$ ist, außerdem ist als „Regularitätsbedingung" die Endlichkeit von $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ zu fordern], und $(x_1, x_2, \ldots)$ ist dann Eigenfolge. Sind $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ alle Eigenwerte, so können ihnen Eigenfolgen $(x_{11}, x_{12}, \ldots), (x_{21}, x_{22}, \ldots), \ldots$ so zugeordnet werden, daß sie ein vollständiges Orthogonalsystem bilden:

$$\sum_{m=1}^{\infty} x_{pm} \overline{x_{qm}} = \begin{cases} 1, & \text{für } p = q \\ 0, & \text{für } p \neq q \end{cases} \quad \text{(Orthogonalität)},$$

und[6])

$$\sum_{m=1}^{\infty} x_{mp} \overline{x_{mq}} = \begin{cases} 1, & \text{für } p = q \\ 0, & \text{für } p \neq q \end{cases} \quad \text{(Vollständigkeit)}.$$

Bei geringerer Regularität (Beschränktheit) kann wieder ein Strecken-

---

[6]) Dies ist bekanntlich dem eigentlichen Analogon der Vollständigkeitsrelation (vgl. I.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n} = \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{x_{pn}}\right) \overline{\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \overline{x_{pn}}\right)}$$

gleichbedeutend.

spektrum auftreten, was dieselben Komplikationen bedingt, wie die unter I. für kontinuierliche Räume skizzierten; da wir uns später noch recht eingehend damit zu beschäftigen haben werden, wollen wir es hier nicht weiter erörtern[7]). Irgendwelche „Regularitäts"-Annahmen wurden übrigens in der bisherigen Literatur (sowohl bei Matrizen als auch bei Integraloperatoren) stets gemacht: eine Diskussion des Eigenwertproblems auf Grund des Hermiteschen Charakters allein erfolgte nie.

III. Das analoge Verhalten der kontinuierlichen Räume $\Omega$ untereinander, sowie mit dem hier betrachteten diskreten Raume $1, 2, \ldots$, liegt bekanntlich an folgendem:

Wenn $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ ein vollständiges System von Orthogonalfunktionen im betrachteten Raume $\Omega$ ist, so wird durch die Zuordnung

$$f \longleftrightarrow (x_1, x_2, \ldots), \qquad x_n = \int_\Omega f \cdot \overline{\varphi_n} \cdot dv \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

jedem $f$ mit endlichem Absolutwertquadratintegral $\int_\Omega |f|^2 \cdot dv$ eine Folge $(x_1, x_2, \ldots)$ mit endlicher Absolutwertquadratsumme $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ zugeordnet. Dabei entsprechen verschiedenen $f$ verschiedene $(x_1, x_2, \ldots)$, und nach dem Satz von Fischer und F. Riesz[8]) entspricht wirklich jedes $(x_1, x_2, \ldots)$ mit endlichem $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ einem $f$ mit endlichem $\int_\Omega |f|^2 \cdot dv$.

Die Zuordnung ist linear, d. h.

aus $f \longleftrightarrow (x_1, x_2, \ldots)$ folgt $af \longleftrightarrow (a x_1, a x_2, \ldots)$,

aus $\left\{\begin{matrix} f \longleftrightarrow (x_1, x_2, \ldots) \\ g \longleftrightarrow (y_1, y_2, \ldots) \end{matrix}\right\}$ folgt $f + g \longleftrightarrow (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots)$,

und es ist

$$\int_\Omega f \cdot \overline{g} \cdot dv = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n} \text{ [9])}.$$

D. h. alle bei der Beschreibung der Eigenwerte und Eigenfunktionen verwendeten Begriffsbildungen sind bei dieser Zuordnung invariant; also müssen dieselben in den in I. betrachteten kontinuierlichen Räumen und im diskreten Raume aus II. dasselbe Verhalten zeigen.

---

[7]) Die vollstetigen und die beschränkten Formen (bzw. Operatoren) wurden von Hilbert entdeckt, und er löste ihr Eigenwertproblem (Göttinger Nachr. 1906, S. 157—209), weiter untersucht wurden die beschränkten Bilinearformen von Hellinger, vgl. Anm. [4]), sowie Journal f. Math. **136** (1909), S. 210—273.

[8]) Z. B. Göttinger Nachr. 1907, S. 116—122.

[9]) Den Beweis dieser, allgemein bekannten, Tatsachen (zusammen mit dem Fischer-F. Rieszschen Satze) werden wir im Kap. I und im Anhang I erbringen.

Diese Überlegungen sind es bekanntlich im wesentlichen, durch welche Hilbert die Eigenwerttheorie der Integraloperatoren in kontinuierlichen Räumen auf die der H. O. für Folgen $(x_1, x_2, \ldots)$ (d. h. Funktionen des diskreten Raumes $1, 2, \ldots$) zurückgeführt hat[10]).

IV. Der Gegenstand dieser Arbeit ist die Aufstellung einer allgemeinen Eigenwerttheorie *aller* H. O. Dabei werden wir abstrakt vorgehen, d. h. es von vornherein so einrichten, daß sich unsere Resultate gleichmäßig auf alle in I. genannten kontinuierlichen Räume anwenden lassen, sowie auf den diskreten Raum in II. (d. h. auf die Operatoren der Funktionen in denselben).

Zu diesem Zwecke werden wir im Kap. I eine allgemeine Charakterisierung (durch fünf Eigenschaften **A** bis **E**, vgl. dort) angeben, die auf einen jeden der folgenden Funktionenräume paßt:

Alle (komplexen, im Lebesgueschen Sinne meßbaren) Funktionen $f$ in einem Raume $\Omega$ (Zahlengerade, Zahlenebene, Oberfläche der Einheitskugel, Intervall $0, 1$ usw., vgl. Anhang I) mit dem Volumelement $dv$, für die $\int_\Omega |f|^2 \cdot dv$ endlich ist. Alle Folgen $(x_1, x_2, \ldots)$ von (komplexen) Zahlen mit endlichem

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2.$$

(Zum ersten Falle ist zu bemerken, daß solche Funktionen $f, g$, für die $f(P) = g(P)$ überall — mit Ausnahme einer Lebesgueschen $0$-Menge — gilt, als nicht verschieden anzusehen sind.)

Die Elemente dieser Funktionenräume lassen alle Vektor-Operatoren zu: man kann sie addieren und mit (komplexen) Zahlen multiplizieren, ferner ist für zwei von ihnen das „innere Produkt" $\int_\Omega f \cdot \overline{g} \cdot dv$ bzw. $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$ definiert. Das innere Produkt bezeichnen wir mit $(f, g)$ (wenn nichts Besonderes gesagt wird, wollen wir auch die Folgen $(x_1, x_2, \ldots), (y_1, y_2, \ldots), \ldots$ als Funktionen ansehen — vgl. II. — und mit $f, g, \ldots$ bezeichnen), mit seiner Hilfe ist in allen Fällen der Hermitesche Charakter der Operatoren $R$ zu definieren:

$$(f, Rg) = (Rf, g).$$

(In I. war das die Definition, und der in II. ist es gleichwertig.) Wie bei Vektoren ermöglicht das innere Produkt die Definition eines Absolutwertes: $|f| = \sqrt{(f, f)}$ $\left(\sqrt{\int_\Omega |f|^2 \cdot dv}\right.$ bzw. $\left.\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2}\right)$, und einer Entfernung:

[10]) Dies ist insofern historisch ungenau, als der Fischer-F. Rieszsche Satz erst nachher gefunden wurde. Dieselben Überlegungen haben in der neuen Quantentheorie eine wichtige Rolle gespielt, vgl. Schrödinger, Annalen d. Phys. 79, 8 (1926), S. 734—756.

$|f-g|$ (diese ist also das Analogon der gewöhnlichen Euklidischen Entfernung); unser Raum wird demnach durch dasselbe „metrisiert“ und „topologisiert“. D. h. topologische Ausdrucksweisen, wie Abgeschlossenheit, Stetigkeit usw., werden in ihm sinnvoll.

Es ist vielleicht nicht überflüssig, noch ein Wort der konsequenten Beschränkung auf Funktionen $f$ mit endlichem $\int\limits_{\Omega}|f|^2\cdot dv$ zu widmen. Für Eigenwertprobleme bei Folgen ist es seit den grundlegenden Untersuchungen von Hilbert (vgl. Anm. [7]) und E. Schmidt[11]) üblich, die Endlichkeit von $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^2$ zu verlangen; bei den $f$ in kontinuierlichen Räumen ist jedenfalls für die Eigenfunktionen des Punktspektrums $\int\limits_{\Omega}|f|^2\cdot dv$ endlich. Im Streckenspektrum ist freilich weder $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^2$ noch $\int\limits_{\Omega}|f|^2\cdot dv$ endlich (wenn überhaupt noch Eigenfolgen bzw. -funktionen existieren und nicht zu „differentiellen Lösungen“ Zuflucht genommen werden muß), indessen werden wir (unter Verallgemeinerung der Hilbertschen Methoden) zeigen, daß es gerade günstig ist, die Eigenfunktionen im Streckenspektrum als uneigentliche Gebilde zu behandeln, d. h. das Eigenwertproblem ohne ihre explizite Nennung zu formulieren.

Unser Funktionenraum ist, wenn wir den diskreten Raum $1, 2, \ldots$ zugrunde legen, der sogenannte (komplexe) Hilbertsche (d. h. unendlichvieldimensionale Euklidische) Raum: die Menge aller Folgen $(x_1, x_2, \ldots)$ mit endlichem $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^2$. Da, wie in III. bemerkt wurde, alle unsere Funktionen-Mannigfaltigkeiten isomorph sind (d. h. ein-eindeutig aufeinander abgebildet werden können, wobei die Operationen $f+g$, $a\cdot f$, $(f, g)$ in ihre Analoga übergehen), wollen wir sie auch als Hilbertsche Räume bezeichnen. Und sie alle sollen als spezielle Verwirklichungen des allgemeinen abstrakten Hilbertschen Raumes angesehen werden, der durch die „inneren“ Eigenschaften A bis E allein (und bis auf Isomorphien vollständig, vgl. Kap. I) charakterisiert ist.

Den abstrakten Hilbertschen Raum nennen wir $\mathfrak{H}$.

V. Im abstrakten Hilbertschen Raume verstehen wir unter einem H. O., wie in I. gesagt wurde, eine Funktion $R$ (für gewisse $f$ aus $\mathfrak{H}$ definiert und Werte aus $\mathfrak{H}$ annehmend), die die folgenden Eigenschaften besitzt:

$$(\alpha)\qquad R(a_1 f_1 + \ldots + a_k f_k) = a_1 R f_1 + \ldots + a_k R f_k$$
$$(a_1, \ldots, a_k \text{ komplexe Konstanten}),$$

$$(\beta)\qquad (f, Rg) = (Rf, g)$$

[11]) Z. B. Rend. d. Circ. Mat. d. Palermo 25 (1908), S. 57—73.

(soweit beide Seiten Sinn haben). Wir nehmen übrigens einstweilen an, daß der Definitionsbereich von $R$ eine lineare Mannigfaltigkeit ist, d. h. mit $f_1, \ldots, f_k$ auch $a_1 f_1 + \ldots + a_k f_k$ enthält. (Die endgültige Definition der H. O. wird zwar etwas anders lauten, es kommt uns aber zunächst darauf nicht an.)

Wir nennen einen H. O. $R$ beschränkt, wenn $|f| \leqq 1$ $|Rf| \leqq C$ zur Folge hat, wobei $C$ beliebig, aber von $f$ unabhängig ist. Da allgemein $|af| = |a|\,|f|$ gilt, ist dies mit $|Rf| \leqq C \cdot |f|$, oder auch $|Rf - Rg| \leqq C \cdot |f - g|$ gleichbedeutend: d. h. es drückt eine Art Stetigkeit von $R$ aus[12]).

In der von Hilbert aufgebauten Theorie der beschränkten Hermiteschen Formen (d. h. H. O.) kann man stets annehmen, daß $R$ für alle $f$ von $\mathfrak{H}$ definiert ist: wenn das nicht der Fall ist, kann es (wegen seiner Stetigkeit) auf ganz $\mathfrak{H}$ fortgesetzt werden. Wenn wir aber eine allgemeine Theorie der H. O. aufstellen wollen, die auch über die beschränkten hinausgeht, so dürfen wir nicht verlangen, daß $R$ überall in $\mathfrak{H}$ definiert sei. (Nach einem Satze von Toeplitz muß sogar jeder überall sinnvolle H. O. beschränkt sein, vgl. Satz 48, $\alpha$), $\gamma$) und Anm. [61]).) So sei z. B. $\Omega$ das Intervall $0, 1$, und $R$ der Operator $i \frac{d}{dx} \ldots$ für alle differentiierbaren, in 0 und 1 verschwindenden Funktionen. $R$ ist ein H. O., aber es ist offenbar nicht für undifferentiierbare Funktionen zu definieren! Ebensowenig wird für einen hochsingulären Integralkern $\varphi(P, P')$ $\int_\Omega \varphi(P', P) \cdot f(P') \cdot dv'$ für alle $f$ (mit endlichem $\int_\Omega |f|^2 \cdot dv$) konvergieren. Ein anders geartetes, aber auch recht charakteristisches Beispiel ist dieses: $\Omega$ sei die Zahlengerade, $Rf(x) = x \cdot f(x)$. Auch $R$ ist ein H. O., da aber $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$ endlich sein kann bei unendlichem $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx$, ist auch dieses $R$ nicht stets sinnvoll.

Die Einschränkung also, daß ($\alpha$), ($\beta$) nur soweit zu gelten haben, als beide Seiten sinnvoll sind, ist eine recht wesentliche. Immerhin werden wir aber (als Minimum) verlangen, daß

($\gamma$) der Definitionsbereich von $R$ überall dicht (in $\mathfrak{H}$) sei.

Was dies bedeutet, kann man sich z. B. an $i \frac{d}{dx} \ldots$ bzw. $x \cdot \ldots$ mühelos

---

[12]) Wenn wir $\mathfrak{H}$ als Folgenraum (eigentlichen Hilbertschen Raum) auffassen, so ist unsere Definition der Beschränktheit dem Wortlaute nach von der Hilbertschen verschieden: wir verlangen (in Hilberts Terminologie) die Beschränktheit des mit sich selbst gefalteten $R$. Immerhin sind diese Formulierungen gleichwertig, näher erörtern wir dies in Kap. II, Satz 12. — Man beachte übrigens, daß unsere ganze Topologie von $\mathfrak{H}$ stets im Sinne der sogenannten „starken Konvergenz" zu verstehen ist, vgl. Weyl, Dissertation, S. 9.

klarmachen: diese sind für alle (in 0 und 1 verschwindenden) Polynome bzw. für alle außerhalb eines willkürlichen (aber endlichen) Intervalles stets verschwindenden Funktionen immer sinnvoll, und beide Funktionen-Mengen sind überall dicht.

Bei dieser Anordnung laufen wir aber Gefahr, zu wenig zu verlangen: unsere H. O. könnten bereits an solchen Stellen (infolge einer willkürlichen Einengung des Definitionsbereiches) sinnlos sein, wo sie noch auf natürliche Weise definiert werden könnten. (So hätte man z. B. bei $i\frac{d}{dx}\ldots$, unbeschadet der überall-Dichtigkeit des Definitionsbereiches, statt einmaliger Differentiierbarkeit auch Analytizität verlangen können.) Um dieser Schwierigkeit zu entgehen, stellen wir den Begriff des maximalen H. O. auf:

Der H. O. $S$ heiße Fortsetzung des H. O. $R$, wenn überall wo $Rf$ Sinn hat, auch $Sf$ Sinn hat, und mit $Rf$ übereinstimmt. Wenn $S \neq R$ ist (d. h. $S$ an mehr Stellen sinnvoll ist, wie $R$), so ist $S$ eine eigentliche Fortsetzung. Ein H. O. $R$, zu dem es keine eigentlichen Fortsetzungen mehr gibt, heiße maximal. (Abkürzungen: Forts., max.)

Da, wie wir sehen werden (Satz 35), jeder H. O. zu einem max. H. O. fortsetzbar ist, müssen wir in erster Linie die max. H. O. untersuchen. Dazu ist es aber notwendig, eine allgemeine Formulierung des Eigenwertproblems anzugeben (und zwar im abstrakten Hilbertschen Raume) bei der Punkt- und Streckenspektrum gleichmäßig Berücksichtigung finden. Dies soll im nächsten Paragraphen, in Anlehnung an Hilberts Formulierung des Problems, erfolgen.

VI. Betrachten wir zunächst den $k$-dimensionalen Euklidischen Raum. Wenn dort ein H. O. gegeben ist, d. h. eine Zuordnung

$$R(x_1, \ldots, x_k) = (y_1, \ldots, y_k),$$
$$y_n = \sum_{m=1}^{k} a_{mn} x_m \quad (n = 1, \ldots, k), \qquad a_{mn} = \overline{a_{nm}}$$

(Konvergenzfragen gibt es hier ja nicht!), so ist es bekanntlich stets möglich $R$ durch Einführung neuer kartesischer Koordinaten (d. h. durch eine unitäre Transformation) auf die Diagonalform zu bringen. D. h. es gibt eine unitäre Transformationsmatrix $\{u_{mn}\}$

$$\sum_{p=1}^{k} u_{mp}\overline{u_{np}} = \begin{cases} 1, & \text{für } m = n \\ 0, & \text{für } m \neq n \end{cases}, \qquad \sum_{p=1}^{k} u_{pm}\overline{u_{pn}} = \begin{cases} 1, & \text{für } m = n \\ 0, & \text{für } m \neq n \end{cases},$$

so daß nach der Transformation

$$\xi_n = \sum_{m=1}^{k} u_{mn} x_m, \qquad \eta_n = \sum_{m=1}^{k} u_{mn} y_m \qquad (n = 1, \ldots, k)$$

$R$ einfach durch

$$\eta_n = \lambda_n \xi_n \qquad (n = 1, \ldots, k)$$

($\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ reelle Konstante, die Eigenwerte von $R$!) beschrieben wird[13]). D. h. es ist

$$\alpha_{mn} = \sum_{p=1}^{k} \lambda_p u_{mp} \overline{u_{np}} \qquad (m, n = 1, \ldots, k).$$

Dabei sind die $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, bis auf die Reihenfolge, durch $R$ eindeutig bestimmt, nicht aber die $u_{mn}$! Wie man sofort sieht, kann man sie durch $\vartheta_n u_{mn}$ ersetzen ($\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k$ beliebige Zahlen vom Absolutwerte 1), und wenn mehrere der $\lambda_n$ einander gleich sind, sind sogar die dazugehörigen Zeilen $(u_{1n}, \ldots, u_{kn})$ beliebig untereinander unitär transformierbar.

Eine uneindeutige Formulierung des Eigenwertproblems, wie diese (Transformierbarkeit auf die Diagonalform), ist wenig geeignet, um von den $k$-dimensionalen Euklidischen Räumen auf den unendlichvieldimensionalen (d. h. Hilbertschen) übertragen zu werden. Die richtige, leicht zu verallgemeinernde, Fassung des endlichvieldimensionalen Problems findet man, indem man es nach Hilbert eindeutig formuliert. Dies geschieht so:

Wir setzen

$$e_{mn}(\lambda) = \sum_{\lambda_p \leqq \lambda} u_{mp} \overline{u_{np}} \qquad (\lambda \text{ eine beliebige reelle Zahl}),$$

dann sind die $\{e_{mn}(\lambda)\}$ Matrizen von H. O. $E(\lambda)$, mit der leicht zu verifizierenden Eigenschaft

$$(a) \qquad E(\lambda) E(\mu) = E(\mu) E(\lambda) = E(\lambda) \qquad (\lambda \leqq \mu)$$

(also insbesondere $E(\lambda)^2 = E(\lambda)$)[14]). Seien $l_1, \ldots, l_h$ ($h \leqq k$) die voneinander verschiedenen Werte der $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, und zwar wachsend angeordnet. Dann ist $E(\lambda)$ (als Funktion von $\lambda$) in den Intervallen

$$\lambda < l_1,\ l_1 \leqq \lambda < l_2,\ \ldots,\ l_{h-1} \leqq \lambda < l_h,\ l_h \leqq \lambda$$

konstant, und bei $l_1, \ldots, l_h$ liegen (links) Sprünge. Im ersten der genannten Intervalle ist es offenbar $= 0$, im letzten (wegen der Unitarität von $\{u_{mn}\}$) hat es die Einheitsmatrix, es ist also der identische Operator 1. Aus der letzten Formel für $\alpha_{mn}$ folgt sofort ($l_0$ beliebig, aber $< l_1$):

$$\alpha_{mn} = \sum_{p=1}^{h} l_p (e_{mn}(l_p) - e_{mn}(l_{p-1})) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\, e_{mn}(\lambda).\text{[15])}$$

---

[13]) Wie man sieht, sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ Eigenwerte, und $(\overline{u_{11}}, \ldots, \overline{u_{k1}}), \ldots, (\overline{u_{1k}}, \ldots, \overline{u_{kk}})$ dazugehörige Eigenvektoren (vgl. II.).

[14]) Was bei überall sinnvollen Operatoren $A, B$ unter $AB$ zu verstehen ist, ist klar.

[15]) Stieljessches Integral!

Hieraus folgt sofort (wenn, ebenso wie in IV., $(f, g) = \sum_{n=1}^{k} x_n \overline{y_n}$ ist, falls $f = (x_1, \ldots, x_k)$, $g = (y_1, \ldots, y_k)$ ist)

$$(\beta) \qquad (f, Rg) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d(f, E(\lambda) g).$$

Man überlegt sich leicht, daß $(\alpha)$, $(\beta)$, zusammen mit $E(\lambda) = 0$ bzw. 1 für kleine bzw. große $\lambda$, und damit, daß $E(\lambda)$ in $\lambda$ nach rechts stetig ist, die Operatoren $E(\lambda)$ vollkommen festlegt. Da aber aus den $E(\lambda)$ (bzw. den $e_{mn}(\lambda)$) die Diagonalform von $R$ leicht erzeugt werden kann, ist dies die eindeutige Formulierung des Eigenwertproblems.

Kehren wir nun zum abstrakten Hilbertschen Raume $\mathfrak{H}$ zurück! Die Bedingungen $(\alpha)$, $(\beta)$ dürfen da wörtlich übertragen werden, wenn wir nur die $E(\lambda)$ genau erklären: sie sollen überall sinnvolle H. O. sein[16]). Die Zusatzforderungen betreffs der $\lambda$-Abhängigkeit der $E(\lambda)$ formulieren wir so:

$$(\gamma) \qquad \text{für } \lambda \to -\infty \quad E(\lambda) \to 0, \qquad \text{für } \lambda \to +\infty \quad E(\lambda) \to 1,$$
$$\text{für } \lambda \geqq \lambda_0,\ \lambda \to \lambda_0 \quad E(\lambda) \to E(\lambda_0).$$ [17])

(Daß gerade dies die richtige Generalisierung ist, wird der Erfolg zeigen.)

Eine $(\alpha)$, $(\gamma)$ genügende Schar $E(\lambda)$ heiße eine Zerlegung der Einheit (kurz: Z. d. E.); wenn $R$ zu ihr in der Beziehung $(\beta)$ steht, ist es der dazugehörige Operator. Freilich entstehen Konvergenzfragen, wir werden aber sehen (vgl. Satz 36), daß diese am besten behoben werden, wenn wir $(\beta)$ so verschärfen: $Rg$ habe dann und nur dann Sinn, wenn

$$(\beta') \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \, d\,|E(\lambda) g|^2$$

endlich ist — dann sind (wie wir zeigen werden) alle Integrale von $(\beta)$ absolut konvergent — und es möge $(\beta)$ gelten. (Aus $(\alpha)$ folgt, daß $|E(\lambda) f|^2$ als Funktion von $\lambda$ nie abnimmt, vgl. Satz 17, 18, der Integrand $\lambda^2$ von $(\beta')$ ist $\geqq 0$: also ist das Integral $(\beta')$ entweder absolut konvergent, oder eigentlich divergent, und zwar $+\infty$.) Man sieht leicht ein: eine Z. d. E. (also eine die $(\alpha)$, $(\gamma)$ genügt) bestimmt den zugehörigen Operator (wenn es einen gibt) eindeutig: denn der Definitionsbereich ist gegeben (durch $(\beta')$), und alle $(f, Rg)$ (durch $(\beta)$), also auch $Rg$.

---

[16]) Im $k$-dimensionalen Raume hat $E(\lambda)^2 = E(\lambda)$, wie man leicht verifiziert, die Konsequenz $|E(\lambda) f| \leqq |f|$; es ist also zu erwarten, daß es in $\mathfrak{H}$ ebenso sein wird, also daß $E(\lambda)$ als beschränkt und somit überall sinnvoll anzusetzen ist (vgl. auch Kap. III, Satz 14, 15, 16).

[17]) Bei (überall sinnvollen) Operatoren $A_n$, $B$ verstehen wir unter $A_n \to B$, daß für alle $f$ $A_n f \to Bf$ gilt. 1 ist durch $1f = f$ definiert.

Das Eigenwertproblem besteht also darin, zu entscheiden: Gibt es zu jeder Z. d. E. einen zugehörigen H. O.? Ist dieser maximal? Müssen zu verschiedenen Z. d. E. verschiedene Operatoren gehören? Welche H. O. gehören zu Z. d. E.?[18]) Wir werden sehen, daß die drei ersten Fragen bejahend zu beantworten sind (vgl. Satz 36). Bei der vierten müssen wir daher weiter fragen: Die den Z. d. E. zugeordneten H. O. sind eine Teilklasse der Klasse aller max. H. O. Welche ist nun diese Teilklasse?

VII. Wir werden sehen (Satz 36, 38), daß sie nicht alle max. H. O. umfaßt. Es gibt eine Ausnahme[19]) $\bar{R}$, und alle anderen Ausnahmen lassen sich durch gewisse, hier nicht zu erörternde, triviale Operationen aus ihr und den H. O. mit Z. d. E. aufbauen (vgl. Satz 38). Bei $\bar{R}$ werden wir sehen, daß seine Eigenschaften in der Tat jede vernünftige Formulierung eines Eigenwertproblems ausschließen, daß es aber keineswegs „pathologisch" ist: es ist leicht zu beschreiben (vgl. Anm.[19])).

Immerhin müssen solche max. H. O., die beschränkt, oder definit, oder reell[20]) sind, eine Z. d. E. besitzen, gewisse einfache Eigenschaften sind somit mit dem Fehlen der Z. d. E. unverträglich (vgl. Satz 40). Das Auftreten dieses $\bar{R}$ können wir auch so deuten, daß der Hermitesche Charakter bei unendlichen Operatoren das Auftreten der Ausnahmefälle der Elementarteilertheorie nicht mehr verhindert (im Gegensatze zum Falle endlich vieler Dimensionen; oder im Unendlichvieldimensionalen, zu den reellen, oder beschränkten, oder definiten Operatoren), aber daß nur ein einziger Ausnahme-Typus vorkommen kann.

Es genügt wohl vorläufig soviel über die max. H. O. zu sagen. (Insbesondere soll nicht weiter erörtert werden, wie und in welchem Umfange die Kenntnis der Z. d. E. — d. h. der „Hilbertschen Spektralform" — die Lösung des Eigenwertproblems, so wie es in I., II. formuliert wurde, ermöglicht. Es sei diesbezüglich auf die in Anm. [4]), [5]) zitierten Untersuchungen

---

[18]) Hilbert bewies: Für beschränkte H. O. gibt es stets eine und nur eine Z. d. E., und zwar kommen die und nur die Z. d. E. vor, für die $E(\lambda)$ für hinreichend kleine wie für hinreichend große $\lambda$ konstant (also $= 0$ bzw. 1) wird. ($\beta'$) fällt dann fort, da es stets erfüllt ist. (Zitat: Anm. [7]).) — Bei unserer Formulierung ist offenbar die Abtrennung von Punkt- und Streckenspektrum noch nicht vollzogen (in ($\gamma$) wird $\lambda \geqq \lambda_0$ verlangt!), sie ist für unsere Zwecke unerheblich.

[19]) Der unter anderem der Anhang IV dieser Arbeit gewidmet wird.

[20]) Sei $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ ein vollständiges Orthogonalsystem in $\mathfrak{H}$ (vgl. Def. 3), dann kann jedes $f$ eindeutig auf die Form $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n$ gebracht werden, es heiße reell, wenn alle $x_n$ es sind. $\Re f$ entsteht aus $f$, wenn alle $x_n$ durch $\Re x_n$ (Realteil!) ersetzt werden. $R$ ist reell, wenn bei sinnvollem $Rf$ auch $R\,\Re f$ sinnvoll ist, und zwar $= \Re\, Rf$. (In den Begriff der „Realität" geht also noch willkürlich ein gewisses vollständiges Orthogonalsystem ein.)

verwiesen.) Dagegen ist noch der Fall solcher H. O. zu erörtern, deren Maximalität nicht gesichert (oder nicht vorhanden) ist. Die H. O. sind ja meistens so gegeben: z. B. als selbstadjungierte Differentialoperatoren, definiert für alle $n$-mal differentiierbaren Funktionen ($n$ ist der Grad!), die gewissen Randbedingungen genügen. Wir haben in V. erwähnt, daß jeder H. O. zu einem max. H. O. fortsetzbar ist, es ist aber nicht gesagt, daß dies nur auf eine einzige Weise geht.

Wir werden auch diesbezüglich einfache Resultate erzielen, so u. a.: wenn ein H. O. nicht selbst max. oder nicht nach einer gewissen trivialen Forts. max. ist, so kann er auf Kontinuum viele verschiedene Arten max. gemacht werden (vgl. die Schlußbemerkung von Kap. VIII). Beschränkte H. O. sind stets im ersten Falle.

Es werde noch an einem einfachen Beispiel klargemacht, wie diese mehrdeutige Fortsetzbarkeit zustande kommt. Sei $\Omega$ das Intervall 0, 1, $R$ der Operator $i \frac{d}{dx} \ldots$, definiert für alle differentiierbaren Funktionen. Da

$$(f, Rg) - (Rf, g) = \int_0^1 i \{f(x)\bar{g}'(x) + f'(x)\bar{g}(x)\} dx$$
$$= i\{f(1)\bar{g}(1) - f(0)\bar{g}(0)\}$$

ist, ist $R$ nicht Hermitesch, wohl aber $R_0$ und $R_\vartheta$ ($\vartheta$ eine Zahl vom Absolutwerte 1), die aus $R$ durch die folgende Einschränkung des Definitionsbereiches entstehen:

$$f(0) = f(1) = 0 \quad \text{bzw.} \quad f(1) = \vartheta \cdot f(0).$$

$R_\vartheta$ hat max. Fortsetzungen, z. B. $S_\vartheta$. Alle $S_\vartheta$ sind auch max. Forts. von $R_0$. Und sie sind alle verschieden, denn wäre $S_{\vartheta_1} = S_{\vartheta_2} = S$, so wäre $S$ für ein $f$ und ein $g$ mit $f(0) = g(0) = 1$, $f(1) = \vartheta_1$, $g(1) = \vartheta_2$ sinnvoll, und daher

$$(f, Sg) - (Sf, g) = \vartheta_1 \bar{\vartheta}_2 - 1 \neq 0,$$

also $S$ kein H. O. Die Mehrdeutigkeit der max. Forts. rührt hier also von der Mehrzahl der möglichen Randbedingungen her. Wir werden sehen, daß noch im allgemeinsten Falle die Verhältnisse eine gewisse Analogie hiermit aufweisen (vgl. Satz 26, 27)[21].

VIII. Der Zusammenhang der H. O. von $\mathfrak{H}$ mit den Matrizen ist bekanntlich dieser: sei $R$ ein H. O. und $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ ein vollständiges Orthogonalsystem (vgl. Def. 3), dann wird $R$ die Matrix $\{\alpha_{mn}\}$, $\alpha_{mn} = (\varphi_m, R\varphi_n)$, zugeordnet. Diese Zuordnung ist bei beschränkten H. O. ganz klar, bei

[21]) Bei singulären Integraloperatoren fand schon Carleman Zeichen dieser Mehrdeutigkeit, jedoch konnte er in diesem Falle das Eigenwertproblem nicht ganz lösen (es fehlte das Analogon der entscheidenden Bedingung ($\alpha$) aus IV.). Vgl. Anm. [4]).

unbeschränkten ist sie mit gewissen Komplikationen verknüpft. Sie wird uns im Anhang III beschäftigen. Die unitäre Transformationstheorie der unbeschränkten Matrizen führt in eine besonders eigentümliche Pathologie, dieselbe soll aber an anderer Stelle untersucht werden[22]).

Auch über das Verhältnis dieser Resultate zur neuen Quantentheorie (der sogenannten „Transformationstheorie") wollen wir hier nicht sprechen, jedenfalls zeigen sie, daß die allgemeine Theorie der H. O. keineswegs überall dasjenige Verhalten zeigt, welches in der „Transformationstheorie" (auf Grund der Analogie mit beschränkten oder gar endlichvieldimensionalen Operatoren) im allgemeinen vermutet und vorweggenommen wurde.

IX. Es bleibt noch übrig, einiges über die Methode und Anordnung dieser Arbeit zu sagen.

Der wesentliche Kunstgriff ist das Untersuchen eines gewissen Operators $U$, der symbolisch mit $U = \frac{R + i\,1}{R - i\,1}$ bezeichnet werden könnte, an Stelle von $R$. Wenn $R$ ein H. O. ist, so ist nämlich $U$ längentreu (d. h. $|Uf| = |f|$), also stetig, und somit leichter zu behandeln (vgl. Satz 22, 23, 24) Diese „Cayley-Transformation" $U = \frac{R + i\,1}{R - i\,1}$ ist der Kern unserer Methode.

Alle anderen Methoden versagen: Die eleganten Verfahren von Hellinger und von F. Riesz, weil in ihnen der Operator $R$ iteriert werden muß, was nur bei überall sinnvollen (also beschränkten) H. O. ohne weiteres geht, bei beliebigen H. O. aber zunächst fraglich ist. Alle Maximum-Minimum-Methoden, sowie die Methode von E. Schmidt sind von vornherein auf Fälle ohne Streckenspektrum beschränkt. Die ursprüngliche Hilbertsche Methode (Approximation durch endlichvieldimensionale Abschnittoperatoren) ist es allein, die gewisse Resultate zu erzielen erlaubt: aber nur unter sehr großen Schwierigkeiten, und nur einen Bruchteil dessen, was wir erreichen können[23]).

---

[22]) Vgl. eine demnächst im Journal f. Math. erscheinende Arbeit des Verfassers: „Zur Theorie der unbeschränkten Matrizen".

[23]) Der Verfasser konnte mit dieser Methode den Fall reeller H. O. (vgl. Anm. [20])) erledigen, wo der in VII. angedeutete Ausnahmefall noch nicht in Erscheinung trat. Dabei konnte aber der Fortsetzungsprozeß der H. O. nicht so übersehen werden, wie es etwa im Kap. VIII der Fall sein wird, und die Methode war derart unkonstruktiv, daß dabei z. B. der Wohlordnungssatz herangezogen werden mußte (vgl. die Ankündigung im Jahresber. d. D. Math.-Ver. 37, 1–4 (1928), S. 11–15), auch war den nichtreellen H. O. so nicht beizukommen. — Der Verfasser möchte es nicht versäumen, Herrn E. Schmidt an dieser Stelle seinen Dank für das Interesse auszusprechen, das er diesen Untersuchungen (insbesondere der Übertragung der Resultate auf nicht-reelle H. O.) zugewandt hat, und darauf hinweisen, daß er wiederholt wesentliche Anregungen aus Gesprächen mit ihm empfing. Insbesondere stammt der Begriff der „Hypermaximalität" von H. O. (vgl. Def. 9), sowie die Erkenntnis, daß diese Eigenschaft für die Existenz der Z. d. E. notwendig und hinreichend ist, von E. Schmidt.

Die Anordnung des Gegenstandes ist die folgende: Die Kap. I bis IV sind vorbereitender Natur: I. Struktur des Raumes $\mathfrak{H}$, II. Allgemeines über Operatoren in $\mathfrak{H}$, III. Lineare Mannigfaltigkeiten und ihre Projektionsoperatoren, IV. Reduzibilität von Operatoren. In den Kap. V bis VIII wird die Hauptarbeit der Lösung des Eigenwertproblems geleistet: V. Cayleysche Transformation, VI. Erweiterungselemente, VII. Defektindizes, VIII. Der Fortsetzungsprozeß. In Kap. IX bis X werden im Anschluß daran die genauen Normalformen für die max. H. O. hergestellt: IX. Eigenwertdarstellung, X. Operatoren ohne Eigenwertdarstellung. Kap. XI bis XII enthalten schließlich einige allgemeine Sätze über unbeschränkte Operatoren: XI. Halbbeschränktheit, XII. Pathologie der Unbeschränktheit[24]). Außerdem sind noch einige Anhänge da: In I. wird bewiesen, daß die Funktionenräume von I. (Einleitung) wirklich den Bedingungen **A** bis **E** von Kap. I genügen (also daß unsere Theorie auf sie anwendbar ist)[25]). In Anhang II beweisen wir einen Satz über die Lösung des Eigenwertproblems unitärer Operatoren (allgemeiner dessen von „normalen“) — dies ist eine Frage über beschränkte Operatoren, die mit der F. Rieszschen Methode lösbar ist, aber im Rahmen der Hilbertschen Theorie bisher nie erledigt wurde[26]). Wir brauchen dies für Kap. VIII, da es aber methodisch in den Kreis der Hilbertschen Theorie gehört, ziehen wir vor, es so getrennt zu behandeln. In Anhang III gehen wir auf den Zusammenhang von Operatoren und Matrizen näher ein (vgl. VIII. Einleitung, sowie Anm.[23])); in IV wird der Operator $\bar{\bar{R}}$ (vgl. VII. Einleitung) genauer untersucht.

Im übrigen ist diese Arbeit ein logisch geschlossenes Ganzes, das ohne alle Vorkenntnisse aus der Literatur der „unendlich vielen Variablen“ gelesen werden kann. (Dementsprechend ist auch der Inhalt der Kap. I, III und des Anhangs I — abgesehen von der Anordnung — nicht neu.)

## I. Der abstrakte Hilbertsche Raum.

Wir charakterisieren den abstrakten (komplexen) Hilbertschen Raum durch fünf Eigenschaften **A** bis **E**. Es erweist sich als zweckmäßig, an einige von ihnen einige einfache Sätze anzuschließen, die bereits aus den betreffenden allein folgen.

---

[24]) Dieselbe wird in der in Anm.[22]) angekündigten Arbeit des Verfassers noch bedeutend verschärft werden.

[25]) Dies ergibt, zusammen mit einigen Überlegungen von Kap. I, natürlich einen Beweis des Fischer-F. Rieszschen Satzes.

[26]) Es kommt im wesentlichen darauf heraus, daß zwei vertauschbare beschränkte H. O. eine gemeinsame Eigenwertform (oder Spektralform) nach Hilbert zulassen. Vgl. Hellinger-Toeplitz, Encyklopädie-Artikel II, C. 13, S. 1562 u. f., wo die Frage für vollstetige H. O. gelöst wird.

**A.** *$\mathfrak{H}$ ist ein linearer Raum.*

*D. h.: es gibt in $\mathfrak{H}$ eine Addition $f+g$, eine Subtraktion $f-g$, und eine (skalare) Multiplikation $af$ ($f, g$ von $\mathfrak{H}$, $a$ eine komplexe Zahl), sowie ein Element* 0; *und für diese gelten die Rechenregeln der gewöhnlichen Vektoralgebra.*

Definition 1. Eine Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{H}$ heißt eine lineare Mannigfaltigkeit (kurz: lin. M.), wenn sie mit $f_1, \ldots, f_n$ auch $a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n$ enthält. Wenn $\mathfrak{M}$ irgendeine Teilmenge von $\mathfrak{H}$ ist, so ist die Menge aller $a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n$ ($f_1, \ldots, f_n$ von $\mathfrak{M}$, $a_1, \ldots, a_n$ Konstante) die kleinste $\mathfrak{M}$ enthaltende lin. M., sie heiße die von $\mathfrak{M}$ aufgespannte lin. M.

Definition 2. $n$ Elemente $f_1, \ldots, f_n$ heißen linear unabhängig (kurz: lin. unabh.), wenn aus $a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n = 0$ $a_1 = \ldots = a_n = 0$ folgt. $n$ lin. M. $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_n$ heißen lin. unabh., wenn aus $f_1 + \ldots + f_n = 0$ ($f_1$ von $\mathfrak{M}_1, \ldots, f_n$ von $\mathfrak{M}_n$) $f_1 = \ldots = f_n = 0$ folgt.

**B.** *Es gibt in $\mathfrak{H}$ ein, zu dem der Vektorrechnung analoges, inneres Produkt, das eine Metrik erzeugt.*

*D. h.: es gibt eine Funktion $(f, g)$ ($f, g$ von $\mathfrak{H}$, $(f, g)$ eine komplexe Zahl) mit den folgenden Eigenschaften:*

1. $(af, g) = a(f, g)$, 2. $(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$, 3. $(f, g) = \overline{(g, f)}$,

4. $(f, f) \geqq 0$ *und nur für* $f = 0$ *ist es* $= 0$.

(*Aus* 1., 2. *folgt nach* 3.: 1'. $(f, ag) = \bar{a}(f, g)$, 2. $(f, g_1 + g_2) = (f, g_1) + (f, g_2)$.) *Durch*

$$|f| = \sqrt{(f, f)}$$

*wird ein „Betrag“ definiert, durch $|f-g|$ die Metrik* (*vgl. Satz* 2 *und Anm.*[27])).

Satz 1. *Es gilt stets*

$$|(f, g)| \leqq |f| \cdot |g|.$$

Beweis. Erstens ist (nach 2., 2'., 3. und 4.)

$$\Re(f, g) = \left(\frac{f+g}{2}, \frac{f+g}{2}\right) - \left(\frac{f-g}{2}, \frac{f-g}{2}\right) \leqq \left(\frac{f+g}{2}, \frac{f+g}{2}\right) + \left(\frac{f-g}{2}, \frac{f-g}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}((f, f) + (g, g)) = \frac{|f|^2 + |g|^2}{2}.$$

Wir ersetzen $f, g$ durch $af$, $\frac{1}{a} g$ ($a > 0$): die linke Seite bleibt invariant, die rechte hat das Minimum $|f| \cdot |g|$. Wir ersetzen $f$ durch $\vartheta \cdot f$ ($|\vartheta| = 1$), die rechte Seite bleibt invariant, die linke hat das Maximum $|(f, g)|$. Also

$$|(f, g)| \leqq |f| \cdot |g|.$$

Satz 2. *Es gilt stets:*

$$|af| = |a| \cdot |f|, \qquad |f+g| \leqq |f| + |g|.$$

Beweis. Das erste folgt sofort aus 1., 1′., das zweite aus Satz 1:

$$(f+g, f+g) = (f, f) + (g, g) + 2\,\Re(f, g),$$
$$|f+g|^2 = |f|^2 + |g|^2 + 2\,\Re(f, g) \leqq |f|^2 + |g|^2 + 2\,|f| \cdot |g|,$$
$$|f+g| \leqq |f| + |g|.$$

Definition 3. Zwei $f, g$ sind orthogonal (kurz: orth.), wenn $(f, g) = 0$ ist; zwei lin. M. sind orth., wenn jedes Element der einen zu jedem der anderen orth. ist. Eine Menge $\mathfrak{M}$ heißt normiert orthogonal (kurz: norm. orth.), wenn

$$(f, g) = \begin{cases} 1, & \text{für } f = g \\ 0, & \text{für } f \neq g \end{cases} \quad f, g \text{ von } \mathfrak{M}$$

gilt. Sie ist vollständig (kurz: vollst. norm. orth.), wenn sie nicht echter Teil einer anderen norm. orth. Menge ist — was offenbar besagt, daß $(f, g) = 0$ ($f$ fest, für alle $g$ von $\mathfrak{M}$) $|f| = 1$ ausschließt, also auch $|f| > 0$, also $f = 0$ zur Folge hat. (Bekanntlich hat bei mehreren Elementen oder lin. M. die paarweise Orth. die lin. Unabh. zur Folge.)

Definition 4. Nach Satz 2 ist $|f - g|$ eine Entfernung in $\mathfrak{H}$[27]), also $\mathfrak{H}$ topologisiert. Eine abgeschlossene (kurz: abg.) lin. M. ist also eine, die ihre Häufungspunkte enthält. Wenn wir zur von $\mathfrak{M}$ aufgespannten lin. M. alle ihre Häufungspunkte hinzufügen, erhalten wir die kleinste $\mathfrak{M}$ enthaltende abg. lin. M.: die von $\mathfrak{M}$ aufgespannte abg. lin. M.

**C.** *In der Metrik $|f - g|$ ist $\mathfrak{H}$ separabel. D. h.: eine gewisse abzählbare Menge ist in $\mathfrak{H}$ überall dicht.*

**D.** *$\mathfrak{H}$ besitzt beliebig (endlich!) viele lin. unabh. Elemente*[28]).

---

[27]) Von einer „Entfernung" $\overline{f, g}$ verlangt man bekanntlich, daß sie den folgenden Axiomen genüge:

1. $\overline{f, g} \geqq 0$, und nur fur $f = g$ ist es $= 0$;
2. $\overline{f, g} = \overline{g, f}$;
3. $\overline{f, h} \leqq \overline{f, g} + \overline{g, h}$.

In linearen Räumen kommt noch

4. $\overline{f+h, g+h} = \overline{f, g}, \quad \overline{af, ag} = |a| \cdot \overline{f, g}$

hinzu. — Alle diese Eigenschaften besitzt $\overline{f, g} = |f - g|$ nach Satz 2. Man beachte, daß $(f, g)$ wegen seiner Bilinearität (1., 1′. in **B**) und Satz 1 stetig ist.

[28]) Hierdurch wird die Möglichkeit, daß $\mathfrak{H}$ ein endlichvieldimensionaler Euklidischer Raum sei, ausgeschlossen. Die Bedingungen **A**, **B** sind übrigens in Anlehnung an ein (für endlich viele Dimensionen aufgestelltes) Axiomensystem des Vektorraumes von H. Weyl (Raum, Zeit, Materie, 5. Aufl., Berlin 1923, §§ 2—4) gebildet.

**E.** *$\mathfrak{H}$ ist vollständig. D. h.: wenn eine Folge $f_1, f_2, \ldots$ in $\mathfrak{H}$ der Cauchyschen Konvergenzbedingung genügt (zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N = N(\varepsilon)$, so daß aus $m, n \geqq N$ $|f_m - f_n| \leqq \varepsilon$ folgt), so ist sie konvergent (es existiert ein $f$ aus $\mathfrak{H}$, so daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)$ gibt, so daß aus $n \geqq N$ $|f_n - f| \leqq \varepsilon$ folgt).*

Im Anhang I werden wir zeigen, daß alle in der Einleitung I. und II. genannten Funktionenräume die Eigenschaften **A** bis **E** haben, also Spezialfälle des abstrakten Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}$ sind. Hier aber gehen wir daran zu beweisen, daß $\mathfrak{H}$ in der Tat durch die Eigenschaften **A** bis **E** vollständig charakterisiert ist: daß $\mathfrak{H}$ mit dem gewöhnlichen Hilbertschen Raume isomorph ist. Dazu ist es notwendig, einige allgemein bekannte Sätze über norm. orth. und vollst. norm. orth. Systeme zu beweisen.

Satz 3. *Jede norm. orth. Menge $\mathfrak{M}$ ist höchstens abzählbar, jede vollst. norm. orth. Menge $\mathfrak{M}$ ist genau abzählbar.*

Bemerkung. Wir schreiben darum von nun an alle norm. Orth. und vollst. norm. orth. Mengen als Folgen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ (die im ersteren Falle eventuell abbrechen).

Beweis. $\mathfrak{M}$ sei norm. orth., für zwei beliebige $f, g$ von $\mathfrak{M}$, $f \neq g$ gilt

$$|f - g|^2 = |f|^2 + |g|^2 - 2\,\Re(f, g) = 2\,, \qquad |f - g| = \sqrt{2};$$

wegen der Separabilität von $\mathfrak{H}$ (Bedingung **C**) ist also $\mathfrak{M}$ höchstens abzählbar.

Wir müssen noch zeigen, daß ein endliches norm. orth. System $\mathfrak{M}$ nicht vollst. ist. Seien die Elemente von $\mathfrak{M}$ $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Unter den $a_1\varphi_1 + \ldots + a_n\varphi_n$ gibt es keine $n+1$ lin. unabh., also muß $\mathfrak{H}$ ein Element $f$ haben, das von ihnen allen verschieden ist (Bedingung **D**). Dann ist

$$f^* = f - a_1\varphi_1 - \ldots - a_n\varphi_n$$

jedenfalls $\neq 0$, und zu allen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ orth., wenn wir $a_k = (f, \varphi_k)$ $(k = 1, \ldots, n)$ setzen. Nach der Schlußbemerkung von Def. 3 ist also $\mathfrak{M}$ unvollst.

Satz 4. *$\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ sei ein norm. orth. System. Dann ist die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n) \cdot \overline{(g, \varphi_n)}$$

*für alle $f, g$ von $\mathfrak{H}$ absolut konvergent, insbesondere ist für $f = g$*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2 \leqq |f|^2.$$

Beweis. Für $a_n = (f, \varphi_n)$ gilt bekanntlich:

$$|f - \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n|^2 = |f|^2 - 2\Re \sum_{n=1}^{N} (f, a_n \varphi_n) + \sum_{m,n=1}^{N} (a_m \varphi_m, a_n \varphi_n)$$

$$= |f|^2 - 2\Re \sum_{n=1}^{N} \overline{a_n} (f, \varphi_n) + \sum_{m,n=1}^{N} a_m \overline{a_n} (\varphi_m, \varphi_n)$$

$$= |f|^2 - 2 \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 + \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 = |f|^2 - \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2.$$

Da die linke Seite stets $\geqq 0$ ist, haben wir:

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 \leqq |f|^2, \qquad \sum_{n=1}^{N} |(f, \varphi_n)|^2 \leqq |f|^2.$$

Somit ist $\sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2$ konvergent (absolut!), und zwar $\leqq |f|^2$. Und weil

$$|(f, \varphi_n) \cdot \overline{(g, \varphi_n)}| \leqq \frac{1}{2} |(f, \varphi_n)|^2 + \frac{1}{2} |(g, \varphi_n)|^2$$

ist, konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n) \cdot \overline{(g, \varphi_n)}$ absolut. Damit ist alles bewiesen.

Satz 5. *$\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ sei ein norm. orth. System. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n$ konvergiert dann und nur dann, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ konvergiert.*

Beweis. Nach **E** genügt es zu zeigen, daß die Cauchysche Konvergenzbedingung für beide Reihen gleich lautet: Dies ist aber wegen $(m \geqq n)$

$$|\sum_{p=1}^{m} a_p \varphi_p - \sum_{p=1}^{n} a_p \varphi_p|^2 = |\sum_{p=n+1}^{m} a_p \varphi_p|^2 = \sum_{p,q=n+1}^{m} (a_p \varphi_p, a_q \varphi_q)$$

$$= \sum_{p,q=n+1}^{m} a_p \overline{a_q} (\varphi_p, \varphi_q) = \sum_{p=n+1}^{m} |a_p|^2 = \sum_{p=1}^{m} |a_p|^2 - \sum_{p=1}^{n} |a_p|^2$$

in der Tat der Fall.

Zusatz. *Für $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n$ gilt (im Falle der Konvergenz)*

$$(f, \varphi_n) = a_n.$$

Beweis. Für $N \geqq n$ ist

$$(\sum_{p=1}^{N} a_p \varphi_p, \varphi_n) = \sum_{p=1}^{N} a_p (\varphi_p, \varphi_n) = a_n,$$

und wegen der Stetigkeit des inneren Produktes dürfen wir $N \to \infty$ lassen, was $(f, \varphi_n) = a_n$ ergibt.

Satz 6. *$\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ sei ein norm. orth. System. Für jedes $f$ ist die Reihe*

$$f' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n, \qquad a_n = (f, \varphi_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

*konvergent, und zwar ist $f - f'$ zu allen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ orth.*

Beweis. Die Reihe konvergiert nach Satz 4 und 5, und nach dem Zusatz zu Satz 5 ist $(f', \varphi_n) = a_n = (f, \varphi_n)$, $(f - f', \varphi_n) = 0$; also ist alles bewiesen.

Satz 7. *Dazu, daß ein norm. orth. System* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ *vollst. sei, ist eine jede der drei folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend*:

α) $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ *spannen die abg. lin. M.* $\mathfrak{H}$ *auf.*

β) *Es ist für alle* $f$

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n, \qquad a_n = (f, \varphi_n) \qquad\qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

γ) *Es ist für alle* $f, g$

$$(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n) \cdot \overline{(g, \varphi_n)}.$$

Beweis. Erstens folgt aus der Vollst. β): denn $f - f'$ aus Satz 6 muß verschwinden. Zweitens folgt aus β) α), denn $f$ ist Häufungspunkt der $\sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n$, d. h. der von $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ aufgespannten lin. M. — also Element der abg. lin. M. Drittens folgt aus β) γ), denn es ist

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n \to f, \qquad \left|\sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n\right|^2 \to |f|^2 \quad (\text{für } N \to \infty),$$

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n\right|^2 = \sum_{m, n=1}^{N} a_m \overline{a_n} (\varphi_m, \varphi_n) = \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2,$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2 = |f|^2.$$

Wenn wir hier $f$ durch $\frac{f+g}{2}$ und $\frac{f-g}{2}$ ersetzen und subtrahieren, gewinnen wir den Realteil von γ), wenn wir $f, g$ durch $i f, g$ ersetzen, ihren Imaginärteil.

Viertens folgt aus α) die Vollst., denn sonst gäbe es ein zu allen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ orth. $f \neq 0$. Also ist die ganze von $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ aufgespannte abg. lin. M., d. h. $\mathfrak{H}$, zu $f$ orth. — also auch $f$: $|f|^2 = (f, f) = 0$, $f = 0$, entgegen der Annahme. Fünftens folgt auch aus γ) die Vollst.: denn für dasselbe $f$ muß nach γ) $(f = g)$

$$|f|^2 = (f, f) = \sum_{n=1}^{\infty} 0^2 = 0, f = 0$$

sein.

Wir haben also das folgende logische Schema:

$$\text{Vollständigkeit} \to \beta \begin{smallmatrix} \nearrow \alpha \searrow \\ \searrow \gamma \nearrow \end{smallmatrix} \text{Vollständigkeit.}$$

Folglich sind diese vier Aussagen in der Tat gleichbedeutend.

Satz 8. *Zu jeder Folge $f_1, f_2, \ldots$ beliebiger Elemente von $\mathfrak{H}$ gibt es ein norm. orth. System $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, welches dieselbe lin. M. (also auch dieselbe abg. lin. M.) aufspannt (eine jede der beiden Folgen kann bereits im Endlichen abbrechen).*

Bemerkung. Wir wählen $f_1, f_2, \ldots$ überall dicht (Bedingung **C**!), dann spannt es natürlich die abg. lin. M. $\mathfrak{H}$ auf. Ebenso das nach Satz 8 konstruierte norm. orth. System. $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, nach Satz 7 $\alpha$) ist es somit vollst. Damit ist die Existenz von vollst. norm. orth. Systemen erwiesen.

Beweis. Erstens können wir $f_1, f_2, \ldots$ durch eine Teilfolge von lauter lin. unabh. Elementen ersetzen, die dieselbe lin. M. aufspannt. In der Tat sei $g_1$ das erste $f_n \neq 0$, $g_2$ das erste $f_n \neq a_1 g_1$ ($a_1$ beliebig), $g_3$ das erste $f_n \neq a_1 g_1 + a_2 g_2$ ($a_1, a_2$ beliebig) usw. (wenn es kein $f_n \neq a_1 g_1 + \ldots + a_p g_p$ gibt, brechen wir mit $g_p$ ab). $g_1, g_2, \ldots$ leistet offenbar das zunächst Geforderte.

Auf $g_1, g_2, \ldots$ wenden wir nunmehr das E. Schmidtsche „Orthogonalisationsverfahren" an:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= g_1, & \varphi_1 &= \frac{1}{|\gamma_1|}\cdot\gamma_1\cdot \\
\gamma_2 &= g_2 - (g_2, \varphi_1)\cdot\varphi_1, & \varphi_2 &= \frac{1}{|\gamma_2|}\cdot\gamma_2, \\
\gamma_3 &= g_3 - (g_3, \varphi_1)\cdot\varphi_1 - (g_3, \varphi_2)\cdot\varphi_2, & \varphi_3 &= \frac{1}{|\gamma_3|}\cdot\gamma_3, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots & &\cdots\cdots
\end{aligned}$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ spannen offenbar dieselbe lin. M. auf wie $g_1, g_2, \ldots$, d. h wie $f_1, f_2, \ldots$; ferner sieht man sofort, daß sie ein norm. orth. System bilden.

Auf Grund dieser Tatsachen können wir nun zeigen, daß $\mathfrak{H}$ ein-eindeutig auf den gewöhnlichen Hilbertschen Raum, d. i. die Menge aller Folgen komplexer Zahlen $(x_1, x_2, \ldots)$ mit endlichem $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2$, abgebildet werden kann, und zwar derart, daß ($\leftrightarrow$ bezeichnet die Zuordnung) $f \leftrightarrow (x_1, x_2, \ldots)$ die Folge $af \leftrightarrow (a x_1, a x_2, \ldots)$ hat, $f \leftrightarrow (x_1, x_2, \ldots)$, $g \leftrightarrow (y_1, y_2, \ldots)$ die Folge $f + g \leftrightarrow (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots)$, und außerdem $(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$.

Sei nämlich $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ ein (beliebiges, aber festes) vollst. norm. orth. System, dann ordnen wir $f$ die Folge $(x_1, x_2, \ldots)$ mit $x_n = (f, \varphi_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ zu. Daß $(x_1, x_2, \ldots)$ zum Hilbertschen Raume gehört, folgt aus Satz 4, daß zu jedem solchen $(x_1, x_2, \ldots)$ ein $f$ existiert, aus Satz 5 und dessen Zusatz. Die Ein-eindeutigkeit folgt aus der Vollst. (wenn stets $(f, \varphi_n) = (g, \varphi_n)$ ist, so ist $f - g$ zu allen $\varphi_n$ orth., also $= 0$). Von den drei Schlußbehauptungen sind die zwei ersten klar, die dritte folgt aus Satz 7 $\gamma$).

Somit ist gezeigt, daß $\mathfrak{H}$ dem gewöhnlichen Hilbertschen Raume isomorph ist, also zwei **A** bis **E** genügende Systeme $\mathfrak{H}$ einander; d. h. **A** bis **E** sind ein „kategorisches" Axiomensystem, sie legen alle Eigenschaften von $\mathfrak{H}$ fest.

## II. Operatoren in $\mathfrak{H}$.

Ein Operator ist eine Funktion, die in einer Teilmenge von $\mathfrak{H}$ definiert ist (eventuell in ganz $\mathfrak{H}$) und Werte aus $\mathfrak{H}$ annimmt. Wir wollen zunächst einige besonders wichtige Sorten von Operatoren definieren.

Definition 5. Ein Operator $R$ ist linear (kurz: lin.), wenn bei sinnvollen $Rf_1, \ldots, Rf_n$ auch $R(a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n)$ sinnvoll, und zwar $= a_1 Rf_1 + \ldots + a_n Rf_n$ ist. Ein Operator $R$ ist abgeschlossen (kurz: abg.), wenn für jede Folge $f_1, f_2, \ldots$, für die alle $Rf_n$ sinnvoll sind, die Konvergenzen $f_n \to f$, $Rf_n \to f^*$ die Konsequenz haben, daß $Rf$ sinnvoll und zwar $= f^*$ ist[29]).

Definition 6. Ein Operator $R$ ist Hermitesch (kurz: ein H. O.), wenn erstens sein Definitionsbereich die abg. lin. M. $\mathfrak{H}$ aufspannt[30]), und zweitens (soweit $Rf$, $Rg$ Sinn haben)

$$(f, Rg) = (Rf, g)$$

gilt. Ein Operator $R$ ist längentreu, wenn er abg. lin. ist und (soweit $Rf$ Sinn hat) $|f| = |Rf|$ gilt.

Wir beginnen damit, daß wir zwei Sätze über H. O. und längentreue O. beweisen. Wir erinnern noch daran, daß wir einen Operator $S$ Fortsetzung eines Operators $R$ nennen (kurz: Forts.), wenn überall wo $Rf$ Sinn hat, auch $Sf$ sinnvoll und zwar $= Rf$ ist — und eigentliche (kurz: eig.) Forts., wenn $R \neq S$ ist, d. h. $S$ an mehr Stellen Sinn hat, wie $R$.

Satz 9. *Sei $R$ ein H. O. Es gibt einen lin. H. O. $\hat{R}$, der Forts. von $R$ ist und von dem alle ebensolchen H. O. ihrerseits Forts. sind; und es gibt einen abg. lin. H. O. $\tilde{R}$, der Forts. von $R$ (also auch von $\hat{R}$) ist, und von dem alle ebensolchen H. O. ihrerseits Forts. sind.*

Beweis. Wenn wir $\hat{R}$ so definieren könnten: $\hat{R}f$ hat Sinn, wenn $f = a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n$ ist, $Rf_1, \ldots, Rf_n$ sinnvoll, und zwar ist es dann $= a_1 Rf_1 + \ldots + a_n Rf_n$; und $\tilde{R}$ so: $\tilde{R}f$ hat Sinn, wenn eine Folge

---

29) Dies ist offenbar eine stetigkeits-ähnliche Eigenschaft, und zwar in jedem „kompakten" topologischen Raume der Stetigkeit gleichwertig. Im Hilbertschen Raume bedeutet sie aber viel weniger, für H. O. ist sie im wesentlichen immer da, vgl. Satz 9.

30) So weit schwächen wir (mit Rücksicht auf die Anwendung auf Matrizen, vgl. Anhang III) die Bedingung $\gamma$) von Einleitung V ab: dort wurde Überalldichtheit des Definitionsbereiches verlangt.

$g_1, g_2, \ldots$ existiert mit lauter sinnvollen $\hat{R} g_n$, wobei $g_n \to f$, $\hat{R} g_n \to f^*$, und zwar ist es dann $= f^*$ — dann würden diese $\hat{R}$, $\tilde{R}$ offenbar alles Gewünschte leisten. Es fragt sich aber, ob diese Festsetzungen widerspruchfrei möglich sind.

Sie sind es gewiß, wenn $a_1 f_1 + \ldots + a_m f_m = b_1 g_1 + \ldots + b_n g_n$ ($R f_1, \ldots, R f_m$, $R g_1, \ldots, R g_n$ sinnvoll) $a_1 R f_1 + \ldots + a_m R f_m = b_1 R g_1 + \ldots + b_n R g_n$ nach sich zieht; und ebenso $f_n \to f$, $g_n \to f$ (alle $\hat{R} f_n$, $\hat{R} g_n$ sinnvoll), $\hat{R} f_n \to f^*$, $\hat{R} g_n \to g^*$ die Konsequenz $f^* = g^*$ hat. Es genügt offenbar zu beweisen: Aus $a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n = 0$ ($R f_1, \ldots, R f_n$ sinnvoll), folgt $a_1 R f_1 + \ldots + a_n R f_n = 0$, aus $f_n \to 0$ (alle $\hat{R} f_n$ sinnvoll), $\hat{R} f_n \to f^*$ folgt $f^* = 0$.

Gelte zunächst die erste Prämisse. Wenn $R g$ sinnvoll ist, so ist

$$(g, a_1 R f_1 + \ldots + a_n R f_n) = \sum_{p=1}^{n} (g, a_p R f_p) = \sum_{p=1}^{n} (R g, a_p f_p)$$
$$= (R g, a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n) = 0.$$

Alle diese $g$ stehen also zu $a_1 R f_1 + \ldots + a_n R f_n$ orth., also auch ihre abg. lin. M., $\mathfrak{H}$ — also ist $a_1 R f_1 + \ldots + a_n R f_n$ auch zu sich selbst orth., d. h. $= 0$. Betrachten wir nunmehr die zweite Prämisse. Wenn $\hat{R} g$ Sinn hat, so ist ($\hat{R}$ ist ja ein H. O.)

$$(g, f^*) = (g, \operatorname{limes} \hat{R} f_n) = \operatorname{limes} (g, \hat{R} f_n) = \operatorname{limes} (\hat{R} g, f_n)$$
$$= (\hat{R} g, \operatorname{limes} f_n) = 0.$$

Somit stehen alle diese $g$ zu $f^*$ orth., also auch ihre abg. lin. M., $\mathfrak{H}$ — und dies hat wieder $f^* = 0$ zur Folge.

Satz 10. *Sei $U$ ein längentreuer O. Dann ist sowohl der Definitionsbereich als auch der Wertevorrat von $U$ je eine abg. lin. M., und $U$ bildet sie stetig und ein-eindeutig aufeinander ab. Soweit $U$ Sinn hat, gilt $(f, g) = (Uf, Ug)$.*

Bemerkung. Wenn Definitionsbereich wie Wertevorrat beide $= \mathfrak{H}$ sind, so heiße $U$, im Sinne der üblichen Terminologie, unitär.

Beweis. Da $U$ lin. ist, sind Definitionsbereich und Wertevorrat lin. M. Weiter ist

$$|Uf - Ug| = |U(f-g)| = |f-g|,$$

also hat $Uf = Ug$ die Folge $f = g$, d. h. die Abbildung ist ein-eindeutig, ferner folgt hieraus ihre und ihrer Inversen Stetigkeit. Dies verursacht, zusammen mit der Abg. von $U$, daß Definitionsbereich und Wertevorrat beide abg. Mengen sind.

Wenn wir in $|f|^2 = |Uf|^2$ $f$ durch $\frac{f+g}{2}$ und $\frac{f-g}{2}$ ersetzen und subtrahieren, so wird $\Re (f, g) = \Re (Uf, Ug)$. Wenn wir $f, g$ durch $if, g$ ersetzen, erhalten wir dasselbe für die Imaginärteile. Also ist $(f, g) = (Uf, Ug)$. Damit ist alles bewiesen. —

Einige Eigenschaften von $\tilde{R}$ ($R$ ein H. O.) sind evident: $\tilde{\tilde{R}} = \tilde{R}$, wenn $S$ Forts. von $R$ ist, so ist $\tilde{S}$ Forts. von $\tilde{R}$. Wir definieren nun die Maximalität von H. O.

Definition 7. Ein H. O. $R$ heiße maximal (kurz: max.), wenn es keine eig. Forts. von $R$ gibt (die auch H. O. ist!).

Da $\tilde{R}$ Forts. von $R$ ist, muß für max. $R$ $R = \tilde{R}$ sein. Ferner sei $R$ ein H. O., $S$ max. H. O., $S$ Forts. von $R$; dann ist $S = \tilde{S}$ auch Forts. von $\tilde{R}$. D. h. jeder max. H. O. ist abg. lin., und ein H. O. $R$ hat genau dieselben max. Forts., wie der abg. lin. H. O. $\tilde{R}$. Wir werden in den späteren Kapiteln die Forts. beliebiger H. O. zu max. untersuchen (vgl. auch die Einleitung VI., VII.), das soeben Gesagte zeigt, daß wir uns dabei durchweg auf abg. lin. Operatoren beschränken dürfen.

Wir definieren weiter:

Definition 8. Sei $R$ ein H. O. $f$ ist ein Erweiterungselement von $R$, und $f^*$ wird $f$ durch $R$ zugeordnet, wenn für alle sinnvollen $Rg$ $(f, Rg) = (f^*, g)$ gilt. $f, f^*$ gehören zur $+$, $0$, $-$-Klasse, je nachdem ob $\mathfrak{J}(f^*, f)$ $>, =, < 0$ ist.

Satz 11. *$f^*$ ist durch $f$ eindeutig bestimmt (vgl. Def. 8); wenn $Rf$ Sinn hat, so ist $f$ Erweiterungselement von der 0-Klasse, und zwar $f^* = Rf$. $R$ ist dann und nur dann max., wenn es keine weiteren Erweiterungselemente von der 0-Klasse gibt.*

Beweis. Wären $f^*$, $f^{**}$ beide $f$ zugeordnet, so müßte $(f^*, g) = (f^{**}, g)$, $(f^* - f^{**}, g) = 0$ sein für alle sinnvollen $Rg$, also auch für die ganze abg. lin. M. dieser $g$, $\mathfrak{H}$. Hieraus folgern wir wieder $f^* - f^{**} = 0$. Die zweite Behauptung ist klar. Bei der dritten ist die Hinreichendheit der Bedingung klar, die Notwendigkeit folgt daraus, daß jedes Erweiterungselement der 0-Klasse zur eig. Forts. von $R$ benutzt werden könnte.

Die durch Satz 11 gegebene Charakterisierung der Max. legt nun die folgende Begriffsbildung nahe.

Definition 9. Ein H. O. $R$ heiße hypermaximal (kurz: hypermax.), wenn es keine anderen Erweiterungselemente von $R$ gibt als die, für welche $R$ Sinn hat. (D. h. wenn $R$ max. ist und die $+$- und $-$-Klassen leer sind.)

Die Wichtigkeit dieses Begriffes[31]) wird sich noch zeigen, vgl. z. B. Satz 36.

[31]) Er stammt von Herrn E. Schmidt, vgl. Anm. [23]). Bei Beschränkung auf den reellen Hilbertschen Raum tritt die Unterscheidung max. — hypermax. nicht auf.

Wir beweisen noch einen Satz über die Stetigkeit von lin. O.

Satz 12. *Für einen lin. O. $R$ ist eine jede der folgenden Aussagen mit der Stetigkeit gleichwertig.*

$$\alpha)\quad |Rf| \leqq C\cdot|f|, \qquad \beta)\quad |(f, Rg)| \leqq C\cdot|f|\cdot|g|.$$

*Wenn $R$ ein H. O. ist, so kommt noch hinzu:*

$$\gamma)\quad |(f, Rf)| \leqq C\cdot|f|^2\ {}^{32)}.$$

Bemerkung. Nach Hilbert sagen wir bei lin. H. O. für stetig auch beschränkt. Bei nicht-lin. O. unterlassen wir es, die Stetigkeit zu untersuchen. (Die Hilbertsche Definition ist $\beta$).)

Beweis. Wegen der Lin. folgt aus $\alpha$) $|Rf-Rg| = |R(f-g)| \leqq C|f-g|$, d. h. die Stetigkeit. In $\beta$) brauchen wir nur $f = Rg$ zu setzen, um $|Rg|^2 \leqq C\cdot|Rg|\cdot|g|$, $|Rg| \leqq C\cdot|g|$, d. h. $\alpha$), zu gewinnen. Wenn $R$ stetig ist, so gibt es wegen $R0 = 0$ (Lin.!) ein $\varepsilon > 0$, so daß $|f| \leqq \varepsilon$ $|Rf| \leqq 1$ nach sich zieht. Daher ist stets (Lin.!) $|Rf| \leqq \frac{1}{\varepsilon}\cdot|f|$, also $|(f, Rg)| \leqq |f|\cdot|Rg| \leqq \frac{1}{\varepsilon}\cdot|f|\cdot|g|$, d. h. $\beta$) gilt. Somit sind $\alpha$), $\beta$) der Stetigkeit wirklich gleichwertig.

$\gamma$) besagt offenbar weniger als $\beta$), also genügt es $\beta$) für H. O. aus $\gamma$) zu folgern. Das geschieht ähnlich wie bei Satz 1. Wir setzen für $f$ $\frac{f+g}{2}$ und $\frac{f-g}{2}$ ein und subtrahieren: dann wird

$$\Re(f, Rg) \leqq C\cdot\left(\frac{1}{2}|f|^2 + \frac{1}{2}|g|^2\right).$$

Indem wir (wie bei Satz 1) $f, g$ durch $af$, $\frac{1}{a}g$ $(a > 0)$ ersetzen und das Minimum der rechten Seite nehmen, sodann $f, g$ durch $\vartheta f, g$ $(|\vartheta| = 1)$, und das Maximum der linken bilden, erhalten wir $|(f, Rg)| \leqq C\cdot|f|\cdot|g|$, d. h. $\beta$). Aber hier ist $Rf, Rg$ als sinnvoll vorausgesetzt. Von der Sinnvollheit von $Rf$ befreien wir uns: in $\beta$) kommt $Rf$ nicht vor, es gilt für alle $f$, für die dies Sinn hat, also in einer überall dichten Menge (weil $R$ ein lin. H. O. ist); da beide Seiten stetig sind, gilt es also für alle $f$ überhaupt.

Für lin. H. O. haben wir als Bedingung der Beschränktheit:

$$-C\cdot|f|^2 \leqq (f, Rf) \leqq C\cdot|f|^2$$

(Satz 12 $\gamma$)). Dies zerlegen wir wie üblich:

---

[32]) Für einen H. O. muß jedes $(f, Rf)$ reell sein, da ja $(f, Rf) = (Rf, f) = \overline{(f, Rf)}$ gilt.

Definition 10. Ein lin. H. O. $R$ heiße nach oben bzw. unten halbbeschränkt, wenn stets

$$(f, Rf) \leqq C \cdot |f|^2 \quad \text{bzw.} \quad \geqq -C \cdot |f|^2$$

gilt. (Beides zusammen ist nach Satz 12 $\gamma$) Beschränktheit.) Wenn insbesondere $(f, Rf) \geqq 0$ gilt, so heiße er definit.

## III. Lineare Mannigfaltigkeiten und Projektionsoperatoren.

Definition 11. $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ seien zwei, nicht notwendig abg., lin. M. Dann sind $\mathfrak{M} + \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$, die von ihrer Vereinigungsmenge aufgespannte lin. M. und ihr Durchschnitt, wieder lin. M. Wenn insbesondere $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ abg. lin. M. sind, so ist es $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ offenbar ebenfalls. (Ob $\mathfrak{M} + \mathfrak{N}$ auch abg. ist, ist ungewiß; für zueinander orth. $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ folgt es aus Satz 17.) Im folgenden sollen $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ als abg. lin. M. vorausgesetzt werden. Wenn $\mathfrak{M}$ Teilmenge von $\mathfrak{N}$ ist, so ist $\mathfrak{N} - \mathfrak{M}$ ihre Differenz, d. h. die Menge aller Elemente von $\mathfrak{N}$, die zu allen Elementen von $\mathfrak{M}$ orth. sind, auch eine abg. lin. M. $\mathfrak{H} - \mathfrak{M}$ heiße auch die Komplementäre von $\mathfrak{M}$.

Satz 13. *Sei $\mathfrak{M}$ eine abg. lin. M. Jedes $f$ kann auf eine und nur eine Art in $f = g + h$, $g$ von $\mathfrak{M}$, $h$ von $\mathfrak{H} - \mathfrak{M}$ zerlegt werden.*

Bemerkung. $g$ heißt dann die Projektion von $f$ in $\mathfrak{M}$, die Zuordnung von $g$ zu $f$ ist offenbar ein überall sinnvoller Operator, wir nennen ihn den Projektionsoperator von $\mathfrak{M}$, $P_{\mathfrak{M}}$ ($\mathfrak{M}$ ist eine abg. lin. M.!).

Beweis. Die Eindeutigkeit ist klar: Aus $g_1 + h_1 = g_2 + h_2$ ($g_1, g_2$ von $\mathfrak{M}$, $h_1, h_2$ von $\mathfrak{H} - \mathfrak{M}$) folgt $g_1 - g_2 = h_2 - h_1$, dieses gehört also zu $\mathfrak{M}$ wie zu $\mathfrak{H} - \mathfrak{M}$, ist somit zu sich selbst orth., also $= 0$; d. h. $g_1 = g_2$, $h_1 = h_2$. Es bleibt übrig, die Existenz zu beweisen.

Da $\mathfrak{H}$ separabel ist, gibt es eine in $\mathfrak{M}$ überall dichte Folge $f_1, f_2, \ldots$ [33]), diese spannt also die abg. lin. M. $\mathfrak{M}$ auf. Nach Satz 8 gibt es also ein norm. orth. System $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, welches dasselbe tut. Nach Satz 6 konvergiert $g = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n) \cdot \varphi_n$, und es gehört mit den $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ zu $\mathfrak{M}$, und $h = f - g$ ist zu allen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ orth. Also auch zu ihrer abg. lin. M., $\mathfrak{M}$ — d. h. $h$ gehört zu $\mathfrak{H} - \mathfrak{M}$. Damit ist alles bewiesen.

Satz 14. *Der Projektionsoperator $P_{\mathfrak{M}}$ ist ein überall sinnvoller max. H. O., es ist $P_{\mathfrak{M}}^2 = P_{\mathfrak{M}}$.*

Beweis. Daß $P_{\mathfrak{M}}$ überall sinnvoll ist, wissen wir. Er ist ein H. O., wenn wir $(f, P_{\mathfrak{M}} g) = (P_{\mathfrak{M}} f, g)$ beweisen können, d. h. für $f = h + k$,

[33]) Jede Teilmenge einer separablen topologischen Menge ist wieder separabel (siehe z. B. Hausdorff, Einführung in die Mengenlehre, Leipzig-Berlin 1914).

$g = h' + k'$ $(h, h'$ von $\mathfrak{M}$, $k, k'$ von $\mathfrak{H} - \mathfrak{M})$ $(f, h') = (h, g)$. Nun ist $(k, h') = 0$, $(h, k') = 0$, also

$$(f, h') = (h + k, h') = (h, h') = (h, h' + k') = (h, g).$$

Wenn $f$ zu $\mathfrak{M}$ gehört, ist die Zerlegung von Satz 13 $f = f + 0$, also $P_{\mathfrak{M}} f = f$. Da $P_{\mathfrak{M}} f$ zu $\mathfrak{M}$ gehört, ist also $P_{\mathfrak{M}}(P_{\mathfrak{M}} f) = P_{\mathfrak{M}} f$, d. h. $P_{\mathfrak{M}}^2 = P_{\mathfrak{M}}$. Da $P_{\mathfrak{M}}$ überall sinnvoll ist, muß es max. sein. —

Die max. H. O. $E$ mit der Eigenschaft $E^2 = E$ haben aber für uns ein selbständiges Interesse (sie entsprechen den „Einzelformen" bei Hilbert), wir untersuchen sie darum zunächst für sich.

Satz 15. *Zu jedem max. H. O. $E$ mit der Eigenschaft $E^2 = E$*[34]) *gibt es eine abg. lin. M. $\mathfrak{M}$, so daß $P_{\mathfrak{M}} = E$ ist. $\mathfrak{M}$ ist der Wertevorrat von $E$.*

Beweis. Da $\mathfrak{M}$ offenbar der Wertevorrat von $P_{\mathfrak{M}}$ ist, genügt es zu zeigen, daß $P_{\mathfrak{M}} = E$ ist, wenn $\mathfrak{M}$ der Wertevorrat von $E$ ist.

Wegen $E^2 = E$ ist, wie man leicht einsieht, $\mathfrak{M}$ die Menge aller $f$ mit $Ef = f$, also eine abg. lin. M. (da $E$ max. ist, ist es auch lin. abg.!). Wenn $Ef$ Sinn hat, so ist $f - Ef$ zu jedem Element von $\mathfrak{M}$, d. h. jedem $Eg$, orth.:

$$(Eg, f - Ef) = (g, Ef - E^2 f) = 0;$$

also gehört es zu $\mathfrak{H} - \mathfrak{M}$. Daher ist $P_{\mathfrak{M}} f = Ef$, also $P_{\mathfrak{M}}$ Forts. von $E$. Da $E$ max. ist, ist folglich $P_{\mathfrak{M}} = E$.

Definition 12. Einen Operator, der den Bedingungen von Satz 15 genügt, nennen wir Projektionsoperator (kurz: P. O., nach Satz 15 sind die P. O. mit den $P_{\mathfrak{M}}$ identisch und den abg. lin. M. $\mathfrak{M}$ ein-eindeutig zugeordnet). Eine abg. lin. M. $\mathfrak{M}$ und ihren P. O. $P_{\mathfrak{M}}$ nennen wir zueinandergehörig. Man sieht sofort: zu den abg. lin. M. $(0)$[35]) und $\mathfrak{H}$ gehören die P. O. $0$ bzw. $1$[36]), ferner ist $P_{\mathfrak{H}-\mathfrak{M}} = 1 - P_{\mathfrak{M}}$. (Also sind $0, 1$ P. O., und mit $E$ ist es auch $1 - E$.)

Satz 16. *Ein P. O. $E$ ist stets beschränkt und definit, es ist nämlich*

$$(f, Ef) = |Ef|^2, \qquad |Ef| \leqq |f|.$$

Beweis. Es ist $(f, Ef) = (f, E^2 f) = (Ef, Ef) = |Ef|^2$, also ist $(f, Ef) \geqq 0$. Wenden wir dies auf den P. O. $1 - E$ an, so wird: $(f, (1 - E) f) \geqq 0$, $(f, Ef) \leqq (f, f) = |f|^2$, also $|Ef|^2 \leqq |f|^2$, $|Ef| \leqq |f|$. Damit sind die Formeln der zweiten Zeile bewiesen. Die erste Zeile folgt aus ihnen.

---

[34]) D. h. wenn $Ef$ sinnvoll ist, so ist es auch $E(Ef)$, und zwar $= Ef$.

[35]) $(0)$ ist die Menge, deren einziges Element die $0$ (aus $\mathfrak{H}$) ist. Die leere Menge sehen wir nicht als lin. M. an.

[36]) $0, 1$ sind zwei überall sinnvolle Operatoren, durch $0f = 0$, $1f = f$ definiert.

Satz 17. *$\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ seien zwei abg. lin. M., $E$, $F$ die zugehörigen P. O. $EF$ ist dann und nur dann ein P. O., wenn $EF = FE$ ist, d. h. $E$, $F$ vertauschbar; dann nennen wir auch $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ vertauschbar, $EF$ ist der P. O. von $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$. $E + F$ ist dann und nur dann ein P. O., wenn $EF = 0$ ist (oder auch: wenn $FE = 0$ ist); dies bedeutet, daß ganz $\mathfrak{M}$ auf ganz $\mathfrak{N}$ orth. steht, wir nennen dann auch $E$, $F$ orth., $E + F$ ist der P. O. von $\mathfrak{M} + \mathfrak{N}$. $E - F$ ist dann und nur dann ein P. O., wenn $EF = F$ ist (oder auch: wenn $FE = F$ ist); dies bedeutet, daß $\mathfrak{N}$ Teilmenge von $\mathfrak{M}$ ist, wir nennen dann auch $F$ Teil von $E$, $E - F$ ist der P. O. von $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}$.*[37])

Beweis. $EF$ ist überall sinnvoll, also ein max. H. O., wenn es der Symmetrie-Bedingung $(EFf, g) = (f, EFg)$ genügt. Nun ist

$$(f, EFg) = (Ef, Fg) = (FEf, g), \quad (EFf, g) - (f, EFg) = (\{EF - FE\} f, g),$$

damit dies für alle $g$ verschwinde, muß $(EF - FE) f = 0$ sein (für alle $f$), also $EF - FE = 0$. Unsere Bedingung ist also bereits für den max. H. O.-Charakter von $EF$ notwendig und hinreichend. Und da sie

$$(EF)^2 = EFEF = EEFF = E^2 F^2 = EF$$

zur Folge hat, auch für den P. O.-Charakter.

Für $E + F$ ist der H. O.-Charakter klar, ebenso die Max. (es ist überall sinnvoll!), es genügt also $(E + F)^2 = E + F$ zu untersuchen. Wegen

$$(E + F)^2 = E^2 + F^2 + EF + FE = (E + F) + (EF + FE)$$

bedeutet es $EF + FE = 0$. Hieraus folgt aber $EF = 0$, denn man multipliziere links mit $E$: $EF + EFE = 0$, und dieses rechts mit $E$: $2 \cdot EFE = 0$ beides zusammen ergibt $EF = 0$[38]). Ist umgekehrt $EF = 0$, so ist es ein P. O., also $FE = EF = 0$, $EF + FE = 0$. Somit ist $EF = 0$ wirklich charakteristisch, Vertauschen von $E$, $F$ zeigt, daß es $FE = 0$ gleichfalls ist.

$E - F$ ist dann und nur dann ein P. O., wenn $1 - (E - F) = (1 - E) + F$ einer ist, da $1 - E$ und $F$ solche sind, bedeutet dies: $(1 - E) F = 0$, $F - EF = 0$, oder auch: $F(1 - E) = 0$, $F - FE = 0$.

Es bleibt noch übrig, die Aussagen über $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$, $\mathfrak{M} \pm \mathfrak{N}$ zu beweisen. Sei erstens $EF = FE$. Jedes $EFf = FEf$ gehört zu $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$, also zu $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$; wenn aber $f$ zu $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$, d. h. $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$, gehört, so ist $EFf = Ef = f$ — d. h. $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ ist der Wertevorrat von $EF$, also dieses sein P. O. Sei zweitens $EF = 0$ (also $FE = 0$). Wenn $f$ zu $\mathfrak{M}$, $g$ zu $\mathfrak{N}$ gehört, so ist $(f, g) = (Ef, Fg) = (f, EFg) = 0$, d. h. $\mathfrak{M}$ zu $\mathfrak{N}$ orth., ebenso klar ist die Umkehrung. Für jedes $f$ gehört $Ef$ zu $\mathfrak{M}$, $Ff$ zu $\mathfrak{N}$,

---

[37]) Da es sich um überall sinnvolle Operatoren handelt, dürfen wir ruhig $EF$, $E \pm F$ bilden; sonst wären die Definitionsbereiche dieser Operatoren noch genauer zu erörtern.

[38]) Dieser Kunstgriff stammt von Herrn E. Schmidt.

also $(E+F)f$ zu $\mathfrak{M}+\mathfrak{N}$; wenn $f$ zu $\mathfrak{M}+\mathfrak{N}$ gehört, so ist es $=g+h$, $g$ von $\mathfrak{M}$, $h$ von $\mathfrak{N}$, also

$$(E+F)f=(E+F)(g+h)=Eg+Fg+Eh+Fh=g+0+0+h=f$$

— d. h. $\mathfrak{M}+\mathfrak{N}$ ist der Wertevorrat von $E+F$, also eine abg. lin. M., und dieses sein P. O. (Satz 15). Sei drittens $EF=F$ (also $FE=F$)! Dies bedeutet $EFf=Ff$ für alle $f$, d. h. $Eg=g$ für alle $g$ von $\mathfrak{N}$, d. h. (da dies die Definitionsgleichung von $\mathfrak{M}$ ist, vgl. den Beweis von Satz 15) daß $\mathfrak{N}$ Teilmenge von $\mathfrak{M}$ ist. Wegen $E-F=E-EF=E(1-F)$ ist $E-F$ der P. O. von $\mathfrak{M}\times(\mathfrak{H}-\mathfrak{N})=\mathfrak{M}-\mathfrak{N}$.

Damit sind alle unsere Behauptungen bewiesen.

Satz 18. *$E$ ist dann und nur dann Teil von $F$, wenn stets*

$$|Ef|\leqq|Ff|$$

*gilt. $E_1+\ldots+E_p$ ist dann und nur dann P. O. ($E_1,\ldots,E_p$ P. O.), wenn*

$$E_m E_n=0 \qquad (m\neq n;\ m,n=1,\ldots,p)$$

*gilt.*

Beweis. Wenn $E$ Teil von $F$ ist, so ist $E=EF$, also $|Ef|=|EFf|\leqq|Ff|$. Gilt dies umgekehrt für alle $f$, so hat $f=Ef$ die Konsequenz

$$|Ff|\geqq|Ef|=|f|,\qquad (f,Ff)=|Ff|^2\geqq|f|^2=(f,f),$$
$$|(1-F)f|^2=(f,(1-F)f)\leqq 0,\qquad (1-F)f=0,$$

also $f=Ff$. D. h. wenn $E,F$ die P. O. von $\mathfrak{M},\mathfrak{N}$ sind, so ist $\mathfrak{M}$ Teil von $\mathfrak{N}$ — also $E$ Teil von $F$.

Daß $E_m E_n=0$ $(m\neq n)$ für den P. O.-Charakter von $E_1+\ldots+E_p$ hinreicht, folgt durch wiederholte Anwendung von Satz 17; seine Notwendigkeit erkennen wir so. Es ist $(m\neq n)$

$$|E_m f|^2+|E_n f|^2\leqq|E_1 f|^2+\ldots+|E_p f|^2=(f,E_1 f)+\ldots+(f,E_p f)$$
$$=(f,(E_1+\ldots+E_p)f)\leqq|f|^2,$$

also für $E_n f=f$ $|E_m f|^2\leqq 0$, $E_m f=0$. Da für $f=E_n g$ das erstere zutrifft, ist stets $E_m E_n g=0$, d. h. $E_m E_n=0$, wie behauptet wurde. —

Zum Schluß noch ein Satz über die Konvergenz von P. O.

Satz 19. *$E_1, E_2,\ldots$ sei eine Folge von P. O., und entweder $E_m$ Teil von $E_n$ für alle $m<n$, oder $E_n$ Teil von $E_m$ für alle $m<n$. Dann gibt es einen P. O. $E$, so daß für jedes $f$ $E_n f\to Ef$ gilt.*

Beweis. Wenn wir $E_1, E_2,\ldots, E$ durch $1-E_1, 1-E_2,\ldots, 1-E$ ersetzen, geht der erste Unterfall in den zweiten über[39]), es genügt daher etwa den ersteren zu betrachten.

[39]) Denn wenn $E$ Teil von $F$ ist, so ist $1-F$ Teil von $1-E$, z. B. darum, weil $(1-E)(1-F)=1-E-F+EF=1-F$ ist.

Mit wachsendem $n$ wächst $|E_n f|^2$ (Satz 18), und es bleibt $\leqq |f|^2$ (Satz 16), daher existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)$, so daß für jedes $m, n \geqq N$ $|E_n f|^2 - |E_m f|^2 \leqq \varepsilon$ bleibt. Sei noch $m < n$, dann ist $E_n - E_m$ ein P. O., also

$$|E_n f - E_m f|^2 = (f, (E_n - E_m) f) = (f, E_n f) - (f, E_m f) = |E_n f|^2 - |E_m f|^2 \leqq \varepsilon.$$

Somit hat die Folge $E_1 f, E_2 f, \ldots$ einen Limes, er heiße $Ef$.

$E$ ist ein überall sinnvoller Operator. Da

$$(f, Eg) = \text{limes}\,(f, E_n g) = \text{limes}\,(E_n f, g) = (Ef, g)$$

ist, ist es ein max. H. O. Wir brauchen daher nur noch $E^2 = E$ zu beweisen. Es ist

$$(f, E^2 g) = (Ef, Eg) = \text{limes}\,(E_n f, E_n g) = \text{limes}\,(f, E_n^2 g) = \text{limes}\,(f, E_n g) = (f, Eg),$$

also in der Tat $E^2 = E$.

## IV. Reduzibilität von Operatoren.

Bei endlichvieldimensionalen Matrizen versteht man unter Reduzibilität bekanntlich die Möglichkeit, die Matrix unitär auf eine solche Form zu transformieren, daß in ihr (die etwa $N = M_1 + M_2$-dimensional sein mag) nur die gemeinsamen Felder der $M_1$ ersten Zeilen und Spalten und die gemeinsamen Felder der $M_2$ letzten Zeilen und Spalten anders als mit Nullen besetzt sein können. Wenn die Matrix als lineare Transformation aufgefaßt wird, so heißt dies: der Raum ist in zwei (zueinander orth.) lin. M. von $M_1$- bzw. $M_2$-Dimensionen zerlegbar, deren jede durch die Transformation in ein Teil von sich übergeführt wird.

Bei den Operatoren in $\mathfrak{H}$ analogisieren wir dies folgendermaßen, wobei wir uns auf abg. lin. Operatoren beschränken:

Definition 13. Ein abg. lin. Operator $R$ heiße durch die abg. lin. M. $\mathfrak{M}$ reduziert, wenn aus der Sinnvollheit von $Rf$ auch die von $RP_{\mathfrak{M}}f$ folgt, und zwar dieses $= P_{\mathfrak{M}}Rf$ ist[40]).

Durch $(0)$ und $\mathfrak{H}$ wird offenbar jedes $R$ reduziert, und wenn $\mathfrak{M}$ das $R$ reduziert, so tut es auch $\mathfrak{H} - \mathfrak{M}$ (wegen $P_{\mathfrak{H}-\mathfrak{M}} = 1 - P_{\mathfrak{M}}$). Irreduzibel heiße $R$, wenn es nur durch $(0)$ und $\mathfrak{H}$ reduziert wird.

Wenn $R$ durch $\mathfrak{M}$ reduziert wird, so gehört für jedes $f$ von $\mathfrak{M}$ offenbar auch $Rf$ zu $\mathfrak{M}$ ($Rf = RP_{\mathfrak{M}}f = P_{\mathfrak{M}}Rf$), also erzeugt $R$ auch einen Operator in $\mathfrak{M}$ (d. h. eine Funktion, deren Definitionsbereich und Wertevorrat Teilmengen von $\mathfrak{M}$ sind). Diesen Operator nennen wir den in $\mathfrak{M}$ liegenden Teil von $R$.

[40]) Dies kann also auch als Vertauschbarkeit von $R$ mit $P_{\mathfrak{M}}$ aufgefaßt werden.

Wir beweisen nun zwei Sätze über das Reduzieren von Operatoren.

Satz 20. *$R$ sei ein abg. lin. Operator, $\mathfrak{M}$ eine abg. lin. M. Damit $\mathfrak{M}$ $R$ reduziere, ist notwendig, daß mit $Rf$ auch $RP_{\mathfrak{M}}f$ stets sinnvoll sei, und mit $f$ auch $Rf$ (falls es sinnvoll ist) stets zu $\mathfrak{M}$ gehöre. Wenn $R$ ein H.O. ist, so ist dies auch hinreichend*[41]).

Beweis. Die Notwendigkeit haben wir schon vorher erkannt, es bleibt zu zeigen, daß dies bei H.O. $R$ auch hinreichend ist, d. h. $RP_{\mathfrak{M}}f = P_{\mathfrak{M}}Rf$ zu beweisen. Da $RP_{\mathfrak{M}}f$ nach Annahme zu $\mathfrak{M}$ gehört, ist die Zugehörigkeit von $Rf - RP_{\mathfrak{M}}f = R(f - P_{\mathfrak{M}}f)$ zu $\mathfrak{H} - \mathfrak{M}$ zu zeigen, oder da $f - P_{\mathfrak{M}}f$ zu $\mathfrak{H} - \mathfrak{M}$ gehört: wenn $g$ zu $\mathfrak{H} - \mathfrak{M}$ gehört, so gehört auch $Rg$ dazu (wenn es Sinn hat).

Sei $Rf$ sinnvoll, dann gehört $RP_{\mathfrak{M}}f$ zu $\mathfrak{M}$, also ist

$$(f, P_{\mathfrak{M}}Rg) = (P_{\mathfrak{M}}f, Rg) = (RP_{\mathfrak{M}}f, g) = 0.$$

Da diese $f$ überall dicht liegen, ist $P_{\mathfrak{M}}Rg$ zu allem orth., also $= 0$ — daher gehört $Rg$ zu $\mathfrak{H} - \mathfrak{M}$.

Satz 21. *$\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$ sei eine (eventuell abbrechende) Folge von paarweise orth. abg. lin. M., die zusammen die abg. lin. M. $\mathfrak{H}$ aufspannen. $R$ sei ein abg. lin. Operator, der durch jede von ihnen reduziert wird, eine in $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$ gelegenen Teile seien bzw. $R_1, R_2, \ldots$.*

*Dann wird $R$ durch $R_1, R_2, \ldots$ bestimmt, und zwar folgendermaßen: $Rf$ hat dann und nur dann Sinn, wenn $f = f_1 + f_2 + \ldots$ ist ($f_1, f_2, \ldots$ aus bzw. $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$), alle $R_1 f_1, R_2 f_2, \ldots$ Sinn haben, beide Reihen $f_1 + f_2 + \ldots$, $R_1 f_1 + R_2 f_2 + \ldots$ konvergieren (wenn die Folge $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$ abbricht, so fällt diese Konvergenzannahme natürlich fort), und zwar ist dann $Rf = R_1 f_1 + R_2 f_2 + \ldots$.*

Beweis. Daß $R$ an den angeführten Stellen Sinn hat, und zwar die angegebenen Werte annimmt, das folgt sofort aus der Definition von $R_1, R_2, \ldots$ sowie dem abg. lin. und durch $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$ reduzierten Charakter von $R$. Wir müssen noch beweisen: wenn $Rf$ Sinn hat, so hat $f$ die obige Form.

Wir setzen $f_p = P_{\mathfrak{M}_p}f$ $(p = 1, 2, \ldots)$, $f_p$ liegt dann in $\mathfrak{M}_p$, und die $P_{\mathfrak{M}_p}$ (wie die $\mathfrak{M}_p$) sind paarweise orth. Auch ist $R_p f_p = Rf_p = RP_{\mathfrak{M}_p}f = P_{\mathfrak{M}_p}Rf$ Aus der Orth. der $P_{\mathfrak{M}_p}$ folgt, daß die $P_{\mathfrak{M}_1}$, $P_{\mathfrak{M}_1} + P_{\mathfrak{M}_2}$, $P_{\mathfrak{M}_1} + P_{\mathfrak{M}_2} + P_{\mathfrak{M}_3}, \ldots$ eine (natürlich wachsende) Folge von P. O. bilden, die nach Satz 19 einen P.O. $E$ zum Limes haben. Aus Stetigkeitsgründen sind alle Teile von $E$, also die $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$ Teile der zu $E$ gehörigen abg. lin. M. $\mathfrak{M}$. Nach der Annahme über die $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$ ist daher $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$, $E = 1$.

---

[41]) In endlichvieldimensionalen Räumen ist dies auch bei unitären Operatoren hinreichend, in $\mathfrak{H}$ nicht; das ist aber hier belanglos.

Also sind die Reihen $f_1 + f_2 + \ldots$, $R_1 f_1 + R_2 f_2 + \ldots$ konvergent, und sie haben die bzw. Summen $1 f = f$, $1 R f = R f$. Damit ist alles bewiesen.

## V. Die Cayleysche Transformation.

Nach diesen Vorbereitungen können wir unsere eigentliche Aufgabe in Angriff nehmen, die genauere Untersuchung der verschiedenen Arten von H. O. Die Grundlage dieser Überlegungen ist ein Kunstgriff, der eine Übertragung der Cayleyschen Transformation der Algebra auf unser Gebiet ist.

Sei $R$ ein abg. lin. H. O. und $\mathfrak{A}$ sein Definitionsbereich. $\mathfrak{A}$ ist eine lin. M. und überall dicht (also nur dann abg., wenn es $= \mathfrak{H}$, d. h. $R$ überall sinnvoll ist, was keineswegs vorausgesetzt wird). Wir betrachten die beiden Operatoren $R \pm i 1$, die auch in $\mathfrak{A}$ definiert sind. Man berechnet mühelos:

$$((R \pm i 1) f, (R \pm i 1) g) = (R f, R g) \pm (R f, i g) \pm (i f, R g) + (f, g)$$
$$= (R f, R g) + (f, g),$$

also insbesondere für $f = g$

$$|(R \pm i 1) f| = |(R - i 1) f| = \sqrt{|R f|^2 + |f|^2}.$$

Somit hat $f \neq 0$ $(R + i 1) f \neq 0$, $(R - i 1) f \neq 0$ zur Folge, und wegen der Lin. $f \neq g$ die Folge $(R + i 1) f \neq (R + i 1) g$, $(R - i 1) f \neq (R - i 1) g$. Wenn $\mathfrak{A}$ durch $R \pm i 1$ auf $\mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{F}$ abgebildet wird, so sind die Abbildungen demnach alle ein-eindeutig. Insbesondere sei die Abbildung von $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{F}$ $U$. Da $R \pm i 1$, wie $R$, abg. lin. sind, gilt dasselbe von $U$; weiter folgt aus der Gleichung von vorhin $|U f| = |f|$. Nach Def. 6 ist daher $U$ ein längentreuer Operator, da $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ sein Definitionsbereich bzw. Wertevorrat ist, sind nach Satz 10 beide abg. lin. M.

Satz 22. *Sei $R$ ein abg. lin. H. O. und $\mathfrak{A}$ sein Definitionsbereich; die Operatoren $R \pm i 1$ mögen $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{F}$ abbilden. Diese Abbildungen von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ aufeinander sind ein-eindeutig, und insbesondere ist die Abbildung von $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{F}$ ein längentreuer Operator $U$. $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ sind beide abg. lin. M.*

Beweis. Wurde soeben erbracht.

Definition 14. Die Operatoren $R, U$ aus Satz 22 nennen wir Cayleysche Transformierte voneinander, $R$ ist immer ein abg. lin. H. O., $U$ immer längentreu [42]).

---

[42]) Zunächst wissen wir nur, daß jedes abg. lin. H. O. $R$ genau eine Cayleysche Transformierte $U$ (längentreu) hat. Der Gültigkeitsbereich der Umkehrung wird aus Satz 24 hervorgehen.

Satz 23. *Ein längentreuer Operator $U$ ist dann und nur dann Cayleysche Transformierte des abg. lin. H. O. $R$, wenn*

*$\alpha$) $\mathfrak{A}$ die Menge aller $\varphi - U\varphi$, $\varphi$ von $\mathfrak{E}$, ist,*

*$\beta$) für alle $\varphi$ von $\mathfrak{E}$ $R(\varphi - U\varphi) = i(\varphi + U\varphi)$ ist.*

Beweis. Sei $U$ die Cayleysche Transformierte von $R$. Wenn $f$ zu $\mathfrak{A}$ gehört, so gehört $(R + i1)f = \varphi$ zu $\mathfrak{E}$, es ist $U\varphi = (R - i1)f$, also $\varphi - U\varphi = 2if$, $f = \frac{\varphi}{2i} - U\frac{\varphi}{2i}$. Gehört umgekehrt $\varphi$ zu $\mathfrak{E}$, so ist $(R + i1)f = \varphi$ für ein $f$ von $\mathfrak{A}$, also $(R - i1)f = U\varphi$, $\varphi - U\varphi = 2if$, d. h. $\varphi - U\varphi$ gehört zu $\mathfrak{A}$. Und schließlich ist $\varphi + U\varphi = 2Rf$, also $R(\varphi - U\varphi) = 2iRf = i(\varphi + U\varphi)$. Also sind $\alpha$), $\beta$) erfüllt.

Genüge umgekehrt $U$ $\alpha$), $\beta$). Wenn $f$ zu $\mathfrak{A}$ gehört, so ist $f = \varphi - U\varphi$, $\varphi$ von $\mathfrak{E}$ ($\alpha$)), $Rf = i(\varphi + U\varphi)$ ($\beta$)), also $(R + i1)f = 2i\varphi$, $(R - i1)f = 2iU\varphi$. Somit gehört $(R + i1)f$ zu $\mathfrak{E}$, und es ist $U(R + i1)f = (R - i1)f$. Wenn wir dagegen von einem $\varphi$ von $\mathfrak{E}$ ausgehen, so gehört $f = \varphi - U\varphi$ zu $\mathfrak{A}$, also ist $Rf = i(\varphi + U\varphi)$, $2i\varphi = (R + i1)f$, $\varphi = (R + i1)\frac{f}{2i}$. Somit ist $\mathfrak{E}$ die Menge aller $(R + i1)f$, $f$ von $\mathfrak{A}$, und $U(R + i1)f = (R - i1)f$, d. h. $U$ wirklich die Cayleysche Transformierte von $R$.

Satz 24. *Zum längentreuen Operator $U$ gibt es dann und nur dann einen abg. lin. H. O. $R$, von dem er Cayleysche Transformierte ist, wenn die Menge aller $\varphi - U\varphi$, $\varphi$ von $\mathfrak{E}$ ($\mathfrak{E}$ ist der Definitionsbereich von $U$), überall dicht ist. Und zwar ist dann $R$ durch $U$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Die Notwendigkeit ist klar nach $\alpha$), Satz 23, da $\mathfrak{A}$ überall dicht ist. Die Hinreichendheit sowie die eindeutige Bestimmtheit von $R$ durch $U$ (nach $\alpha$), $\beta$) in Satz 23) steht gleichfalls fest, sobald erkannt ist, daß $\beta$) für $R$ keine Unmöglichkeit involviert, und daß das so definierte $R$ ein abg. lin. H. O. ist.

Das erstere folgt daraus, daß für $\varphi \neq \psi$ $\varphi - U\varphi \neq \psi - U\psi$ ist, d. h. für $\varphi \neq 0$ $\varphi - U\varphi \neq 0$. In der Tat hat $\varphi = U\varphi$ die Folge, daß für alle $\chi$ von $\mathfrak{E}$

$$(\varphi, \chi) = (U\varphi, U\chi) = (\varphi, U\chi), \quad (\varphi, \chi - U\chi) = 0$$

ist, da aber die $\chi - U\chi$ überall dicht liegen, ist $\varphi$ zu einer überall dichten Menge orth., also zu ganz $\mathfrak{H}$, also $\varphi = 0$. Das letztere beweisen wir so. Die abg. Lin. von $R$ folgt aus der von $U$, die überall Dichtigkeit des Definitionsbereiches von $R$ (d. h. der $\varphi - U\varphi$) wurde vorausgesetzt — es bleibt noch übrig $(f, Rg) = (Rf, g)$ zu beweisen, d. h. daß $(f, Rg)$ beim Vertauschen von $f$ und $g$ in seine komplex-Konjugierte übergeht. Sei also $f = \varphi - U\varphi$, $g = \psi - U\psi$, dann ist

$$\begin{aligned}(f, Rg) &= (\varphi - U\varphi, i(\psi + U\psi)) \\ &= -i\{(\varphi, \psi) - (U\varphi, \psi) + (\varphi, U\psi) - (U\varphi, U\psi)\} \\ &= i((U\varphi, \psi) - \overline{(U\psi, \varphi)}) = i(U\varphi, \psi) + \overline{i(U\psi, \varphi)},\end{aligned}$$

was die Behauptung in Evidenz setzt.

Satz 25. *$R$, $S$ seien abg. lin. H. O., $U$, $V$ ihre Cayleyschen Transformierten. $R$ ist dann und nur dann Forts. oder eig. Forts. von $S$, wenn $U$ Forts. bzw. eig. Forts. von $V$ ist. — $\mathfrak{M}$ sei eine abg. lin. M., es reduziert $R$ dann und nur dann, wenn es $U$ reduziert.*

Beweis. Man schließt jeweils mühelos mit Hilfe von Satz 22 von $R$ auf $U$, und mit Hilfe von Satz 23 von $U$ auf $R$.

In den vorhergehenden Sätzen haben wir die Beurteilung der Fortsetzbarkeitsverhältnisse von $R$ auf die viel einfacheren von $U$ zurückgeführt. Die Cayleyschen Transformierten aller $R$ sind alle $U$ des Satzes 5, und dabei ist zu beachten: wenn $R$ Forts. von $S$ sein soll, also $U$ Forts. eines Satz 5 genügenden $V$, so braucht es nur längentreu zu sein[43]). An Stelle der zunächst recht unübersichtlichen Forts. von $R$ brauchen wir also bloß die einfach angebbaren längentreuen Forts. von $V$ (das selbst längentreu ist) zu betrachten. Um uns über derartige Fragen zu orientieren, beweisen wir zwei einfache (anschaulich-geometrische) Sätze über längentreue Abbildungen und abg. lin. M.

Zunächst bemerken wir: unter der Dimensionszahl einer abg. lin. M. $\mathfrak{M}$ verstehen wir die obere Grenze aller (endlichen!) $n$, für die es in $\mathfrak{M}$ $n$ lin. unabh. Elemente gibt — also eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, \infty$. (Eine wesentlich allgemeinere Definition der Dimensionszahl von Mengen in $\mathfrak{H}$ werden wir im nächsten Kapitel, Def. 16, geben.)

Satz 26. *$\mathfrak{M}$ sei eine abg. lin. M., $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ein norm. orth. System, welches diese abg. lin. M. aufspannt (es gibt gewiß solche, vgl. den Beweis von Satz 13; es ist $n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$, im letzteren Falle bricht die Folge $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ nicht ab), dann ist $\mathfrak{M}$ $n$-dimensional.*

*Zwei abg. lin. M. $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ können dann und nur dann Definitionsbereich bzw. Wertevorrat eines längentreuen Operators $U$ sein, wenn sie gleichvieldimensional sind. Sei $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ein $\mathfrak{M}$ aufspannendes norm. orth. System, dann entsprechen die $\mathfrak{N}$ aufspannenden norm. orth. Systeme $\psi_1, \ldots, \psi_n$ diesen $U$ ein-eindeutig: jedem wird durch die Bedingungen $U\varphi_1 = \psi_1, \ldots, U\varphi_n = \psi_n$ genau ein solches $U$ zugeordnet.*

Beweis. $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ seien ein norm. orth. System, das die abg. lin. M. $\mathfrak{M}$ aufspannt. Da $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ lin. unabh. sind, hat $\mathfrak{M}$ $\geqq n$ Dimensionen,

---

[43]) Denn die $\varphi - U\varphi$ umfassen die $\varphi - V\varphi$, liegen also wie diese überall dicht.

für $n = \infty$ sind wir also fertig, für endliches $n$ ist zu zeigen: $n+1$ Elemente von $\mathfrak{M}$ sind nie lin. unabh. In der Tat müssen sie die Form

$$f_\mu = a_{\mu 1}\varphi_1 + \ldots + a_{\mu n}\varphi_n \qquad (\mu = 1, \ldots, n+1)$$

haben, und zwischen den $n+1$ $n$-dimensionalen Vektoren

$$a_{\mu 1}, \ldots, a_{\mu n} \qquad (\mu = 1, \ldots, n+1)$$

muß eine lineare Relation bestehen, also auch zwischen den $f_\mu$.

Gehen wir zur zweiten und dritten Behauptung über. Sei $\mathfrak{M}$ der Definitionsbereich und $\mathfrak{N}$ der Wertevorrat des längentreuen Operators $U$. Wenn $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ein $\mathfrak{M}$ aufspannendes norm. orth. System ist, so ist (wegen der Längentreue von $U$) $\psi_1 = U\varphi_1, \ldots, \psi_n = U\varphi_n$ ein $\mathfrak{N}$ aufspannendes norm. orth. System. Und $\mathfrak{M}$ wie $\mathfrak{N}$ haben $n$ Dimensionen.

Umgekehrt seien $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ zwei gleichviel- (etwa $n$-) dimensionale abg lin. M. Sei $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ bzw. $\psi_1, \ldots, \psi_q$ je ein $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{N}$ aufspannendes norm. orth. System, es muß $p = q = n$ sein. Die Reihen $\sum_{r=1}^{n} x_r \varphi_r$ und $\sum_{r=1}^{n} x_r \psi_r$ konvergieren unter denselben Umständen: bei endlichem $n$ immer, bei $n = \infty$, falls $\sum_{r=1}^{\infty} |x_r|^2$ endlich ist (Satz 5) — also allenfalls, wenn $\sum_{r=1}^{\infty} |x_r|^2$ endlich ist; sie erschöpfen also $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{N}$ ($\sum_{r=1}^{n} x_r \varphi_r$ hat mit $\varphi_s$ das innere Produkt $x_s$, es bestimmt also $x_1, \ldots, x_n$ eindeutig). Wir können also einen Operator $U$ durch $U\left(\sum_{r=1}^{n} x_r \varphi_r\right) = \sum_{r=1}^{n} x_r \psi_r$ definieren, er hat den Definitionsbereich $\mathfrak{M}$ und den Wertevorrat $\mathfrak{N}$, und ist offenbar linear. Es ist $\left(f = \sum_{r=1}^{n} x_r \varphi_r\right)$

$$|f|^2 = |Uf|^2 = \sum_{r=1}^{n} |x_r|^2, \qquad |f| = |Uf|,$$

also der Operator stetig, und weil sein Definitionsbereich abg. ist, ist er auch selbst abg. Also ist $U$ längentreu.

Dabei hat Längentreue, also insbesondere abg. Lin., und $U\varphi_\mu = \psi_\mu$ $(\mu = 1, \ldots, n)$ $U\left(\sum_{r=1}^{n} x_r \varphi_r\right) = \sum_{r=1}^{n} x_r \psi_r$ zur Folge; daher ist unser $U$ durch diese Eigenschaften eindeutig festgelegt. Damit sind alle Behauptungen unseres Satzes bewiesen.

Satz 27. *$U$ sei ein längentreuer Operator, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ sein Definitionsbereich bzw. Wertevorrat (also zwei abg. lin. M.). Wir gewinnen alle längentreuen Forts. von $U$ auf die folgende Weise:*

*Man wähle zwei gleichvieldimensionale abg. lin. M. $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, Teile von $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}$, $\mathfrak{H} - \mathfrak{F}$, und einen längentreuen Operator $U'$ mit diesem Definitionsbereich bzw. Wertevorrat. Diese bestimmen genau eine längentreue*

*Forts. $V$ von $U$, die so charakterisiert ist: Definitionsbereich bzw. Wertevorrat sind $\mathfrak{E}+\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{F}+\mathfrak{N}$, in $\mathfrak{E}$ gilt $Vf=Uf$, in $\mathfrak{M}$ gilt $Vf=U'f$. — Indem man $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, U'$ auf alle möglichen Weisen wählt, gewinnt man alle längentreuen Forts. $V$ von $U$, und zwar jede genau einmal.*

Beweis. Daß jede längentreue Forts. $V$ von $U$ so entsteht, ist klar: seien $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$ Definitionsbereich bzw. Wertevorrat von $V$, so genügt es, $\mathfrak{M}=\mathfrak{K}-\mathfrak{E}$, $\mathfrak{N}=\mathfrak{L}-\mathfrak{F}$, $U'=$ das auf $\mathfrak{M}$ eingeschränkte $V$ zu setzen, und alles ist erfüllt. Auch daß unsere Bedingungen genau ein $V$ (wenn überhaupt etwas) festlegen, ist klar: genügen ihr $V'$ und $V''$, so ist $V'f=V''f$ in ganz $\mathfrak{E}$ und ganz $\mathfrak{M}$, also wegen der Lin. auch im ganzen Definitionsbereiche $\mathfrak{E}+\mathfrak{M}$ — d. h. $V'=V''$. Es bleibt daher nur übrig zu zeigen, daß wirklich jedes System $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, U'$ mindestens ein längentreues $V$ bestimmt.

Da $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{N}$ Teil von $\mathfrak{H}-\mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{H}-\mathfrak{F}$, also orth. zu $\mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{F}$ ist, sind $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{E}$ lin. unabh., also in $\mathfrak{E}+\mathfrak{M}$ die Zerlegung $f=g+h$, $g$ von $\mathfrak{E}$, $h$ von $\mathfrak{M}$, eindeutig. Wir definieren also $V(g+h)=Ug+U'h$ ($g$ von $\mathfrak{E}$, $h$ von $\mathfrak{M}$). Da $g, h$ orth. sind, und ebenso $Ug, U'h$, und $U, U'$ längentreu, so ist $|V(g+h)|^2=|Ug+U'h|^2=|Ug|^2+|U'h|^2$ $=|g|^2+|h|^2$, $|g+h|^2=|g|^2+|h|^2$. $V$ ist in der abg. lin. M. $\mathfrak{E}+\mathfrak{M}$ definiert, offenbar lin., nach dem vorigen stetig — also abg., und nach dem vorigen längentreu. Außerdem, wie gewünscht, Forts. von $U$ und $U'$.

Durch die Sätze 26, 27 übersehen wir alle längentreuen Forts. eines längentreuen $U$, also auch alle abg. lin. H. O. Forts. eines abg. lin. H. O. $R$; wir können sie alle effektiv konstruieren. So sehen wir z. B.: $R$ ist max., d. h. es hat keine eig. Forts., wenn $U$ keine hat — also wenn es unmöglich ist in Satz 26 $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ von (0) verschieden (vgl. Anm. [35])) zu wählen. Dies ist offenbar nur für $\mathfrak{H}-\mathfrak{E}=(0)$ oder $\mathfrak{H}-\mathfrak{F}=(0)$ der Fall, d. h. für $\mathfrak{E}=\mathfrak{H}$ oder $\mathfrak{F}=\mathfrak{H}$. Die genauere Untersuchung dieser Fragen soll in den drei nächsten Kapiteln durchgeführt werden.

## VI. Erweiterungselemente.

Wir wollen die bereits im letzten Kapitel zur Geltung gekommenen abg. lin. M. $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ in ihrem Verhältnis zu den Begriffsbildungen von Def. 8 näher charakterisieren.

Für die Zwecke dieses Kapitels ist es bequem, die Terminologie des Restklassen-Kalküls der Algebra zu verwenden: wenn $\mathfrak{M}$ eine (nicht notwendig abg.!) lin. M. ist, so bedeute $f=g \dots \bmod \mathfrak{M}$, daß $f-g$ zu $\mathfrak{M}$ gehört. $R, U, \mathfrak{A}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ mögen die bisherige Bedeutung haben, wie z. B. in Satz 22.

Satz 28. *$\mathfrak{H} - \mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{H} - \mathfrak{F}$ ist die Menge aller erweiterbaren $f$, denen $R$ $if$ bzw. $-if$ zuordnet.*

Beweis. Daß $f^*$ dem $f$ zugeordnet ist, bedeutet nach Satz 23

$$(f^*, \varphi - U\varphi) = (f, i(\varphi + U\varphi)) = (-if, \varphi + U\varphi).$$

$f^* = if$ bzw. $= -if$ bedeutet also, daß $f$ (und mit ihm $f^* = \pm if$) auf alle $\varphi$ (von $\mathfrak{E}$) bzw. alle $U\varphi$ (d. h. ganz $\mathfrak{F}$) orth. steht; d. h. daß es zu $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{H} - \mathfrak{F}$ gehört. —

Daher gehört ganz $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}$ bzw. ganz $\mathfrak{H} - \mathfrak{F}$ (mit Ausnahme der 0) zur $+$- bzw. $-$-Klasse der Erweiterungselemente.

Satz 29. *$\mathfrak{A} + (\mathfrak{H} - \mathfrak{E}) + (\mathfrak{H} - \mathfrak{F})$ ist die Menge aller Erweiterungselemente von $R$.*

Beweis. Die Erweiterungselemente bilden offenbar eine lin. M., da diese, wie wir bereits wissen, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}$, $\mathfrak{H} - \mathfrak{F}$ umfassen muß, ist $\mathfrak{A} + (\mathfrak{H} - \mathfrak{E}) + (\mathfrak{H} - \mathfrak{F})$ Teil von ihr; es bleibt zu zeigen, daß sie nicht größer ist.

Sei also $f$ Erweiterungselement, nach dem obigen bedeutet das:

$$(f^*, \varphi - U\varphi) = (-if, \varphi + U\varphi), \quad (f^* + if, \varphi) = (f^* - if, U\varphi)$$

(für alle $\varphi$ von $\mathfrak{E}$, $f^*$ fest). Sei $U^{-1}$ die Inverse von $U$, mit $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{E}$ als Definitionsbereich bzw. Wertevorrat. Es ist daher $P_{\mathfrak{F}} U = U$, $U^{-1} U = 1$ und $P_{\mathfrak{E}} U^{-1} = U^{-1}$, $UU^{-1} = 1$, soweit diese Operatoren Sinn haben, d. h. in $\mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{F}$. Nunmehr ist

$$(f^* - if, U\varphi) = (f^* - if, P_{\mathfrak{F}} U\varphi) = (P_{\mathfrak{F}} f^* - i P_{\mathfrak{F}} f, U\varphi)$$
$$= (UU^{-1} P_{\mathfrak{F}} f^* - i UU^{-1} P_{\mathfrak{F}} f, U\varphi) = (U^{-1} P_{\mathfrak{F}} f^* - i U^{-1} P_{\mathfrak{F}} f, \varphi),$$

also

$$(\{f^* + if\} - \{U^{-1} P_{\mathfrak{F}} f^* - i U^{-1} P_{\mathfrak{F}} f\}, \varphi) = 0.$$

Da dies für alle $\varphi$ von $\mathfrak{E}$ gilt, so ist

$$P_{\mathfrak{E}}(\{f^* + if\} - \{U^{-1} P_{\mathfrak{F}} f^* - i U^{-1} P_{\mathfrak{F}} f\}) = 0,$$
$$\{P_{\mathfrak{E}} f^* + i P_{\mathfrak{E}} f\} - \{U^{-1} P_{\mathfrak{F}} f^* - i U^{-1} P_{\mathfrak{F}} f\} = 0,$$
$$-U^{-1} P_{\mathfrak{F}} f^* + P_{\mathfrak{E}} f^* = -i(U^{-1} P_{\mathfrak{F}} f + P_{\mathfrak{E}} f),$$

oder nach Anwendung von $-U$

$$P_{\mathfrak{F}} f^* - UP_{\mathfrak{E}} f^* = i(P_{\mathfrak{F}} f + UP_{\mathfrak{E}} f).$$

Weil allgemein $g - P_{\mathfrak{M}} g = P_{\mathfrak{H}-\mathfrak{M}} g = 0 \ldots \mathrm{mod}\,(\mathfrak{H} - \mathfrak{M})$ gilt, ist $P_{\mathfrak{E}} g = P_{\mathfrak{F}} g \ldots \mathrm{mod}\,((\mathfrak{H} - \mathfrak{E}) \dotplus (\mathfrak{H} - \mathfrak{F}))$. Darum folgt aus der obigen Gleichung

$$P_{\mathfrak{E}} f^* - UP_{\mathfrak{E}} f^* = i(P_{\mathfrak{E}} f + UP_{\mathfrak{E}} f) \ldots \mathrm{mod}\,((\mathfrak{H} - \mathfrak{E}) \dotplus (\mathfrak{H} - \mathfrak{F})).$$

Die linke Seite gehört ihrer Natur nach zu $\mathfrak{A}$, also gehört die rechte zu $\mathfrak{A} \dotplus (\mathfrak{H} - \mathfrak{E}) \dotplus (\mathfrak{H} - \mathfrak{F})$; ebenso gehört $P_{\mathfrak{E}} f - U P_{\mathfrak{E}} f$ seiner Natur nach zu $\mathfrak{A}$, aus beidem folgt, daß auch $P_{\mathfrak{E}} f$ zu $\mathfrak{A} \dotplus (\mathfrak{H} - \mathfrak{E}) \dotplus (\mathfrak{H} - \mathfrak{F})$ gehört. Da aber $f = P_{\mathfrak{E}} f \ldots \bmod (\mathfrak{H} - \mathfrak{E})$ ist, gilt dasselbe von $f$ — womit alles bewiesen ist.

Satz 30. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}$, $\mathfrak{H} - \mathfrak{F}$ *sind lin. unabh.*

Beweis. Wir müssen aus $f + \varphi + \psi = 0$, $f$ von $\mathfrak{A}$, $\varphi$ von $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}$, $\psi$ von $\mathfrak{H} - \mathfrak{F}$, folgern, daß $f = \varphi = \psi = 0$ ist, oder auch: daraus, daß $\varphi$ zu $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}$, $\psi$ zu $\mathfrak{H} - \mathfrak{F}$, $\varphi + \psi$ zu $\mathfrak{A}$ gehört, $\varphi = \psi = 0$. Sei also diese letztere Prämisse erfüllt.

$\varphi$, $\psi$, $\varphi + \psi$ sind nach früher Gesagtem Erweiterungselemente, denen $R$ $i\varphi$, $-i\psi$, $R(\varphi + \psi)$ (dieses hat Sinn!) zuordnet. Da $\varphi + \psi$ offenbar auch $i(\varphi - \psi)$ zugeordnet wird, muß dieses $= R(\varphi + \psi)$ sein. Weil $\varphi$, $\psi$ $i\varphi$ bzw. $-i\psi$ zugeordnet sind, so muß

$$(i\varphi, \varphi + \psi) = (\varphi, R(\varphi + \psi)) = (\varphi, i(\varphi - \psi)), \quad 2i(\varphi, \varphi) = 0, \; \varphi = 0,$$
$$(-i\psi, \varphi + \psi) = (\psi, R(\varphi + \psi)) = (\psi, i(\varphi - \psi)), \; -2i(\psi, \psi) = 0, \; \psi = 0$$

gelten. —

Wir können also jedes Erweiterungselement $f$ auf eine und nur eine Weise in $f = f^0 + f^+ + f^-$, $f^0$ von $\mathfrak{A}$, $f^+$ von $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}$, $f^-$ von $\mathfrak{H} - \mathfrak{F}$, zerlegen, und umgekehrt ist jedes solche $f$ ein Erweiterungselement. Wir nennen $f^0, f^+, f^-$ bzw. die 0-, +-, —-Komponente von $f$. Da $f^0, f^+, f^-$ $Rf^0$, $if^+$, $-if^-$ zugeordnet wird, so ordnet $R$ dem $f = f^0 + f^+ + f^-$ $f^* = Rf_0 + if^+ - if^-$ zu. — Diese Zerlegung ist von Wichtigkeit, weil sie eine nähere Kennzeichnung der 0-, +-, —-Klassen erlaubt:

Satz 31. *Ein Erweiterungselement $f$ gehört zur 0-, +-, —-Klasse, je nachdem ob $|f^+| =, >, < |f^-|$ ist.*

Beweis. Wegen $f = f^0 + f^+ + f^-$, $f^* = Rf^0 + if^+ - if^-$ und der Zugehörigkeit von $if^+$, $-if^-$ zu $f^+$ bzw. $f^-$ ist:

$$\begin{aligned}
&(f^*, f) = (Rf^0 + if^+ - if^-, f^0 + f^+ + f^-) \\
&= (Rf^0, f^0) + \{(Rf^0, f^+) + (if^+, f^0)\} + \{(Rf^0, f^-) + (-if^-, f_0)\} \\
&\qquad + \{(if^+, f^-) + (-if^-, f^+)\} + \{(if^+, f^+) + (-if^-, f^-)\} \\
&= (f^0, Rf^0) + \{(f^0, if^+) + (if^+, f^0)\} + \{(f^0, -if^-) + (-if^-, f_0)\} \\
&\qquad + \{(f^+, -if^-) + (-if^-, f^+)\} + i\{|f^+|^2 - |f^-|^2\}.
\end{aligned}$$

Das erste Glied und die drei ersten $\{\ \}$ sind offenbar reell, die letzte $\{\ \}$ offenbar rein imaginär, woraus

$$\mathfrak{J}(f^*, f) = |f^+|^2 - |f^-|^2$$

folgt — also die Behauptung.

## VII. Die Defektindizes.

Definition 15. $R, U, \mathfrak{A}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ mögen die bisherige Bedeutung haben, wie z. B. in Satz 22. $m, n$ seien die Dimensionszahlen von $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{H} - \mathfrak{F}$.

Wir nennen $m, n$ die Defektindizes von $R$. (Es ist $m, n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$).

Diese Zahlen werden bei den Fragen der Max. und Hypermax. eine entscheidende Rolle spielen. Zwischen ihnen und den drei Klassen der Erweiterungselemente besteht ein enger Zusammenhang, den wir nun dartun werden. Zunächst verallgemeinern wir den Begriff der Dimensionszahl in $\mathfrak{H}$.

Definition 16. $\mathfrak{M}$ sei eine (nicht notwendig abg.!) lin. M., $\mathfrak{U}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{H}$ (die nicht einmal lin. M. zu sein braucht). Unter der Dimensionszahl von $\mathfrak{U} \ldots \mathrm{mod}\ \mathfrak{M}$ verstehen wir die obere Grenze aller (endlichen!) $n$, für die es $n$ lin. unabh. Elemente gibt, die zusammen mit ihrer lin. M.[44]) (mit eventueller Ausnahme der 0[45])) ganz in $\mathfrak{U}$ liegen und außerhalb von $\mathfrak{M}$. $n$ ist also eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, \infty$.

Übrigens wird im folgenden $\mathfrak{U}$ doch nicht ganz willkürlich sein, es wird vielmehr stets die folgenden Eigenschaften haben: Erstens ist es eine Restklassenmenge mod $\mathfrak{M}$, d. h. von zwei $f, g$, $f = g \ldots \mathrm{mod}\ \mathfrak{M}$, gehört keins oder beide zu $\mathfrak{U}$, und zweitens gehören mit $f$ auch alle $af$ $(a \neq 0)$ zu $\mathfrak{U}$. Man sieht sofort, daß unter diesen $\mathfrak{U}$ die leere Menge und $\mathfrak{M}$ die einzigen sind, die die Dimensionszahl 0 haben. Weiter ist es klar, daß die Dimensionszahl einer abg. lin. M. $\mathfrak{U} \ldots \mathrm{mod}\ (0)$ mit der von Kap. VI übereinstimmt.

Die $+$-, $-$- und 0-Klassen sind solche Mengen $\mathfrak{U}$ mod $\mathfrak{A}$, ebenso die Vereinigungsmengen irgendwelcher von ihnen; da die zwei ersten 0 nicht enthalten, wohl aber die dritte, so müssen sie im Falle der 0-Dimensionalität leer bzw. gleich $\mathfrak{A}$ sein.

Satz 32. *Die $+$-Klasse, sowie ihre Vereinigung mit der 0-Klasse, ist* mod $\mathfrak{A}$ *$m$-dimensional; die $-$-Klasse, sowie ihre Vereinigung mit der 0-Klasse ist* mod $\mathfrak{A}$ *$n$-dimensional; die 0-Klasse ist* mod $\mathfrak{A}$ Min$(m, n)$-*dimensional.*

Beweis. Sei $p \leqq m$ und endlich (es ist ja eventuell $m = \infty$), und $f_1, \ldots, f_p$ lin. unabh. Elemente von $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}$ (das ja $m$-dimensional ist). Die ganze lin. M. derselben liegt in $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}$, also, mit Ausnahme der 0, in der $+$-Klasse — und somit von selbst außerhalb $\mathfrak{A}$. Also hat die $+$-Klasse $\geqq m$-Dimensionen mod $\mathfrak{A}$, wenn wir noch zeigen, daß ihre Vereinigung

44) Die wegen der Endlichkeit von $n$ von selbst abg. ist.

45) Diese Ausnahme wird sich im folgenden als praktisch erweisen.

mit der 0-Klasse $\leqq m$ hat, sind die zwei ersten Behauptungen bewiesen. Für $m = \infty$ ist dies trivial, bei endlichem $m$ ist zu zeigen: wenn $f_1, \ldots, f_{m+1}$ lin. unabh. Erweiterungselemente sind, so liegt gewiß ein

$$a_1 f_1 + \cdots + a_{m+1} f_{m+1} \neq 0$$

in $\mathfrak{A}$ oder in der $-$-Klasse.

Sei $f_\mu = f_\mu^0 + f_\mu^+ + f_\mu^-$ $(\mu = 1, \ldots, m+1)$, die $f_\mu^+$ liegen alle in dem $m$-dimensionalen $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}$, sind also nicht lin. unabh. Sei etwa

$$a_1 f_1^+ + \cdots + a_{m+1} f_{m+1}^+ = 0$$

(ohne $a_1 = \cdots = a_{m+1} = 0$, also $a_1 f_1 + \cdots + a_{m+1} f_{m+1} \neq 0!$), dann ist $a_1 f + \cdots + a_{m+1} f_{m+1} = g^0 + g^-$, $g^0$ von $\mathfrak{A}$, $g^-$ von $\mathfrak{H} - \mathfrak{F}$. Für $g^- = 0$ gehört es also zu $\mathfrak{A}$, für $g^- \neq 0$ (nach Satz 31) zur $-$-Klasse.

Damit sind die zwei ersten Behauptungen bewiesen, die zwei folgenden ergeben sich ebenso durch Vertauschen von $+$ und $-$. Es bleibt die letzte. Da die Dimensionszahl der 0-Klasse mod $\mathfrak{A}$ allenfalls $\leqq m$ und $\leqq n$ ist, genügt es zu zeigen, daß sie $\geqq$ Min. $(m, n)$ ist: d. h. zu jedem $p \leqq$ Min. $(m, n)$ solche lin. unabh. $f_1, \ldots, f_p$ anzugeben, daß jedes $a_1 f_1 + \cdots + a_p f_p \neq 0$ zur 0-Klasse gehört, aber nicht zu $\mathfrak{A}$.

In $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}$ gibt es gewiß $p$ lin. unabh. Elemente, die wir gleich „orthogonalisieren" (vgl. Satz 8), d. h norm. orth. annehmen können: $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$; ebenso seien $\psi_1, \ldots, \psi_p$ norm. orth. aus $\mathfrak{H} - \mathfrak{F}$. Wir setzen

$$f_1 = \varphi_1 + \psi_1, \quad \ldots, \quad f_p = \varphi_p + \psi_p,$$

dann ist (wenn nicht $a_1 = \cdots = a_p = 0$)

$$a_1 f_1 + \cdots + a_p f_p = (a_1 \varphi_1 + \cdots + a_p \varphi_p) + (a_1 \psi_1 + \cdots + a_p \psi_p)$$

(nach Satz 30) sicher nicht in $\mathfrak{A}$, also insbesondere $\neq 0$; und wegen

$$|a_1 \varphi_1 + \cdots + a_p \varphi_p|^2 = |a_1 \psi_1 + \cdots + a_p \psi_p|^2 = |a_1|^2 + \cdots + |a_p|^2$$

gehört es (nach Satz 31) zur 0-Klasse. Die $f_1, \ldots, f_p$ sind also lin. unabh. und leisten alles was wir wünschen.

Satz 33. *$R$ ist dann und nur dann max., wenn $m = 0$ oder $n = 0$ ist, und hypermax., wenn $m = n = 0$ ist. Oder auch: wenn $\mathfrak{E} = \mathfrak{H}$ oder $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$ ist bzw. wenn $\mathfrak{E} = \mathfrak{F} = \mathfrak{H}$ ist.*

Beweis. Nach Satz 11 bedeutet die Max.: 0-Klasse gleich $\mathfrak{A}$, nach Definition 9 die Hypermax.: außerdem noch die $+$- und die $-$-Klasse leer. Nach der Bemerkung von Satz 32 bedeutet ersteres: 0-Klasse 0-dimensional, und letzteres: $+$- und $-$-Klasse 0-dimensional. Nach Satz 32 schließlich heißt dies: Min $(m, n) = 0$, d. h. $m = 0$ oder $n = 0$ bzw. $m = 0$ und $n = 0$.

Die zweite Formulierung folgt sofort aus der ersten. —

Der Gegensatz von Max. und Hypermax. tritt nunmehr klar hervor, ebenso die Rolle von $m, n$. Zu Satz 32 sei noch bemerkt: Wenn wir $R$ durch $aR + b1$ ersetzen ($a, b$ reell, $a \neq 0$; dies ist wieder ein abg. lin. H. O. mit demselben Definitionsbereich wie $R$), so ändern sich $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ auf unübersichtliche Weise, und wir sehen daher zunächst nicht, was mit $m, n$ geschieht. Aber $\mathfrak{A}$, die Menge der Erweiterungselemente, sowie die 0-, +-, −-Klassen ändern sich bei $a > 0$ offenbar überhaupt nicht, und bei $a < 0$ werden nur die zwei letzteren vertauscht. Daher hat Satz 32 die Konsequenz, daß sich $m, n$ auch nicht ändern bzw. nur vertauscht werden[46]).

## VIII. Der Fortsetzungsprozeß.

Bereits am Schlusse des Kap. VI hatten wir eine Übersicht über alle möglichen Forts. eines abg. lin. H. O. $R$ gewonnen; wir können jetzt entscheiden, wann und wie eine Forts. zu max. bzw. hypermax. Operatoren gelingt.

Satz 34. *Ein abg. lin. H. O. $R$ mit den Defektindizes $m, n$ kann dann und nur dann zu einem mit den Defektindizes $m', n'$ fortgesetzt werden, wenn es ein $p\,(= 0, 1, 2, \ldots, \infty)$ mit $m' + p = m$, $n' + p = n$ gibt.*

Beweis. Wenn wir den Fortsetzungsprozeß nach Satz 27 betrachten ($U, \mathfrak{A}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ mögen den üblichen Sinn haben, $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ wie in Satz 27), so sehen wir: $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}$, $\mathfrak{H} - \mathfrak{F}$ sind $m$- bzw. $n$-dimensional, und die Frage ist, ob es zwei gleichviel- (etwa $p$-) dimensionale abg. lin. M. $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ gibt, die

---

46) Sei $\overline{\overline{R}}$ der folgende Operator: $\overline{\overline{R}}f$ hat Sinn für alle Erweiterungselemente $f$ von $R$, und zwar ist es dann dem zugeordneten $f^*$ gleich. $\overline{\overline{R}}$ ist offenbar abg. lin. und Forts. von $R$. (Wenn $R$ Hypermax. ist, so ist offenbar $\overline{\overline{R}} = R$, andernfalls ist es nicht einmal ein H. O., denn wegen $m > 0$ oder $n > 0$ ist dann die +- oder die −-Klasse nicht leer und in diesen ist $(\overline{\overline{R}}f, f) = (f^*, f)$ nicht reell.) Nach Satz 28 sind $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H} - \mathfrak{F}$ die Menge der Lösungen von $\overline{\overline{R}}f = if$ bzw. $= -if$. Also ist für diese Gleichungen $m$ bzw. $n$ die Höchstzahl von lin. unabh. Lösungen.

Nach dem vorhin Gesagten ist aber die Höchstzahl der lin. unabh. Lösungen von $a\overline{\overline{R}}f + bf = if$ gleich $m$ bzw. $n$ für $a >$ bzw. $< 0$. Die obige Gleichung besagt: $\overline{\overline{R}}f = \varrho f$, $\varrho = -\frac{b}{a} + \frac{1}{a}i$. Wir können also sagen: Wenn $\varrho$ eine nicht reelle Zahl ist, so hat die Gleichung

$$\overline{\overline{R}}f = \varrho f$$

die Höchstzahl $m$ bzw. $n$ von lin. unabh. Lösungen, wenn $\mathfrak{J}\varrho >$ bzw. $< 0$ ist. (Bei reellem $\varrho$ ist die Höchstzahl bekanntlich die „Vielfachheit des Punkteigenwertes" $\varrho$. $Rf = \varrho f$ muß bei nicht reellem $\varrho$ unlösbar sein — außer durch $f = 0$; da sonst $(Rf, f) = \varrho(f, f)$ nicht reell ist.)

Diese Tatsachen stehen in Beziehung zu gewissen Resultaten von Carleman, vgl. das Zitat von Anm. [4]).

Teile von denselben sind, und zwar so, daß $\mathfrak{H}-\mathfrak{E}-\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}-\mathfrak{F}-\mathfrak{N}$ $m'$- bzw. $n'$-dimensional ist.

Allgemeiner ist die Frage diese: Wann hat eine $k$-dimensionale abg. lin. M. $\mathfrak{K}$ ein $p$-dimensionales Teil (eine abg. lin. M.) $\mathfrak{P}$, so daß $\mathfrak{K}-\mathfrak{P}$ $k'$ Dimensionen hat? Wir werden sehen: wenn $k=k'+p$ ist. Wenn wir hierin für $\mathfrak{K}, \mathfrak{P}, k, k'$ $\mathfrak{H}-\mathfrak{E}, \mathfrak{M}, m, m'$ und $\mathfrak{H}-\mathfrak{F}, \mathfrak{N}, n, n'$ einsetzen, haben wir unseren Satz.

Notwendig ist die Bedingung: denn seien $\mathfrak{P}, \mathfrak{K}-\mathfrak{P}$ $p$- bzw. $k'$-dimensional, dann werden sie (als abg. lin. M.) von den norm. orth. Systemen $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ bzw. $\psi_1, \ldots, \psi_k$ aufgespannt, also $\mathfrak{K}=\mathfrak{P}+(\mathfrak{K}-\mathfrak{P})$ von $\varphi_1, \ldots, \varphi_p, \psi_1, \ldots, \psi_k$ (diese sind orth., weil es $\mathfrak{P}, \mathfrak{K}-\mathfrak{P}$ sind), d. h. es ist $p+k'$-dimensional, also $k=k'+p$. (Hierbei kann auch $k'$ oder $p=\infty$ sein!) — Hinreichend ist sie ebenfalls, denn sei $\mathfrak{K}$ $k=k'+p$-dimensional, dann wird es von einem norm. orth. System $\varphi_1, \ldots, \varphi_p, \psi_1, \ldots, \psi_k$ aufgespannt (wieder darf $k'$ oder $p=\infty$ sein!). Die von $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ aufgespannte abg. lin. M. sei $\mathfrak{P}$, dann wird $\mathfrak{K}-\mathfrak{P}$ von $\psi_1, \ldots, \psi_k$ aufgespannt, und wir sind am Ziele.

Satz 35. *$R$ sei ein abg. lin. H. O. mit den Defektindizes $m, n$. Zu einem max. H. O. kann $R$ stets fortgesetzt werden. Wenn $m \neq n$ ist, so gibt es unter seinen Forts. keinen hypermax.; wenn $m=n$ ist, so ist, falls diese endlich sind, jede max. Forts. hypermax., wenn sie $=\infty$ sind, so gibt es unter den max. Forts. sowohl solche, die hypermax. sind, als auch solche, die es nicht sind.*

Beweis. Nach Satz 33 bedeutet Max.: mindestens ein Defektindex $=0$, Hypermax.: beide $=0$, Max. aber nicht Hypermax.: genau einer $=0$. Wenn man hierauf Satz 34 anwendet, gewinnt man genau die Behauptungen unseres Satzes.

Zusatz. *Wenn $R$ nicht schon max. ist, so ist die max. Forts. (und, wenn es solche gibt, die hypermax. sowie die max. aber nicht hypermax. Forts.) auf Kontinuum viele verschiedene Arten möglich.*

Beweis. Unsere Forts.-Methoden kamen (nach Satz 27) auf das Erweitern der $\mathfrak{H}-\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}-\mathfrak{F}$ um zwei abg. lin. M. $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ heraus, die bei nicht max. $R$ $>0$ Dimensionen hatten. Aber dabei spielte noch eine längentreue Abbildung $U$ von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{N}$ eine Rolle, und diese kann auf Kontinuum viele Arten gewählt werden: zu jedem $\mathfrak{N}$ aufspannenden norm. orth. System $\psi_1, \ldots, \psi_p$ gehörte (nach Satz 26) ein $U$, und derer gibt es Kontinuum viele (weil z. B. $\psi_1$ durch jedes $\alpha\psi_1$, $|\alpha|=1$, ersetzt werden kann)[47].

[47]) Mehr als Kontinuum viele Forts. kann es nicht geben, da es nur Kontinuum viele abg. Operatoren in $\mathfrak{H}$ gibt — wie man aus der Separabilität von $\mathfrak{H}$ leicht folgert.

Wenn $R$ nur H. O. ist, so sind seine max. und hypermax. Forts., wie wir wissen, dieselben wie beim abg. lin. H. O. $\tilde{R}$, auf welchen die soeben erzielten Resultate anwendbar sind. Hat insbesondere $R$ nur eine max. Forts., so muß schon $\tilde{R}$ max. sein, ebenso bei den hypermax. Forts.

Wir wenden uns nunmehr der näheren Untersuchung der hypermax. H. O. zu (Kap. IX), und dann der der max., aber nicht hypermax. H. O. (Kap. X).

## IX. Die hypermaximalen Operatoren und die Eigenwertdarstellung.

Wenn $R$ hypermaximal ist, so ist $\mathfrak{E} = \mathfrak{F} = \mathfrak{H}$, d. h. die Cayleysche Transformierte $U$ ist unitär: sie ist überall sinnvoll und hat eine (ebenfalls unitäre) überall sinnvolle Inverse $U^{-1}$. Die hypermax. H. O. $R$ entsprechen als ein-eindeutig den unitären Operatoren $U$, die die Bedingung von Satz 24 erfüllen, d. h. für die die Menge der $\varphi - U\varphi$ überall dicht ist.

Schon beim Beweise von Satz 24 konstatierten wir: wenn die $\varphi - U\varphi$ überall dicht liegen, so folgt aus $U\varphi = \varphi$ $\varphi = 0$. Es gilt aber hier auch die Umkehrung. Wenn nämlich die $\varphi - U\varphi$ nicht überall dicht liegen, so spannen sie eine abg. lin. M. $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{H}$ auf (sie selber bilden schon eine lin. Mann.!) — dann ist $\mathfrak{H} - \mathfrak{M} \neq (0)$. Sei also $f \neq 0$ ein Element von $\mathfrak{H} - \mathfrak{M}$. Alle $\varphi - U\varphi$ gehören zu $\mathfrak{M}$, sind also zu $f$ orth.:

$$(f, \varphi - U\varphi) = (f, \varphi) - (f, U\varphi) = (Uf, U\varphi) - (f, U\varphi) = (Uf - f, U\varphi)$$

muß für alle $\varphi$ verschwinden; daher ist $Uf - f = 0$, $Uf = f$.

Die in Frage kommenden unitären $U$ können also auch so charakterisiert werden: für sie hat $Uf = f$ keine andere Lösung als die 0 (1 ist nicht „Punkteigenwert"!). Wir beherrschen somit die hypermax. H. O. $R$, wenn wir diese $U$ kennen. Dies ist aber ein Problem für beschränkte Operatoren ($U$ ist längentreu, also stetig), das auch mit den Methoden der Hilbertschen Theorie der beschränkten Formen (mit einem, auch jenem Ideenkreise angehörenden, Zusatz) bewältigt werden kann. Wir führen die notwendigen Überlegungen (in teilweiser Anlehnung an die einfache Methode von F. Riesz) im Anhang II durch und geben hier nur das Resultat an.

Definition 17. $a < x < b$ sei ein offenes Intervall (im folgenden wird $a, b$ einmal $0, 1$ und einmal $-\infty, \infty$ sein). Unter einer Zerlegung der Einheit (kurz: Z. d. E.) verstehen wir eine Schar von P. O. $E(\lambda)$ ($\lambda$ läuft durch ganz $a, b$) mit den folgenden Eigenschaften:

$\alpha$) Wenn $\lambda \leqq \mu$ ist, so ist $E(\lambda)$ Teil von $E(\mu)$.

$\beta$) Wenn $\lambda \geqq \lambda_0$, $\lambda \to \lambda_0$, so gilt für jedes $f$ $E(\lambda)f \to E(\lambda_0)f$.

$\gamma$) Wenn $\lambda \to a$ oder $\to b$, so ist $E(\lambda)f \to 0$ bzw. $\to f$.

Wenn nun $a, b$ das Intervall $0, 1$ ist und $E(\varrho)$ eine Z. d. E., so gibt es zu jedem $f$ genau ein $f^*$, so daß für alle $g$

$$(f^*, g) = \int_0^1 e^{2\pi i \cdot \varrho}\, d(E(\varrho) f, g) \text{ [48]}$$

gilt. Der durch $Uf = f^*$ definierte Operator $U$ ist unitär, und $Uf = f$ hat keine Lösung außer 0; und umgekehrt wird jedes $U$ mit diesen Eigenschaften durch genau eine Z. d. E. $E(\lambda)$ auf die soeben skizzierte Weise erzeugt (vgl., wie gesagt, Anhang II).

Wir beweisen nun:

Satz 36. *$a, b$ sei das Intervall $-\infty, \infty$ und $F(\lambda)$ eine Z. d. E. Wenn das Integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2\, d\, |F(\lambda) f|^2$$

*endlich ist*[49]*, so gibt es genau ein $f^*$, so daß für alle $g$*

$$(f^*, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d(F(\lambda) f, g)$$

*(das Integral rechts ist absolut konvergent) gilt. Wir definieren einen Operator $R$ für diese $f$, und zwar durch $Rf = f^*$.*

*Dieses $R$ ist ein hypermax. H. O., und jeder hypermax. H. O. $R$ kann mit Hilfe genau einer Z. d. E. auf diese Weise erzeugt werden.*

Beweis. Den Z. d. E. $E(\varrho)$ fürs Intervall $0, 1$ werden die Z. d. E. $F(\lambda)$ fürs Intervall $-\infty, \infty$ durch die Zuordnung

$$E(\varrho) \Rightarrow F(\lambda) = E\left(-\frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,ctg} \lambda\right), \qquad F(\lambda) \Rightarrow E(\varrho) = F(-\operatorname{ctg} \pi \varrho) \text{ [50]}$$

ein-eindeutig zugeordnet. Es genügt nun zu zeigen: Wenn $E(\lambda)$ die Z. d. E. eines unitären Operators $U$ ist (vgl. die Ausführungen vor unserem Satze), so erzeugt $F(\lambda)$ nach der Anweisung des Satzes wirklich einen Operator $R$, und dieser ist die Cayleysche Transformierte von $U$. Nach dem, was wir über das Verhältnis der Cayleyschen Transformierten wissen, und über hypermax. H. O. sowie unitäre Operatoren und Z. d. E. vor dem Satze

[48]) Stieljessches Integral, es ist absolut konvergent. Wir schreiben $\varrho$ statt $\lambda$.

[49]) Mit $\lambda$ wächst $F(\lambda)$, also auch $|F(\lambda) f|^2$, außerdem ist $\lambda^2$ nie negativ, daher ist dieses Integral seiner Natur nach entweder konvergent (endlich) oder eigentlich divergent ($+\infty$).

[50]) Durch $\varrho = -\frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,ctg} \lambda$, $\lambda = -\operatorname{ctg} \pi \varrho$ werden die Intervalle $0 < \varrho < 1$ und $-\infty < \lambda < \infty$ ein-eindeutig aufeinander bezogen. (Beim arc ctg ist immer der Wert $> -\pi$, $< 0$ zu nehmen.)

formuliert haben, folgt hieraus tatsächlich die Richtigkeit aller Behauptungen.

Sei also $F(\lambda)$ eine Z. d. E., $E(\varrho) = F(-\operatorname{ctg} \pi \varrho)$, $U$ der dazugehörige unitäre Operator. Zunächst zeigen wir: Wenn $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d|F(\lambda) f|^2 = C^2$ endlich ist, so kann das $f^*$ unseres Satzes wirklich erzeugt werden.

Es sei $\lambda < \lambda' < \mu$. Da $E(\lambda)$ Teil von $E(\mu)$ ist, ist $E(\mu) - E(\lambda)$ ein P. O. und deshalb

$$\begin{aligned} |(\{E(\mu) - E(\lambda)\} f, g)| &= |(\{E(\mu) - E(\lambda)\} f, \{E(\mu) - E(\lambda)\} g)| \\ &\leqq |\{E(\mu) - E(\lambda)\} f| \cdot |\{E(\mu) - E(\lambda)\} g|, \end{aligned}$$

und weil allgemein

$$\begin{aligned} |\{E(\mu) - E(\lambda)\} h|^2 &= (h, \{E(\mu) - E(\lambda)\} h) = (h, E(\mu) h) - (h, E(\lambda) h) \\ &= |E(\mu) h|^2 - |E(\lambda) h|^2 \end{aligned}$$

gilt,

$$|(\{E(\mu) - E(\lambda)\} f, g)| \leqq \sqrt{|E(\mu) f|^2 - |E(\lambda) f|^2}\, \sqrt{|E(\mu) g|^2 - |E(\lambda) g|^2},$$

$$\begin{aligned} &|\lambda' \{(E(\mu) f, g) - (E(\lambda) f, g\})| \\ &\leqq \sqrt{\lambda'^2 \{|E(\mu) f|^2 - |E(\lambda) f|^2\}}\, \sqrt{|E(\mu) g|^2 - |E(\lambda) g|^2}. \end{aligned}$$

Da nun die beiden Integrale $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d|E(\lambda) f|^2 = C^2$ und $\int\limits_{-\infty}^{\infty} d|E(\lambda) g|^2 = |E(\lambda) g|^2 \Big|_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} = |g|^2$ absolut konvergieren, hat die bekannte Ungleichung

$$\sqrt{a_1 b_1} + \ldots + \sqrt{a_p b_p} \leqq \sqrt{(a_1 + \ldots + a_p)(b_1 + \ldots + b_p)}$$
$$(\text{alle } a_1, \ldots, a_p,\ b_1, \ldots, b_p \geqq 0)$$

erstens die Konsequenz, daß auch $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d(E(\lambda) f, g)$ absolut konvergiert, und zweitens daß

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d(E(\lambda) f, g)\right| \leqq \sqrt{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d|E(\lambda) f|^2 \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} d|E(\lambda) g|^2} = C \cdot |g|$$

ist[51]). Wir nennen dieses Integral für einen Augenblick $L(g)$ ($f$ fest, $g$ variabel), dann hat $L(g)$ die Eigenschaften:

$$L(a_1 g_1 + \ldots + a_n g_n) = \bar{a}_1 L(g_1) + \ldots + \bar{a}_n L(g_n), \qquad |L(g)| \leqq C \cdot |g|$$

(es ist linear und stetig). Nach einem Satze von F. Riesz gibt es darum

---

[51]) Es genügt, sich die Definition des Stieltjesschen Integrals zu vergegenwärtigen. Die genannte Ungleichung ist nur eine veränderte Schreibweise der Schwarzschen.

genau ein $f^*$, so daß stets $(f^*, g) = L(g)$ ist[52]) — d. i. gerade unsere auf $f^*$ bezügliche Behauptung.

$R$ ist also wirklich herstellbar. Sei $R^*$ die Cayleysche Transformierte von $U$, wir müssen noch $R = R^*$ beweisen. Es genügt aber zu zeigen, daß $R$ Forts. von $R^*$ ist. Denn wenn $Rf$, $Rg$ Sinn haben, so geht (nach Definition in Satz 36) beim Vertauschen von $f, g$ $(Rf, g)$ in seine komplex-konjugierte über — also ist $(Rf, g) = (f, Rg)$. Daher ist $R$ ein H. O. (sein Definitionsbereich enthält nach Annahme den von $R^*$, ist also überall dicht) und Forts. des (wegen der Unitarität von $U$) max. $R^*$, also $R = R^*$.

Sei also $R^* f$ sinnvoll, wir müssen beweisen: $Rf$ ist sinnvoll und $= R^* f$; oder was dasselbe ist: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\,|F(\lambda) f|^2$ endlich und für alle $g$ $(R^* f, g) = (Rf, g) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d(F(\lambda) f, g)$. Daß $Rf$ sinnvoll ist, bedeutet übrigens $f = \varphi - U\varphi$, dieses sei unser Ausgangspunkt.

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\,|F(\lambda) f|^2$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d(F(\lambda) f, g)$ können wir, nach der Transformation $\lambda = -\operatorname{ctg} \pi\varrho$, auch so schreiben: $\int\limits_0^1 \operatorname{ctg}^2 \pi\varrho\, d\,|E(\varrho) f|^2$, $\int\limits_0^1 -\operatorname{ctg} \pi\varrho\, d(E(\varrho) f, g)$. Um hier $f = \varphi - U\varphi$ einsetzen zu können, müssen wir zunächst einige Integrale ausrechnen.

$$(\varphi \pm U\varphi, g) = \int\limits_0^1 d(E(\varrho)\varphi, g) \pm \int\limits_0^1 e^{2\pi i\varrho} d(E(\varrho)\varphi, g)$$
$$= \int\limits_0^1 (1 \pm e^{2\pi i \cdot \varrho})\, d(E(\varrho)\varphi, g),$$

---

52) Man beweist diesen Satz so:

Da alle $(f^*, g)$ vorgeschrieben sind, kann es nicht zwei verschiedene $f^*$ geben, es genugt also die Existenz von einem zu beweisen. Sei $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ ein vollst. norm. orth. System, $L(\varphi_n) = a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Es ist $g = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (g, \varphi_n) \cdot \varphi_n$ (Satz 7, $\beta$)), also wegen der Linearität und Stetigkeit von $L(g)$ $L(g) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{(g, \varphi_n)} \cdot a_n$ (die Reihe muß konvergieren). Wäre nun $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ endlich, so wurde $f^* = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n$ konvergieren (Satz 5), $(f^*, \varphi_n) = a_n$, und daraus folgt $L(g) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (f^*, \varphi_n) \cdot \overline{(g, \varphi_n)} = (f^*, g)$ (Satz 7 $\gamma$)): d. i. die Behauptung.

Nun ist $|L(g)| \leqq C \cdot |g|$, also für $g = x_1 \varphi_1 + \ldots + x_m \varphi_m$

$$\left| \sum_{n=1}^{m} a_n \bar{x}_n \right| \leqq C \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{m} |x_n|^2},$$

und wenn wir $x_n = a_n$ $(n = 1, \ldots, m)$ setzen: $\sum\limits_{n=1}^{m} |a_n|^2 \leqq C^2$. Daher ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ endlich (und zwar $\leqq C^2$).

$$(\varphi - U\varphi, E(\varrho)g) = \int_0^1 (1 - e^{2\pi i\cdot\varrho'}\, d(E(\varrho'))\varphi, E(\varrho)g)$$

$$= \int_0^1 (1 - e^{2\pi i\cdot\varrho'})\, d(E(\varrho)E(\varrho')\varphi, g)$$

$$= \int_0^1 (1 - e^{2\pi i\cdot\varrho'})\, d(E(\mathrm{Min}(\varrho, \varrho'))\varphi, g)\ ^{53)}$$

$$= \int_0^\varrho (1 - e^{2\pi i\cdot\varrho'})\, d(E(\varrho')\varphi, g),$$

$$|E(\varrho)(\varphi - U\varphi)|^2 = (\varphi - U\varphi, E(\varrho)(\varphi - U\varphi))$$

$$= \int_0^\varrho (1 - e^{2\pi i\cdot\varrho'})\, d(E(\varrho')\varphi, \varphi - U\varphi)\ ^{54)}$$

$$= \int_0^\varrho (1 - e^{2\pi i\cdot\varrho'})\, d\left[\int_0^{\varrho'} (1 - e^{-2\pi i\cdot\varrho''})\, d(E(\varrho'')\varphi, \varphi)\right]\ ^{55)}$$

$$= \int_0^\varrho (1 - e^{2\pi i\cdot\varrho'})(1 - e^{-2\pi i\cdot\varrho'})\, d(E(\varrho')\varphi, \varphi)$$

$$= \int_0^\varrho 4\sin^2 \pi\varrho'\, d\,|E(\varrho')\varphi|^2,$$

$$\int_0^1 \mathrm{ctg}^2\,\pi\varrho\, d\,|E(\varrho)(\varphi - U\varphi)|^2 = \int_0^1 \mathrm{ctg}^2\,\pi\varrho\, d\left[\int_0^\varrho 4\sin^2\pi\varrho'\, d\,|E(\varrho')\varphi|^2\right]\ ^{55)}$$

$$= \int_0^1 \mathrm{ctg}^2\,\pi\varrho\cdot 4\sin^2\pi\varrho\, d\,|E(\varrho)\varphi|^2 = \int_0^1 4\cos^2\pi\varrho\, d\,|E(\varrho)\varphi|^2,$$

und dies ist endlich, weil es durch das endliche $\int_0^1 4\, d\,|E(\varrho)\varphi|^2 = 4\,|\varphi|^2$ majorisiert wird. Weiter ist

$$\int_0^1 -\mathrm{ctg}\,\pi\varrho\, d(E(\varrho)(\varphi - U\varphi), g) = \int_0^1 -\mathrm{ctg}\,\pi\varrho\, d\left[\int_0^\varrho (1 - e^{2\pi i\cdot\varrho'})\, d(E(\varrho')\varphi, g)\right]\ ^{55)}$$

$$= \int_0^1 -\mathrm{ctg}\,\pi\varrho\cdot(1 - e^{2\pi i\cdot\varrho})\, d(E(\varrho)\varphi, g) = \int_0^1 i(1 + e^{2\pi i\cdot\varrho})\, d(E(\varrho)\varphi, g)$$

$$= (i(\varphi + U\varphi), g) = (R^*(\varphi - U\varphi), g).$$

Damit ist alles Erforderliche bewiesen. —

---

[53]) Für $\varrho' > \varrho$ ist ja $(E(\mathrm{Min}(\varrho, \varrho'))\varphi, g)$ konstant, also das Integral 0!

[54]) Man nehme mit $g = \varphi$ das komplex-Konjugierte der letzten Formel.

[55]) Nach einer allgemeinen Formel für Stieltjessche Integrale ist

$$\int_A^B p(\varrho)\cdot d\left[\int_A^\varrho q(\varrho')\cdot dr(\varrho')\right] = \int_A^B p(\varrho)\cdot q(\varrho)\cdot dr(\varrho).$$

Wir haben für hypermax. H. O. die der Hilbertschen Spektraldarstellung oder Eigenwertdarstellung (bei beschränkten Formen, vgl. das Zitat von Anm. [7])) analoge Normalform gewonnen, dabei aber für diese bereits alle Eigenwertdarstellungen verbraucht, so daß es für max. und nicht hypermax. H. O. gewiß keine solchen geben kann. (Allerdings haben wir noch kein Beispiel eines derartigen H. O. konstruiert.) Darum sehen wir von der kaum neue Gesichtspunkte bietenden weiteren Untersuchung der hypermax. H. O. ab und wenden uns den max., aber nicht hypermax. H. O. zu.

## X. Maximale, aber nicht hypermaximale Operatoren.

Ein solcher H. O. $R$ ($m, n$ seine Defektindizes) ist durch $m = 0$, $n > 0$ oder $m > 0$, $n = 0$ charakterisiert; da aber beim Ersetzen von $R$ durch $-R$ $m, n$ vertauscht werden, genügt es $m = 0$, $n > 0$ zu betrachten. Wir bilden $U, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}$, es ist $\mathfrak{E} = \mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{H} - \mathfrak{F}$ ist $n$-dimensional, $U$ bildet $\mathfrak{H}$ längentreu auf $\mathfrak{F}$ ab.

Das durch $U^\nu$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) vermittelte Bild von $\mathfrak{G}_0$ sei $\mathfrak{G}_\nu$ (auch eine abg. lin. M.). Für $\nu > 0$ ist $\mathfrak{G}_\nu$ Teil von $\mathfrak{F}$, also orth. zu $\mathfrak{G}_0$; wenn wir hierauf die Abbildung $U^k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) anwenden, so werden die Bilder $\mathfrak{G}_{k+\nu}, \mathfrak{G}_k$ zueinander orth. (weil $(f, g)$ dabei invariant ist, vgl. Satz 10). Also sind allgemein $\mathfrak{G}_k, \mathfrak{G}_l$ ($k, l = 0, 1, 2, \ldots$) für $k \neq l$ orth. Die $\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots$ mögen die abg. lin. M. $\mathfrak{M}$ aufspannen, wir setzen $\mathfrak{H} - \mathfrak{M} = \mathfrak{N}$.

Daß $U$ $\mathfrak{G}_\nu$ auf $\mathfrak{G}_{\nu+1}$ abbildet (natürlich ein-eindeutig, längentreu) wissen wir schon, wir wollen nun zeigen, daß $\mathfrak{N}$ (ebenso) auf sich selbst abgebildet wird. $\mathfrak{N}$ ist, wie man leicht einsieht, die Menge aller zu allen $\mathfrak{G}_\nu$ orth. Elemente von $\mathfrak{H}$, sein Bild also (wegen der Invarianz von $(f, g)$) die Menge aller zu allen Bildern der $\mathfrak{G}_\nu$ orth. Elemente des Bildes von $\mathfrak{H}$: dies sind die zu allen $\mathfrak{G}_{\nu+1}$ orth. Elemente von $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} - \mathfrak{G}_0$, also die zu $\mathfrak{G}_0$ und allen $\mathfrak{G}_{\nu+1}$ orth. Elemente von $\mathfrak{H}$. Also wirklich wieder $\mathfrak{N}$.

Sei nun $\overset{0}{\varphi}_1, \ldots, \overset{0}{\varphi}_p$ ein die abg. lin. M. $\mathfrak{G}_0$ aufspannendes norm. orth. System (eventuell $p = \infty$!), und $U^\nu \overset{0}{\varphi}_q = \overset{\nu}{\varphi}_q$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots,\ q = 1, \ldots, p$), dann bilden die $\overset{\nu}{\varphi}_1, \ldots, \overset{\nu}{\varphi}_p$ auch ein norm. orth. System und spannen $\mathfrak{G}_\nu$ auf. Für $k \neq l$ liegt $\overset{k}{\varphi}_{q'}$ in $\mathfrak{G}_k$, $\overset{l}{\varphi}_{q''}$ in $\mathfrak{G}_l$, also sind beide orth., d. h. alle $\overset{\nu}{\varphi}_q$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots, q = 1, \ldots, p$) bilden auch ein norm. orth. System — und zwar spannen sie dasselbe auf, wie die $\mathfrak{G}_\nu$: $\mathfrak{M}$.

$\overset{0}{\varphi}_q, \overset{1}{\varphi}_q, \overset{2}{\varphi}_q, \ldots$ mögen $\mathfrak{M}_q$ aufspannen, $\overset{1}{\varphi}_q, \overset{2}{\varphi}_q, \ldots, \overline{\mathfrak{M}}_q$ (alles als abg. lin. M., $q = 1, \ldots, p$), dann spannen $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_p$ wieder $\mathfrak{M}$ auf, und $\overline{\mathfrak{M}}_q$ ist Teil von $\mathfrak{M}_p$. Da $U \overset{\nu}{\varphi}_q = \overset{\nu+1}{\varphi}_q$ ist, bildet $U$ $\mathfrak{M}_q$ auf $\overline{\mathfrak{M}}_q$ ab. Zusammenfassend haben wir also:

$\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_p, \mathfrak{N}$ spannen $\mathfrak{H}$ auf (wie $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$), $U$ bildet sie bzw. auf $\overline{\mathfrak{M}}_1, \ldots, \overline{\mathfrak{M}}_p, \mathfrak{N}$ ab, d. h. auf Teilmengen von sich selbst. Ferner sind die $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_p$ (als Teile von $\mathfrak{M}$) zu $\mathfrak{N}$ orth., und auch zueinander (weil es die $\overset{k}{\varphi}_{q'}, \overset{l}{\varphi}_{q''}$ mit $q' \neq q''$ sind). Hieraus folgt, daß jedes $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_p, \mathfrak{N}$ das $U$ reduziert, also (Satz 25) auch die Cayleysche Transformierte $R$. —

Wir betrachten die in $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_p, \mathfrak{N}$ liegenden Teile von $R$ und $U$: es sind bzw. $R_1, \ldots, R_p, S$ und bzw. $U_1, \ldots, U_p, V$; $R$ ist mit Hilfe von $R_1, \ldots, R_p, S$ nach Satz 21 zu charakterisieren. Nun sind die abg. lin. M. $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_p$ alle unendlichvieldimensional ($\mathfrak{M}_q$ wird ja vom norm. orth. System $\overset{0}{\varphi}_q, \overset{1}{\varphi}_q, \overset{2}{\varphi}_q, \ldots$ aufgespannt), also lauter Hilbertsche Räume (d. h. sie genügen, bei unveränderter Definition von $af, f+g, (f, g)$ den Bedingungen A bis E von Kap. I [56])), daher dürfen wir in ihnen alle für $\mathfrak{H}$ ausgebildeten Begriffe ohne weiteres verwenden. Also ist $R_q$ in $\mathfrak{M}_q$ ein H. O. (insbesondere ist sein Definitionsbereich in $\mathfrak{M}_q$ überall dicht, denn er besteht aus den Projektionen des in $\mathfrak{H}$ überall dichten Definitionsbereiches von $R$), $U_q$ ist längentreu und die Cayleysche Transformierte von $R_q$. In $\mathfrak{N}$ sind drei Fälle möglich: erstens kann es $\infty$-dimensional, also ein Hilbertscher Raum sein, dann ist wieder $S$ ein H. O., $V$ unitär (es bildet ja $\mathfrak{N}$ auf $\mathfrak{N}$ ab) und seine Cayleysche Transformierte — also $S$ hypermax.; zweitens kann $\mathfrak{N}$ $N$ $(=1, 2, \ldots)$-dimensional, also ein $N$-dimensionaler (komplexer) Euklidischer Raum sein (vgl. Anm. [56])), dann ist $S$ ein H. O. in ihm — d. h. ein gewöhnlicher, endlichvieldimensionaler Hermitescher Operator; drittens kann $\mathfrak{N}$ 0-dimensional sein, d. h. $=(0)$ — dann brauchen wir es gar nicht zu berücksichtigen.

Bei $\mathfrak{N}$ und $S$ geschieht also sicher nichts Neues, wir wenden uns darum den $\mathfrak{M}_q, R_q$ und $U_q$ $(q = 1, \ldots, p)$ zu. Diese benehmen sich alle gleich: $R_q$ ist Cayleysche Transformierte von $U_q$, und es gibt ein in $\mathfrak{M}_q$ vollst. (d. h. $\mathfrak{M}_q$ aufspannendes) norm. orth. System $\overset{0}{\varphi}_q, \overset{1}{\varphi}_q, \overset{2}{\varphi}_q, \ldots$, so daß $U_q \overset{\nu}{\varphi}_q = U \overset{\nu}{\varphi}_q = \overset{\nu+1}{\varphi}_q$ ist, also $U_q\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} x_\nu \overset{\nu}{\varphi}_q\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} x_\nu \overset{\nu+1}{\varphi}_q$ $\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} |x_\nu|^2 \text{ endlich}\right)$; hierdurch ist aber $U_q$ und somit $R_q$ völlig festgelegt (wenn man $\overset{0}{\varphi}_q, \overset{1}{\varphi}_q, \overset{2}{\varphi}_q, \ldots$ als bekannt ansieht). Indem wir die Isomorphie von $\mathfrak{M}_q$ mit $\mathfrak{H}$ ausnützen, können wir auch sagen, daß $R_q$ mit dem folgenden Operator $\overline{R}$ in $\mathfrak{H}$ isomorph sein muß: $\overline{R}$ ist die Cayleysche Transformierte von $\overline{U}$, und $\overline{U}$ ist

[56]) A bis C und E genügt offenbar jede abg. lin. M., D aber ist der Unendlichviel-dimensionalität gleichwertig. Eine endlichviel-dimensionale abg. lin. M. besteht, falls sie 0 Dimensionen hat, aus der 0 allein; wenn sie $N = 1, 2, \ldots$ Dimensionen hat, so wird sie durch ein norm. orth. System $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ aufgespannt, sie besteht also aus den $x_1\varphi_1 + \cdots + x_N\varphi_N$, d. h. sie ist der $N$-dimensionale (komplexe) Euklidische Raum aller $x_1, \ldots, x_N$.

(wenn $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots$ ein festes vollst. norm. orth. System in $\mathfrak{H}$ ist) durch $\overline{U}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} x_\nu \psi_\nu\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} x_\nu \psi_{\nu+1}$ $\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} |x_\nu|^2 \text{ endlich}\right)$ definiert. —

Dabei wäre aber zuerst noch zu zeigen, daß $\overline{R}$ wirklich existiert, d. h. daß das offenbar längentreue $\overline{U}$ der Bedingung von Satz 24 genügt. Wenn das der Fall ist, so ist $\overline{R}$, da $\overline{U}$ in ganz $\mathfrak{H}$ definiert (also $\mathfrak{E} = \mathfrak{H}$, $m = 0$) ist, ein max. H. O. Der Wertevorrat von $\overline{U}$, $\mathfrak{F}$ ist die Menge aller $\sum_{\nu=0}^{\infty} x_\nu \psi_{\nu+1}$, d. h. die von den $\psi_1, \psi_2, \ldots$ aufgespannte abg. lin. M. — also ist $\mathfrak{H} - \mathfrak{F}$ die Menge aller $a\psi_1$, also 1-dimensional. Folglich hat $\overline{R}$ die Defektindizes $0, 1$: es ist das erste Beispiel eines max., aber nicht hypermax. H. O.

Zunächst ist aber noch seine Existenz zu beweisen, d. h. die überall Dichtigkeit der Menge aller $\varphi - \overline{U}\varphi$. Da sie eine lin. M. ist, genügt es zu zeigen, daß alle Elemente eines vollst. norm. orth. Systems Häufungspunkte von ihr sind — etwa alle $\psi_\nu$. Nun ist

$$\left(\psi_\nu + \frac{l-1}{l}\psi_{\nu+1} + \cdots + \frac{1}{l}\psi_{\nu+l-1}\right) - \overline{U}\left(\psi_\nu + \frac{l-1}{l}\psi_{\nu+1} + \cdots + \frac{1}{l}\psi_{\nu+l-1}\right)$$
$$= \left(\psi_\nu + \frac{l-1}{l}\psi_{\nu+1} + \cdots + \frac{1}{l}\psi_{\nu+l-1}\right) - \left(\psi_{\nu+1} + \frac{l-1}{l}\psi_{\nu+2} + \cdots + \frac{1}{l}\psi_{\nu+l}\right)$$
$$= \psi_\nu - \frac{1}{l}(\psi_{\nu+1} + \cdots + \psi_{\nu+l}),$$

und dies unterscheidet sich von $\psi_\nu$ um $\frac{1}{l}(\psi_{\nu+1} + \cdots + \psi_{\nu+l})$, wobei

$$\left|\frac{1}{l}(\psi_{\nu+1} + \cdots + \psi_{\nu+l})\right|^2 = \frac{1}{l}, \qquad \left|\frac{1}{l}(\psi_{\nu+1} + \cdots + \psi_{\nu+l})\right| = \frac{1}{\sqrt{l}}$$

ist, also (bei geeignetem $l$) beliebig klein. Damit ist alles bewiesen.

Wir formulieren:

Satz 37. *Sei $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots$ ein vollst. norm. orth. System. Es gibt dann genau einen H. O. $\overline{R}$, dessen Cayleysche Transformierte $\overline{U}$ durch*

$$\overline{U}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} x_\nu \psi_\nu\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} x_\nu \psi_{\nu+1} \qquad \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} |x_\nu|^2 \textit{ endlich}\right)$$

*definiert ist. $\overline{R}$ hat die Defektindizes $0, 1$, es ist also max., aber nicht hypermax.*

Beweis. Wurde soeben erbracht. —

Wir werden im folgenden noch einige wichtige allgemeine Eigenschaften von $\overline{R}$ herleiten, seiner expliziten Darstellung ist der Teil VI der „Bemerkungen" gewidmet. Zunächst greifen wir auf unsere früheren Entwickelungen zurück und zeigen:

Satz 38. *$R$ sei ein max., aber nicht hypermax. H. O., also seine Defektindizes $0, n$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ oder $m, 0$ $(m = 1, 2, \ldots, \infty)$. Es sei*

*$p = n$ bzw. $= m$, wir können dann $\mathfrak{H}$ in $p+1$ abg. lin. M. $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_p, \mathfrak{N}$ zerlegen, die paarweise orth. sind und zusammen die abg. lin. M. $\mathfrak{H}$ aufspannen (für $p = \infty$ bricht die Folge $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$ nicht ab), so daß*

*$\alpha$) jedes $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_p, \mathfrak{N}$ $R$ reduziert, der in ihnen liegende Teil von $R$ sei bzw. $R_1, \ldots, R_p, S$;*

*$\beta$) jedes $\mathfrak{M}_q$ $(q = 1, 2, \ldots, p)$ ist unendlichvieldimensional und ein Hilbertscher Raum, d. h. $\mathfrak{H}$ isomorph; und in ihnen sind alle $R_q$ dem $\overline{R}$ isomorph bzw. alle $R_q$ dem $-\overline{R}$ isomorph ($\overline{R}$ nach Satz 37).*

*$\gamma$) Für $\mathfrak{N}$ bestehen drei Möglichkeiten: erstens kann es unendlichvieldimensional und ein Hilbertscher Raum, d. h. $\mathfrak{H}$ isomorph sein, dann ist $S$ ein hypermax. H. O.; zweitens kann es $N$ $(=1, 2, \ldots)$-dimensional, also ein $N$-dimensionaler (komplexer) Euklidischer Raum, sein, dann ist $S$ ein gewöhnlicher endlichvieldimensionaler Hermitescher Operator; drittens kann es 0-dimensional, d. h. $= (0)$ sein, dann kann man es, zusammen mit $S$, fortlassen.*

*Diese $R_1, \ldots, R_p, S$ bestimmen $R$ nach Satz 21.*

Beweis. Wurde für $m = 0$, $n > 0$ schon im ersten Teile dieses Kapitels erbracht (man beachte noch Satz 37), für $m > 0$, $n = 0$ gewinnt man ihn durch Ersetzen von $R$ durch $-R$ (also Vertauschen von $m, n$). —

In endlichvieldimensionalen Räumen kann jeder Hermitesche Operator auf die Diagonalform gebracht werden, solange er $> 1$ Dimensionen hat ist er also reduzibel. In $\mathfrak{H}$ sind ebenfalls die hypermax. H. O. reduzibel, wovon man sich wie folgt überzeugt.

Sei $R$ hypermax., $F(\lambda)$ seine Z. d. E. nach Satz 36. Nehmen wir zuerst an, es gäbe ein $\lambda$, so daß $F(\lambda) \neq 0, 1$ ist, also die abg. lin. M. $\mathfrak{M}$ mit $P_{\mathfrak{M}} = F(\lambda) \neq (0), \mathfrak{H}$. Dieses $\mathfrak{M}$ reduziert nun $R$, denn es ist erstens

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda'^2 \, d\,|E(\lambda')E(\lambda)f|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda'^2 \, d\,|E(\mathrm{Min}(\lambda', \lambda))f|^2 \quad \text{(vgl. Anm. }^{53})\text{)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\lambda} \lambda'^2 \, d\,|E(\lambda')f|^2,$$

und dies ist endlich, wenn $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda'^2 d\,|E(\lambda')f|^2$ es ist, und zweitens gilt dann

$$(E(\lambda)Rf, g) = (Rf, E(\lambda)g) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda' \, d(E(\lambda')f, E(\lambda)g)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda' \, d(E(\lambda)E(\lambda')f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda' \, d(E(\lambda')E(\lambda)f, g) = (RE(\lambda)f, g)$$

für alle $g$, d. h. es ist $E(\lambda)Rf = RE(\lambda)f$.

Sind aber alle $E(\lambda) = 0$ oder 1, so gibt es (wegen $\alpha$) in Def. 17) ein $\lambda_0$, so daß für $\lambda < \lambda_0$ das erstere und für $\lambda > \lambda_0$ das letztere gilt, $\lambda_0$ ist endlich (wegen $\beta$)), und für $\lambda = \lambda_0$ gilt das zweite (wegen $\gamma$)). Daher ist

$$(Rf, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda' \, d(E(\lambda) f, g) = \lambda_0 (f, g), \qquad Rf = \lambda_0 f,$$

d. h. $\lambda_0 \cdot 1$ eine Forts. von $R$, also $R = \lambda_0 \cdot 1$. Dieses wird aber offenbar überhaupt durch jede abg. lin. M. reduziert.

Die Reduzibilität ist somit ein Rudiment der Diagonal-Transformierbarkeit und als solches mit der Möglichkeit der Eigenwertdarstellung aufs engste verbunden; Irreduzibilität einer Matrix bedeutet bereits das Auftreten der Ausnahmefälle der Elementarteilertheorie — was durch den Hermiteschen Charakter im Endlichvieldimensionalen, und wie wir sahen auch in $\mathfrak{H}$ im Hypermax., ausgeschlossen wird. Unter diesem Gesichtspunkte ist nun die folgende Eigenschaft von $\bar{R}$ sehr beachtenswert:

Satz 39. *Ein max. H. O. ist dann und nur dann irreduzibel, wenn er (bei geeigneter Wahl des vollst. norm. orth. Systems $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots$ aus Satz 37) mit $\bar{R}$ oder mit $-\bar{R}$ zusammenfällt (beides läßt sich nie beim selben H. O. erreichen).*

Beweis. Sei $R$ max. und irreduzibel. Nach dem früher Gesagten ist es dann gewiß nicht hypermax., also tritt Satz 38 in Kraft. Da das dortige $\mathfrak{M}_1$ $R$ reduziert, und $\mathfrak{M}_1 \neq 0$ ist, muß $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{H}$ sein — also $p = 1$ und $\mathfrak{N}$ fehlend. Dann ist $R = R_1$ also nach $\beta$) dortselbst eben $\bar{R}$ oder $-\bar{R}$ (bei richtiger Wahl von $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots$). Da im einen Falle die Defektindizes von $R$ 0, 1 sind, im anderen 1, 0, ist sicher beides unvereinbar.

Es bleibt noch übrig zu zeigen, daß $\bar{R}$ (und also auch $-\bar{R}$) irreduzibel ist — d. h. daß $\bar{U}$ irreduzibel ist (vgl. Satz 25). Möge also $\bar{U}$ durch $\mathfrak{M}$ reduziert werden, also auch durch $\mathfrak{N} = \mathfrak{H} - \mathfrak{M}$; jede dieser Mengen wird also durch das (überall sinnvolle) $\bar{U}$ auf eine Teilmenge von sich abgebildet: $\bar{\mathfrak{M}}, \bar{\mathfrak{N}}$. Wäre $\bar{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}$, $\bar{\mathfrak{N}} = \mathfrak{N}$, so enthielte der Wertevorrat von $U$ $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$, also auch $\mathfrak{M} \dotplus \mathfrak{N} = \mathfrak{H}$, was nicht der Fall ist. Also ist $\bar{\mathfrak{M}}$ oder $\bar{\mathfrak{N}}$ echtes Teil von $\mathfrak{M}$ oder $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M} - \bar{\mathfrak{M}}$ oder $\mathfrak{N} - \bar{\mathfrak{N}} \neq (0)$. Sei $f \neq 0$ ein Element von $\mathfrak{M} - \bar{\mathfrak{M}}$ bzw. $\mathfrak{N} - \bar{\mathfrak{N}}$. Dann ist es orth. zu $\bar{\mathfrak{M}}$ bzw. $\bar{\mathfrak{N}}$, und als Element von $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{N}$ auch zu $\mathfrak{N}$ bzw. $\mathfrak{M}$ und $\bar{\mathfrak{N}}$ bzw. $\bar{\mathfrak{M}}$: also zum ganzen Wertevorrat von $\bar{U}$, $\bar{\mathfrak{M}} \dotplus \bar{\mathfrak{N}}$. D. h. zu allen $\psi_1, \psi_2, \ldots$, es ist also $= a\psi_0$ (mit $a \neq 0$). Folglich gehört auch $\psi_0$ zu $\mathfrak{M} - \bar{\mathfrak{M}}$ bzw. $\mathfrak{N} - \bar{\mathfrak{N}}$, also zu $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{N}$. Aber $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ enthalten auch ihre $\bar{U}$-Bilder, das betreffende von ihnen enthält daher mit $\psi_0$ auch $\psi_1, \psi_2, \ldots$ — also ganz $\mathfrak{H}$. Darum ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$ oder $\mathfrak{H} - \mathfrak{M} = \mathfrak{N} = \mathfrak{H}$, $\mathfrak{M} = (0)$, also alles bewiesen. —

Mit $\bar{R}$ ist auch $a\bar{R}+b1$ ($a, b$ reell, $a \neq 0$)· max. und irreduzibel, also (bis aufs Koordinatensystem) $=\bar{R}$ oder $=-\bar{R}$. Für $a>0$ sind die Defektindizes $0, 1$, also kommt dann $\bar{R}$ in Frage, für $a<0$ sind sie $1, 0$, also dann $-\bar{R}$.

Zum Schluß sei noch erwähnt, daß die Zerlegung des H. O. $R$ im Satz 38 eine Art Umkehrung zuläßt, die die Konstruktion von abg. lin. H. O. $R$ mit beliebig vorgegebenen Defektindizes $m, n$ ermöglicht. Da $m=n=0$ durch jeden hypermax. H. O. (also z. B. 1) realisiert wird, können wir $m+n>0$ annehmen.

Dann gibt es $m+n$ unendlichvieldimensionale abg. lin. M. $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_m$, $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_n$, die zu je zweien orth. sind und zusammen $\mathfrak{H}$ aufspannen (als abg. lin. M.)[57]; jede ist dem $\mathfrak{H}$ isomorph, wir können darum in den $m$ ersten $-\bar{R}$ und den $n$ übrigen $\bar{R}$ realisieren: es seien die Operatoren $R_1, \ldots, R_m, S_1, \ldots, S_n$. Man überlegt sich leicht, daß diese, nach der Anweisung von Satz 21 zusammengefaßt, einen abg. lin. H. O. $R$ ergeben, und daß $R$ die Defektindizes $m, n$ hat.

## XI. Halbbeschränktheit.

Wir wollen einige Merkmale angeben, die jedem nicht hypermax. (aber max.!) H. O. abgehen müssen. (Die meisten Resultate dieses Satzes gewinnen wir übrigens bald auch auf anderem Wege.)

Satz 40. *Ein max., aber nicht hypermax. H. O. kann weder nach oben noch nach unten halbbeschränkt (also erst recht nicht beschränkt) sein, er kann weder überall sinnvoll sein noch alle Werte annehmen, und er kann in keinem vollst. norm. orth. System reell sein* (vgl. Anm.[20])).

Beweis. Für einen solchen Operator gibt es eine abg. lin. M. $\mathfrak{M}$, die ihn reduziert, so daß sein in $\mathfrak{M}$ gelegener Teil $\bar{R}$ oder $-\bar{R}$ ist (Satz 38), hätte er nun eine der vier zuerst genannten Eigenschaften, so müßte dieselbe auch $\bar{R}$ oder $-\bar{R}$ zukommen. Aber $\bar{R}$ (und darum auch $-\bar{R}$) besitzt keine einzige derselben, wie sich bei seiner genauen Diskussion in Anhang IV zeigen wird (im § 4). Mit der letzten steht es so: Wenn ein Operator in einem vollst. norm. orth. System im Sinne von Anm.[20]) reell ist, so besteht für ihn kein Unterschied zwischen $i$ und $-i$ — also sind seine Defektindizes einander gleich. Bei einem max. und nicht hypermax. H. O. sind sie aber verschieden (vgl. Satz 33). —

[57]) Sei $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ ein vollst. norm. orth. System, wir zerlegen es in $m+n$ Teilfolgen $\psi_1^1, \psi_2^1, \ldots, \ldots, \psi_1^m, \psi_2^m, \ldots, \chi_1^1, \chi_2^1, \ldots, \ldots, \chi_1^n, \chi_2^n, \ldots$ (es kann auch $m$ oder $n=\infty$ sein), und setzen $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_m, \mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_n$ den von einer jeden dieser Teilfolgen aufgespannten abg. lin. M. gleich.

Wir gehen nun zur systematischen Untersuchung der halbbeschränkten Operatoren über.

Satz 41. *Ein H.O. $R$, der alle Werte annimmt, ist hypermax. Er nimmt jeden Wert genau einmal an.*

Beweis. Sei $f$ ein Erweiterungselement von $R$, ihm zugeordnet sei $f^*$. Es gibt nach Annahme ein $g$ mit sinnvollem $Rg = f^*$. Für alle $h$ mit sinnvollem $Rh$ gilt dann: $(f, Rh) = (f^*, h) = (Rg, h) = (g, Rh)$, und da $Rh$ alle Werte annimmt, muß $f = g$ sein; also ist $Rf$ sinnvoll. Daher ist $R$ hypermax., wir haben aber mitbewiesen: aus $Rf = Rg$ folgt, indem wir $f^* = Rf$ setzen, $f = g$.

Satz 42. *Ein lin. H.O. $R$, für den stets $(f, Rf) \geqq |f|^2$ gilt, kann zu einem definiten hypermax. H.O. fortgesetzt werden.*

Beweis. Zunächst bilden wir den abg. lin. H.O. $\tilde{R}$, auch für diesen gilt offenbar $(f, \tilde{R}f) \geqq |f|^2$. Der Wertevorrat von $\tilde{R}$ sei $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}$ ist offenbar eine lin. M. Es ist

$$|f|^2 \leqq (f, \tilde{R}f) \leqq |f| \cdot |\tilde{R}f|, \quad |\tilde{R}f| \geqq |f|, \quad |\tilde{R}f - \tilde{R}g| = |\tilde{R}(f-g)| \geqq |f-g|,$$

also folgt aus $\tilde{R}f = \tilde{R}g$ $f = g$, d. h. $\tilde{R}$ hat eine Inverse $\tilde{R}^{-1}$. $\tilde{R}^{-1}$ ist offenbar auch abg. lin., in $\mathfrak{M}$ definiert, und wegen $|f-g| \geqq |\tilde{R}^{-1}f - \tilde{R}^{-1}g|$ stetig — also ist $\mathfrak{M}$ abg. Also können wir die abg. lin. M. $\mathfrak{N} = \mathfrak{H} - \mathfrak{M}$ bilden.

$f$ gehöre zu $\mathfrak{N}$. Wenn $\tilde{R}g$ Sinn hat, so gehört es zu $\mathfrak{M}$, also ist $(f, \tilde{R}g) = 0$ — d. h. $f$ ist Erweiterungselement, zu ihm gehört $0$. Wenn also $\tilde{R}f$ Sinn hat, so ist $\tilde{R}f = 0$, $f = 0$. Der Definitionsbereich $\mathfrak{A}$ von $R$ (eine lin. M.!) und $\mathfrak{N}$ sind also lin. unabh. Wir können daher einen neuen Operator $S$ so definieren: $Sf$ hat Sinn, wenn $f = g + h$ ($g$ von $\mathfrak{A}$, $h$ von $\mathfrak{N}$, die Zerlegung ist ja eindeutig!) ist, und zwar $= \tilde{R}g$. $S$ ist Forts. von $\tilde{R}$, und ein H.O., denn wenn $Sf, Sf'$ Sinn haben ($f = g + h$, $f' = g' + h'$, $g, g'$ von $\mathfrak{A}$, $h, h'$ von $\mathfrak{N}$), so ist:

$$(f, Sg) = (g + h, \tilde{R}g') = (g, \tilde{R}g') = (\tilde{R}g, g') = (\tilde{R}g, g' + h') = (Sf, g).$$

$\mathfrak{N}$ reduziert $S$. In $\mathfrak{N}$ ist ja nach Definition $Sf$ immer sinnvoll, und zwar $= 0$; da $Sf$ stets einem $\tilde{R}g$ gleich, also in $\mathfrak{M}$ gelegen ist, haben wir auch $P_{\mathfrak{N}} Sf = 0 = SP_{\mathfrak{N}} f$. Also reduziert auch $\mathfrak{M} = \mathfrak{H} - \mathfrak{N}$ $S$, die in $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ liegenden Teile von $S$ seien $S'$ bzw. $S''$. Der Wertevorrat von $S$ ist $\mathfrak{M}$, wegen $Sf = P_{\mathfrak{M}} Sf = SP_{\mathfrak{M}} f$ nimmt $S$ jeden seiner Werte schon in $\mathfrak{M}$ an — also hat $S'$ auch den Wertevorrat $\mathfrak{M}$. Als ein-eindeutig lin. Bild des unendlichvieldimensionalen (weil überall dichten) $\mathfrak{A}$ ist es $\mathfrak{M}$ ebenfalls, also ist $\mathfrak{M}$ ein Hilbertscher Raum; darum ist Satz 41 anwendbar: $S'$ ist hypermax., $S''$ ist sogar $= 0$.

Hieraus folgert man mühelos, daß $S$ selbst hypermax. sein muß. Obendrein ist es definit, denn sei $f = g + h$, $g$ von $\mathfrak{A}$, $h$ von $\mathfrak{N}$:

$$(f, S f) = (g + h, \tilde{R} g) = (g, \tilde{R} g) \geqq |g|^2 \geqq 0.$$

Damit ist alles bewiesen.

Satz 43. *Ein lin. H. O. $R$, für den stets $(f, R f) \geqq C \cdot |f|^2$ oder stets $\leqq C \cdot |f|^2$ gilt (die Bedingungen der Halbbeschränktheit!) kann zu einem hypermax. H. O. $S$ fortgesetzt werden, für den stets $(f, S f) \geqq C' \cdot |f|^2$ bzw. stets $\leqq C' \cdot |f|^2$ gilt — dabei kann für $C'$ jede Zahl $< C$ bzw. $> C$ gewählt werden*[58]).

Beweis. Für $C' = 0$, $C = 1$ (und $>$-Zeichen) ist dies Satz 42, und alle anderen Fälle können hierauf zurückgeführt werden, indem man $\frac{1}{C - C'} \cdot R - \frac{C'}{C - C'} \cdot 1$, $\frac{1}{C - C'} \cdot S - \frac{C'}{C - C'} \cdot 1$ statt $R$, $S$ betrachtet.

## XII. Pathologie der unbeschränkten Operatoren.

Zunächst einige Hilfssätze.

Satz 44. *Wenn $R$ ein nach oben nicht halbbeschränkter lin. H. O. ist, so gibt es (für jedes $n = 1, 2, \ldots$ und jedes $C$) eine $n$-dimensionale lin. M., in der $R f$ stets Sinn hat, und durchweg $(f, R f) \geqq C \cdot |f|^2$ ist.*

Beweis. Seien $f_1, \ldots, f_k$ irgendwelche Elemente, für die $R f_1, \ldots, R f_k$ sinnvoll ist. Wir zeigen zuerst: es muß ein $\varphi$ geben, so daß $\varphi$ zu allen $f_1, \ldots, f_k$ orth. ist, $|\varphi| = 1$, $R \varphi$ sinnvoll, und $(\varphi, R \varphi) \geqq D$. Nehmen wir nämlich das Gegenteil an. Da es nur auf die von den $f_1, \ldots, f_k$ aufgespannte lin. M. ankommt, können wir sie „orthogonalisieren" (vgl. Satz 8), d. h. durch die norm. orth. $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ $(l \leqq k)$ ersetzen. Sei $f$ beliebig, aber mit sinnvollem $R f$. Dann ist $f = \sum_{\mu=1}^{l} a_\mu \varphi_\mu + b \varphi$, wo $|\varphi| = 1$, $\varphi$ zu allen $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ orth. ist (wir „orthogonalisieren" $f$ hinzu), da $R f, R \varphi_1, \ldots, R \varphi_l$ Sinn haben, hat auch $R \varphi$ Sinn — nach Annahme muß $(\varphi, R \varphi) \leqq D$ sein. Es ist

$$|f|^2 = \sum_{\mu=1}^{l} |a_\mu|^2 + |b|^2,$$

$$(f, R f) = \sum_{\mu, \nu=1}^{l} a_\mu \bar{a}_\nu (\varphi_\mu, R \varphi_\nu) + 2\Re \sum_{\mu=1}^{l} b\, \bar{a}_\mu (\varphi, R \varphi_\mu) + |b|^2 (\varphi, R \varphi)$$

$$\leqq \sum_{\mu, \nu=1}^{l} |a_\mu| |a_\nu| \cdot |\varphi_\mu| |R \varphi_\nu| + 2 \sum_{\mu=1}^{l} |b| |a_\mu| \cdot |\varphi| |R \varphi_\mu| + |b|^2 \cdot D,$$

---

58) Der Satz gilt wohl auch noch für $C' = C$, es liegt aber kein Beweis dafür vor.

also wenn wir $D' = \operatorname*{Max}_{\mu=1,\ldots,l} (|R\varphi_\mu|, D)$ setzen,

$$\leqq D' \cdot \Big(\sum_{\mu=1}^{l} |a_\mu| + |b|\Big)^2 \leqq (l+1) D' \cdot \Big(\sum_{\mu=1}^{l} |a_\mu|^2 + |b|^2\Big) = (l+1) D' \cdot |f|^2;$$

also wäre $R$ nach oben halbbeschränkt, entgegen der Annahme.

Wir gehen nun einen Schritt weiter. $g_1, \ldots, g_k$ seien nunmehr ganz willkürlich, es gibt dann ein $\varphi$ mit sinnvollem $R\varphi$, $|\varphi| = 1$, $(\varphi, R\varphi) \geqq D$, so daß alle $|(\varphi, g_\mu)| \leqq \varepsilon$ sind ($\mu = 1, \ldots, k$, $\varepsilon > 0$). (Also nicht ganz genau orth.!) Die $f$ mit sinnvollem $Rf$ liegen ja überall dicht, wir wählen $k$ solche $f_1, \ldots, f_k$ mit $|g_\mu - f_\mu| \leqq \varepsilon$ ($\mu = 1, \ldots, k$), und $\varphi$ nach dem vorher Bewiesenen. Dann ist $|\varphi| = 1$, $(\varphi, R\varphi) \geqq D$, und

$$|(\varphi, g_\mu)| = |(\varphi, g_\mu - f_\mu)| \leqq |\varphi| \cdot |g_\mu - f_\mu| \leqq \varepsilon.$$

Jetzt können wir die eigentliche Behauptung beweisen. Wir wählen nun sukzessiv: $\varphi_1$ mit sinnvollem $R\varphi_1$, $|\varphi_1| = 1$, $(\varphi_1, R\varphi_1) \geqq D$; $\varphi_2$ mit sinnvollem $R\varphi_2$, $|\varphi_2| = 1$, $(\varphi_2, R\varphi_2) \geqq D$ und $|(R\varphi_1, \varphi_2)| \leqq 1; \ldots;$ $\varphi_n$ mit sinnvollem $R\varphi_n$, $|\varphi_n| = 1$, $(\varphi_n, R\varphi_n) \geqq D$ und $|(R\varphi_1, \varphi_n)| \leqq 1, \ldots,$ $|(R\varphi_{n-1}, \varphi_n)| \leqq 1$. Also: alle $R\varphi_\mu$ haben Sinn, es ist $|\varphi_\mu| = 1$, $(\varphi_\mu, R\varphi_\mu) \geqq D$, und $|(R\varphi_\mu, \varphi_\nu)| \leqq 1$ für $\mu < \nu$, also immer für $\mu \neq \nu$. Daraus folgt:

$$\Big|\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu \varphi_\mu\Big|^2 = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_\mu \bar{a}_\nu (\varphi_\mu, \varphi_\nu) \leqq \sum_{\mu,\nu=1}^{n} |a_\mu| |a_\nu| \cdot |\varphi_\mu| |\varphi_\nu|$$

$$\leqq \Big(\sum_{\mu=1}^{n} |a_\mu|\Big)^2 \leqq n \cdot \sum_{\mu=1}^{n} |a_\mu|^2,$$

$$\Big(\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu \varphi_\mu, R\Big\{\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu \varphi_\mu\Big\}\Big) = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_\mu \bar{a}_\nu (\varphi_\mu, R\varphi_\nu)$$

$$= \sum_{\mu=1}^{n} |a_\mu|^2 (\varphi_\mu, R\varphi_\mu) + \sum_{\substack{\mu,\nu=1 \\ (\mu \neq \nu)}}^{n} a_\mu \bar{a}_\nu (\varphi_\mu, R\varphi_\nu)$$

$$\geqq D \sum_{\mu=1}^{n} |a_\mu|^2 - \sum_{\substack{\mu,\nu=1 \\ (\mu \neq \nu)}}^{n} |a_\mu| |a_\nu| = (D+1) \sum_{\mu=1}^{n} |a_\mu|^2 - \Big(\sum_{\mu=1}^{n} |a_\mu|\Big)^2$$

$$\geqq (D + 1 - n) \sum_{\mu=1}^{n} |a_\mu|^2.$$

Für $D > n - 1$ hat also die zweite Ungleichung die Konsequenz, daß $\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu \varphi_\mu = 0$ auch $\sum_{\mu=1}^{n} |a_\mu|^2 = 0$, $a_1 = \ldots = a_n = 0$ nach sich zieht — d. h. die $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sind lin. unabh., die lin. M. der $\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu \varphi_\mu$ ist $n$-dimensional. Weiter ist (nach beiden Ungleichungen)

$$\Big(\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu \varphi_\mu, R\Big\{\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu \varphi_\mu\Big\}\Big) \geqq \frac{D+1-n}{n} \Big|\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu \varphi_\mu\Big|^2,$$

also gilt, wenn wir noch $D \geqq nC + n - 1$ nehmen, in dieser lin. M. durchweg $(f, Rf) \geqq C \cdot |f|^2$. Damit sind wir am Ziele.

Satz 45. *Wenn $R$ ein nach oben nicht halbbeschränkter lin. H. O. ist, und $f_1, \ldots, f_k$ irgendwelche Elemente, $C$ eine beliebige Zahl, so gibt es ein $\varphi$ mit sinnvollem $R\varphi$, das zu allen $f_1, \ldots, f_k$ orth. ist, und für welches $|\varphi| = 1$, $(\varphi, R\varphi) \geqq C$ gilt.*

Beweis[59]). Wir wählen die lin. M. des Satzes 44 $k+1$-dimensional, in ihr sind dann die (höchstens $k$ unabhängige lin. Bedingungen darstellenden) Gleichungen $(f_1, \varphi) = 0, \ldots, (f_k, \varphi) = 0$ durch ein $f \neq 0$ lösbar — durch Multiplizieren mit einer Zahl können wir $|f| = 1$ erreichen. Dieses $f$ leistet alles Gewünschte.

Satz 46. *Ein nach oben nicht halbbeschränkter lin. H. O. $R$ ist immer Forts. von einem definiten lin. H. O. $S$.*

Beweis. Es genügt eine überall dichte Folge $f_1, f_2, \ldots$ anzugeben, so daß alle $Rf_\mu$ sinnvoll sind und stets

$$\left(\sum_{\mu=1}^{n} x_\mu f_\mu, R\left\{\sum_{\mu=1}^{n} x_\mu f_\mu\right\}\right) \geqq 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

gilt. Dann ist nämlich der in der von $f_1, f_2, \ldots$ aufgespannten lin. M. (überall dicht, also nicht abg.!) definierte und dort mit $R$ übereinstimmende Operator $S$ offenbar ein lin. H. O. und definit — und $R$ ist Forts. von ihm.

Sei $g_1, g_2, \ldots$ eine überall dichte Folge, so daß alle $Rg_\mu$ sinnvoll sind (d. h. $g_1, g_2, \ldots$ sei eine im Definitionsbereiche von $R$, $\mathfrak{A}$, überall dichte Teilfolge von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ ist ja seinerseits überall dicht; so etwas gibt es, weil $\mathfrak{A}$ als Teil von $\mathfrak{H}$ separabel ist, vgl. Anm. [33])), und $C_1, C_2, \ldots$ eine Folge von Zahlen, über die wir noch näher verfügen werden. Wir wählen nun eine Folge $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ auf Grund von Satz 45 mit den folgenden Eigenschaften aus: $R\varphi_1$ sinnvoll, $|\varphi| = 1$, $(\varphi_1, R\varphi_1) \geqq C_1$; $R\varphi_2$ sinnvoll, $|\varphi^2| = 1$, $(\varphi_2, R\varphi_2) \geqq C_2$ und $(R\varphi_1, \varphi_2) = 0$; $R\varphi_3$ sinnvoll, $|\varphi_3| = 1$, $(\varphi_3, R\varphi_3) \geqq C_3$ und $(R\varphi_1, \varphi_3) = (R\varphi_2, \varphi_3) = 0$; .... Somit sind alle $R\varphi_\mu$ sinnvoll, $|\varphi_\mu| = 1$, $(\varphi_\mu, R\varphi_\mu) \geqq C_\mu$ und $(R\varphi_\mu, \varphi_\nu) = 0$ für $\mu < \nu$, also immer für $\mu \neq \nu$. Wir setzen $f_1 = g_1 + \varphi_1$, $f_2 = g_2 + \frac{1}{2}\varphi_2$, $f_3 = g_3 + \frac{1}{3}\varphi_3, \ldots$, und behaupten, daß die Folge $f_1, f_2, \ldots$ (bei geeigneter Wahl der $C_1, C_2, \ldots$) alles Gewünschte leistet.

Zunächst ist sie überall dicht: $|f_n - g_n| = \left|\frac{1}{n}\varphi_n\right| = \frac{1}{n} \to 0$, zu jedem $f$ gibt es eine Teilfolge $g_{N_1}, g_{N_2}, \ldots$ von $g_1, g_2, \ldots$ mit $g_{N_n} \to f$, dann ist auch $f_{N_n} \to f$. Nun berechnen wir $(f, Rf)$ für die Linearaggregate der $f_1, f_2, \ldots$:

---

[59]) Bei sinnvollen $Rf_1, \ldots, Rf_k$ hatten wir dies schon am Anfange des Beweises von Satz 44, aber wir müssen uns von dieser Annahme befreien.

$$\left(\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu f_\mu, R\left\{\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu f_\mu\right\}\right) = \left(\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu g_\mu + \sum_{\mu=1}^{n} \frac{a_\mu}{\mu}\varphi_\mu, \sum_{\mu=1}^{n} a_\mu R g_\mu + \sum_{\mu=1}^{n} \frac{a_\mu}{\mu} R\varphi_\mu\right)$$

$$= \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_\mu \bar{a}_\nu (g_\mu, Rg_\nu) + 2\Re \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{a_\mu \bar{a}_\nu}{\mu}(\varphi_\mu, Rg_\nu) + \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{|a_\mu|^2}{\mu^2}(\varphi_\mu, R\varphi_\mu)$$

$$+ \sum_{\substack{\mu,\nu=1 \\ (\mu \neq \nu)}}^{n} \frac{a_\mu \bar{a}_\nu}{\mu\nu}(\varphi_\mu, R\varphi_\nu)$$

$$\geqq - \sum_{\mu,\nu=1}^{n} |a_\mu||a_\nu| \cdot |g_\mu| |Rg_\nu| - 2\sum_{\mu,\nu=1}^{n} |a_\mu||a_\nu| \cdot \frac{|\varphi_\mu| |Rg_\nu|}{\nu} + \sum_{\mu=1}^{n} |a_\mu|^2 \cdot \frac{C_\mu}{\mu^2}$$

$$= \sum_{\mu=1}^{n} \frac{C_\mu}{\mu^2} \cdot |a_\mu|^2 - \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \left(|g_\mu||Rg_\nu| + \frac{|Rg_\nu|}{\nu}\right)|a_\mu||a_\nu|.$$

Wir setzen $|g_\mu||Rg_\nu| + \frac{|Rg_\nu|}{\nu} = A_{\mu\nu}$ (dies hängt von $g_1, g_2, \ldots$ ab, aber nicht von den $f_1, f_2, \ldots$ oder $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, d. h. den $C_1, C_2, \ldots$!) und schätzen den Subtrahenden ab:

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} \bar{A}_{\mu\nu}|a_\mu||a_\nu| = \sum_{\mu=1}^{n} \bar{A}_{\mu\mu}|a_\mu|^2 + \sum_{\substack{\mu,\nu=1 \\ (\mu<\nu)}}^{n} (\bar{A}_{\mu\nu} + \bar{A}_{\nu\mu})|a_\mu||a_\nu|$$

$$\leqq \sum_{\mu=1}^{n} \bar{A}_{\mu\mu}|a_\mu|^2 + \sum_{\substack{\mu,\nu=1 \\ (\mu<\nu)}}^{n} \left(2^{\nu-\mu-1}(\bar{A}_{\mu\nu} + \bar{A}_{\nu\mu})|a_\nu|^2 + \frac{1}{2^{\nu-\mu}}|a_\mu|^2\right)$$

$$= \sum_{\mu=1}^{n} \left\{\bar{A}_{\mu\mu} + \sum_{\varrho=1}^{\mu-1} 2^{\mu-\varrho-1}(\bar{A}_{\mu\varrho} + \bar{A}_{\varrho\mu}) + \sum_{\varrho=\mu+1}^{n} \frac{1}{2^{\varrho-\mu}}\right\}|a_\mu|^2$$

$$\leqq \sum_{\mu=1}^{n} \left\{\bar{A}_{\mu\mu} + 1 + \sum_{\sigma=0}^{\mu-2} 2^\sigma (\bar{A}_{\mu,\mu-\sigma-1} + \bar{A}_{\mu-\sigma-1,\mu})\right\}|a_\mu|^2.$$

Indem wir den $\{\ \}$-Ausdruck kurz mit $\bar{B}_\mu$ bezeichnen, wird:

$$\left(\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu f_\mu, R\left\{\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu f_\mu\right\}\right) \geqq \sum_{\mu=1}^{n} \left(\frac{1}{\mu^2}C_\mu - \bar{B}_\mu\right) \cdot |a_\mu|^2.$$

Es genügt also $C_\mu = \mu^2 \cdot \bar{B}_\mu$ zu setzen und wir sind am Ziele[60]. —

[60]) Für die Zwecke der in Anm. [22]) angekündigten Arbeit soll hier noch eine gewisse Verschärfung dieser Abschätzung ausgeführt werden (hier brauchen wir sie nicht). Es ist

$$\left|\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu f_\mu\right|^2 = \left|\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu g_\mu + \sum_{\mu=1}^{n} \frac{a_\mu}{\mu}\varphi_\mu\right|^2$$

$$= \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_\mu \bar{a}_\nu (g_\mu, g_\nu) + 2\Re \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{a_\mu \bar{a}_\nu}{\mu}(\varphi_\mu, g_\nu) + \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{a_\mu \bar{a}_\nu}{\mu\nu}(\varphi_\mu, \varphi_\nu)$$

$$\leqq \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \left\{|g_\mu||g_\nu| + \frac{|\varphi_\mu||g_\nu|}{\mu} + \frac{|\varphi_\mu||\varphi_\nu|}{\mu\nu}\right\}|a_\mu||a_\nu|$$

$$= \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \left\{|g_\mu||g_\nu| + \frac{|g_\nu|}{\mu} + \frac{1}{\mu\nu}\right\}|a_\mu||a_\nu|.$$

(Fortsetzung der Fußnote [60]) auf nächster Seite.)

Damit haben wir bereits ein recht „pathologisches“ Resultat gewonnen, das sich leicht weiter verschärfen läßt.

Satz 47. *Sei $R$ ein nach oben oder nach unten nicht halbbeschränkter lin. H.O., dann gibt es einen hypermax. H.O. $S$, für den stets $(f, Sf) \geqq C \cdot |f|^2$ bzw. stets $\leqq C \cdot |f|^2$ gilt, so daß $R, S$ beide Forts. desselben lin. H. O. sind — dabei kann für $C$ jede Zahl gewählt werden.*

Beweis. Für $C = -1$ und nicht-Halbbeschränktheit nach oben folgt dies aus Satz 46 und Satz 43 (wo $C = 0$, $C' = -1$ zu setzen ist), für alle anderen $C$ folgt es hieraus, wenn man $R - (C+1) \cdot 1$, $S - (C+1) \cdot 1$ bzw. $-R + (C-1) \cdot 1$, $-S + (C-1) \cdot 1$ statt $R, S$ betrachtet. —

Hieraus folgen die sonderbarsten Dinge für unbeschränkte H.O. Das Verhältnis eines H.O. zu seiner Matrix und dieser zu ihren Abschnitten wird dadurch qualitativ anders wie bei beschränkten; insbesondere zeigt sich, daß die „Abschnittsspektra“ bei unbeschränkten Matrizen sehr wenig mit dem Spektrum der Matrix selbst zu tun haben und diese (nicht wie in der Hilbertschen Theorie) in keinem Sinne „approximieren“. Über das Verhältnis Operator-Matrix werden wir einiges im Anhang III sagen, die genaue Erörterung der Eigenschaften unbeschränkter Matrizen soll in der in Anm. [22]) angekündigten Arbeit erfolgen.

Wir geben noch einige charakteristische Eigenschaften der unbeschränkten H.O. an. Im Gegensatze zu Satz 41 bis 47 beschränken wir uns jetzt auf abg. lin. Operatoren.

Satz 48. *Sei $R$ ein abg. lin. H.O. Dann sind die vier Aussagen $\alpha$) $R$ ist beschränkt, $\beta$) $R$ ist beschränkt hypermax., $\gamma$) $R$ ist überall*

---

Wir nennen den $\{\ \}$-Ausdruck kurz $\overline{C}_{\mu\nu}$, dann wird wie im Text:

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} \overline{C}_{\mu\nu} |a_\mu| |a_\nu| \leqq \sum_{\mu=1}^{n} \left\{ \overline{C}_{\mu\mu} + 1 + \sum_{\sigma=0}^{\mu-2} 2^\sigma (\overline{C}_{\mu,\mu-\sigma-1} + \overline{C}_{\mu-\sigma-1,\mu}) \right\} |a_\mu|^2.$$

Diesen $\{\ \}$-Ausdruck nennen wir $\overline{D}_\mu$, dann wird

$$\left| \sum_{\mu=1}^{n} a_\mu f_\mu \right|^2 \leqq \sum_{\mu=1}^{n} \overline{D}_\mu |a_\mu|^2.$$

Wenn wir nun $C_\mu = \mu^2 (\overline{B}_\mu + \mu \overline{D}_\mu)$ setzen, so ist für $a_1 = \ldots = a_{p-1} = 0$ $(n \geqq p\ !)$

$$\left( \sum_{\mu=p}^{n} a_\mu f_\mu, R\left\{ \sum_{\mu=p}^{n} a_\mu f_\mu \right\} \right) - p \left| \sum_{\mu=p}^{n} a_\mu f_\mu \right|^2 \geqq \sum_{\mu=p}^{n} \left( \frac{C_\mu}{\mu^2} - \overline{B}_\mu - p \overline{D}_\mu \right) |a_\mu|^2 \geqq 0.$$

D. h.: in der von den $f_p, f_{p+1}, f_{p+2}, \ldots$ aufgespannten lin. M. (auch diese ist natürlich überall dicht, also nicht abg.!) gilt sogar

$$(f, Rf) \geqq p \cdot |f|^2,$$

für jedes $p = 1, 2, \ldots$.

*sinnvoll,* $\delta$) *es gibt keinen abg. lin. H. O. von dem* $R$ *eig. Forts. ist, alle gleichwertig*[61]).

Beweis. Wenn $R$ nach oben nicht halbbeschränkt ist, so wählen wir $C$ so, daß $(f, Rf) < C \cdot |f|^2$ vorkommt, und dann einen hypermax. H. O. $S$ nach Satz 47, so daß stets $(f, Rf) \geqq C \cdot |f|^2$ gilt — dann kann $S$ offenbar keine Forts. von $R$ sein. Nun sind $R$, $S$ Forts. eines lin. H. O. $T$, und weil sie abg. lin. sind, auch des abg. lin. H. O. $\tilde{T}$. Da $S$ nicht Forts. von $R$ ist, muß $\tilde{T} \neq R$ sein, d. h. $\delta$) ist nicht erfüllt. Wenn $R$ nach unten nicht halbbeschränkt ist, so gilt $\delta$) nicht für $-R$, also auch nicht für $R$. Also folgt allenfalls aus der Unbeschränktheit das Gegenteil von $\delta$), d. h. aus $\delta$) folgt $\alpha$).

Aus $\alpha$) folgt $\gamma$): denn $R$ ist abg. und stetig, hat also einen abg. Definitionsbereich; da aber dieser überall dicht ist, muß er $= \mathfrak{H}$ sein. Aus $\gamma$) folgt $\delta$): denn wäre $R$ eig. Forts. des abg. lin. H. O. $S$, so wäre dieser nicht max., also zu mehreren max. H. O. festsetzbar (Zusatz zu Satz 35), z. B. zu $R' \neq R$; dann ist für alle $f$ mit sinnvollen $R'f$ (wenn $Sg$ Sinn hat)

$$(R'f, g) = (f, R'g) = (f, Sg) = (f, Rg) = (Rf, g),$$

und weil die Menge dieser $g$ überall dicht ist, $R'f = Rf$ — also wäre $R$ Forts. von $R'$, $R' \neq R$, trotzdem $R'$ max. sein sollte.

Wir haben das logische Schema

$$\alpha) \rightarrow \gamma) \rightarrow \delta) \rightarrow \alpha),$$

d. h. $\alpha$), $\gamma$), $\delta$) sind logisch gleichwertig. Aus $\beta$) folgt $\alpha$), und $\beta$) folgt aus $\alpha$) und $\gamma$): daher ist es ihnen auch gleichwertig.

Satz 49. *Sei* $R$ *ein unbeschränkter abg. lin. H. O., dann ist es Forts. eines abg. lin. H. O., der zu Kontinuum vielen verschiedenen max. H. O. fortsetzbar ist.*

Beweis. Nach Satz 48 $\delta$) muß $R$ eig. Forts. eines abg. lin. H. O. $S$ sein, dieses $S$ ist nicht max., hat also nach dem Zusatz zu Satz 35 die gewünschte Eigenschaft.

## Anhang I. Funktionenräume.

Hier soll der im Kap. I angekündigte Nachweis erbracht werden, daß alle in der Einleitung I. und II. erwähnten Funktionenräume abstrakte Hilbertsche Räume sind, d. h. den Bedingungen A bis E aus Kap. I genügen. Für den „gewöhnlichen Hilbertschen Raum“ $\left(\text{aller Folgen } (x_1, x_2, \ldots) \text{ mit } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)$ erübrigt sich dieser Beweis, sobald mindestens ein A bis E ge-

[61]) Die Gleichwertigkeit von $\alpha$) und $\gamma$) ist der bekannte Satz von Toeplitz, Math. Annalen **69** (1911), S. 321.

nügendes System bekannt ist — denn jedes solche System ist ja (nach den Schlußüberlegungen von Kap. I) dem „gewöhnlichen Hilbertschen Raume" isomorph, also muß dieser die Eigenschaften A bis E gleichfalls besitzen. Wir müssen daher nur noch die Funktionenräume von Einleitung I. betrachten.

$\Omega$ sei also einer der dort genannten metrischen Räume, oder auch irgendein allgemeineres Gebilde, von dem wir aber jedenfalls folgendes verlangen: Es soll in $\Omega$ einen Begriff der „Meßbarkeit", ein „Maß" und ein „Integral" ($\int\limits_{\Omega} f(P)\,dv$ möge es heißen) geben, und zwar im Lebesgueschen Sinne. Wir wollen hier nicht näher ausführen, was dieser „Lebesguesche Sinn" genau bedeuten soll, dies wäre leicht zu beschreiben, aber etwas weitläufig. Bei den nun auszuführenden Überlegungen wird man ohnehin erkennen, auf welche Eigenschaften dieser Begriffe es ankommt. Ferner setzen wir $\Omega$ auch als separabel voraus.

Der Funktionenraum $\mathfrak{H}'$ bestehe nunmehr aus allen in $\Omega$ definierten meßbaren (komplexwertigen) Funktionen $f(P)$, für die $\int\limits_{\Omega} |f(P)|^2\,dv$ endlich ist: dabei gelten zwei Funktionen, die nur auf einer Menge vom Maße 0 verschiedene Werte haben, als nicht verschieden. Was $af$ und $f+g$ bedeuten, ist klar, $(f, g)$ sei gleich $\int\limits_{\Omega} f(P)\overline{g(P)}\,dv$. Diese Definitionen sind zulässig: wenn $f, g$ zu $\mathfrak{H}'$ gehören, also $\int\limits_{\Omega} |f(P)|^2\,dv$, $\int\limits_{\Omega} |g(P)|^2\,dv$ endlich sind, so gehören auch $af, f+g$ zu $\mathfrak{H}'$, denn $\int\limits_{\Omega} |af(P)|^2\,dv$ ist offenbar endlich, und $\int\limits_{\Omega} |f(P)+g(P)|^2\,dv$ ist es wegen $|f(P)+g(P)|^2 \leqq 2|f(P)|^2 + 2|g(P)|^2$; ferner ist $\int\limits_{\Omega} f(P)\overline{g(P)}\,dv$ sinnvoll, ja absolut konvergent, wegen $|f(P)\overline{g(P)}| \leqq \frac{1}{2}|f(P)|^2 + \frac{1}{2}|g(P)|^2$.

Wir gehen nun die Bedingungen A bis E der Reihe nach durch.

A, B sind offenbar erfüllt.

C. Es gilt eine Folge $f_1(P), f_2(P), \ldots$ zu finden, die im Sinne der Entfernung

$$|f-g| = \sqrt{\int\limits_{\Omega} |f(P)-g(P)|^2\,dv}$$

überall dicht ist. — Das Maß von $\Omega$ ist eventuell unendlich, jedenfalls können wir aber $\Omega$ durch eine aufsteigende Folge $\Pi_1, \Pi_2, \ldots$ von Teilmengen endlichen Maßes erschöpfen. Wenn $f$ irgendeine Funktion aus $\mathfrak{H}'$ ist, so definieren wir $f_N$ $(N = 1, 2, \ldots)$ so:

$$f_N(P) = \begin{cases} f(P), & \text{wenn } P \text{ in } \Pi_N \text{ liegt und } |f(P)| \leqq N \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Da für jedes $N$ $f_N(P) \to f(P)$ und alle $\int_\Omega |f_N(P)|^2 dv$ beschränkt $(\leqq \int_\Omega |f(P)|^2 dv)$ sind, so muß $\int_\Omega |f_N(P) - f(P)|^2 dv \to 0$, d. h. im Sinne unserer Entfernung $f_N \to f$. Also sind diejenigen $f$, die nur auf einer Menge endlichen Maßes Werte $\neq 0$ haben und die außerdem beschränkt sind, überall dicht — es genügt somit eine in ihnen überall dichte Folge zu finden.

Sei $f$ eine Funktion dieser Klasse, das Maß der Menge wo sie $\neq 0$ ist, $M$, die obere Grenze ihres Absolutwertes $A$. Wir wählen im Intervalle $-A$, $A$ eine Einteilung $\varrho_1, \ldots, \varrho_k$ rationaler Zahlen, die dieses mit einer Maschenweite $\leqq \varepsilon$ überdecken ($\varepsilon > 0$, sonst beliebig). Es sei

$$f_\varepsilon(P) = \begin{cases} \varrho_h, \text{ wenn } f(P) \neq 0 \text{ und } \varrho_h \text{ das } f(P) \text{ nächstgelegene der } \varrho_1, \ldots, \varrho_k \text{ ist,} \\ 0 \qquad\qquad \text{sonst} \end{cases} .$$

Hieraus folgt sofort $\int_\Omega |f_\varepsilon(P) - f(P)|^2 dv \leqq M \cdot 2A \cdot \varepsilon$, für $\varepsilon \to 0$ gilt somit für diese $f_\varepsilon$ $f_\varepsilon \to f$. D. h. diejenigen Funktionen, die stets rationale Werte annehmen, und nur endlich viele verschiedene, und jeden der $\neq 0$ ist nur auf einer Menge endlichen Maßes, sind auch überall dicht. Die gesuchte Folge braucht daher nur in diesen überall dicht zu sein.

Wenn $\Sigma$ irgendeine Teilmenge von endlichem Maße von $\Omega$ ist, so sei $f_\Sigma$ die Funktion, die in $\Sigma$ $=1$ und sonst $=0$ ist; die Funktionenklasse von vorhin ist einfach die aller $\varrho_1 f_{\Sigma_1} + \ldots + \varrho_k f_{\Sigma_k}$ ($\varrho_1, \ldots, \varrho_k$ rational). Wenn wir eine Folge von Mengen $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}, \ldots$ fänden, die in der Gesamtheit aller Mengen endlichen Maßes überall dicht ist (die Entfernung von zwei Mengen $\Sigma', \Sigma''$ ist die ihrer Funktionen $f_{\Sigma'}, f_{\Sigma''}$, d. h. das Maß ihrer „Unterschiedsmenge" $(\Sigma' + \Sigma'') - (\Sigma' \cdot \Sigma'')$ [62])), so lägen die Funktionen $\varrho_1 f_{\Sigma^{(n_1)}} + \ldots + \varrho_k f_{\Sigma^{(n_k)}}$ ($k = 1, 2, \ldots$, $\varrho_1, \ldots, \varrho_k$ rational, $n_1, \ldots, n_k = 1, 2, \ldots$) in $\mathfrak{H}'$ überall dicht: d. h. wir wären am Ziele. Eine solche Mengenfolge $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}, \ldots$ gilt es also zu finden.

Sei $\Sigma$ eine Menge vom endlichen Maß $M$, bekanntlich ist $M$ die untere Grenze der Maße aller $\Sigma$ enthaltenden offenen Punktmengen; sei $\Sigma'$ eine solche Menge mit einem Maße $\leqq M + \varepsilon$, dann hat die „Unterschiedsmenge" $\Sigma' - \Sigma$ ein Maß $\leqq \varepsilon$. D. h. die offenen Mengen liegen überall dicht. Da $\Omega$ separabel ist, gibt es in $\Omega$ eine Folge offener Mengen $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$, die ein „gleichwertiges Umgebungssystem" bilden, also so, daß jede offene Menge $\Sigma'$ die Vereinigungsmenge aller in ihr enthaltenen $\Lambda_n$ ist — etwa von $\Lambda_{n_1}, \Lambda_{n_2}, \ldots$. Das Maß von $\Sigma'$ sei $M'$, dann konvergieren die Maße der $\Lambda_{n_1}, \Lambda_{n_1} + \Lambda_{n_2}, \Lambda_{n_1} + \Lambda_{n_2} + \Lambda_{n_3}, \ldots$ gegen $M'$. Sei etwa das-

[62]) $\pm$, $\cdot$ sind hier die Zeichen für das Vereinigen, Abziehen und Durchschnitts-Bilden bei Mengen.

jenige von $\Lambda_{n_1} + \ldots + \Lambda_{n_k}$ bereits $\geqq M' - \varepsilon$, dann hat die „Unterschiedsmenge" $\Sigma' - (\Lambda_{n_1} + \ldots + \Lambda_{n_k})$ ein Maß $\leqq \varepsilon$. D. h.: die $\Lambda_{n_1} + \ldots + \Lambda_{n_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n_1, \ldots, n_k = 1, 2, \ldots)$ liegen auch überall dicht[63]), und diese sind abzählbar viel, womit wir am Ziele sind.

D. Sei $k = 1, 2, \ldots$, wir wählen $k$ paarweise punktfremde Mengen $K_1, \ldots, K_k$ in $\Omega$ aus, jede von endlichem Maße $\neq 0$. Die Funktion $f_h(P)$ sei $= 1$ in $K_h$ und $= 0$ sonst $(h = 1, \ldots, k)$; dann sind die $f_1, \ldots, f_k$ offenbar. lin. unabh. (und sie gehören zu $\mathfrak{H}'$).

E. Sei $f_1, f_2, \ldots$ eine Funktionenfolge, die dem Cauchyschen Konvergenzkriterium genügt (zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N = N(\varepsilon)$, so daß für $m, n \geqq N$ $\int\limits_{\Omega} |f_m(P) - f_n(P)|^2 dv \leqq \varepsilon$ ist). Wir wählen (in Anlehnung an einen Beweis von Weyl) eine Folge $N_1 < N_2 < N_3 < \ldots$ mit $N_p \geqq N\left(\frac{1}{8^p}\right)$ aus und schließen dann so. Es ist

$$\int\limits_{\Omega} |f_{N_{p+1}}(P) - f_{N_p}(P)|^2 dv \leqq \frac{1}{8^p},$$

also hat diejenige Menge, auf der

$$|f_{N_{p+1}}(P) - f_{N_p}(P)| \geqq \frac{1}{2^p}$$

gilt, ein Maß $\leqq \frac{1}{2^p}$. Also gilt

$$|f_{N_{p+1}}(P) - f_{N_p}(P)| \leqq \frac{1}{2^p}, \qquad |f_{N_{p+2}}(P) - f_{N_{p+1}}(P)| \leqq \frac{1}{2^{p+1}}, \ \ldots$$

überall, mit Ausnahme einer Menge vom Maße $\leqq \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{p+1}} + \ldots = \frac{1}{2^{p-1}}$. Aber dort, wo die obigen Ungleichheiten gelten, hat die Folge $f_{N_1}(P)$, $f_{N_2}(P), \ldots$ einen Limes; also überall mit Ausnahme einer Menge vom Maße $\leqq \frac{1}{2^{p-1}}$. Da dies für alle $p$ gilt, hat die Ausnahmemenge das Maß 0.

Wir definieren nun: $f(P) = \text{limes}\, f_{N_p}(P)$, soweit dieser Limes existiert, d. h. überall bis auf eine 0-Menge, und sonst $= 0$. Wenn nun $m \geqq N(\varepsilon)$ ist, so gilt für fast alle $p$ (nämlich sobald $N_p \geqq N(\varepsilon)$ ist) $\int\limits_{\Omega} |f_m(P) - f_{N_p}(P)|^2 \cdot dv \leqq \varepsilon$. Also dürfen wir $p \to \infty$ ausführen, und es wird: $\int\limits_{\Omega} |f_m(P) - f(P)|^2 dv \leqq \varepsilon$. Somit gehört erstens $f_m - f$, also auch $f$, zu $\mathfrak{H}'$, und zweitens ist $f_m \to f$. D. h. alles ist bewiesen.

## Anhang II. Das Eigenwertproblem unitärer Operatoren.

1. Wir betrachten im folgenden durchweg in ganz $\mathfrak{H}$ sinnvolle und beschränkte (stetige) lin. Operatoren $R$, auf die also Satz 12 $\alpha$), $\beta$) an-

---

[63]) Wir nehmen natürlich nur die von endlichem Maße.

wendbar ist. Der Hermitesche Charakter hingegen wird nicht immer Voraussetzung sein. Bei festem $f$ hat $L(g) = (f, Rg)$ die Eigenschaften

$$L(a_1 g_1 + \ldots + a_n g_n) = \bar{a}_1 L(g_n) + \ldots + \bar{a}_n L(g_n),$$
$$|L(g)| \leqq C \cdot |f| |g| = D \cdot |g|,$$

so daß der Satz von F. Riesz (vgl. Anm. [52]) anwendbar ist: $L(g) = (f^*, g)$. Wir nennen das so bestimmte $f^*$ $R^* f$, $R^*$ ist ein überall sinnvoller und offenbar lin. Operator. Es hat die Eigenschaften

$$(f, Rg) = (R^* f, g), \qquad (Rf, g) = (f, R^* g)$$

(die erste war Definition, die zweite folgt durch Vertauschen von $f, g$ und nehmen der komplex-Konjugierten). Insbesondere ist

$$|R^* f|^2 = (R^* f, R^* f) = (f, R R^* f) \leqq C \cdot |f| |R^* f|, \qquad |R^* f| \leqq C \cdot |f|,$$

d. h. auch $R^*$ beschränkt[64]).

Man verifiziert sofort $R^{**} = R$, $(R \pm S)^* = R^* \pm S^*$, $(RS)^* = S^* R^*$, [65]) $(aR)^* = \bar{a} R^*$, $0^* = 0$, $1^* = 1$. Für H. O. ist $R = R^*$ charakteristisch (wenn sie beschränkt sind). Jeder unitäre Operator $U$ gehört zu unserer Klasse (er ist wegen $|Uf| = |f|$ beschränkt), und ist in ihr durch $UU^* = U^* U = 1$, d. h. $U^{-1} = U^*$ gekennzeichnet[66]).

2. Jetzt sei $R$ sogar H. O., wir nehmen zuerst sein Eigenwertproblem nach der Methode von F. Riesz in Angriff. Sei $p(x) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x^\nu$ ein Polynom (die $a_\nu$ reell), dann ist $p(R) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu R^\nu$ ($R^0 = 1$) ein H. O. unserer Klasse; das Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren dieser $p(R)$ ist offenbar ebenso zu vollziehen, wie das der $p(x)$ (also sind alle vertauschbar). Wir wählen $C$ mit $|Rf| \leqq C \cdot |f|$ (für alle $f$).

Satz 1*. *Wenn für* $-C \leqq x \leqq C$ $p(x) \geqq 0$ *ist, so ist* $p(R)$ *definit.*

Beweis. Sei $\mathfrak{M}$ irgendeine endlichvieldimensionale (also abg.) lin. M., etwa durch das norm. orth. System $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ aufgespannt. $R' = P_{\mathfrak{M}} R P_{\mathfrak{M}}$ ist ein H. O. mit $|R' f| = |P_{\mathfrak{M}} R P_{\mathfrak{M}} f| \leqq |R P_{\mathfrak{M}} f| \leqq C \cdot |P_{\mathfrak{M}} f| \leqq C \cdot |f|$, d. h. von unserer Klasse, der durch $\mathfrak{M}$ offenbar reduziert wird (sein in

---

[64]) Bei Matrizen ist dieses * das Nehmen der konjugiert-transponierten, ebenso bei Integraloperator-Kernen, bei Differentialoperatoren die adjungierte.

[65]) Es handelt sich um überall sinnvolle Operatoren, daher sind die $+, -, \cdot$ ohne weiteres sinnvoll (vgl. Anm. [37])).

[66]) Wenn $U$ unitär ist, so hat es eine Inverse $U^{-1}$, und es ist $(f, U^{-1} g) = (Uf, UU^{-1} g) = (Uf, g) = (f, U^* g)$ für alle $f, g$, also $U^{-1} = U^*$. Wenn $U^{-1} = U^*$ ist, so ist $(Uf, Ug) = (f, U^* Ug) = (f, g)$, also für $f = g$ $|Uf| = |f|$, so daß $U$ längentreu ist; da es überall Sinn hat und alle Werte annimmt ($U^{-1}$ hat ja überall Sinn!), ist es unitär.

$\mathfrak{H} - \mathfrak{M}$ liegender Teil ist 0!). Sein in $\mathfrak{M}$ liegender Teil ist also ein $k$-dimensionaler H. O., etwa mit den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$; wegen $|R'f| \leqq C \cdot |f|$ sind alle $|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_k| \leqq C$. Auch $p(R')$ wird durch $\mathfrak{M}$ reduziert, und sein in $\mathfrak{M}$ liegender Teil hat die Eigenwerte $p(\lambda_1), \ldots, p(\lambda_k)$ — also lauter Zahlen $\geqq 0$, d. h. er ist definit. Also: Wenn $f$ in $\mathfrak{M}$ liegt so ist

$$(f, p(R')f) \geqq 0.$$

Sei nun $f$ beliebig, wir wählen $\mathfrak{M}$ als die von $f, Rf, \ldots, R^n f$ aufgespannte (abg.) lin. M., dann ist $f$ in $\mathfrak{M}$, $R'f = Rf, \ldots, R'^n f = R^n f$, also $p(R')f = p(R)f$. Also $(f, p(R)f) \geqq 0$; und da $f$ ganz beliebig war, ist $p(R)$ definit.

Satz 2*. *Wenn für* $-C \leqq x \leqq C$ $|p(x)| \leqq \varepsilon$ *ist, so ist* $|p(R)f| \leqq \varepsilon \cdot |f|$.

Beweis. Satz 1* ist auf $\varepsilon \pm p(x)$ anwendbar, also $(f, \{\varepsilon \cdot 1 \pm p(R)\} f) \geqq 0$, $|(f, p(R)f)| \leqq \varepsilon \cdot |f|^2$. Nach Satz 12 (Gleichwertigkeit von $\gamma$) und $\alpha$)!) bedeutet das $|p(R)f| \leqq \varepsilon \cdot |f|$.

Satz 3*. *Wenn* $P(x)$ *ein im Intervalle* $-C \leqq x \leqq C$ *stetige Funktion ist, und* $p_1(x), p_2(x), \ldots$ *eine dort gleichmäßig gegen* $P(x)$ *strebende Polynomfolge, so hat* $p_n(R)f$ *einen Limes* $f^*$, *der nur von* $R, f$ *und* $P(x)$ *abhängt.*

Beweis. Klar nach Satz 2*. —

Durch $P(R)f = f^*$ definieren wir also einen überall sinnvollen Operator, der lin. H. O. ist, weil es die $p_n(R)$ sind, und beschränkt nach Satz 48 ($\alpha$) und ($\gamma$), oder auch weil es die $p_n(x)$ gleichmäßig sind (also auch die $p_n(R)$, Satz 2*).

Satz 4*. *Die* $P(R)$ *sind ebenso zu addieren, subtrahieren, multiplizieren wie die* $P(x)$, *Satz* 1*, 2* *gilt für sie auch; wenn* $P(x)$ *ein Polynom ist, stimmt die alte und neue Definition überein.*

Beweis. Die letzte Behauptung folgt daraus, daß $p_1(x) = p_2(x) = \ldots = P(x)$ gesetzt werden kann; die übrigen gelten für die $p(x)$, also aus Stetigkeitsgründen auch für $P(x)$.

3. Nun biegen wir vom F. Rieszschen Wege ab.

Satz 5*. *Sei* $\mathfrak{M}_R$ *die Menge aller* $f$ *mit* $Rf = 0$, $\mathfrak{N}_R$ *die Menge aller* $Rf$ *und ihrer Häufungspunkte. Dann ist* $\mathfrak{M}_R = \mathfrak{H} - \mathfrak{N}_R$.

Beweis. Die $Rf$ bilden eine lin. M., es genügt zu zeigen, daß $\mathfrak{M}_R$ aus allen zu dieser lin. M. orth. $g$ besteht. Nun bedeutet das orth. stehen auf diese, $(g, Rf) = 0$ für alle $f$, d. h. $(Rg, f) = 0$ — also $Rg = 0$. Damit sind wir fertig.

Satz 6*. *Wenn* $R, S$ *definit sind, so ist* $\mathfrak{M}_{R+S}$ *Teil von* $\mathfrak{M}_R$, *und* $\mathfrak{N}_R$ *Teil von* $\mathfrak{N}_{R+S}$.

Beweis. Aus $(R+S)g=0$ folgt $0 \leqq (g, Rg) \leqq (g, (R+S)g) = 0$, $(g, Rg) = 0$. Nun gilt für definite $R$

$$|(f, Rg)|^2 \leqq (f, Rf) \cdot (g, Rg)$$

(man beweist dies ebenso, wie die entsprechende Gleichung für $R=1$ bei Satz 1), also hat $(g, Rg)=0$ die Folge $(f, Rg)=0$ (für alle $f$!), $Rg=0$. Die obige Relation bedeutet daher: $\mathfrak{M}_{R+S}$ Teil von $\mathfrak{M}_R$. Nach Satz 5* ist also $\mathfrak{N}_R$ Teil von $\mathfrak{N}_{R+S}$.

Wir definieren:

$$f_a(x) = \mathrm{Max}\,(x-a, 0), \qquad \mathfrak{M}(R, a) = \mathfrak{M}_{f_a(R)}, \qquad \mathfrak{N}(R, a) = \mathfrak{N}_{f_a(R)}.$$

Satz 7*. *In $\mathfrak{M}(R, a)$ bzw. $\mathfrak{N}(R, a)$ gilt durchweg*

$$(f, Rf) \leqq a \cdot |f|^2 \quad \textit{bzw.} \quad \geqq a \cdot |f|^2.$$

Beweis. Sei $g_a(x) = \mathrm{Max}\,(-(x-a), 0)$, da $f_a(x) g_a(x) = 0$, $f_n(x) + g_a(x) = x - a$ ist, haben wir für $S' = f_a(R)$, $S'' = g_a(R)$ nach Satz 4*. $S'S'' = S''S' = 0$, $S' - S'' = R - a \cdot 1$. Da stets $f_a(x) \geqq 0$, $g_a(x) \geqq 0$ ist, sind $S', S''$ auch definit. In $\mathfrak{M}(R, a) = \mathfrak{M}_{S'}$ ist $S'f = 0$, also $Rf = af - S''f$, $(f, Rf) = a \cdot |f|^2 - (f, S''f) \leqq a \cdot |f|^2$. In $\mathfrak{N}(R, a) = \mathfrak{N}_{S'}$ befinden wir uns (nach Satz 5* und $S''S' = 0$) in $\mathfrak{M}_{S''}$, also ist $S''f = 0$, und $Rf = af + S'f$, $(f, Rf) = a \cdot |f|^2 + (f, S'f) \geqq a \cdot |f|^2$.

Satz 8*. *Wenn $a \leqq b$ ist, so ist $\mathfrak{M}(R, a)$ Teil von $\mathfrak{M}(R, b)$ und $\mathfrak{N}(R, b)$ Teil von $\mathfrak{N}(R, a)$, ferner ist für $a < -C$ bzw. $> C$ $\mathfrak{M}(R, a) = (0)$ bzw. $= \mathfrak{H}$ und $\mathfrak{N}(R, a) = \mathfrak{H}$ bzw. $= (0)$.*

Beweis. Die erste Behauptung folgt, da $f_a(x) \geqq 0$, $f_b(x) - f_a(x) \geqq 0$ ist, also $f_a(R), f_b(R) - f_a(R)$ definit, aus Satz 6*. Die zweite beweisen wir so: Gehörte ein $f \neq 0$ für $a < -C$ bzw. $> C$ zu $\mathfrak{M}(R, a)$ bzw. $\mathfrak{N}(R, a)$, so wäre

$$(f, Rf) \leqq a \cdot |f|^2 < -C \cdot |f|^2 \quad \text{bzw.} \quad \geqq a \cdot |f|^2 > C \cdot |f|^2,$$

entgegen der Definition von $C$ (Satz 12 ($\gamma$)), also ist $\mathfrak{M}(R, a)$ bzw. $\mathfrak{N}(R, a) = (0)$. Also $\mathfrak{N}(R, a)$ bzw. $\mathfrak{M}(R, a) = \mathfrak{H} - (0) = \mathfrak{H}$.

Satz 9*. *Es gilt ganz allgemein*

$$(Rf, g) = \int a \, d\,(P_{\mathfrak{M}(R, a)} f, g)$$

(*wobei das Integral über irgend zwei Grenzen $< -C$, $> C$ zu erstrecken ist*).

Beweis. Für $f = g$ folgt es aus Satz 7*, 8*[67]). Durch Einsetzen von

---

[67]) $R$ ist mit $f_a(R)$ vertauschbar (Satz 4*), wird also durch $\mathfrak{M}(R, a)$ reduziert (aus $f_a(R) f = 0$ folgt $f_a(R) \cdot Rf = R \cdot f_a(R) f = 0$, und Satz 20), d. h. es ist mit $P_{\mathfrak{M}(R, a)}$ vertauschbar.

Nun sei $x_0 < x_1 < \ldots < x_p$, $x_0 < -C$, $x_p > C$, dann ist

(Fortsetzung der Fußnote [67]) auf nächster Seite.)

$\frac{f+g}{2}$, $\frac{f-g}{2}$ und Subtrahieren entsteht die Gleichung allgemein für die Realteile; durch Ersetzen von $f, g$ durch $i f, g$ auch für die Imaginärteile. —

Satz 9* ist im wesentlichen das Hilbertsche Resultat für beschränkte H. O. Wir gehen weiter und betrachten zwei H. O. $R, S$ unserer Klasse.

Satz 10*. *Wenn $R$, $S$ vertauschbar sind, so sind es auch $P_{\mathfrak{M}(R,a)}$, $P_{\mathfrak{M}(S,b)}$.*

Beweis. $R, S$ sind vertauschbar, also auch alle $P(R)$, $Q(S)$ (Polynome offenbar, andere Funktionen aus Stetigkeitsgründen) — also insbesondere $f_a(R)$, $f_b(S)$. Daher reduziert $\mathfrak{M}(R,a)$ $f_b(S)$ (vgl. die Überlegung in Anm.[67])), und $\mathfrak{N}(R,a) = 1 - \mathfrak{M}(R,a)$ ebenfalls. Darum muß $\mathfrak{M}(S,b)$ so gebildet werden, daß man die $f$ mit $f_b(S) f = 0$ zuerst in $\mathfrak{M}(R,a)$ und dann in $\mathfrak{N}(R,a)$ bildet, und dann beide abg. lin. M. addiert. Hieraus schließt man mühelos die Vertauschbarkeit von $P_{\mathfrak{M}(R,a)}$ und $P_{\mathfrak{M}(S,b)}$.

4. Jetzt wenden wir uns den sog. normalen Operatoren $A$ unserer Klasse zu, die durch $AA^* = A^*A$ charakterisiert sind. Die H. O. $R = \frac{1}{2}(A + A^*)$, $S = \frac{1}{2i}(A - A^*)$ sind dann vertauschbar, und es ist $A = R + iS$, $A^* = R - iS$. Wir bilden nun die P. O.

$$E(A, a, b) = P_{\mathfrak{M}(R,a)} \cdot P_{\mathfrak{N}(S,b)}.$$

Es gilt der Satz:

Satz 11*.[68]) *$A$ und die $E(A, a, b)$ erfüllen die folgenden Bedingungen:*

$$(Rf, f) = \sum_{\nu=1}^{p} (R(P_{\mathfrak{M}(R,x_\nu)} - P_{\mathfrak{M}(R,x_{\nu-1})}) f, f) = \sum_{\nu=1}^{p} (R P_{\mathfrak{M}(R,x_\nu) - \mathfrak{M}(R,x_{\nu-1})} f, f)$$
$$= \sum_{\nu=1}^{p} (R P_{\mathfrak{M}(R,x_\nu)\cdot\mathfrak{N}(R,x_{\nu-1})} f, f) = \sum_{\nu=1}^{p} (R P_{\mathfrak{N}(R,x_\nu)\cdot\mathfrak{N}(R,x_{\nu-1})} f, P_{\mathfrak{M}(R,x_\nu)\cdot\mathfrak{N}(R,x_{\nu-1})} f).$$

(Das letztere, weil $R$ mit $P_{\mathfrak{M}(R,x_\nu)} - P_{\mathfrak{M}(R,x_{\nu-1})} = P_{\mathfrak{M}(R,x_a)\cdot\mathfrak{N}(R,x_{\nu-1})}$ vertauschbar ist, also $P_{\mathfrak{M}(R,x_\nu)\cdot\mathfrak{N}(R,x_{\nu-1})} R P_{\mathfrak{M}(R,x_\nu)\cdot\mathfrak{N}(R,x_{\nu-1})} = R P_{\mathfrak{M}(R,x_\nu)\cdot\mathfrak{M}(R,x_{\nu-1})}$ gilt.) Nach Satz 7* ist also der einzelne Addend in $\sum_{\nu=1}^{p}$

$$\begin{cases} \leqq x_\nu \; |P_{\mathfrak{M}(R,x_\nu)\cdot\mathfrak{N}(R,x_{\nu-1})} f|^2, \\ \geqq x_{\nu-1} \; |P_{\mathfrak{M}(R,x_\nu)\cdot\mathfrak{N}(R,x_{\nu-1})} f|^2, \end{cases}$$

$$|P_{\mathfrak{M}(R,x_\nu)\cdot\mathfrak{N}(R,x_{\nu-1})} f|^2 = |P_{\mathfrak{M}(R,x_\nu) - \mathfrak{M}(R,x_{\nu-1})} f|^2 = |P_{\mathfrak{M}(R,x_\nu)} f|^2 - |P_{\mathfrak{M}(R,x_{\nu-1})} f|^2.$$

Nach Definition des Stieltjesschen Integrals bedeutet aber

$$(Rf, f) \begin{cases} \leqq \sum_{\nu=1}^{p} x_\nu \; (|P_{\mathfrak{M}(R,x_\nu)} f|^2 - |P_{\mathfrak{M}(R,x_{\nu-1})} f|^2), \\ \geqq \sum_{\nu=1}^{p} x_{\nu-1} \; (|P_{\mathfrak{M}(R,x_\nu)} f|^2 - |P_{\mathfrak{M}(R,x_{\nu-1})} f|^2), \end{cases}$$

das aus unseren Relationen folgt, die behauptete Gleichung

$$(Rf, f) = \int a \, d\,|P_{\mathfrak{M}(R,a)} f|^2 = \int a \, d\,(P_{\mathfrak{M}(R,a)} f, f).$$

[68]) Vgl. hierzu Einleitung IX und Anm. [26]).

*α) $E(A, a, b)$, $E(A, a', b')$ sind vertauschbar und ihr Produkt ist $E(A, \mathrm{Min}\,(a, a'), \mathrm{Min}\,(b, b'))$.*

*β) Für genügend kleines a oder b ist $E(A, a, b) = 0$. Für genügend großes a oder b ist es von a bzw. b unabhängig. Für genügend großes a und b ist es $= 1$.*

*Und es gelten die Gleichungen:*

$$(Af, g) = \iint (a + ib)\, d(E(A, a, b) f, g),$$
$$(A^* f, g) = \iint (a - ib)\, d(E(A, a, b) f, g).$$

*(Die $\iint$ sind über ein hinreichend großes Rechteck zu erstrecken.)*

Beweis. Vergegenwärtigt man sich die aus Satz $9^*, 10^*$ folgenden Gleichungen

$$(Rf, g) = \iint a\, d(E(A, a, b) f, g), \quad (Sf, g) = \iint b\, d(E(A, a, b) f, g),$$

so folgt alles unmittelbar aus Satz $8^*$, $9^*$, $10^*$ und der Definition der $E(A, a, b)$. —

Die unitären Operatoren $U$ sind wegen $UU^* = U^* U = 1$ auch normal, Satz $11^*$ gilt also für sie auch. Ihre $E(U, a, b)$ haben aber noch weitergehende Eigenschaften und diese wollen wir jetzt herleiten.

Zunächst gilt allgemein:

$$\begin{aligned}
(Af, E(A, a, b) g) &= \iint (a' + ib')\, d(E(A, a', b') f, E(A, a, b) g) \\
&= \iint (a' + ib')\, d(E(A, a, b)\, E(A, a', b') f, g) \\
&= \iint (a' + ib')\, d(E(A, \mathrm{Min}\,(a, a'), \mathrm{Min}\,(b, b')) f, g) \\
&= \iint^{a\ b} (a' + ib')\, d(E(A, a', b') f, g).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(Af, Ag) &= \iint (a - ib)\, d(Af, E(A, a, b) g) \\
&= \iint (a - ib)\, d\left\{ \iint^{a\ b} (a' + ib')\, d(E(A, a', b') f, g) \right\} = (\text{vgl. Anm. } ^{55})) \\
&= \iint (a - ib)(a + ib)\, d(E(A, a, b) f, g) \\
&= \iint (a^2 + b^2)\, d(E(A, a, b) f, g).
\end{aligned}$$

$$(f, g) = \iint d(E(A, a, b) f, g).$$

Für unitäre $A$ ist also wegen $(f, g) = (Af, Ag)$

$$\iint (1 - a^2 - b^2)\, d(E(A, a, b) f, g) = 0.$$

Und wenn wir $f = g$ setzen: $\iint (1 - a^2 - b^2)\, d\, |E(A, a, b) f|^2 = 0$.

5. Wenn $\mathfrak{R}$ irgendein Rechteck $a' \leqq x \leqq a''$, $b' \leqq y \leqq b''$ ist (Ecken: $a', b'; a'', b'; a', b''; a'', b''$), so definieren wir einen P. O.

$$E(A, \mathfrak{R}) = E(A, a'', b'') - E(A, a'', b') - E(A, a', b'') + E(A, a', b')$$
$$= P_{\mathfrak{M}(R, a')} \cdot (1 - P_{\mathfrak{M}(R, a'')}) \cdot P_{\mathfrak{M}(S, b')} \cdot (1 - P_{\mathfrak{M}(S, b'')})$$
$$= P_{\mathfrak{M}(R, a') \mathfrak{N}(R, a'') \mathfrak{M}(S, b') \mathfrak{N}(S, b'')} .$$

Möge nun $\mathfrak{R}$ keinen einzigen Punkt mit dem Einheitskreis gemeinsam haben, dann ist in $\mathfrak{R}$ stets $1 - a^2 - b^2 \geqq \varepsilon$ oder stets $\leqq -\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, und wir haben für jedes $f$ mit $E(A, \mathfrak{R}) f = f$ (d.h. aus $\mathfrak{M}(R, a') \mathfrak{N}(R, a'') \mathfrak{M}(S, b') \mathfrak{N}(S, b'')$)

$$\left| \iint (1 - a^2 - b^2) d |E(A, a, b) f|^2 \right|$$
$$= \left| \iint_{\mathfrak{R}} (1 - a^2 - b^2) d |E(A, a, b) f|^2 \right| \geqq \varepsilon \left| \iint_{\mathfrak{R}} d |E(A, a, b) f|^2 \right|$$
$$= \varepsilon \left| \iint d |E(A, a, b) f|^2 \right| = \varepsilon \cdot |f|^2. \text{ [69]}$$

Also muß $f = 0$ sein, d.h. es ist $E(A, \mathfrak{R}) = 0$. — Wenn $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}$ zwei punktfremde Rechtecke sind (die Ränder dürfen sich treffen), so ist $E(A, \mathfrak{R}) \cdot E(A, \mathfrak{S}) = 0$ [70]. Wenn die beiden Rechtecke $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}$ zusammen genau ein Rechteck $\mathfrak{T}$ ausmachen, so ist $E(A, \mathfrak{R}) + E(A, \mathfrak{S}) = E(A, \mathfrak{T})$ [71].

Durch wiederholte Anwendung dieser Tatsachen folgert man nun: wenn $\mathfrak{U}$ eine Summe von endlich vielen Rechtecken ist, so ist erstens

$$E(A, \mathfrak{U}) = E(A, \mathfrak{R}_1) + \ldots + E(A, \mathfrak{R}_n)$$

($\mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_n$ seien die genannten Rechtecke) ein P. O.; zweitens ist er für alle Zerlegungen $\mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_n$ von $\mathfrak{U}$ derselbe; drittens ist, wenn $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ zwei solche Mengen sind und höchstens Randpunkte gemein haben, $E(A, \mathfrak{U}) \cdot E(A, \mathfrak{V}) = 0$, $E(A, \mathfrak{U} \dotplus \mathfrak{V}) = E(A, \mathfrak{U}) + E(A, \mathfrak{V})$. Außerdem muß, wenn $\mathfrak{U}$ den Einheitskreis nicht trifft, $E(A, \mathfrak{U}) = 0$ sein (weil alle $E(A, \mathfrak{R}_1), \ldots, E(A, \mathfrak{R}_n) = 0$ sind); hieraus folgert man mühelos weiter: wenn $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ dieselben Punkte mit dem Einheitskreis gemein haben (und keine Randecke auf ihm), so ist $E(A, \mathfrak{U}) = E(A, \mathfrak{V})$.

Jetzt sind wir in der Lage, das Stieltjessche Integral $\iint$ sozusagen auf Polarkoordinaten zu transformieren.

---

[69]) Da $f$ in $\mathfrak{M}(R, a')$ und $\mathfrak{N}(R, a'')$ liegt, ist für $a \leqq a'$ oder $\geqq a''$ $P_{\mathfrak{M}(R, a)} f = 0$ bzw. $= f$, also $E(A, a, b) f$ von $a$ unabhängig; ebenso ist es für $b \leqq b'$ oder $\geqq b''$ von $b$ unabhängig. Daher dürfen wir $\iint$ und $\iint_{\mathfrak{R}}$ identifizieren.

[70]) Seien $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}$ etwa $a' \leqq x \leqq a''$, $b' \leqq y \leqq b''$ und $c' \leqq x \leqq c''$, $d' \leqq y \leqq d''$; es muß $a'' \leqq c'$ oder $c'' \leqq a'$ oder $b'' \leqq d'$ oder $d'' \leqq b'$ sein. Für $a'' \leqq c'$ ist $\mathfrak{M}(R, a'')$ Teil von $\mathfrak{M}(R, c')$, also $\mathfrak{N}(R, a'')$ orth. zu ihm — daher ist $P_{\mathfrak{N}(R, a'')} P_{\mathfrak{M}(R, c')} = 0$ und erst recht $E(A, \mathfrak{R}) \cdot E(A, \mathfrak{S}) = 0$. Ebenso schließt man in den drei anderen Fällen.

[71]) Es muß $a'' = c'$ oder $c'' = a'$ und gleichzeitig $b' = d'$, $d'' = b''$ sein, oder $b'' = d'$ oder $d'' = b'$ und gleichzeitig $a' = c'$, $a'' = c''$; man verifiziere an der Definition der $E(A, \mathfrak{R})$.

6. Es sei $0 \leqq \varrho < \sigma \leqq 1$, dann gibt es sicher Rechteck-Mengen $\mathfrak{U}$, die mit dem Einheitskreise genau den Bogen $2\pi\varrho, 2\pi\sigma$ gemein haben (und für die keine Randecke auf dem Einheitskreise liegt), und für alle diese ist (nach dem oben Gesagten) $E(A, \mathfrak{U})$ derselbe P. O. — er heiße $F(\varrho, \sigma)$. Es ist (für $0 \leqq \varrho < \sigma < \tau \leqq 1$) offenbar $F(\varrho, \sigma) + F(\varrho, \tau) = F(\varrho, \tau)$, also, wenn wir $F(\varrho) = F(0, \varrho)$ setzen, $F(\varrho, \sigma) = F(\sigma) - F(\varrho)$. Weiter muß, weil offenbar $F(0, 1) = 1$ ist, $F(1) = 1$ sein. Die $F(\varrho)$ sind P. O., da für $\varrho \leqq \sigma$ $F(\sigma) - F(\varrho)$ auch P. O. ist, ist $F(\varrho)$ Teil von $F(\sigma)$. $F(0)$ ist zunächst undefiniert, es sei $= 0$.

Man teile das Integrationsgebiet der Formel

$$(Af, f) = \iint (a + ib)\, d\,|E(A, a, b) f|^2$$

(ein großes Rechteck!) in Rechtecke $\mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_k$ mit den folgenden Eigenschaften ein: Jedes derselben hat einen Durchmesser $\leqq \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, keines eine Randecke auf dem Einheitskreise; und zwar seien sie so angeordnet, daß mit dem Einheitskreise $\mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_h$ $(h \leqq k)$ Punkte gemein haben, und zwar bzw. die Bögen $2\pi\varrho_0, 2\pi\varrho_1; \dots, 2\pi\varrho_{h-1}, 2\pi\varrho_h$ $(0 = \varrho_0 < \varrho_1 < \dots < \varrho_{h-1} < \varrho_h = 1)$. Aus jedem $\mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_k$ wählen wir je einen Punkt $\xi_1, \dots, \xi_k$ aus, dann ist

$$(Af, f) = \iint (a + ib)\, d\,|E(A, a, b) f|^2 = \sum_{\nu=1}^{k} \iint_{\mathfrak{R}_\nu} (a + ib)\, d\,|E(A, a, b) f|^2$$

beliebig wenig[72]) von

$$\sum_{\nu=1}^{k} \xi_\nu \iint_{\mathfrak{R}_\nu} d\,|E(A, a, b) f|^2 = \sum_{\nu=1}^{k} \xi_\nu \iint_{\mathfrak{R}_\nu} d\,(E(A, a, b) f, f) = \sum_{\nu=1}^{k} \xi_\nu (E(A, \mathfrak{R}_\nu) f, f)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{h} \xi_\nu \cdot |F(\varrho_{\nu-1}, \varrho_\nu) f|^2 = \sum_{\nu=1}^{h} \xi_\nu \cdot (|F(\varrho_\nu) f|^2 - |F(\varrho_{\nu-1}) f|^2)$$

verschieden. Wir können natürlich $\xi_\nu = e^{2\pi i \cdot \varrho'_\nu}$, $\varrho_{\nu-1} < \varrho'_\nu < \varrho_\nu$ $(\nu = 1, \dots, h)$ wählen, dann ist unser Ausdruck

$$\sum_{\nu=1}^{h} e^{2\pi i \cdot \varrho'_\nu} (|F(\varrho_\nu) f|^2 - |F(\varrho_{\nu-1}) f|^2).$$

Dabei sind die $\varrho_0, \varrho_1, \dots, \varrho_{h-1}, \varrho_h$ voneinander $\leqq \varepsilon$ entfernt.

Hieraus folgt aber

$$(Af, f) = \int_0^1 e^{2\pi i \cdot \varrho}\, d\,|F(\varrho) f|^2. \text{ [73])}$$

---

[72]) Da $\iint_{\mathfrak{S}} d\,|E(A, a, b) f|^2$ für alle Rechtecke $\mathfrak{S} \geqq 0$ ist (nämlich $= |E(A, \mathfrak{S}) f|^2$), höchstens $\varepsilon \iint |E(A, a, b) f|^2 = \varepsilon \cdot |f|^2$.

[73]) Das Integral rechts konvergiert, z. B. weil wir $\varrho_0, \varrho_1, \dots, \varrho_{h-1}, \varrho_h$ vorschreiben und die Einteilung $\mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_k$ daran anpassen können.

Satz 12*. *Zu einem unitären Operator $U$ gibt es eine Schar von P. O. $E(\lambda)$ $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$ mit den folgenden Eigenschaften:*

*α) Wenn $\lambda \leqq \mu$ ist, so ist $E(\lambda)$ Teil von $E(\mu)$; $E(0) = 0$, $E(1) = 1$.*

*β) Wenn $\lambda \geqq \lambda_0$, $\lambda \to \lambda_0$, so gilt für jedes $f$ $E(\lambda) f \to E(\lambda_0) f$.*

*Dabei gilt für alle $f, g$*

$$(Uf, g) = \int_0^1 e^{2\pi i \cdot \lambda} d(E(\lambda) f, g).$$

Beweis. Betrachten wir die vorhin konstruierten $F(\lambda)$. Sie haben die Eigenschaft α), aber β) eventuell nicht. Sei $0 \leqq \lambda_0 < 1$ und $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_0$, $\lambda_n \to \lambda$, dann bilden die $F(\lambda_1), F(\lambda_2), \ldots$ eine abnehmende Folge von P. O., nach Satz 19 gibt es also einen P. O. $E$, so daß stets $E(\lambda_n) f \to Ef$ ist; $E$ hängt nur von $\lambda_0$ ab, denn zu zwei Folgen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ muß dasselbe $E$ gehören, weil geeignete Teilfolgen von ihnen zu einer ebensolchen Folge zusammengefaßt werden können — für die im obigen Sinne die Konvergenz auch stattfinden muß. Dieses $E$ heiße $E(\lambda_0)$.

Da $F(\lambda_0)$ Teil aller $F(\lambda_1), F(\lambda_2), \ldots$ ist, ist es auch Teil von $E(\lambda_0)$; wenn $\lambda_0 < \mu_0$ ist, so können wir $\lambda_1 = \mu_0$ wählen, so daß $E(\lambda_0)$ Teil von $F(\mu_0) = F(\lambda_1)$ ist (weil es alle $F(\lambda_1), F(\lambda_2), \ldots$ sind). Also: $F(\lambda)$ Teil von $E(\lambda)$, für $\lambda < \mu$ $E(\lambda)$ Teil von $F(\mu)$, daher für $\lambda \leqq \mu$ $E(\lambda)$ Teil von $E(\mu)$.

Sei nun $\lambda > \lambda_0$, $\lambda \to \lambda_0$. $E(\lambda) - E(\lambda_0)$ ist Teil von $F(\lambda) - E(\lambda_0)$, also $|E(\lambda) f - E(\lambda_0) f| \leqq |F(\lambda) f - E(\lambda_0) f|$, und da letzteres (nach Definition von $E(\lambda_0)$) gegen 0 strebt, muß $E(\lambda) f \to E(\lambda_0) f$. Die $E(\lambda)$ erfüllen also β) und auch α) bis auf $E(0) = 0$, $E(1) = 1$. Wir erzwingen dies durch Definition — dann geht β) für $\lambda = 0$ eventuell verloren — das alte $E(0)$ heiße $\overline{E}$.

Für $F(\lambda)$ hatten wir die Relation

$$(Uf, f) = \int_0^1 e^{2\pi i \cdot \lambda} d\,|F(\lambda) f|^2.$$

Da $|F(\lambda) f|^2$, $|E(\lambda) f|^2$ monoton sind (in $\lambda$) und für $\lambda < \mu$ $|F(\lambda) f|^2 \leqq |E(\lambda) f|^2 \leqq |F(\mu) f|^2$ gilt, überlegt man sich leicht, daß sie auch für $E(\lambda)$ besteht. Dies ist aber die Schlußrelation des Satzes für $f = g$. Wenn man $\frac{f+g}{2}$ und $\frac{f-g}{2}$ einsetzt und subtrahiert, so erhält man ihren Realteil für beliebige $f, g$, ersetzt man $f, g$ durch $if, g$, dann entsteht der Imaginärteil.

Es bleibt noch die Verletzung β) für $\lambda = 0$ zu beheben, dies gelingt, indem man für $0 < \lambda < 1$ $E(\lambda)$ durch $E(\lambda) - \overline{E}$ ersetzt — dann bleibt alles andere beim alten und dieser Punkt kommt in Ordnung.

7. Der Satz $12^*$ war die Hauptschwierigkeit, nun folgen einige leichte Eindeutigkeitssätze.

Satz $13^*$. *Wenn die P. O. $E(\lambda)$ den Bedingungen $\alpha$), $\beta$) von Satz $12^*$ entsprechend gewählt werden, so gibt es genau einen unitären Operator $U$, der zu ihnen im Verhältnis von Satz $12^*$ steht.*

Beweis. Daß es höchstens ein solches $U$ gibt, ist klar: Satz $12^*$ legt alle $(Uf, g)$, also alle $Uf$ fest. Bleibt die Existenz zu beweisen.

Durch dieselben Überlegungen, wie sie beim Beweise von Satz 36 angestellt wurden, gelingt (wegen $|e^{2\pi i\cdot\lambda}| = 1$) die Abschätzung

$$\left|\int_0^1 e^{2\pi i\cdot\lambda}\, d(E(\lambda) f, g)\right| \leqq |f|\,|g|.$$

Nennen wir das Integral links $L(g)$ ($f$ fest, $g$ variabel), so ist

$$L(a_1 g_1 + \dots + a_n g_n) = \bar{a}_1 L(g_1) + \dots + \bar{a}_n L(g_n),$$
$$|L(g)| \leqq |f|\,|g| = C\cdot|g|,$$

der F. Rieszsche Satz ist anwendbar (vgl. Anm. [52])): Es gibt genau ein $f^*$ mit $L(g) = (f^*, g)$. Wir definieren $U$ durch $Uf = f^*$, es ist offenbar ein überall sinnvoller lin. O. — wir müssen nur noch die Unitarität von $U$ beweisen.

Zunächst ist $|(Uf, g)| \leqq |f|\,|g|$, also $U$ beschränkt; wir bilden $U^*$, und haben:

$$(Uf, g) = \int_0^1 e^{2\pi i\lambda}\, d(E(\lambda) f, g), \qquad (U^* f, g) = \int_0^1 e^{-2\pi i\lambda}\, d(E(\lambda) f, g)$$

(die erste Gleichung ist Definition, die zweite entsteht durch Vertauschen von $f, g$ und Nehmen der komplex-Konjugierten). Genau wie am Ende von § 4 berechnet man auf Grund dieser Formeln $(Uf, Ug) = (f, g)$, $(U^* f, U^* g) = (f, g)$. Daraus folgt $(U^* U f, g) = (UU^* f, g) = (f, g)$ für alle $f, g$, also $U^* U = UU^* = 1$ — also die Unitarität.

Satz $14^*$. *Zu einem gegebenen unitären Operator $U$ kann nur eine Schar $E(\lambda)$ von P. O. im Verhältnisse des Satzes $12^*$ stehen.*

Beweis. Die Formel

$$(U^n f, g) = \int_0^1 e^{2n\pi i\lambda}\, d(E(\lambda) f, g)$$

ist für $n = 0$ trivial, für $n = 1$ Definition, für $n = -1$ Folge von $U^{-1} = U^*$. Wenn sie für $m, n$ bewiesen ist, so gilt sie auch für $m - n$: denn mit der Methode vom Schlusse von § 4 ergibt sich

$$(U^m f, U^n g) = \int_0^1 e^{2(m-n)\pi i\lambda}\, d(E(\lambda) f, g),$$

und es ist

$$(U^m f, U^n g) = ((U^n)^* U^m f, g) = (U^{*n} U^m f, g) = (U^{-n} U^m f, g) = (U^{m-n} f, g).$$

Daher gilt sie für alle $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Wenn $F(\lambda)$ eine zweite Schar von P. O. mit denselben Eigenschaften ist, so gilt die obige Gleichung auch mit $F(\lambda)$ an Stelle von $E(\lambda)$. Also gilt

$$\int_0^1 p(\lambda)\, d((E(\lambda) f, g) - (F(\lambda) f, g)) = 0$$

zunächst für alle $p(\lambda) = e^{2n\pi i\lambda}$, und dann auch für ihre Linearaggregate, die trigonometrischen Polynome. Aus Stetigkeitsgründen gilt es aber auch für alle stetigen Funktionen $p(\lambda)$ mit $p(0) = p(1)$. Wegen der Bedingung $\beta)$ in Satz 12* gilt sie sogar noch für solche $p(\lambda)$, die endlich viele Sprünge aufweisen — vorausgesetzt, daß die Unstetigkeit stets rechts von der Sprungstelle liegt. Wir setzen nun

$$p(\lambda) = \begin{cases} 1, & \text{für } 0 < \lambda \leqq \lambda_0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases},$$

$(0 \leqq \lambda_0 < 1)$, dann haben wir

$$\int_0^{\lambda_0} d((E(\lambda) f, g) - (F(\lambda) f, g)) = (E(\lambda_0) f, g) - (F(\lambda_0) f, g) = 0;$$

da dies für alle $f, g$ gilt, ist somit $E(\lambda_0) = F(\lambda_0)$. (Dabei muß $\lambda_0 \neq 1$ sein, für $\lambda_0 = 1$ ist es aber wegen $\alpha)$ in Satz 12* der Fall.)

8. Wir haben durch Satz 12*, 13*, 14* gezeigt: die von Satz 12* gegebene Zuordnung eines unitären Operators $U$ zu einer Schar von P. O. $E(\lambda)$ mit den dortigen Eigenschaften $\alpha), \beta)$ ist ein-eindeutig, und alle $U$ und alle $E(\lambda)$ werden dadurch erschöpft. Zur Z. d. E. fehlt diesen $E(\lambda)$ noch die Eigenschaft $E(\lambda) f \to f$ für $\lambda < 1, \lambda \to 1$ (vgl. Def. 17), wir haben daher alles in Kap. IX Angekündigte bewiesen, wenn wir noch zeigen, daß gerade diese Eigenschaft damit gleichbedeutend ist, daß $\varphi = U\varphi$ nur für $\varphi = 0$ stattfindet.

Sei zuerst $\varphi = U\varphi$, $\varphi \neq 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}\Re((\varphi, \varphi) - (U\varphi, \varphi)) &= \Re \int_0^1 (1 - e^{2\pi i \cdot \lambda})\, d(E(\lambda)\varphi, \varphi) \\ &= \int_0^1 2 \sin^2 \pi\lambda\, d|E(\lambda)\varphi|^2.\end{aligned}$$

Dies muß verschwinden, und ist

$$\begin{aligned}&\geqq \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} 2 \sin^2 \pi\lambda\, d|E(\lambda)\varphi|^2 \geqq 2 \sin^2 \pi\varepsilon \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} d|E(\lambda)\varphi|^2 \\ &= 2 \sin^2 \pi\varepsilon\, (|E(1-\varepsilon)\varphi|^2 - |E(\varepsilon)\varphi|^2)\end{aligned}$$

(für alle $\varepsilon > 0$). Für $\varepsilon \leqq \frac{1}{2}$ ist die rechte Seite gewiß $\geqq 0$, also $= 0$:

$$|E(1-\varepsilon)\varphi| = |E(\varepsilon)\varphi|.$$

Da die rechte Seite mit $\varepsilon \to 0$ gegen 0 strebt, gilt dasselbe von der linken: $E(1-\varepsilon)\varphi \to 0 \neq \varphi$.

Sei umgekehrt für $\lambda < 1$, $\lambda \to 1$ nicht $E(\lambda) f \to f$. Nach Satz 19 existiert ein P.O. $E$, so daß für alle $g$ $E(\lambda) g \to E g$, es ist also $E f \neq f$. Für $f' = f - E f$ haben wir daher: $f' \neq 0$, $E(\lambda) f' \to E f' = 0$. Nun ist $|E(\lambda) f'|$ nie negativ, mit $\lambda$ monoton nicht fallend — da es für $\lambda \to 1$ gegen 0 strebt, muß es stets $= 0$ sein. Also ist $E(\lambda) f' = 0$ für alle $\lambda < 1$, und natürlich $E(1) f' = f'$. Hieraus folgt

$$(U f', g) = \int_0^1 e^{2\pi i \cdot \lambda}\, d(E(\lambda) f', g) = (f', g),$$

dies gilt für alle $g$, also ist $U f' = f'$.

Damit ist alles bewiesen.

## Anhang III. Operatoren und Matrizen.

1. Es ist wohl erwünscht, unsere Resultate über H. O. in die übliche Terminologie der Matrizen zu übersetzen. Es wird sich zeigen, daß im Unbeschränkten die der Operatoren bedeutend praktischer ist. (Im Beschränkten kommt beides, nach Hilberts Resultaten, aufs selbe heraus.) Im übrigen werden wir erkennen, daß die abg. lin. H. O. und die Hermiteschen Matrizen mit lauter endlichen (aber nicht notwendig beschränkten!) Zeilen-Absolutwertquadratsummen — die sogenannten „quadrierbaren Matrizen" — einander zugeordnet werden können.

Die genauere Theorie dieser Matrizen soll in der in Anm.[22]) angekündigten Arbeit ausgeführt werden, hier soll nur soviel gegeben werden, als zur Orientierung nötig ist, und was wir für die Zwecke von Anhang IV brauchen.

Eine Matrix $A = \{a_{\mu\nu}\}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots)$ heiße Hermitesch quadrierbar (kurz: H. quadr.), wenn $a_{\mu\nu} = \overline{a_{\nu\mu}}$ gilt, und alle $\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_{\mu\nu}|^2$ $(\mu = 1, 2, \ldots)$ endlich sind[74]). Wenn $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ ein vollst. norm. orth. System ist, so bilden wir einen Operator $R$, der für die $\varphi_\mu$ (und nur diese) Sinn hat, und zwar $R\varphi_\mu = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\mu\nu}\varphi_\nu$ (die Reihe konvergiert). Die von den $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ aufgespannte abg. lin. M. ist $\mathfrak{H}$, und es ist

$$(\varphi_\mu, R\varphi_\nu) = \overline{a_{\nu\mu}} = a_{\mu\nu} = (R\varphi_\mu, \varphi_\nu),$$

[74]) Dann sind auch alle $\sum_{\varrho=1}^{\infty} a_{\mu\varrho}\overline{a_{\nu\varrho}}$ absolut konvergent, d. h. die Matrix $A^2$ kann gebildet werden.

d. h. $R$ ist ein H. O. Wir nennen $R$ den elementaren H. O. von $A, \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$; und $\hat{R}$, $\tilde{R}$ den lin. bzw. abg. lin. H. O. von $A, \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$. — $\hat{R} f$ hat offenbar für die $\sum_{\mu=1}^{n} x_\mu \varphi_\mu$ Sinn (und nur für diese), und es ist

$$\hat{R} f = \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu \left( \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\mu\nu} \varphi_\nu \right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[ \sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\mu \right] \varphi_\nu .$$

$\tilde{R}$ ist nicht so leicht direkt zu charakterisieren, wohl aber seine Erweiterungselemente. Damit $f$ eines sei, und zwar das $f^*$ ihm zugeordnet, muß

$$(f^*, \varphi_\nu) = (f, R\varphi_\nu) = \sum_{\mu=1}^{\infty} (f, \varphi_\mu)(\varphi_\mu, R\varphi_\nu) = \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\mu\nu}(f, \varphi_\mu) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots)$$

sein ($R$ und $\tilde{R}$ haben ja dieselben Erweiterungselemente). Wir schreiben

$$(f, \varphi_\mu) = x_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots), \qquad f = \sum_{\mu=1}^{\infty} x_\mu \varphi_\mu ,$$

dann existiert ein $f^*$ mit $(f^*, \varphi_\nu) = \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\mu\nu} x_\mu$ offenbar dann und nur dann, wenn $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\mu\nu} x_\mu \right|^2$ endlich ist, und zwar ist es dann gleich $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left( \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\mu\nu} x_\mu \right) \varphi_\nu$. Wir haben also: $f = \sum_{\mu=1}^{\infty} x_\mu \varphi_\mu \left( \sum_{\mu=1}^{\infty} |x_\mu|^2 \text{ endlich} \right)$ ist dann und nur dann Erweiterungselement, wenn für die

$$y_\nu = \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\mu\nu} x_\mu \text{ [75]}$$

$\sum_{\mu=1}^{\infty} |y_\mu|^2$ endlich ist, und zwar ist dann $f^* = \sum_{\mu=1}^{\infty} y_\mu \varphi_\mu$. (Wenn sogar $\tilde{R} f$ Sinn hat, ist es erst recht dieses.)

Weiter ist

$$(f^*, f) = \sum_{\nu=1}^{\infty} y_\nu \bar{x}_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left( \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\mu\nu} x_\mu \right) \bar{x}_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left( \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\mu\nu} x_\mu \bar{x}_\nu \right),$$

$$(f, f^*) = \sum_{\mu=1}^{\infty} x_\mu \bar{y}_\mu = \sum_{\mu=1}^{\infty} x_\mu \left( \sum_{\nu=1}^{\infty} \bar{a}_{\nu\mu} \bar{x}_\nu \right) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \left( \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\mu\nu} x_\mu \bar{x}_\nu \right).$$

Die 0-Klasse ist also durch die Vertauschbarkeit von $\sum_{\mu=1}^{\infty}, \sum_{\nu=1}^{\infty}$ gekennzeichnet!

2. Wir zeigen nun, daß zu jedem abg. lin. H. O. $R$ eine H. quadr. Matrix $A = \{a_{\mu\nu}\}$ und ein vollst. norm. orth. System $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ existiert, so daß $R$ der abg. lin. H. O. von $A, \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ ist. Es genügt $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ anzugeben, $A$ ist ja durch $a_{\mu\nu} = (R\varphi_\mu, \varphi_\nu)$ festgelegt, und wenn die $R\varphi_1, R\varphi_2, \ldots$ alle Sinn haben, ist $A$ H. quadr.: $a_{\mu\nu} = \overline{a_{\mu\nu}}$ ist klar, und $\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_{\mu\nu}|^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} |(R\varphi_\mu, \varphi_\nu)|^2 = |R\varphi_\mu|^2$ ist endlich.

---

[75]) $\sum_{\mu=1}^{\infty} |a_{\mu\nu}|^2$, $\sum_{\mu=1}^{\infty} |x_\mu|^2$ sind endlich, also konvergieren die $\sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\mu\nu} x_\mu$ jedenfalls absolut!

Sei $S$ der elementare Operator von $A, \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$, dann ist

$$S\varphi_\mu = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\mu\nu}\varphi_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty}(R\varphi_\mu, \varphi_\nu)\cdot\varphi_\nu = R\varphi_\mu;$$

d. h. $S$ ist das auf die $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ eingeschränkte $R$. Das, was wir durch geeignete Wahl der $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ erreichen sollen, ist also $\tilde{S} = R$, d. h.: Daß zu jedem $f$ mit sinnvollem $Rf$ eine Folge von Linearaggregaten je endlichvieler $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ existiere, $f_1, f_2, \ldots$, so daß $f_n \to f$, $Rf_n \to Rf$ (natürlich müssen alle $R\varphi_n$ sinnvoll sein). Dies ist erreicht, wenn wir eine Folge $g_1, g_2, \ldots$ mit lauter sinnvollen $Rg_1, Rg_2, \ldots$ haben, derart, daß zu jedem $f$ mit sinnvollem $Rf$ eine Teilfolge $g_{N_1}, g_{N_2}, \ldots$ mit $g_{N_n} \to f$, $Rg_{N_n} \to Rf$ existiert (diese ist dann von selbst überall dicht): Dann genügt es, $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots$ nach Satz 8 zu $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ zu „orthogonalisieren".

Eine solche Folge $g_1, g_2, \ldots$ finden wir so: Sei $h_1, h_2, \ldots$ überall dicht, aber sonst beliebig. Zu jedem Zahlentripel $m, n, k$ $(=1, 2, \ldots)$ zu dem es ein $f$ mit sinnvollem $Rf$ und $|h_m - f| \leqq \frac{1}{k}$, $|h_n - Rf| \leqq \frac{1}{k}$ gibt, ordnen wir ein solches $f$ zu: $f_{m,n,k}$. Diese $f_{m,n,k}$ leisten (als Folge geschrieben) alles Gewünschte. Denn sei $f, Rf$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen ein $k$ mit $\frac{2}{k} \leqq \varepsilon$ und $h_m$ und $h_n$ mit $|h_n - f| \leqq \frac{1}{k}$, $|h_m - Rf| \leqq \frac{1}{k}$. Dann ist $f_{m,n,k}$ gewiß definiert, und $|h_m - f_{m,n,k}| \leqq \frac{1}{k}$, $|h_n - Rf_{m,n,k}| \leqq \frac{1}{k}$, also $|f - f_{m,n,k}| \leqq \varepsilon$, $|Rf - Rf_{m,n,k}| \leqq \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, sind wir am Ziele.

3. Zu gegebenem $R$ kann es auch mehrere $A, \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ geben, deren abg. lin. H. O. dieses $R$ ist. Seien etwa $A = \{a_{\mu\nu}\}, \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ und $B = \{b_{\mu\nu}\}, \{\psi_1, \psi_2, \ldots\}$ derart. (Sowohl $A$ wie $B$ sollen H. quadr. sein!) Die beiden vollst. norm. orth. Systeme $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \psi_1, \psi_2, \ldots$ bestimmen eine unitäre unendliche Matrix $\{u_{\mu\nu}\}$ mit $u_{\mu\nu} = (\varphi_\mu, \psi_\nu)$. In der Tat ist:

$$(\mathrm{U}_1)\quad \begin{aligned} \sum_{\varrho=1}^{\infty} u_{\mu\varrho}\overline{u_{\nu\varrho}} &= \sum_{\varrho=1}^{\infty}(\varphi_\mu, \psi_\varrho)(\psi_\varrho, \varphi_\nu) = (\varphi_\mu, \varphi_\nu) = \begin{cases} 1, & \text{für } \mu = \nu, \\ 0, & \text{für } \mu \neq \nu, \end{cases} \\ \sum_{\varrho=1}^{\infty} u_{\varrho\mu}\overline{u_{\varrho\nu}} &= \sum_{\varrho=1}^{\infty}(\psi_\nu, \varphi_\varrho)(\varphi_\varrho, \psi_\mu) = (\psi_\nu, \psi_\mu) = \begin{cases} 1, & \text{für } \mu = \nu, \\ 0, & \text{für } \mu \neq \nu. \end{cases} \end{aligned}$$

Und weiter:

$$(\mathrm{U}_2)\quad \varphi_\mu = \sum_{\nu=1}^{\infty}(\varphi_\mu, \psi_\nu)\cdot\psi_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} u_{\mu\nu}\cdot\psi_\nu,\ \psi_\mu = \sum_{\nu=1}^{\infty}(\psi_\mu, \varphi_\nu)\cdot\varphi_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty}\overline{u_{\nu\mu}}\cdot\varphi_\nu.$$

Auch für $a_{\mu\nu}$, $b_{\mu\nu}$ gelten die gewohnten Transformationsformeln:

$$\begin{aligned} a_{\mu\nu} = (\varphi_\mu, R\varphi_\nu) &= \sum_{\varrho=1}^{\infty}(\varphi_\mu, \psi_\varrho)(\psi_\varrho, R\varphi_\nu) = \sum_{\varrho=1}^{\infty}(\varphi_\mu, \psi_\varrho)(R\psi_\varrho, \varphi_\nu) \\ &= \sum_{\varrho=1}^{\infty}(\varphi_\mu, \psi_\varrho)\Big[\sum_{\sigma=1}^{\infty}(R\psi_\varrho, \psi_\sigma)(\psi_\sigma, \varphi_\nu)\Big] = \sum_{\varrho=1}^{\infty}\Big(\sum_{\sigma=1}^{\infty} b_{\varrho\sigma}u_{\mu\varrho}\overline{u_{\nu\sigma}}\Big). \end{aligned}$$

Wenn wir $\mu, \nu$ (und $\varrho, \sigma$) vertauschen und die komplex-Konjugierten nehmen, so wird (wegen $a_{\mu\nu} = \overline{a_{\nu\mu}}$, $b_{\varrho\sigma} = \overline{b_{\sigma\varrho}}$)

(U₃) $$a_{\mu\nu} = \sum_{\varrho=1}^{\infty}\left(\sum_{\sigma=1}^{\infty} b_{\varrho\sigma} u_{\mu\varrho} \overline{u_{\nu\sigma}}\right) = \sum_{\sigma=1}^{\infty}\left(\sum_{\varrho=1}^{\infty} b_{\varrho\sigma} u_{\mu\varrho} \overline{u_{\nu\sigma}}\right).$$

Ebenso erhalten wir die Umkehrungen:

(U₄) $$b_{\mu\nu} = \sum_{\varrho=1}^{\infty}\left(\sum_{\sigma=1}^{\infty} a_{\varrho\sigma} \overline{u_{\varrho\mu}} u_{\sigma\nu}\right) = \sum_{\sigma=1}^{\infty}\left(\sum_{\varrho=1}^{\infty} b_{\varrho\sigma} \overline{u_{\varrho\mu}} u_{\sigma\nu}\right).$$

Bis hierher gilt also die gewöhnliche unitäre Transformationstheorie der Hermiteschen Matrizen, aber nicht weiter! Denn wenn wir eine H. quadr. Matrix $A = \{a_{\mu\nu}\}$ und ein vollst. norm. orth. System $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ haben, und irgendeine unitäre Transformationsmatrix $\{u_{\mu\nu}\}$ (nach (U₁)) darauf anzuwenden versuchen (nach (U₂), (U₃), (U₄)), so braucht zunächst nichts zu konvergieren. Aber auch wenn die in (U₃), (U₄) angegebenen Konvergenzen alle stattfinden, so kann sich der abg. lin. H. O. von $A_1\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ bei der Transformation ändern. Wir gehen auf diese Verhältnisse hier nicht näher ein, da sie an anderem Orte (vgl. Anm. [22])) genau diskutiert werden sollen.

4. Es sei noch erwähnt, wie sich die abg. lin. M. $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ die zum abg. lin. H. O. $\tilde{R}$ von $A$, $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ gehören ($R$ sei sein elementarer H. O.) bestimmen lassen (vgl. Satz 22). $\mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{F}$ ist die Menge aller $(\tilde{R} \pm i\,1)f$. Aus der abg. von $\tilde{R}$ und den in Satz 22 auseinandergesetzten Eigenschaften von $\tilde{R} \pm i\,1$ folgert man leicht, daß dies die Menge der Häufungspunkte von $(\hat{R} \pm i\,1)f$ ist[76]). Dies aber ist die von den $(R \pm i\,1)f$, d. h. von den $(R \pm i\,1)\varphi_\mu$, aufgespannte lin. M.; also ist $\mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{F}$ die von den $(R \pm i\,1)\varphi_\mu$ aufgespannte abg. lin. M., d. h. von den $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\mu\nu}\varphi_\nu \pm i\,\varphi_\mu$.

## Anhang IV. Der Operator $\overline{R}$.

1. $\overline{R}$ und seine Cayleysche Transformierte $\overline{U}$ wurden in Kap. X (Satz 37) folgendermaßen definiert: Sei $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ ein vollst. norm. orth. System, dann ist

$$\overline{U}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} x_\nu \varphi_\nu\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} x_\nu \varphi_{\nu+1} \qquad \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} |x_\nu|^2 \text{ endlich}\right);$$

d. h. $\overline{R}f$ hat Sinn für alle $f = \varphi - \overline{U}\varphi = x_0\varphi_0 + (x_1 - x_0)\varphi_1 + (x_2 - x_1)\varphi_2 + \cdots$, und dann ist $\overline{R}f = i(\varphi + \overline{U}\varphi) = i\,x_0\varphi_0 + i(x_0 + x_1)\varphi_1 + i(x_1 + x_2)\varphi_2 + \cdots$. Oder auch: $\overline{R}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} y_\nu \varphi_\nu\right)$ hat Sinn, wenn $|y_0|^2 + |y_0 + y_1|^2 + |y_0 + y_1 + y_2|^2 + \cdots$

---

[76]) Denn wenn eine Folge $(\tilde{R} \pm i\,1)f$ konvergiert, so konvergiert auch $U^{\pm 1}(\tilde{R} \pm i\,1)f = (\tilde{R} \mp i\,1)f$, also $f$ und $\tilde{R}f$ — und natürlich auch umgekehrt: Wenn $f, \tilde{R}f$ konvergieren, konvergiert $(\tilde{R} \pm i\,1)f$.

konvergiert (es muß ja $x_0 = y_0$, $x_1 = y_0 + y_1$, $x_2 = y_0 + y_1 + y_2, \ldots$ sein), und zwar ist es dann gleich $i y_0 \varphi_0 + (2 i y_0 + i y_1)\varphi_1 + (2 i y_0 + 2 i y_1 + i y_2)\varphi_2 + \ldots$. Wir haben hier eine Art Matrix von $\bar{R}$ gewonnen:

$$a_{\mu\nu} = \begin{cases} 0, & \text{für } \mu > \nu, \\ i, & \text{für } \mu = \nu, \\ 2i, & \text{für } \mu < \nu. \end{cases}$$

Freilich ist sie es nicht im Sinne von Anhang III: Sie ist weder H. noch quadr., was kein Wunder ist, da die $\bar{R}\varphi_\mu$, $\mu = 0, 1, 2, \ldots$, alle sinnlos sind.

Um eine richtige Matrix von $\bar{R}$ angeben zu können, müssen wir vor allem ein vollst. norm. orth. System $\psi_1, \psi_2, \ldots$ finden, für welches alle $\bar{R}\psi_\mu$, $\mu = 1, 2, \ldots$, Sinn haben.

Wir setzen:

$$\omega_{m,k} = \varphi_{m\cdot 2^{k+1}} + \varphi_{m\cdot 2^{k+1}+1} + \cdots + \varphi_{(2m+1)\cdot 2^k - 1} - \varphi_{(2m+1)\cdot 2^k}$$
$$- \varphi_{(2m+1)\cdot 2^k+1} - \cdots - \varphi_{(m+1)\cdot 2^{k+1}-1} \quad (m, k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Nach unserem Kriterium ist $\bar{R}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} x_\nu \varphi_\nu\right)$ gewiß sinnvoll, wenn nur endlich viele $x_\nu \neq 0$ sind und $\sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu = 0$ ist — dies ist aber hier der Fall. $(\omega_{m,k}, \omega_{n,l}) = 0$ gilt sicher, wenn $\omega_{m,k}, \omega_{n,l}$ kein gemeinsames $\varphi_\nu$-Glied haben, und auch wenn alle $\varphi_\nu$ des einen im anderen vorkommen, und zwar alle mit dem Koeffizienten $+1$, oder alle mit $-1$. Dies ist aber immer der Fall, außer für $m = n, k = l$, dagegen ist $|\omega_{m,k}|^2$ offenbar $= 2^{k+1}$. Die $\psi_{m,k} = 2^{-\frac{1}{2}(k+1)}\omega_{m,k}$ bilden also ein norm. orth. System, und alle $\bar{R}\psi_{m,k}$ sind sinnvoll. Aber dieses System ist auch vollst., denn sei $f = \sum_{\nu=0}^{\infty} x_\nu \varphi_\nu$ zu allen $\psi_{m,k}$, d. h. zu allen $\omega_{m,k}$ orth. Das bedeutet:

$$x_{m\cdot 2^{k+1}} + x_{m\cdot 2^{k+1}+1} + \cdots + x_{(2m+1)\cdot 2^k-1} - x_{(2m+1)\cdot 2^k} - x_{(2m+1)\cdot 2^k-1} - \cdots$$
$$- x_{(m+1)\cdot 2^{k+1}-1} = 0.$$

Also: $x_0 - x_1 = 0$, $x_3 - x_2 = 0$, $x_5 - x_4 = 0$, $x_7 - x_6 = 0, \ldots$, d. h. $x_0 = x_1$, $x_2 = x_3$, $x_4 = x_5$, $x_6 = x_7, \ldots$ Weiter: $x_0 + x_1 - x_2 - x_3 = 0$, $x_4 + x_5 - x_6 - x_7 = 0, \ldots$, d. h. $2x_0 = 2x_2$, $2x_4 = 2x_6, \ldots$, d. h. $x_0 = x_1 = x_2 = x_3$, $x_4 = x_5 = x_6 = x_7, \ldots$ Weiter: $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6 - x_7 = 0$, d. h. $4x_0 = 4x_4, \ldots$, d. h. $x_0 = x_1 = \ldots = x_7, \ldots$. Somit gilt überhaupt $x_0 = x_1 = x_2 = \ldots$, und $\sum_{\nu=0}^{\infty} |x_\nu|^2$ kann nur endlich sein, wenn alle $= 0$ sind: also $f = 0$. Damit ist die Vollst. bewiesen.

2. Wenn wir nun die Matrix $\{b_{mk/nl}\}$ durch

$$b_{mk/nl} = (\psi_{m,k}, \bar{R}\psi_{n,l}) = 2^{-\frac{1}{2}(k+l)-1}(\omega_{m,k}, \bar{R}\omega_{n,l})$$

definieren, so ist sie jedenfalls H. quadr. und ihr elementarer H. O., $S$, ist das auf die $\psi_{m,k}$ eingeschränkte $\bar{R}$. Also ist $\bar{R}$ Forts. von $S$, und (weil es abg. lin. ist) von $\tilde{S}$. Wenn $\tilde{S}$ max. ist, so muß $\bar{R}=\tilde{S}$ sein, d. h. der abg. lin. H. O. von $\{b_{mk/nl}\}$, $\{\psi_{mk}\}$.

Wir beweisen dies, indem wir zeigen: das $\mathfrak{E}$ von $\tilde{S}$ ist $=\mathfrak{H}$, d. h. (vgl § 4 von Anhang III) die $\bar{R}\psi_{m,k}+i\psi_{m,k}$, oder auch die $\bar{R}\omega_{m,k}+i\omega_{m,k}$, spannen die abg. lin. M. $\mathfrak{H}$ auf. Oder: wenn $f=\sum_{\nu=0}^{\infty} x_\nu \varphi_\nu$ zu allen $\bar{R}\omega_{m,k}+i\omega_{m,k}$ orth. ist, so ist $f=0$. Nach § 1 können wir ja ausrechnen:

$$\begin{aligned}\bar{R}\omega_{m,k} = {} & i\varphi_{m\cdot 2^{k+1}}+3i\varphi_{m\cdot 2^{k+1}+1}+\dots+(2^{k+1}-1)\,i\varphi_{(2m+1)\cdot 2^k-1}\\ & +(2^{k+1}-1)\,i\varphi_{(2m+1)\cdot 2^k}+(2^{k+1}-3)\,i\varphi_{(2m+1)\cdot 2^k+1}+\dots\\ & +3i\varphi_{(m+1)\cdot 2^{k+1}-2}+i\varphi_{(m+1)\cdot 2^{k+1}-1},\\ \bar{R}\omega_{m,k}+i\omega_{m,k} = {} & 2i\varphi_{m\cdot 2^{k+1}}+4i\varphi_{m\cdot 2^{k+1}+1}+\dots+2^{k+1}i\varphi_{(2m+1)\cdot 2^k-1}\\ & +(2^{k+1}-2)\,i\varphi_{(2m+1)\cdot 2^k}+(2^{k+1}-4)\,i\varphi_{(2m+1)\cdot 2^k+1}+\dots\\ & +2i\varphi_{(m+1)\cdot 2^{k+1}-2}.\end{aligned}$$

Daß $f$ zu diesen orth. ist, bedeutet

$$2i\,x_{m\cdot 2^{k+1}}+4i\,x_{m\cdot 2^{k+1}+1}+\dots+2^{k+1}i\,x_{(2m+1)\cdot 2^k-1}+\dots+2i\,x_{(m+1)\cdot 2^{k+1}-2}=0,$$

d. h.

$$\begin{gathered}x_0=0,\ x_2=0,\ x_4=0,\dots;\ x_0+2x_1+x_2=0,\ x_4+2x_5+x_6=0,\dots;\\ x_0+2x_1+3x_2+4x_3+3x_4+2x_5+x_6=0,\dots;\ \dots,\end{gathered}$$

woraus $x_0=x_1=x_2=\dots 0$, $f=0$ folgt.

Es bleibt noch übrig, die $b_{m,k/n,l}=2^{-\frac{1}{2}(k+l)-1}(\omega_{m,k},\bar{R}\omega_{n,l})$ zu berechnen, was ohne weiteres geht, da wir $\omega_{m,k}$, $\bar{R}\omega_{n,l}$ mit den $\varphi_\nu$ ausgedrückt haben. Für $m\neq n$, $k=l$ treten keine gemeinsamen $\varphi_\nu$ auf, es kommt also 0 heraus, für $m=n$, $k=l$ überzeugt man sich direkt von dem selben. Für $k>l$ und $n$ außerhalb des Intervalles $m\cdot 2^{k-l},\dots,(m+1)\cdot 2^{k-l}-1$ fehlen wieder die gemeinsamen $\varphi_\nu$, also 0; liegt $n$ im genannten Intervalle, so ist es $=m\cdot 2^{k-l}+\varrho$ oder $=(m+1)\cdot 2^{k-l}-\varrho-1$ $(\varrho=0,1,\dots,2^{k-l-1}-1)$, und dann berechnet man:

$$(\omega_{m,k},\bar{R}\omega_{n,l})=\begin{cases}\displaystyle\sum_{\varrho\cdot 2^{l+1}}^{(2\varrho+1)\cdot 2^l-1}{}^{\alpha}-i(2\alpha+1)-\sum_{(2\varrho+1)\cdot 2^l}^{(\varrho+1)\cdot 2^{l+1}-1}{}^{\alpha}-i(2\alpha+1)\\ \qquad =-i\cdot 2^l\cdot(-2\cdot 2^l)=i\cdot 2^{2l+1},\ \text{bzw.}\\ \displaystyle\sum_{(2\varrho+1)\cdot 2^l}^{(\varrho+1)\cdot 2^l-1}{}^{\alpha}-i(2\alpha+1)-\sum_{\varrho\cdot 2^{l+1}}^{(2\varrho+1)\cdot 2^l-1}{}^{\alpha}-i(2\alpha+1)\\ \qquad =-i\cdot 2^l\cdot 2\cdot 2^l=-i\cdot 2^{2l+1}.\end{cases}$$

Für $k < l$ muß es (weil $b_{mk/nl}$ Hermitesch ist) nach Vertauschen vom $m, n$ (und $k, l$) entsprechend $0, -i\cdot 2^{2k+1}, i\cdot 2^{2k+1}$ sein. Und den $0, \pm i\cdot 2^{2k+1}, \pm i\cdot 2^{2l+1}$ entspricht bei $b_{mk/nl}$ $0, \pm i\cdot 2^{\frac{1}{2}(3k-l)}, \pm i\cdot 2^{\frac{1}{2}(3l-k)}$.

Wir führen nun die Indizierung $m, k$ $(= 0, 1, 2, \ldots)$ auf eine mit $p$ $(= 1, 2, \ldots)$ zurück, durch $p = (2m+1)\cdot 2^k$. Dann wird, wie man sich leicht überlegt:

Satz 1**. *Im oben beschriebenen vollst. norm. orth. System $\psi_1, \psi_2, \ldots$ gibt es eine H. quadr. Matrix $B = \{b_{pq}\}$, so daß $\bar{R}$ der abg. lin. H. O. von $B$, $\{\psi_1, \psi_2, \ldots\}$ ist. Die $b_{pq}$ $(p, q = 1, 2, \ldots)$ sind so definiert:*

*Wir teilen die Zahlenreihe folgendermaßen ein: Das Intervall $m\cdot 2^{k+1}+1, \ldots, (m+1)\cdot 2^{k+1}$ ist eine Zelle, $m\cdot 2^{k+1}+1, \ldots, (2m+1)\cdot 2^k$ und $(2m+1)\cdot 2^k+1, \ldots, (m+1)\cdot 2^{k+1}$ ihre erste bzw. zweite Hälfte, $(2m+1)\cdot 2^k$ ihre Mitte, $k$ ihr Grad. Jede Zahl $p = 1, 2, \ldots$ ist dann Mitte einer einzigen Zelle, ihrer Zelle.*

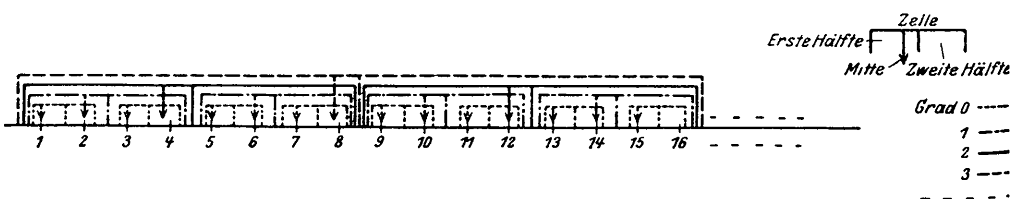
*Es ist:*

$$b_{pq}\begin{cases} = \quad 0 & \text{wenn von den Zellen von } p, q \text{ keine echter Teil der anderen ist.} \\ = \pm i\cdot 2^{\frac{1}{2}(3k-l)} & \text{wenn das der Fall ist, und } k, l \text{ der Grad der kleineren bzw. größeren Zelle ist.} \end{cases}$$

*Das Vorzeichen $\pm$ bestimmt sich so:*

| | *sie liegt in der ersten Hälfte* | *sie liegt in der zweiten Hälfte* |
|---|---|---|
| *$p$-s Zelle ist kleiner* | $-$ | $+$ |
| *$q$-s Zelle ist kleiner* | $+$ | $-$ |

(Man beachte: $B$ ist $i$-mal eine schiefsymmetrische Matrix.)




3. Eine bessere Übersicht gewinnen wir über $\bar{R}$, wenn wir es in Funktionenräumen realisieren. So sei $\Omega$ das Intervall $0, 1$, wir bilden seinen Funktionenraum: die Menge aller (nach Lebesgue meßbaren) Funktionen $f(x)$ des Intervalles $0 < x < 1$, mit endlichem $\int_0^1 |f(x)|^2 dx$ — nach Anhang I ist dies ein Hilbertscher Raum, isomorph $\mathfrak{H}$. Er heiße $\mathfrak{H}^*$.

Die $e^{2n\pi i\cdot x}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ bilden bekanntlich ein vollst. norm. orth. System in $\mathfrak{H}^*$. Sei $\mathfrak{J}$ die von den $e^{2n\pi i\cdot x}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ aufgespannte abg. lin. M., $\mathfrak{J}$ ist unendlichvieldimensional, also ebenfalls ein Hilbertscher Raum (in diesem $\mathfrak{J}$ wollen wir $\bar{R}$ realisieren).

$$Uf(x) = e^{2\pi i\cdot x} f(x)$$

ist ein längentreuer (ja unitärer) Operator in $\mathfrak{H}^*$, der $\mathfrak{J}$ auf ein Teil von sich selbst abbildet. Wenn wir $\varphi_\nu(x) = e^{2\nu\pi i\cdot x}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ setzen so sind die $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ ein vollst. norm. orth. System in $\mathfrak{J}$, und es ist $U\varphi_\nu = \varphi_{\nu+1}$; d. h. in $\mathfrak{J}$ stimmt $U$ mit $\bar{U}$ überein, und $\bar{R}$ ist seine Cayleysche Transformierte. Also: $\bar{R}f(x)$ hat Sinn ($f(x)$ aus $\mathfrak{J}$!) wenn $f(x) = \varphi(x) - U\varphi(x) = (1 - e^{2\pi i\cdot x})\varphi(x)$, $\varphi(x)$ aus $\mathfrak{J}$, ist, und zwar ist es dann $= i(\varphi(x) + U\varphi(x)) = i(1 + e^{2\pi i\cdot x})$. Oder auch: $\bar{R}f(x)$ hat Sinn, wenn $f(x)$, $\frac{f(x)}{1 - e^{2\pi i\cdot x}}$ beide zu $\mathfrak{J}$ gehören, und zwar ist es dann $= i\,\frac{1 + e^{2\pi i\cdot x}}{1 - e^{2\pi i\cdot x}} f(x) = -\operatorname{ctg}.\,\pi x\cdot f(x)$.

$f(x)$ gehöre zu $\mathfrak{J}$. Daß $\frac{f(x)}{1 - e^{2\pi i\cdot x}}$ zu $\mathfrak{J}$ gehört, bedeutet: sein Absolutwertquadratintegral ist endlich, und es ist zu allen $e^{2\pi i\cdot nx}$, $n = -1, -2, \ldots$ orth. Hieraus folgt die Endlichkeit von $\int\limits_0^1 \operatorname{ctg}^2 \pi x \; |f(x)|^2\, dx$ (weil ja $\bar{R}f(x) = -\operatorname{ctg}\pi x\; f(x)$ ist), und wir wollen zeigen, daß diese umgekehrt zur Folge hat, daß $\frac{f(x)}{1 - e^{2\pi i\cdot x}}$ zu $\mathfrak{J}$ gehört ($f(x)$ aus $\mathfrak{J}$!).

Zunächst ist wegen $\left|\frac{1}{1 - e^{2\pi i\cdot x}}\right|^2 = \left|\frac{\operatorname{ctg}\pi x + i}{2i}\right|^2 \leqq \frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 \pi x + \frac{1}{2}$ auch $\int\limits_0^1 \left|\frac{f(x)}{1 - e^{2\pi i\cdot x}}\right|^2 dx$ endlich, also alle $\int\limits_0^1 \left|\frac{f(x)}{1 - \varrho e^{2\pi i\cdot x}}\right|^2 dx$ $(0 < \varrho < 1)$ absolut gleichmäßig integrierbar. Also ist für $0 < \varrho < 1$, $\varrho \to 1$

$$\int\limits_0^1 \frac{f(x)}{1 - \varrho e^{2\pi i\cdot x}} e^{-2n\pi i\cdot x}\, dx \to \int\limits_0^1 \frac{f(x)}{1 - e^{2\pi i\cdot x}} e^{-2n\pi i\cdot x}\, dx.$$

Wir haben noch zu zeigen, daß die rechte Seite für alle $n = -1, -2, \ldots$ verschwindet, es genügt also dies für die linke (und alle $0 < \varrho < 1$!) zu beweisen. Nun ist $\frac{1}{1 - \varrho e^{2\pi i\cdot x}} = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \varrho^\nu e^{2\nu\pi i\cdot x}$, und die Reihe konvergiert gleichmäßig in $x$ ($\varrho$ fest!), daher ist

$$\sum_{\nu=0}^{N} \varrho^\nu \int\limits_0^1 f(x)\, e^{-2(n-\nu)\pi i\cdot x}\, dx = \int\limits_0^1 f(x)\left(\sum_{\nu=0}^{N} \varrho^\nu e^{2\nu\pi i\cdot x}\right) e^{-2n\pi i\cdot x}$$

$$\to \int\limits_0^1 \frac{f(x)}{1 - \varrho e^{2\pi i\cdot x}} e^{-2n\pi i\cdot x}\, dx$$

(für $N \to \infty$). Da $n = -1, 2, \ldots$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ also $n - \nu = -1, -2, \ldots$

ist und $f(x)$ selbst zu $\mathfrak{J}$ gehört, ist die linke Seite stets 0, also verschwindet auch die rechte.

Nun können wir beweisen:

Satz 2**. *$\mathfrak{H}^*$ sei der soeben beschriebene Hilbertsche Funktionenraum, $\mathfrak{J}_k^\pm$ die von allen $e^{2n\pi i\cdot x}$, $n \geqq k$ bzw. $\leqq k$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ ebenso $k)$ aufgespannte abg. lin. M. — die $\mathfrak{J}_k^\pm$ sind unendlichvieldimensional, also wieder Hilbertsche Räume.*

*$R$ sei der folgende Operator in $\mathfrak{H}^*$: wenn $f(x)$, $-\operatorname{ctg}\pi x\cdot f(x)$ zu $\mathfrak{H}^*$ gehören, $\left(d.\ h.\ \int\limits_0^1 |f(x)|^2\cdot dx,\ \int\limits_0^1 \operatorname{ctg}^2\pi x\cdot|f(x)|^2\cdot dx \text{ endlich sind}\right)$, so sei $Rf(x)$ sinnvoll, und zwar $= -\operatorname{ctg}\pi x\cdot f(x)$.*

*Wenn $f(x)$ in einem der $\mathfrak{J}_k^\pm$ liegt und $Rf(x)$ Sinn hat, so liegt auch $Rf(x)$ in diesem $\mathfrak{J}_k^\pm$; so können wir $R$ in jedem $\mathfrak{J}_k^\pm$ zu einem H. O. dortselbst einschränken* [77]). *In den $\mathfrak{J}_k^+$ erhalten wir so $\overline{R}$, in den $\mathfrak{J}_k^-$ $-\overline{R}$.*

Beweis. Für $\mathfrak{J}_0^+ = \mathfrak{J}$ haben wir dies bereits bewiesen. Die unitäre Abbildung $f(x) \Rightarrow e^{2k\pi i\cdot x}\cdot f(x)$ führt $\mathfrak{H}^*, R, \mathfrak{J}_0^+$ in $\mathfrak{H}^*, R, \mathfrak{J}_k^+$ über, die unitäre Abbildung $f(x) \Rightarrow f(1-x)$ $\mathfrak{H}^*, R, \mathfrak{J}_{-k}^+$ in $\mathfrak{H}^*, -R, \mathfrak{J}_k^-$ — also gelten die Behauptungen für alle $\mathfrak{J}_k^\pm$.

Man zeigt übrigens leicht, daß dieses $R$ in $\mathfrak{H}^*$ ein hypermax. H. O. ist.

4. Wir können jedem $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n e^{2n\pi i\cdot x}$ $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 \text{ endlich}\right)$ von $\mathfrak{J}_0^+$ [78]), die $\left(\text{wegen } \sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 \text{ endlich, also } a_n \to 0\right)$ im Einheitskreise analytische Funktion $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ zuordnen. Da

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 = \lim_{r\to 1}\sum_{n=0}^{\infty} r^n |a_n|^2 = \lim_{r\to 1}\int\limits_{|z|=r}|F(z)|^2\frac{dz}{z}$$

ist, bilden die im Einheitskreise analytischen Funktionen $F(z)$ mit beschränktem $\int\limits_{|z|=r}|F(z)|^2\frac{dz}{z}$ $(r\to 1)$ einen Hilbertschen Raum. Wegen $-\operatorname{ctg}\pi x = i\dfrac{e^{2\pi i\cdot x}+1}{e^{2\pi i\cdot x}-1}$ ist hierin $\overline{R}$ durch $\overline{R}\,F(z) = i\dfrac{z+1}{z-1}F(z)$ definiert (falls dieses wieder zur genannten Klasse gehört). — Eine andere be-

---

77) Aber dies ist noch keineswegs Reduzierbarkeit von $R$ durch $\mathfrak{J}_k^\pm$! Denn mit $Rf$ braucht ja nicht auch $RP_{\mathfrak{J}_k^\pm}f$ sinnvoll zu sein.

78) Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n e^{2n\pi i\cdot x}$ konvergiert (im Sinne der von uns stets verwendeten Metrik) „im Mittel“: $\int\limits_0^1 \left|f(x) - \sum\limits_{n=0}^{N} a_n e^{2n\pi i\cdot x}\right|^2 dx \to 0$ (für $N\to\infty$); natürlich nicht notwendig „punktweise“.

merkenswerte Realisation von $\bar{R}$ gewinnen wir, wenn wir die im Intervalle $0, \infty$ definierten Funktionen $f(x)$ $\left(\text{mit endlichem } \int_0^\infty |f(x)|^2 dx\right)$ betrachten: es entspricht dann dem Differentialoperator $i\frac{d}{dx}\ldots$ mit der Randbedingung $f(0)=0$. Wir gehen aber hierauf nicht näher ein[79]).

Es bleibt noch übrig, die bei Satz 40 benützten Eigenschaften von $\bar{R}$ zu verifizieren. Erstens: $\bar{R}$ ist nicht überall sinnvoll und nimmt nicht jeden Wert an. Wir realisieren es nach Satz 2** in $\mathfrak{H}_0^+$, da $\int_0^1 \operatorname{ctg}^2 \pi\, dx$, $\int_0^1 \operatorname{tg}^2 \pi x\, dx$ beide $=\infty$ sind, ist $\bar{R}$ für $f(x)=1$ sinnlos, und nimmt diesen Wert nie an. Zweitens: $\bar{R}$ ist weder nach oben noch nach unten halbbeschränkt. Wir realisieren es nach Satz 1** und setzen $f=\psi_{2^\nu}\pm i\psi_{2^\nu+1}$, dann ist $(f, \bar{R}f) = \mp 2^{\nu+\frac{1}{2}}$ und $|f|^2=2$ — d. h. $(f,\bar{R}f) > C\cdot|f|^2$ bzw. $< C\cdot|f|^2$ bei beliebigem $C$ erreicht, wenn $2^{\nu-\frac{1}{2}} > |C|$ gewählt wird.

---

[79]) Sie wird in der in Anm. [22]) genannten Arbeit erörtert werden.

(Eingegangen am 15. 12. 1928.)